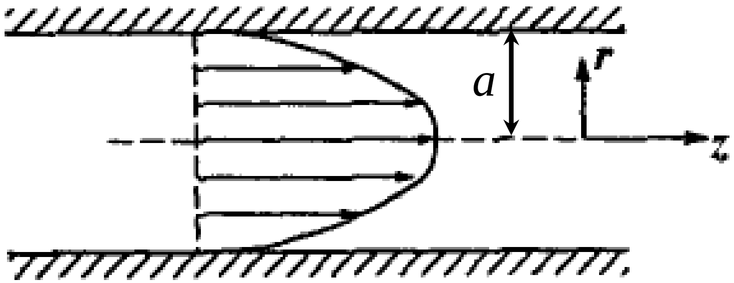
Hydrodynamika - równanie Naviera-Stokesa
przepływ Poiseuille'a

Równanie Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego $\rho(\vec{r},t) = \text{const.}$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{g}$$

tutaj $\vec{u}(\vec{r},t),\ p(\vec{r},t)$

Przepływ Poiseuille'a – przepływ ustalony i laminarny w walcowej rurze



$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

$$\vec{u}(r,\theta,\mathrm{z}) = (u_r(r,\theta,\mathrm{z}), u_\theta(r,\theta,\mathrm{z}), u_z(r,\theta,\mathrm{z}))$$

w tym przypadku $u_r(r,\theta,\mathrm{z}) = 0,\ u_\theta(r,\theta,\mathrm{z}) = 0,\ u_z(r,\theta,\mathrm{z}) = u_z(r)$

warunki brzegowe: $u_z(a) = 0, \quad u_z(0) < \infty$

Równanie N-S we współrzędnych cylindrycznych (Clark str. 618):

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$
$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]-\frac{\partial p}{\partial r}+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z$$

U nas $\vec{u}=(0,0,u_z(r))$

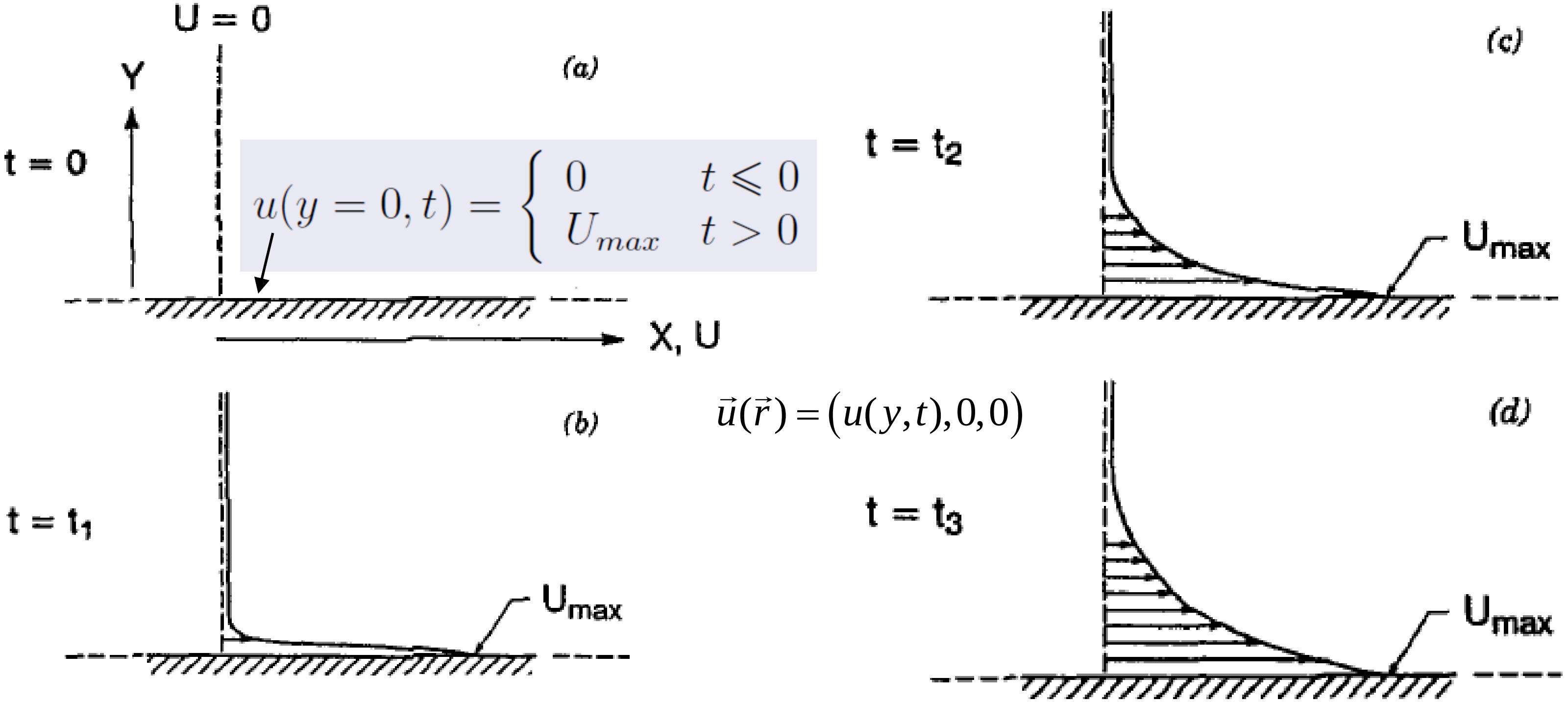
Wnioski: **1.** Równanie dla współrzędnej z. **2.** Gdy $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$ to $\dfrac{\partial p}{\partial z}$ jest stałą.

Wtedy $\dfrac{\mu}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r\dfrac{\partial}{\partial r}u_z(r)]-\dfrac{\partial p}{\partial z}=0,$ z warunkami brzegowymi $u_z(a)=0, \quad u_z(0)<\infty$

Rozwiązanie: $u_z(r)=\dfrac{C}{4\mu}(r^2-a^2)$ **- TABLICA**

Równanie Navier-Stokesa
przepływ nad płytą
przepływ pełzający

dolna ścianka w $t = 0$ rozpoczyna ruch ze stałą prędkością U_{max}



$$u(y=0,t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ U_{max} & t > 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \left(u(y,t), 0, 0\right)$$

następuje przekaz pędu poziomego w kierunku do niego prostopadłym – istota lepkości

Transfer lepki

Prędkość płynu ma tylko składową „poziomą" $u_x \equiv u = u(y,t)$.
Prędkość *zmienia się w czasie*, a więc przepływ jest *nieustalony*.
Równanie przepływu jest proste – ponieważ ciśnienie w całej objętości jest stałe $dp/dx = 0$ i z r. Naviera-Stokesa dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

gdzie $\nu = \mu/\rho$ to tzw. *kinematyczny współczynnik lepkości.*
Warunki brzegowe to

$$u(y=0,t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ U_{max} & t > 0 \end{cases}$$

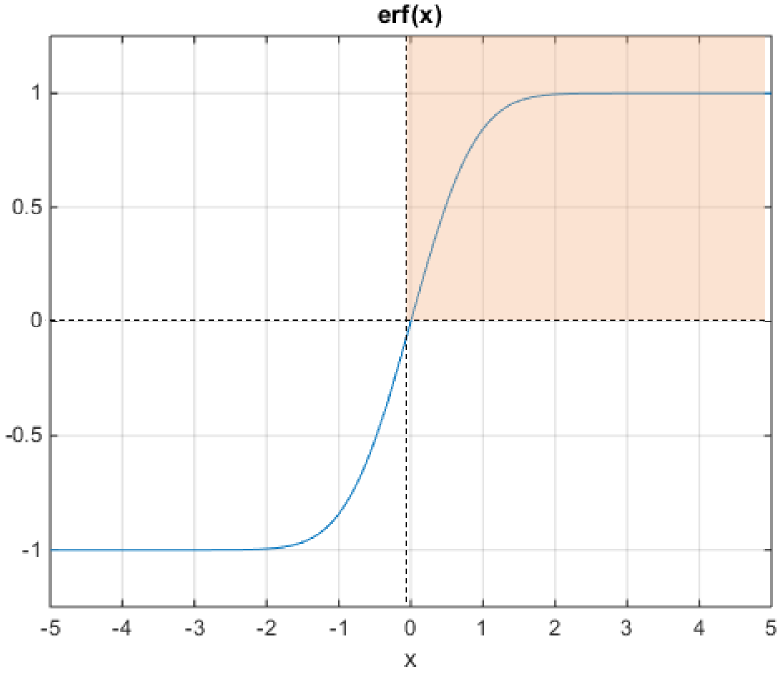
Równanie to można rozwiązać metodą transformaty Laplace'a,

$$u(y,t) = U_{max} \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

Funkcja błędu

(error function)

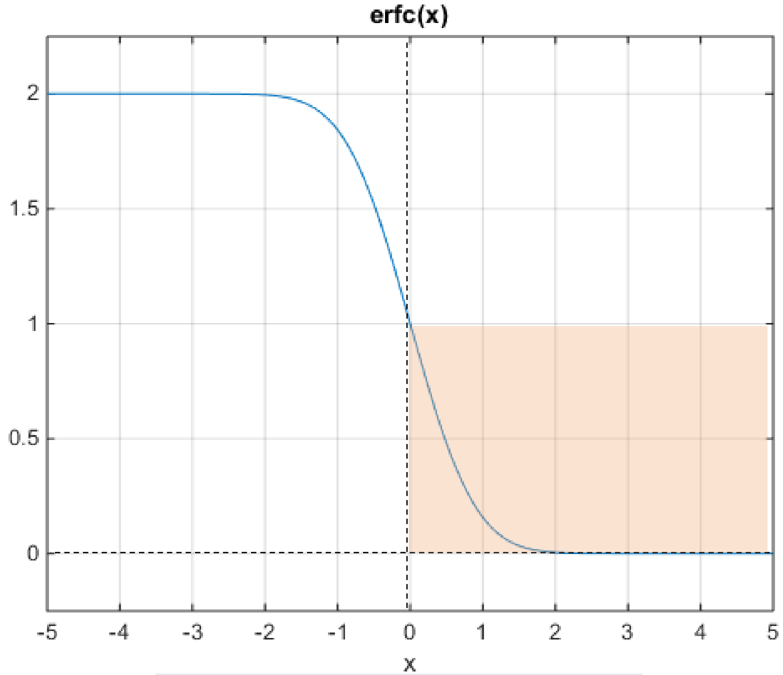
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$



dopełnienie funkcji błędu

(complementary error function)

$$\begin{aligned}\operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$



$$u(y,t) = U_{max}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

Płyny nielepkie i równanie Eulera

Płyn nielepki („sucha woda") opisuje równanie N-S, w którym kładziemy $\mu = 0$.

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g}. \tag{17}$$

Jest to tzw. równanie Eulera (już pierwszego rzędu, ale w dalszym ciągu nieliniowe). Z tego też powodu, w równaniu tym pojawia się dodatkowy problem: nie ma w nim miejsca na warunek braku poślizgu (zerowanie się prędkości na nieruchomych ściankach) – kontury graniczne obszaru przepływu są także liniami prądu.

Przepływ *potencjalny* albo *bezwirowy* to taki, w którym *wirowość* (rotacja wektora prędkości) jest równa zeru:

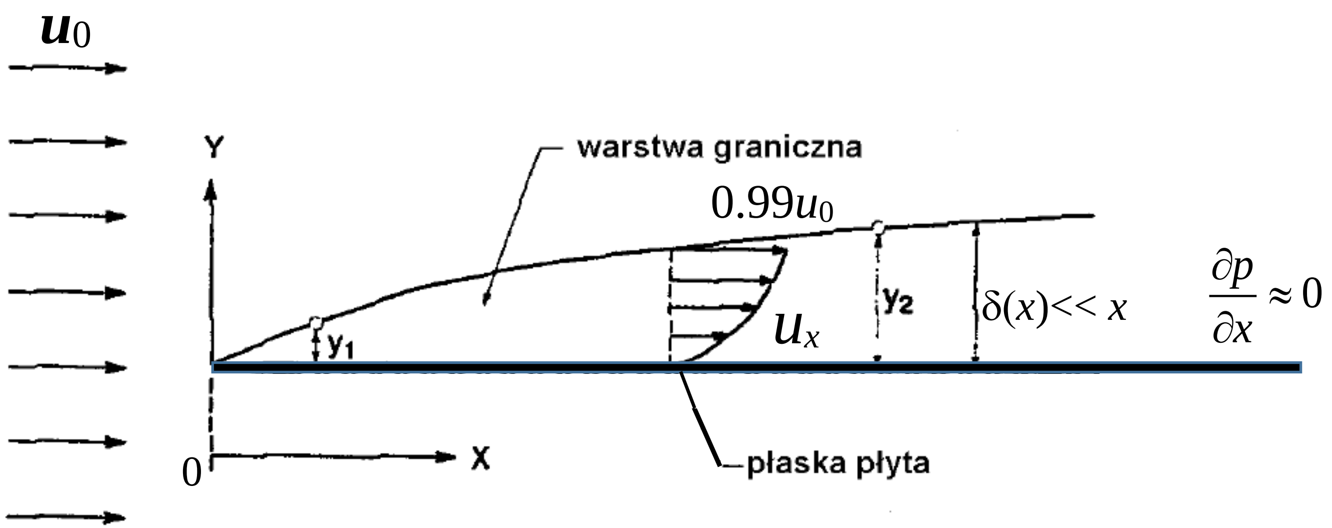
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = 0. \tag{18}$$

Bezwirowe przepływy to takie, w których cząsteczki płynu poruszające się wzdłuż linii prądu nie doznają obrotów. Twierdzenie Kelvina o zachowaniu (bez)wirowości w przypadku płynu nielepkiego: przepływ (np. opływ sfery), który zaczął się jako bezwirowy (gdzieś daleko) pozostaje bezwirowym także i jej bezpośrednim sąsiedztwie.

Tablica

Przepływ cieczy z (niezaburzoną) prędkością U nad długą i płaską płytą

Laminarna warstwa graniczna



uznajemy umownie warstwę graniczną za obszar, w którym prędkość cieczy $u_x \leq 0.99\, u_0$

Warstwa graniczna narasta w dodatnim kierunku osi $0x$, a jej nachylenie powoduje, że wytwarza się pewna, różna od zera, składowa prędkości w kierunku pionowym (osi $0y$).

Tablica

Prawo Darcy'ego – przepływ przez ośrodki porowate

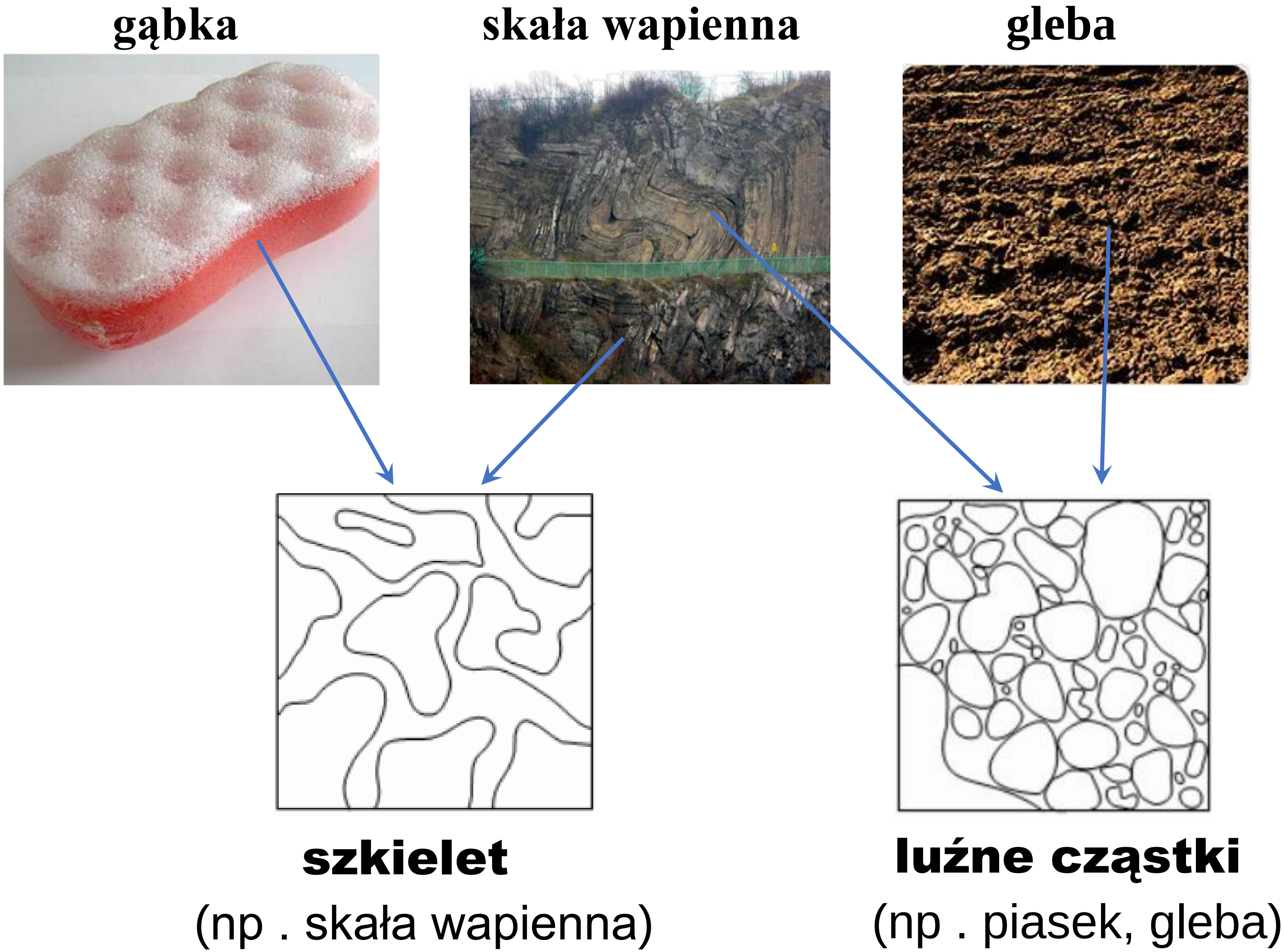
Henri Darcy, francuski inżynier-hydrolog. W połowie 19. wieku nadzorował prace związane z zaopatrzeniem w wodę miasta Dijon, stolicy francuskiej Burgundii.

Prawo wywodzi się z bardzo prostych założeń, dotyczących mechanizmu przepływu płynu przez ośrodek porowaty – transport płynu odbywa się poprzez cały układ nieregularnych i powykręcanych w różne strony kanalików.

Prędkość przepływu jest bardzo mała. Zwykle są to prędkości rzędu kilku centymetrów/dzień – chyba, że znajdujemy się w bezpośrednim sąsiedztwie źródła (lub upustu), kiedy taka prędkość może być rzędu 1m/dzień. Ten fakt uprawnia nas do położenia pochodnej śledczej prędkości („lewa" strona równ. N-S) równej zeru.

2. Całkowita siła działająca na element objętości płynu składa się z: grawitacji, sił ciśnienia (zwykle bez ciśnienia zewnętrznego, np. atmosferycznego) i sił tarcia lepkiego i jest równa zeru:

$$\rho \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla} P + \boldsymbol{f}_{\text{tarcie lepkie}} = 0.$$

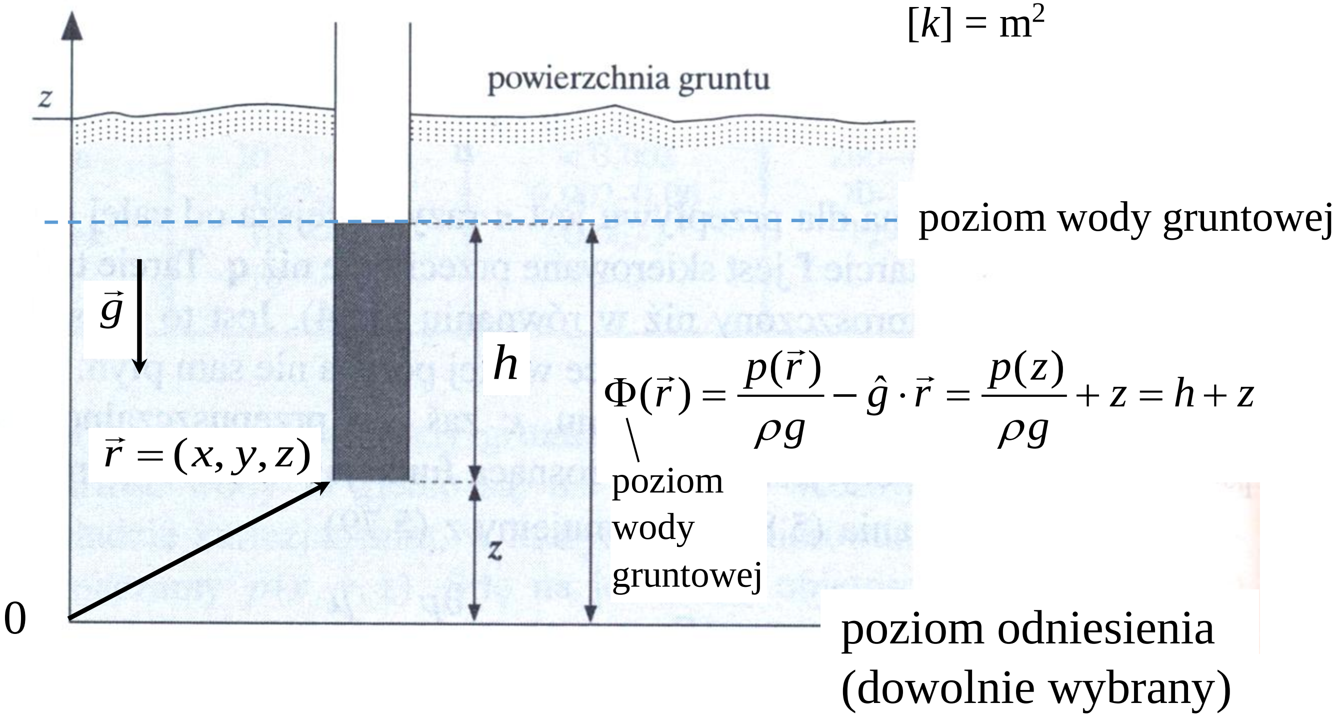

gąbka
skała wapienna
gleba
szkielet
(np . skała wapienna)
luźne cząstki
(np . piasek, gleba)

Prawo Darcy'ego $\vec{u}(\vec{r}) = -\kappa \nabla \Phi(\vec{r})$, gdzie $\kappa = \dfrac{\rho g k}{\mu}$

k – przepuszczalność ośrodka porowatego

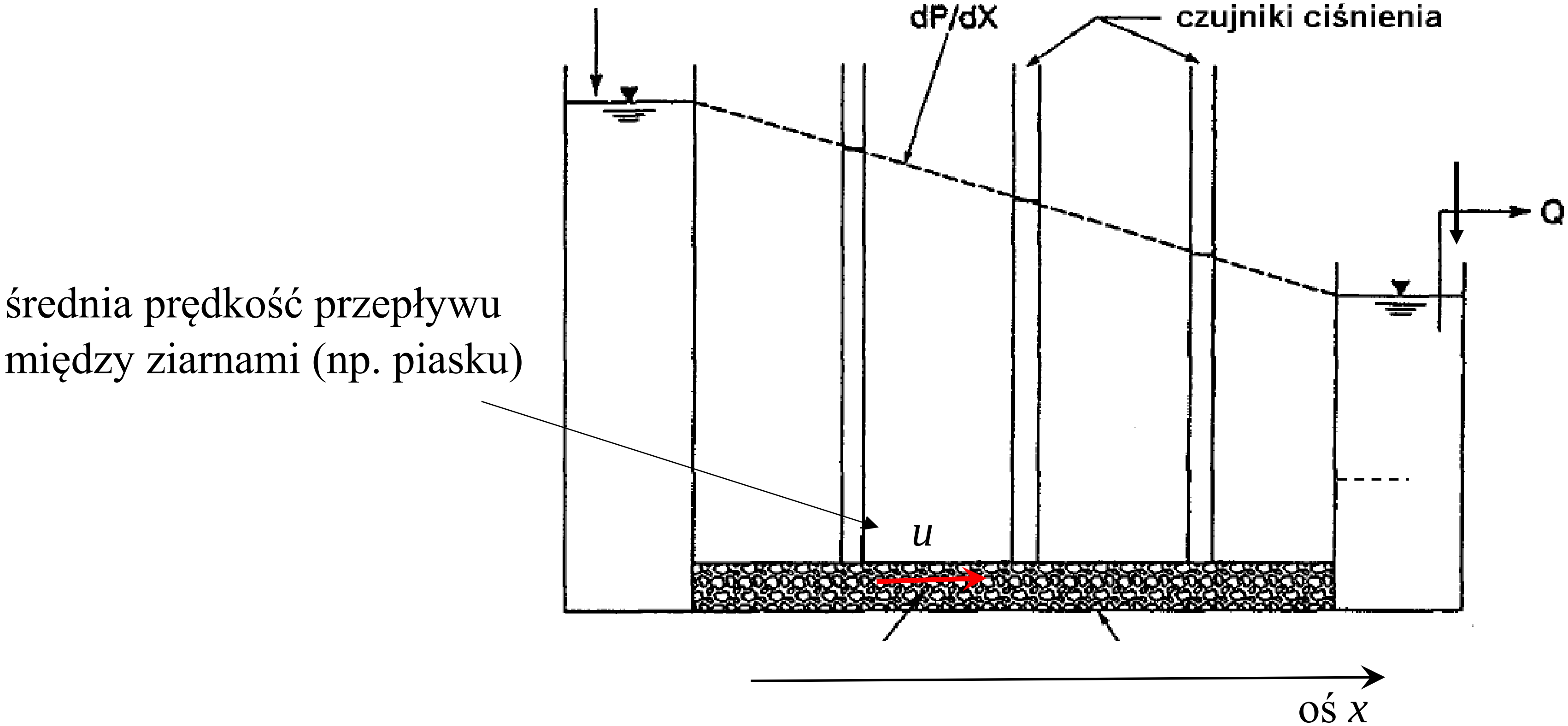
$[k] = \mathrm{m}^2$

Interpretacja potencjału $\Phi(\vec{r})$



$\Phi(\vec{r})$ to *poziom wody gruntowej*, czyli jest to wysokość, na jakiej ustala się poziom wody, w otwartej pionowej rurze, liczony względem (dowolnie wybranego – wszystko jest pod znakiem gradientu!) poziomu odniesienia.

Zastosowanie Prawa Darcy'ego



Przepływ przez porowatą kolumnę.

$$u = -\kappa \frac{dP(x)}{dx} = const. \Rightarrow P - \text{maleje liniowo z } x$$

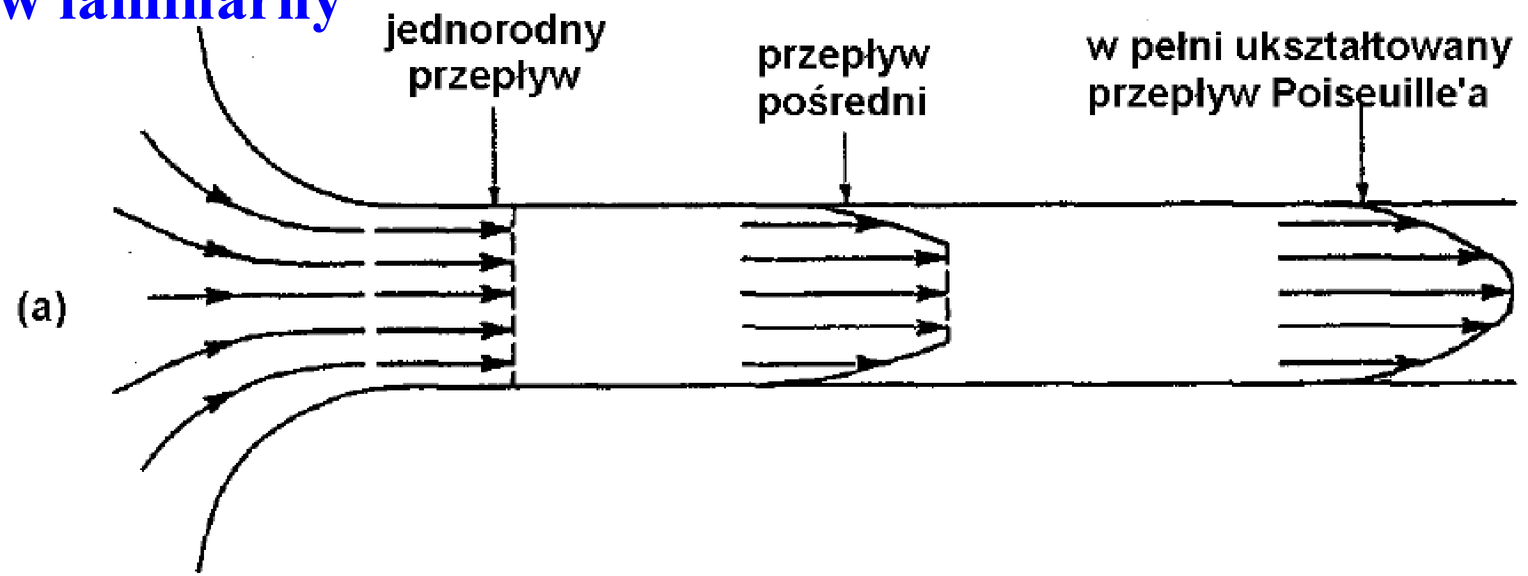
Przepływy turbulentne

W dużym skrócie: Turbulencje powstają dla dużych wartości liczby Reynoldsa ($\mathrm{Re} \geqslant 2000$);

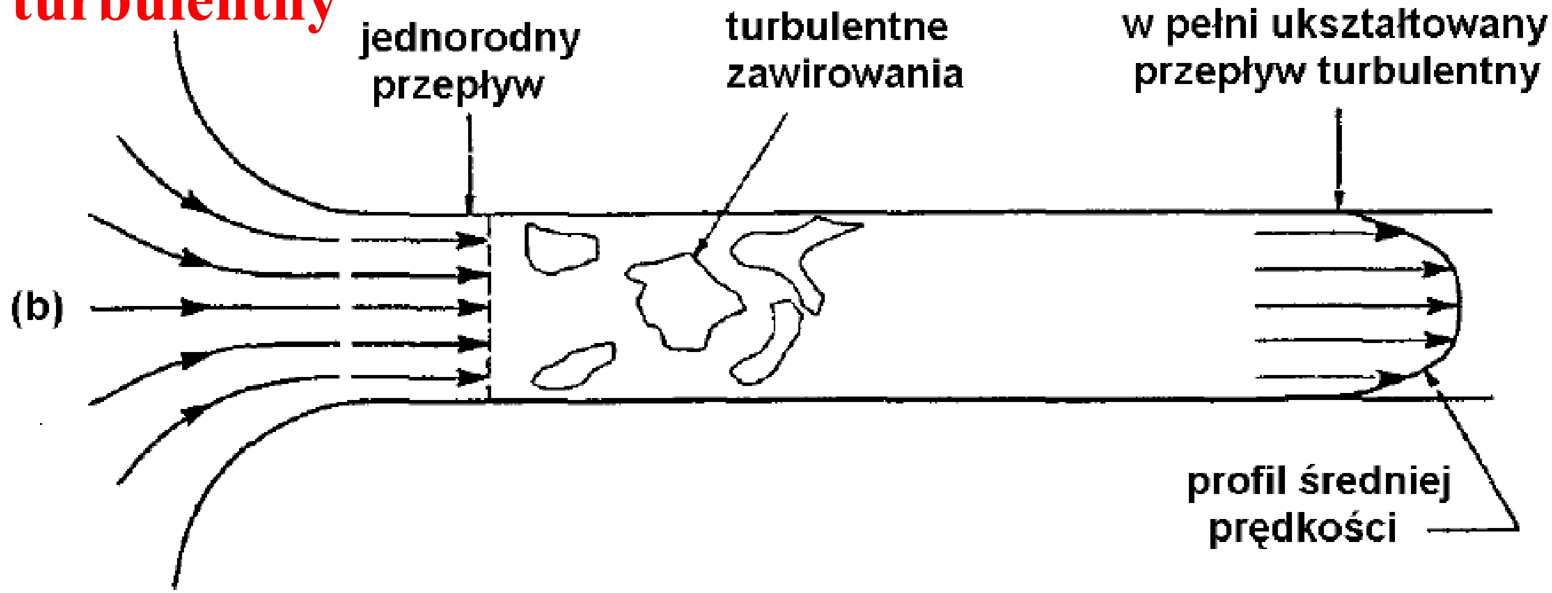
Charakterystyczne cechy przepływów turbulentnych to

- *Losowy charakter* – wartość parametru (np. prędkości) w danej chwili (danych chwilach) czasu nie pozwala nic powiedzieć o jego wartości po upływie czasu, chociaż pewne prognostyki dotyczące *wartości uśrednionych* są możliwe.
- *Trójwymiarowość* – dwuwymiarowe przepływy turbulentne po prostu nie istnieją.
- *Hierarchia wirów o mniejszych/większych rozmiarach* – istnieją jednak pewne korelacje pomiędzy prędkościami w różnych punktach (obszarach) przepływu w danym momencie (pewna powtarzalność schematu turbulencji).
  Modelowanie numeryczne zjawisk turbulencji wskazuje na pewną inherentną skłonność do samoorganizacji.
- *Kaskada (transferu) energii* – energia jest przekazywana od struktur (wirów) o większej skali do struktur mniejszych.
- *Dyfuzja (ciepła, masy i pędu)* – por. rysunek, na którym pokazana jest dyfuzja barwnika w przepływie laminarnym i turbulentnym.

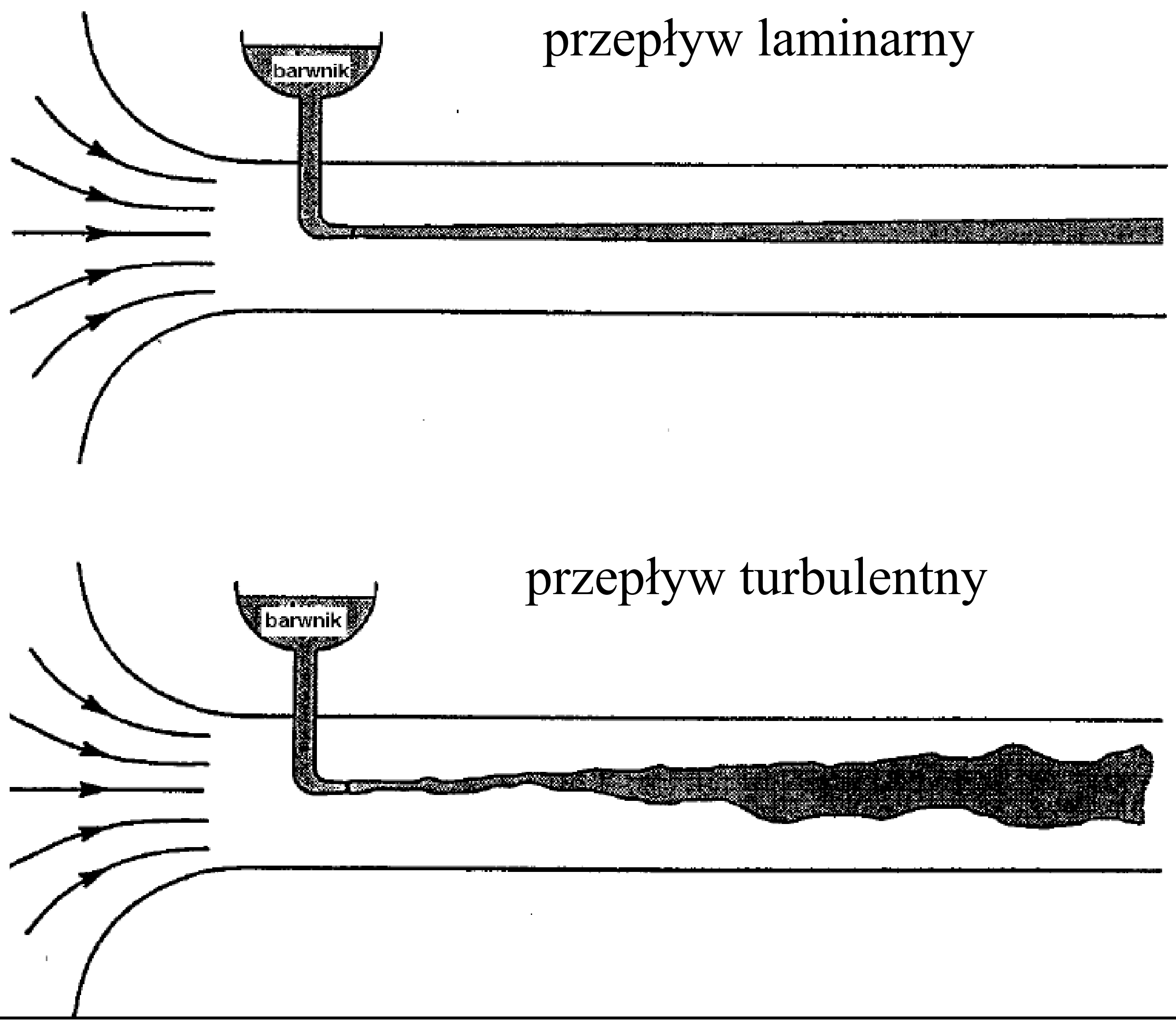
- przepływ laminarny



- przepływ turbulentny



Kształtowanie się przepływu laminarnego i turbulentnego w kolumnie o gładkiej powierzchni wewnętrznej.

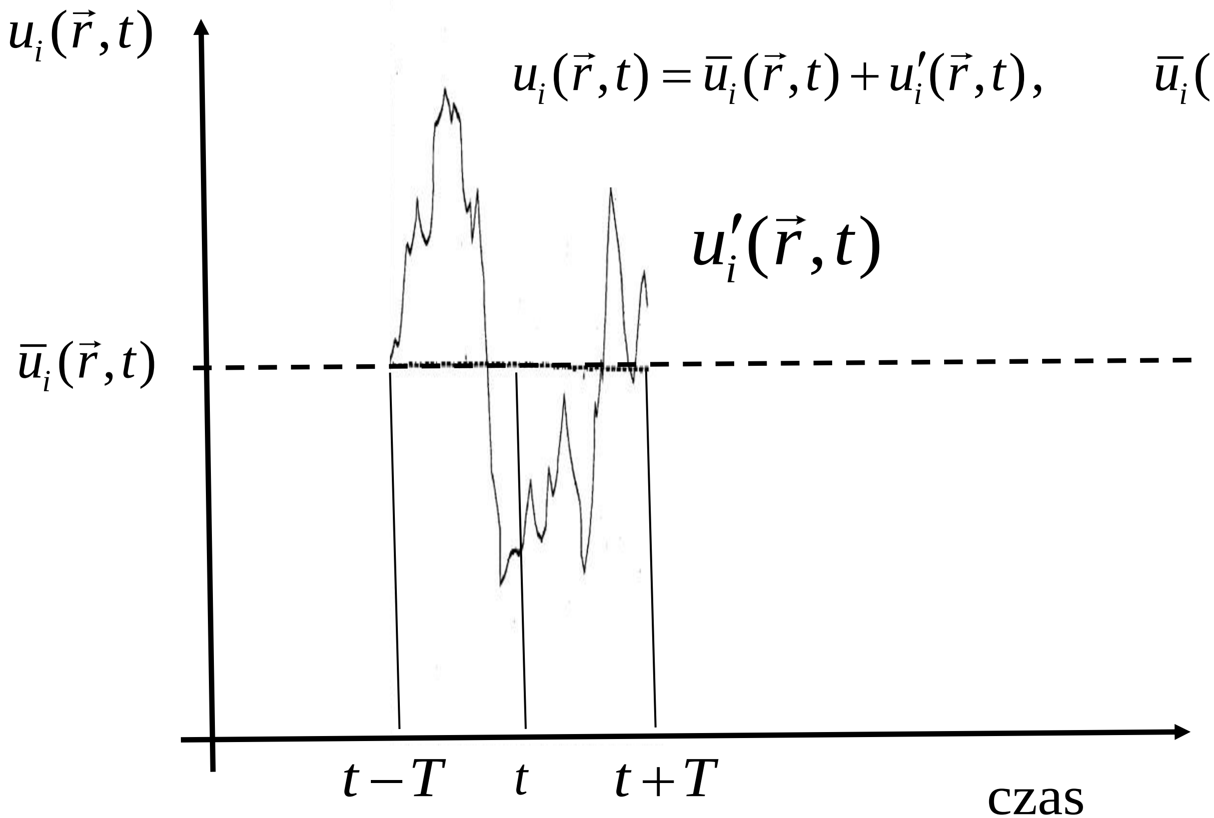


Dyfuzja barwnika w przepływie laminarnym i turbulentnym.

Lokalne prawo zachowania pędu dla płynu nielepkiego – TABLICA

Fluktuacja prędkości w danym punkcie płynu i średniowanie Reynoldsa

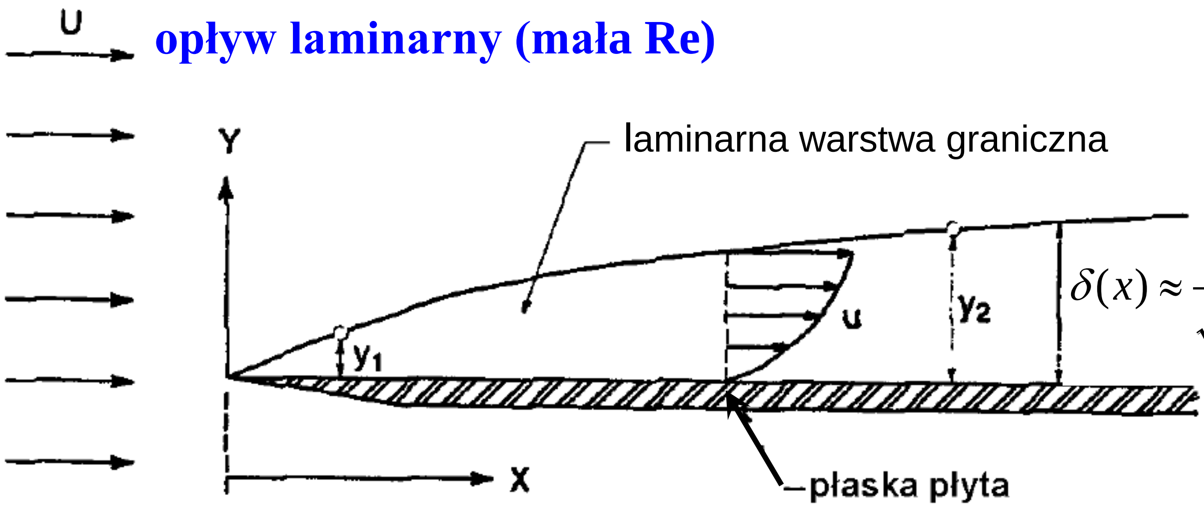
$$u_i(\vec{r},t) = \overline{u}_i(\vec{r},t) + u_i'(\vec{r},t), \qquad \overline{u}_i(\vec{r},t) = \frac{1}{2T}\int_{t}^{t+T} u_i(\vec{r},\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



TABLICA

Turbulentna warstwa graniczna

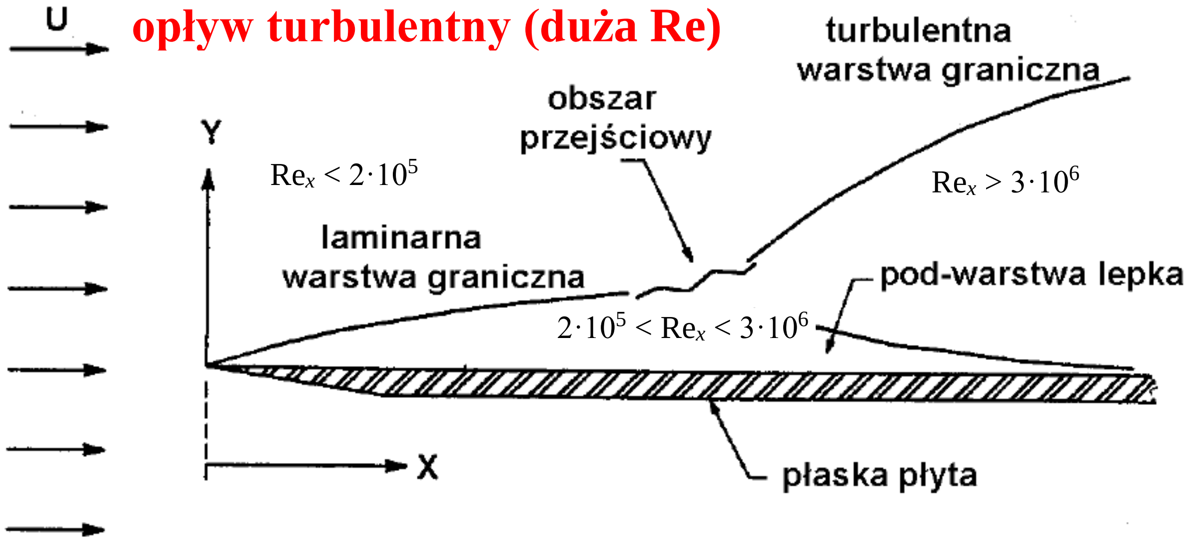
opływ laminarny (mała Re)



$$\delta(x) \approx \frac{5x}{\sqrt{Ux/\nu}} = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}(x)}}$$

Jednorodny przepływ nad płaską płytą.
Tak było dla przepływu laminarnego – dla większych prędkości (albo/i x-ow) dochodz imy do sytuacji, w których warstwa graniczna staje się turbulentna.

opływ turbulentny (duża Re)



Turbulentne warstwy graniczne są bardziej „skuteczne” jeżeli chodzi o transport (ciepła, pędu, masy); dlatego też graniczne warstwy turbulentne są grubsze od laminarnych.