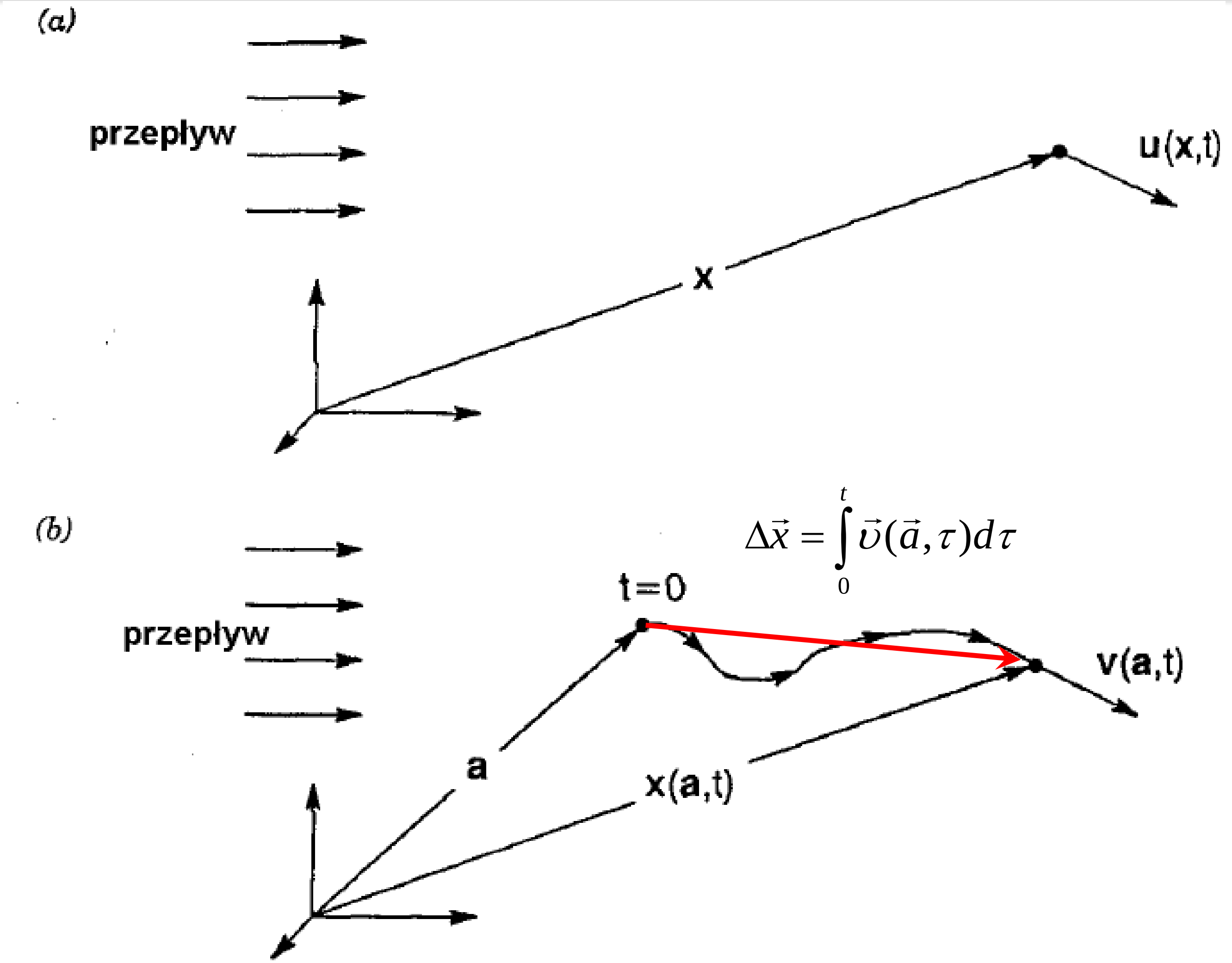
Dyspersja turbulentna; współrzędne Eulera i Lagrange'a



Używane przez nas dotąd współrzędne to były *współrzędne Eulera* – pomiar (np. prędkości) następował w pewnym **stałym** punkcie $\boldsymbol{x}$ przestrzeni: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$.

współrzędne Eulera i Lagrange'a, c.d.

Ewidentny związek między tymi wielkościami:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t) = \boldsymbol{a} + \int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},\tau)d\tau = \vec{a} + \Delta\vec{x}$$

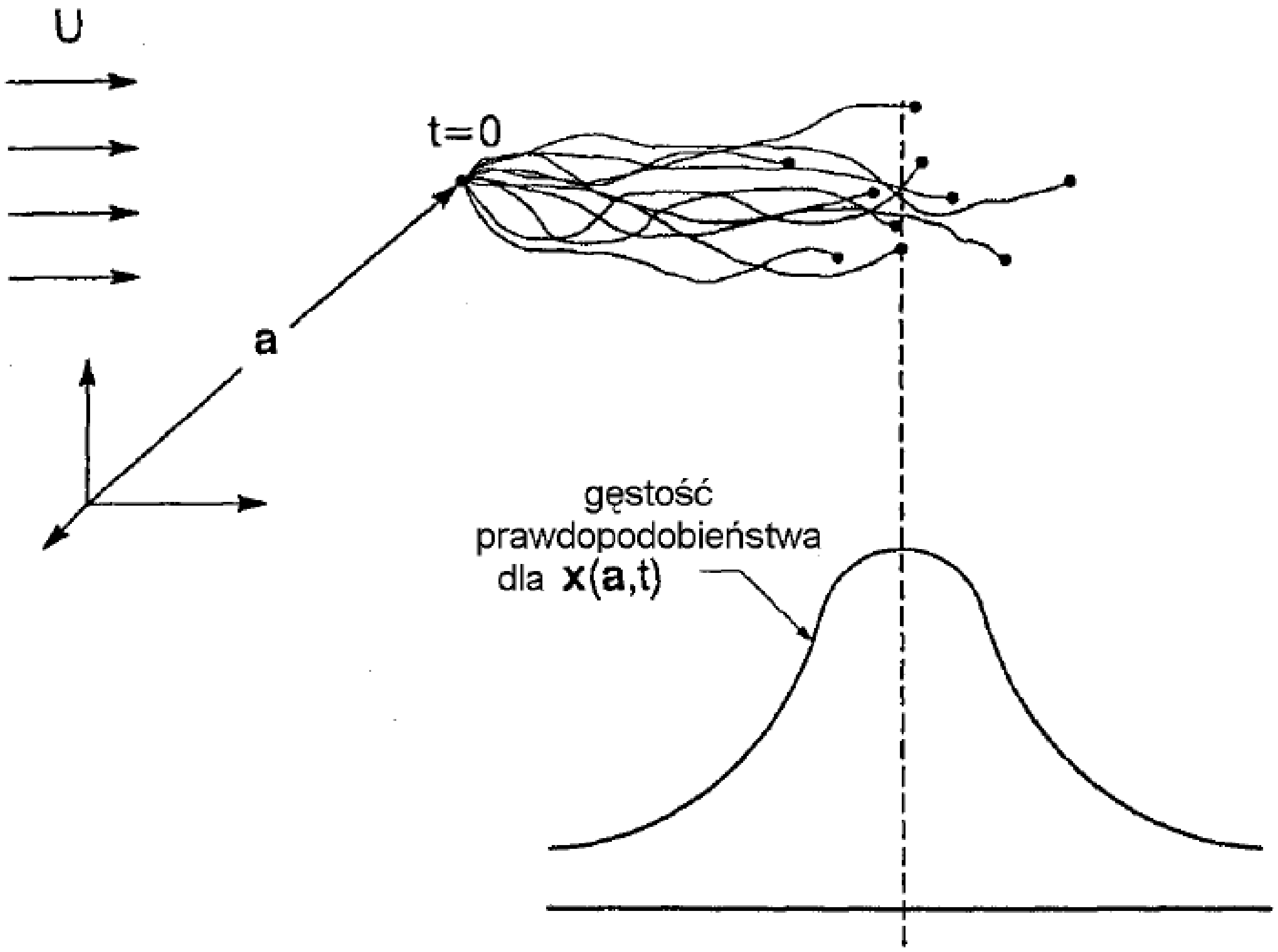
Obliczenie całki wymaga: (a)podania położenia początkowego i (b) znajomości pola prędkości cząstki w różnych chwilach czasu.
Obraz Lagrange'a jest bardziej „związany" z poszczególnymi cząstkami płynu.

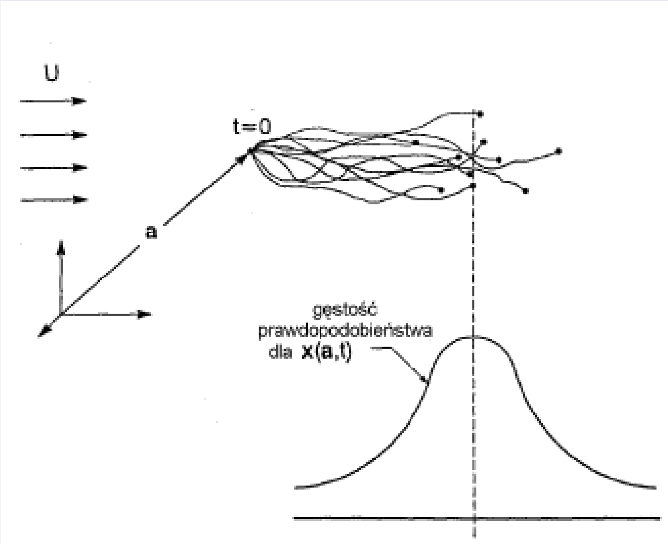
Pomiędzy prędkościami Eulera i Lagrange'a istnieje także formalny związek:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t) = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t),t].$$

Podejście Lagrange'a jest formalnie prostsze, ale dane potrzebne w tym formaliźmie są trudniejsze do uzyskania doświadczalnie (trudniejsze niż odpowiednie dane w formaliźmie Eulera).
Dla ochrony środowiska formalizm Lagrange'a jest „ciekawszy" – lubimy wiedzieć co (i gdzie) dzieje się z upływem czasu z powstałym w chwili 0 i punkcie $\boldsymbol{a}$ zanieczyszczeniem.

ustalony jednorodny przepływ turbulentny





Ustalony – tzn. przepływ, którego *statystyczne* parametry w różnych punktach przestrzeni nie zmieniają się w czasie; jednorodny – żaden z kierunków x, y, z nie różni się od pozostałych.
W praktyce możemy mieć do czynienia z przepływem jednorodnym w danym kierunku (brak zmienności statystycznych parametrów w kierunku przepływu).

W chwili $t = 0$ z punktu $\boldsymbol{a}$ startuje wiele cząstek (przeprowadzamy wiele eksperymentów); po pewnym czasie t możemy zarejestrować pewną statystykę $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$, której wariancja daje informację o rozproszeniu cząstek. Licząc wariancję, obliczamy pewną *średnią po zbiorze (cząstek)*, która odnosi się do zbioru eksperymentów.

Taylor wprowadził *całkę ze średnich po zbiorze fluktuacji prędkości Lagrange'a*

$$\int_0^t < v'_t v'_\tau > d\tau, \quad \text{gdzie} \quad \upsilon'_t \equiv [\upsilon'(\boldsymbol{a}, t)]_x$$

Znaki $< \quad >$ oznaczają proces uśredniania po zbiorze; v'_τ to *fluktuacja* prędkości;
prędkość Lagrange'a w chwili t, w kierunku przepływu

$$v_t = \bar{V}_t + v'_t,$$

gdzie V'_t to prędkość średnia (po zbiorze). Można pokazać (dla turbulentnego przepływu ustalonego)

$$\int_0^t < v'_t v'_\tau > d\tau = \int_0^t < v'_t v'_{t+\tau} > d\tau.$$

Współczynnik autokorelacji Lagrange'a R_τ

definiujemy jako

$$R_\tau = \frac{< v_t' v_{t+\tau}' >}{< {v_t'}^2 >},$$

$< {v_t'}^2 >$ to średni kwadrat fluktuacji prędkości Lagrange'a, który – przy założeniu stacjonarności przepływu – jest wielkością stałą.

Tak więc z powyższych równań mamy

$$\int_0^t < v_t' v_\tau' > d\tau = < {v_t'}^2 > \int_0^t R_\tau d\tau.$$

Znowu w wyniku stacjonarności

$$\int_0^t < v_t' v_\tau' > d\tau = \left\langle v_t' \int_0^t v_\tau' d\tau \right\rangle =$$ **Tablica**