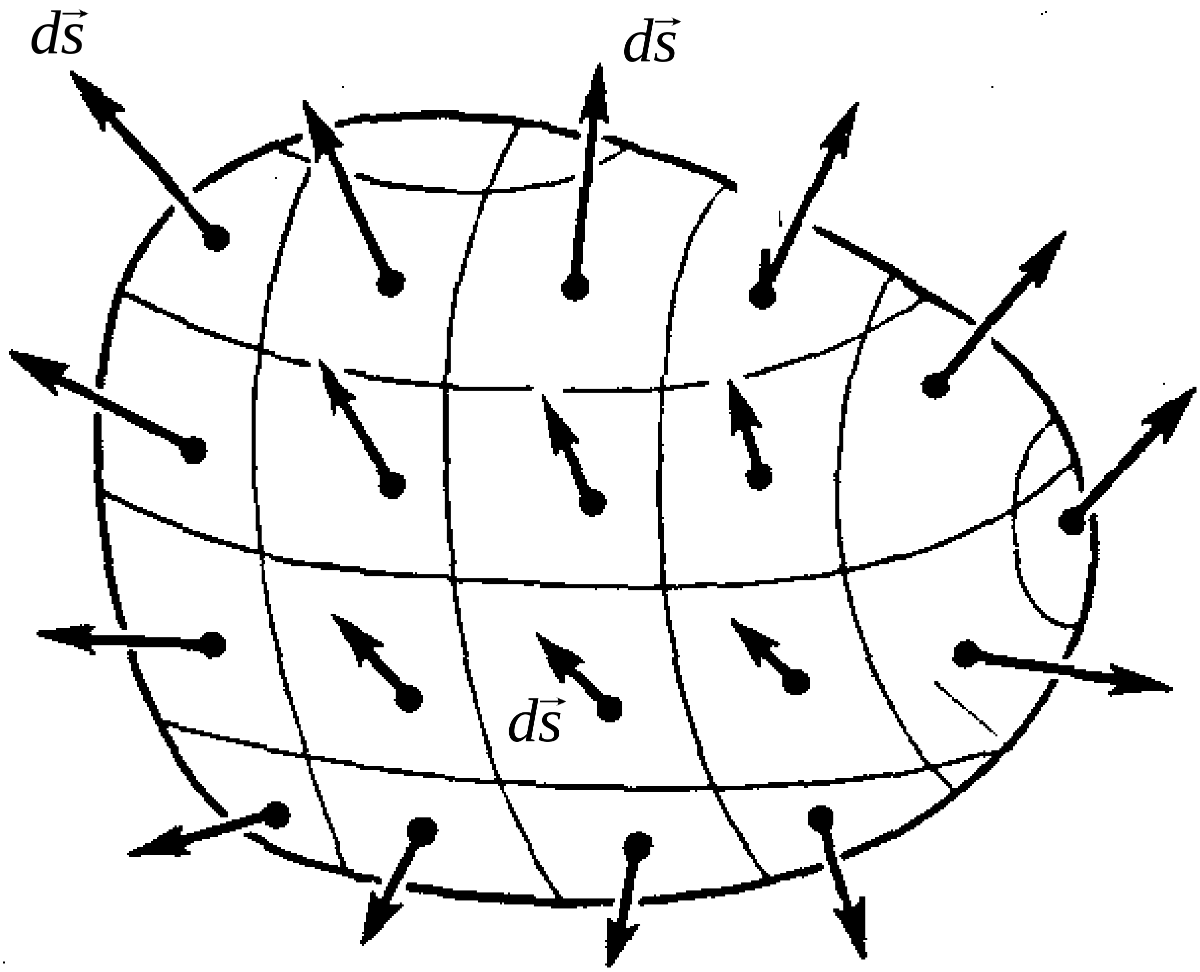
Powierzchnia Gausa *S* - pomyślana powierzchnia zamknięta. Zaznaczono elementy powierzchni $d\vec{s}$ (wektory skierowane na zewnątrz i prostopadłe do powierzcni *S*, długość wektora $d\vec{s}$ jest miarą nieskończenie małej powierzchni).



Prawo Gaussa dla pola elektrycznego w notacji całkowej i różniczkowej

Pojęcia wstępne

1. Strumień elementarny pola $\vec{E}$

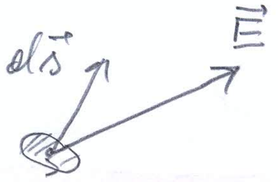
Rozważmy nieskończenie małą powierzchnię płaską o polu powierzchni ds, $[ds] = m^2$, oraz wektor $d\vec{s}$ $\perp$ do tej powierzchni, gdzie $|d\vec{s}| = ds$

uwaga: zwrot wektora $d\vec{s}$ zadaje kierunek obejścia brzegu tej powierzchni zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

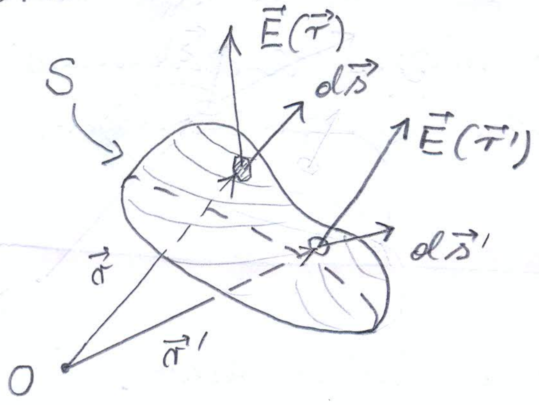
Mówimy, że pow. $d\vec{s}$ jest zorientowana, gdy zadano kierunek obejścia jej brzegu.

Gdy pow. $d\vec{s}$ jest umieszczona w polu el-stat. $\vec{E}$, to strumień elementarny pola $\vec{E}$ ma postać

$$d\phi \overset{def}{=} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



2. Strumień pola $\vec{E}(\vec{r})$ przez powierzchnię skończoną S.



$$\phi \overset{def}{=} \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Interpretacja mnemotechniczna powyższej całki powierzchniowej:

a) dzielimy całą pow. S na nieskończenie małe, tak samo zorientowane powierzchnie $d\vec{s}$

b) w każdym p-cie pow. S wskazanym przez wektor $\vec{r}$ liczymy strumień elementarny

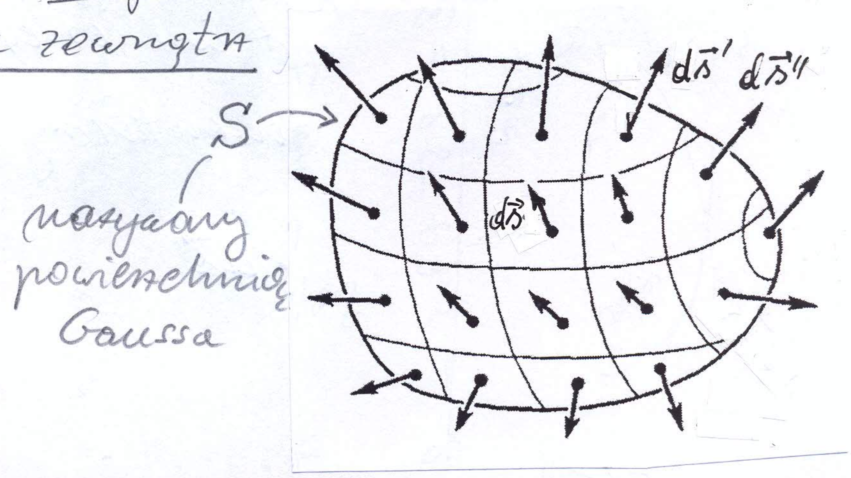
$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}$$

c) wszystkie strumienie elementarne dodajemy otrzymując strumień całkowity ϕ.

<u>Uwaga</u>: Gdy pow. S jest zamknięta to piszemy kółko na całce

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}$$

<u>Dla pow. zamkniętej wszystkie wektory $d\vec{s}$ muszą być skierowane na zewnątrz tej powierzchni:</u>



<u>Prawo Gaussa w notacji całkowej</u>

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Czytamy: Strumień pola el-stat. przez powierzchnię zamkniętą S jest równy ładunkowi zawartemu w obszarze ograniczonym powierzchnią S.

jest to prawo Gaussa w postaci całkowej.

Uwagi: 1. Prawo Gaussa jest prawem Przyrody. Jest ono prawdziwe także dla pola elektrycznego w ogólności zależnego od czasu $\vec{E}(\vec{r},t)$.

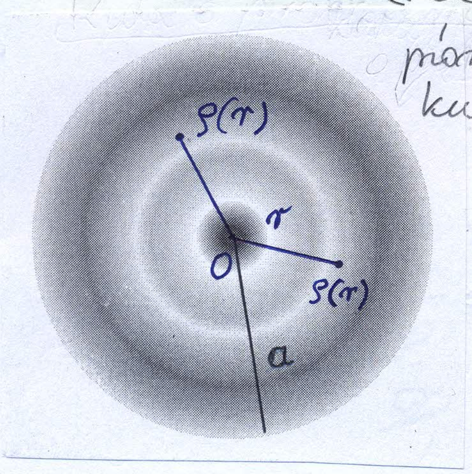
2. Prawo Gaussa nie służy do znajdywania pola elektrycznego (w szczególności elektrostatycznego), podobnie jak całka oznaczona $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$ nie służy do znajdywania f-cji podcałkowej $f(x)$. Chyba, że f-cja ta jest f-cją stałą, $f(x) = c$, wtedy

$$\alpha = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a),$$ można policzyć stałą „c" z równania $c = \frac{\alpha}{b-a}$ (dla $a \neq b$).

Podobnie, z Prawa Gaussa można policzyć długość wektora $\vec{E}$, ale jedynie w trzech szczególnych przypadkach. Mianowicie, E daje się policzyć dla trzech fundamentalnych rozkładów ładunków.

a) pole $\vec{E}(\vec{r})$ pochodzące od sferycznie-symetrycznego rozkładu ładunku. Niech $\varrho(\vec{r})$ – gęstość ładunku $[\varrho] = C/m^3$. Mówimy, że ładunek jest sfer-sym. gdy $\varrho(\vec{r}) = \varrho(r)$ – czyli, zależy od odległości od wybranego punktu, a nie zależy od kierunku w przestrzeni (zależy od r, a nie zal. od $\hat{r}$).

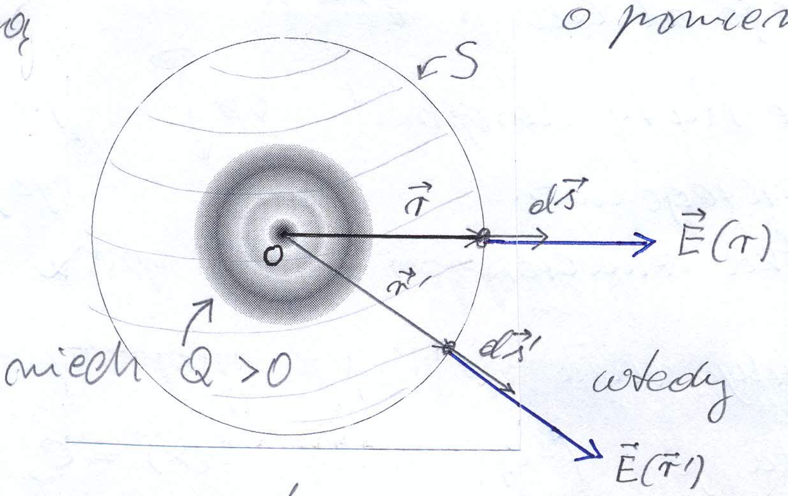
$r \leq a$ ← promień kuli



– tutaj: im ciemniejszy obszar tym większe $\varrho(r)$. r ma początek w środku kuli.

wtedy, z symetrii widać, że $E(\vec{r}) = E(\vec{r}\,')$.

Otaczamy kulę współśrodkową z nią pomyślaną sferą S o promieniu $r \geq a$, a – promień kuli.



$$\vec{E}(r)\cdot d\vec{s} = E(r)\,ds$$

wtedy $\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \oint_S E(r)\,ds =$

$$= \left\{\begin{matrix} E(r) = const \\ \text{na sferze } S \\ E(r) = const. \end{matrix}\right\} = E(r) \underbrace{\oint_S ds}_{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E(r)$$

czyli $\phi = 4\pi r^2 E(r)$, oraz z Pr. Gaussa

dostajemy
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}^{k} \frac{Q}{r^2}$$

wektorowo możemy napisać

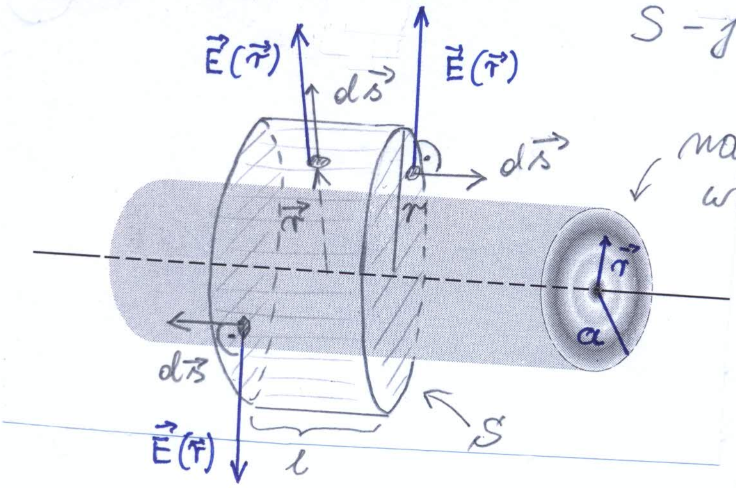
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \qquad \text{bo } \hat{r} = \hat{E}(\vec{r})$$

taka sama postać jak od ładunku punktowego Q umieszczonego w środku sfery. <u>Wzór prawdziwy dla $r > a$.</u>

b) Pole $\vec{E}(\vec{r})$ pochodzące od osiowo symetrycznego rozkładu ładunku – nieskończenie długi walec. Gęstość ładunku jest f-cją odległości od osi walca.

Pole $\vec{E}(\vec{r})$ od naładowanego walca jest prostopadłe do osi walca i $E(\vec{r}) = E(r)$ – zależy od odległości od osi walca.

S – jest powierzchnią walca o promieniu $r \geq a$ i długości l.



naładowany walec o prom. „a"

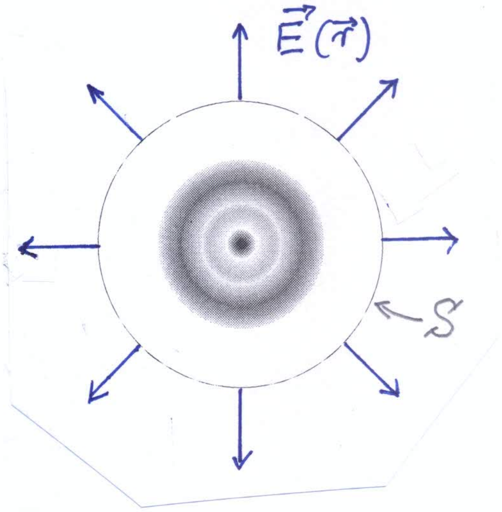
$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, tutaj $\underline{\rho(r) > 0}$ dla $r \leq a$

Walec otaczamy pow. walcową S współosiową z naładowanym walcem. Na pobocznicy walca S $\vec{E}(\vec{r}) \parallel d\vec{s}$, na wieczku i denku walca $\vec{E}(\vec{r}) \perp d\vec{s}$.

Niech S_p – pobocznica walca, S_w i S_d – wieczko i denko walca.

Wtedy $S = S_p \cup S_w \cup S_d$

„Widok od przodu" pola $\vec{E}(\vec{r})$ na pow. S wokół naładowanego walca



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{S_p} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{S_w} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\int_{S_d} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}_{=0} = \int_{S_p} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

lecz na pobocznicy walca S_p $\vec{E}(\vec{r}) \parallel d\vec{s}$ i są zgodnie skierowane $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = E(r)\, ds$

wtedy

$$\phi = \int_{S_p} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{S_p} E(\vec{r})\, ds = \left\{ \begin{array}{l} E(\vec{r}) = E(r) \\ \text{stałe na} \\ \text{pow. } S_p \end{array} \right\} =$$

$$= E(r) \underbrace{\int_{S_p} ds}_{\text{pole powierzchni pobocznicy walca S wynosi } 2\pi r l.} = 2\pi r l\, E(r)$$

Walec S wycina z naładowanego walca ładunek $Q(l)$, wtedy

Z Prawa Gaussa dostajemy

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \frac{Q(l)}{\varepsilon_0}$$

Czyli $2\pi r l E(r) = \frac{Q(l)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \overbrace{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}}^{2k} \frac{Q(l)/l}{r}$

lecz $Q(l)/l = \lambda$ – ładunek przypadający na jednostkę długości naładowanego walca

Stąd

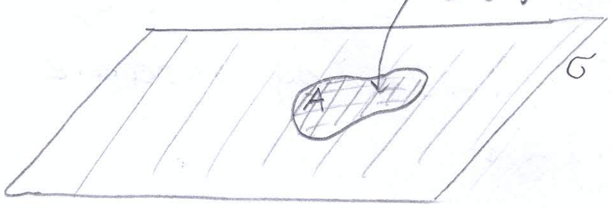
$$E(r) = \frac{2k\lambda}{r} \qquad \left(\text{gdy } \lambda < 0 \quad E(r) = \frac{2k|\lambda|}{r}\right)$$

jeżeli przyjmiemy, że $\vec{r} \perp$ do osi naładowanego walca to

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}, \quad \text{gdzie } \lambda \gtrless 0$$

prawdziwy dla $r \geq a$

c) Pole $\vec{E}(\vec{r})$ od naładowanej płaszczyzny, ładunkiem

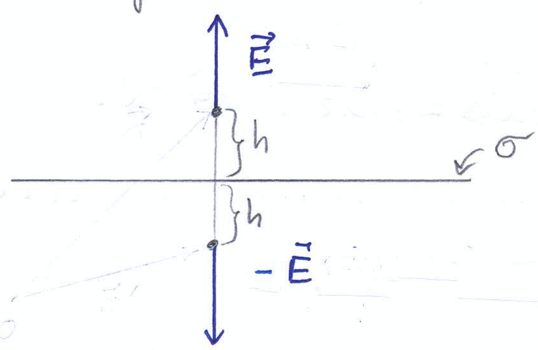


o gęstości powierzchniowej $\sigma = \frac{Q(A)}{A}$, gdzie

$Q(A)$ – ładunek na powierzchni A.

niech $\sigma > 0$.

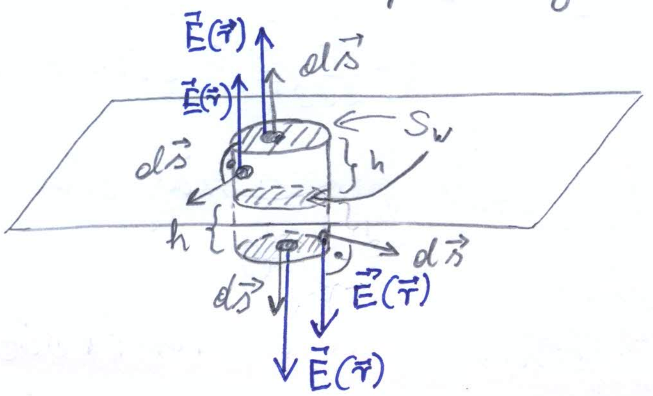
Z symetrii wynika, że gdy σ stałe na całej płaszczyźnie to (widok z boku)



h - odległość p-tu przestrzeni od płaszczyzny

Uwaga. Symetrycznie po obu stronach płaszczyzny wektory pola el-stat. są przeciwne.

Wybieramy pow. Gaussa S w postaci walca, który ma wieczko i denko || do płaszczyzny i płaszczyzna dzieli walec na dwie połowy.



Na wieczku i denku walca

$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = E(\vec{r})\,ds$$

Na pobocznicy walca

$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = 0$$

bo $\vec{E}(\vec{r}) \perp d\vec{s}$

$S = S_p \cup S_w \cup S_d$ stąd $\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} =$

$$= \overbrace{\int_{S_p} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}}^{=0} + \int_{S_w} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} + \int_{S_d} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = 2\int_{S_w} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} =$$

$$= 2\int_{S_w} E(\vec{r})\,ds = \left\{\begin{array}{l} E(\vec{r}) - \text{stałe} \\ \text{na wieczku} \\ \text{walca} \end{array}\right\} = 2E(\vec{r}) \underbrace{\int_{S_w} ds}_{S_w} = 2E(\vec{r})\,S_w$$

z prawa Gaussa

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \frac{Q(S_w)}{\varepsilon_0}$$

– ładunek zawarty wewnątrz walca (wycięty z płaszczyzny)

czyli

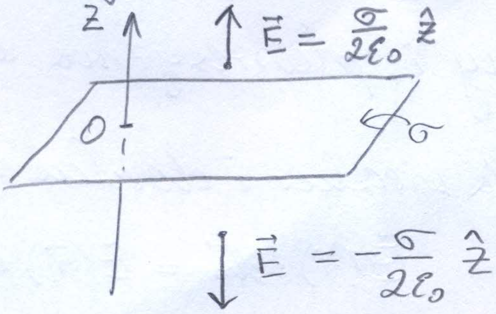
$$2E(\vec{r})\,S_w = \frac{Q(S_w)}{\varepsilon_0} \quad \text{stąd} \quad E(r) = \frac{Q(S_w)/S_w}{2\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Czyli pole $\vec{E}$ jest stałe nad i pod płaszczyzną i jego wartość wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

jeśli wybierzemy oś $\perp$ do płaszczyzny o wersorze $\hat{z}$



to

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} \ ; & \text{dla } z > 0 \\ \vec{0} \ ; & \text{dla } z = 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} \ ; & \text{dla } z < 0 \end{cases}$$

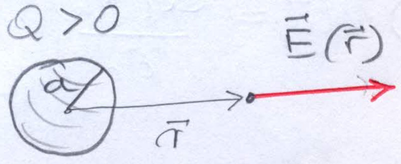
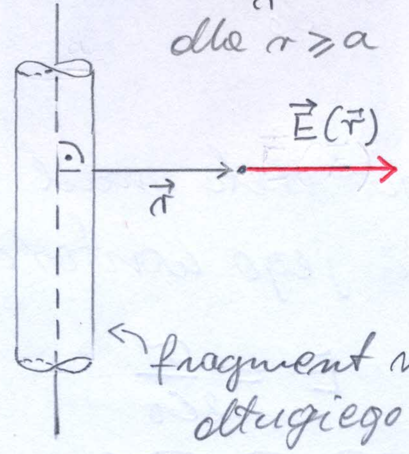
Pole $\vec{E}$ nie zależy od „z" nad i pod płaszczyzną.

wzór prawdziwy dla $\sigma \gtrless 0$

Mówimy, że pole $\vec{E}$ od jednorodnie naładowanej płaszczyzny jest jednorodne (nad i pod płaszczyzną).

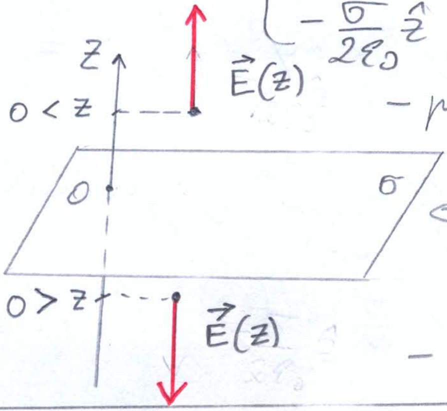
Uwaga: Jest oczywiste, że $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$. !

Podsumowanie

rozkład ładunku	pole $\vec{E}(\vec{r})$
1. sferycznie symetr. (kula, sfera, ładunek punktowy)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ dla $r \geqslant a$ 
2. osiowo symetr. (nieskończ. długi walec lub drut prostoliniowy)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$; $\lambda = \frac{Q(\ell)}{\ell}$ dla $r \geqslant a$  fragment nieskończenie długiego walca

3. Ładunek na płaszczyźnie

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \ z > 0 \\ \vec{0} & ; \ z = 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \ z < 0 \end{cases}$$



– pole jednorodne

← fragment płaszczyzny

– pole jednorodne