

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

**1**

Podstawy

**FIZYKI**

W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E   P W N

## Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

---

### Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m <sup>3</sup>
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepła właściwych $c_p/c_v$	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

### Woda

gęstość	1000 kg/m <sup>3</sup>
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

### Ziemia

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s <sup>2</sup>
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

### Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

---

## Nazwy przedrostków jednostek SI

---

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
10 <sup>24</sup>	jotta	Y	10 <sup>-1</sup>	decy	d
10 <sup>21</sup>	zetta	Z	10 <sup>-2</sup>	centy	c
10 <sup>18</sup>	eksa	E	10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>15</sup>	peta	P	10 <sup>-6</sup>	mikro	μ
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-12</sup>	piko	p
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>3</sup>	kilo	k	10 <sup>-18</sup>	atto	a
10 <sup>2</sup>	hekto	h	10 <sup>-21</sup>	zepto	z
10 <sup>1</sup>	deka	da	10 <sup>-24</sup>	jokto	y

---

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

Podstawy **1**  
**FIZYKI**

Z języka angielskiego tłumaczył

**Mirosław Łukaszewski**



W A R S Z A W A 2007

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

# SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

## TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

## TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Grawitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Drgania
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło  
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

## TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Zjawisko indukcji i indukcyjność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

## TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

## TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

Dodatki  
Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych  
Skorowidz

# SPIS TABEL

- 1.1. Niektóre jednostki podstawowe SI 2
- 1.2. Nazwy przedrostków jednostek SI 3
- 1.3. Wybrane długości (w przybliżeniu) 5
- 1.4. Wybrane przedziały czasu (w przybliżeniu) 7
- 1.5. Wybrane masy (w przybliżeniu) 9
- 2.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem 25
- 4.1. Dwie „wysokie piłki” 68
- 6.1. Prędkości graniczne niektórych ciał w powietrzu 125
- 11.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem liniowym oraz ze stałym przyspieszeniem kątowym 267
- 11.2. Momenty bezwładności niektórych ciał 275
- 11.3. Niektóre równania dla ruchu postępowego i obrotowego 283
- 12.1. Dalsze zmienne i równania dla ruchu postępowego i obrotowego 313

# SPIS TREŚCI

Przedmowa

## ROZDZIAŁ 1

Pomiar

*Jak zmierzyć Ziemię o zachodzie Słońca?*

1.1. Jak się mierzy różne rzeczy? 2

1.2. Międzynarodowy Układ Jednostek 2

1.3. Zamiana jednostek 3

1.4. Długość 5

1.5. Czas 6

1.6. Masa 8

Podsumowanie 9

Zadania 10

## ROZDZIAŁ 2

Ruch prostoliniowy

*Jak długo spada beczka z Wodospadu Niagara?*

2.1. Ruch 14

2.2. Położenie i przemieszczenie 14

2.3. Prędkość średnia 15

2.4. Prędkość chwilowa 18

2.5. Przyspieszenie 20

2.6. Ważny przypadek szczególny: ruch ze stałym przyspieszeniem 23

2.7. Stałe przyspieszenie w innym świetle 26

2.8. Spadek swobodny 27

Podsumowanie 30

Pytania 31

Zadania 32

## ROZDZIAŁ 3

Wektory

*Jak wektory mogą się przydać do badania jaskiń?*

3.1. Wektory i skalary 38

3.2. Geometryczne dodawanie wektorów 38

3.3. Składowe wektorów 41

3.4. Wektory jednostkowe 45

3.5. Dodawanie wektorów na składowych 45

3.6. Wektory a prawa fizyki 47

3.7. Mnożenie wektorów 48

Podsumowanie 52

Pytania 53

Zadania 54

## ROZDZIAŁ 4

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

*Skąd wiadomo, gdzie spadnie na arenę człowiek wystrzelony z armaty?*

4.1. Przechodzimy do dwóch lub trzech wymiarów 58

4.2. Położenie i przemieszczenie 58

4.3. Prędkość średnia i prędkość chwilowa 60

4.4. Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe 62

4.5. Rzut ukośny 65

4.6. Analiza rzutu ukośnego 66

4.7. Ruch jednostajny po okręgu 71

4.8. Ruch względny w jednym wymiarze 74

4.9. Ruch względny w dwóch wymiarach 76

Podsumowanie 77

Pytania 78

Zadania 80

## ROZDZIAŁ 5

### Siła i ruch I

*Czy człowiek może ruszyć z miejsca dwa wagony kolejowe?*

- 5.1. Co jest przyczyną przyspieszenia? 87
- 5.2. Pierwsza zasada dynamiki Newtona 87
- 5.3. Siła 88
- 5.4. Masa 90
- 5.5. Druga zasada dynamiki Newtona 91
- 5.6. Kilka ważnych sił 95
- 5.7. Trzecia zasada dynamiki Newtona 100
- 5.8. Jak stosować zasady dynamiki Newtona? 101
- Podsumowanie 107
- Pytania 108
- Zadania 110

## ROZDZIAŁ 6

### Siła i ruch II

*Dlaczego spadek kota z dużej wysokości jest nieraz mniej niebezpieczny niż z małej?*

- 6.1. Tarcie 118
- 6.2. Właściwości tarcia 120
- 6.3. Siła oporu i prędkość graniczna 124
- 6.4. Ruch jednostajny po okręgu 127
- Podsumowanie 132
- Pytania 133
- Zadania 134

## ROZDZIAŁ 7

### Energia kinetyczna i praca

*Czy podniesienie dużego ciężaru wymaga dużej pracy?*

- 7.1. Energia 141
- 7.2. Praca 142
- 7.3. Praca i energia kinetyczna 143
- 7.4. Praca wykonana przez siłę ciężkości 147
- 7.5. Praca wykonana przez siłę sprężystości 152
- 7.6. Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną 155
- 7.7. Moc 158
- Podsumowanie 161
- Pytania 162
- Zadania 164

## ROZDZIAŁ 8

### Energia potencjalna i zachowanie energii

*Czy do budowy posągów z Wyspy Wielkanocnej potrzebna była nieludzka energia?*

- 8.1. Energia potencjalna 169
- 8.2. Siły zachowawcze: niezależność pracy od drogi 170
- 8.3. Wyznaczanie energii potencjalnej 173
- 8.4. Zachowanie energii mechanicznej 176
- 8.5. Zastosowanie krzywych energii potencjalnej 180
- 8.6. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną 183
- 8.7. Zasada zachowania energii 187
- Podsumowanie 191
- Pytania 192
- Zadania 193

## ROZDZIAŁ 9

### Układy cząstek

*Jak to się dzieje, że baletnica „płyne” nad sceną jak gdyby nie było siły ciężkości?*

- 9.1. Pewien szczególny punkt 204
- 9.2. Środek masy 204
- 9.3. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek 209
- 9.4. Pęd 213
- 9.5. Pęd układu cząstek 214
- 9.6. Zachowanie pędu 215
- 9.7. Układ o zmiennej masie: rakietą 219
- 9.8. Siły zewnętrzne i zmiany energii wewnętrznej 221
- Podsumowanie 224
- Pytania 225
- Zadania 227

## ROZDZIAŁ 10

### Zderzenia

*Co można łatwiej złamać ciosem pięści: deskę czy płytę chodnikową?*

- 10.1. Co to jest zderzenie? 234
- 10.2. Popęd siły i pęd 235

- 10.3. Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach 239  
 10.4. Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze 240  
 10.5. Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze 244  
 10.6. Zderzenia w dwóch wymiarach 248  
 Podsumowanie 249  
 Pytania 250  
 Zadania 252

## ROZDZIAŁ 11

### Obroty

*Na co przydaje się fizyka przy rzucie przez biodro?*

- 11.1. Ruch postępowy a ruch obrotowy 260  
 11.2. Zmienne obrotowe 260  
 11.3. Czy wielkości kątowe są wektorami? 265  
 11.4. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym 266  
 11.5. Związek zmiennych liniowych z kątowymi 268  
 11.6. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym 271  
 11.7. Jak obliczyć moment bezwładności? 273  
 11.8. Moment siły 276  
 11.9. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 278  
 11.10. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego 281  
 Podsumowanie 285  
 Pytania 287  
 Zadania 288

## ROZDZIAŁ 12

Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu  
*Dlaczego skok z trapezu z poczwórnym saltem jest trudny?*

- 12.1. Toczenie się ciał 297  
 12.2. Energia kinetyczna ruchu tocznego 299  
 12.3. Siły działające przy toczeniu 300  
 12.4. Jo-jo 303  
 12.5. Moment siły raz jeszcze 303  
 12.6. Moment pędu 306  
 12.7. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 308  
 12.8. Moment pędu układu cząstek 310  
 12.9. Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi 312  
 12.10. Zachowanie momentu pędu 314  
 Podsumowanie 321  
 Pytania 322  
 Zadania 323

## DODATKI

- A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1  
 B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3  
 C. Niektóre dane astronomiczne A5  
 D. Współczynniki zamiany jednostek A7  
 E. Wzory matematyczne A11  
 F. Właściwości pierwiastków A14  
 G. Układ okresowy pierwiastków A17

Odpowiedzi do sprawdzianów  
 oraz pytań i zadań  
 o numerach nieparzystych B1

Skorowidz C1



# PRZEDMOWA

**Obecne**, szóste wydanie *Podstaw fizyki* jest znacznie **zmienione** — pod względem układu treści i organizacji **materiału** — w stosunku do bardzo popularnego wydania **piątego**, zachowuje jednak wiele elementów klasycznego **podręcznika** Davida Hallidaya i Roberta Resnicka. **Niemal** wszystkie zmiany wynikają z sugestii wykładowców **i studentów** korzystających z wydania **piątego** oraz **recenzentów** maszynopisu wydania **szóstego**, a także z **wyników badań** nad procesem nauczania. Czytelnicy mogą **nadsyłać** swoje sugestie, poprawki oraz uwagi — **pozytywne i negatywne** — do wydawnictwa John Wiley and Sons (<http://www.wiley.com/college/hrw>) lub do Jearla Walkera **adres pocztowy**: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA; **faks**: (USA) (216) 687-2424; **adres elektroniczny**: physics@wiley.com). **Nie uda nam się** pewnie odpowiedzieć na każdy list, ale **wszystkie** zachowamy i uważnie przeczytamy.

## Zmiany w organizacji materiału

► **Bardziej przejrzysty układ tekstu.** Poprzednie **wydania** oryginału były drukowane w dwóch szpaltach, co **wielu** studentów i wykładowców uważało za **układ tekstu zbyt zagęszczony** i prowadzący do rozproszenia uwagi **czytelnika**.

► **Potoczyste przedstawienie materiału.** Wszystkim **podręcznikom** zarzuca się zwykle, że zawierają **zbyt wiele materiału**. W odpowiedzi na takie uwagi krytyczne **szóste wydanie** podręcznika zostało skrócone na dwa sposoby:

1. Materiał dotyczący szczególnej teorii względności **i fizyki kwantowej** został usunięty z **rozdziałów początkowych** i umieszczony w dalszych rozdziałach, **poświęconych** fizyce współczesnej.

2. W książce pozostawiono tylko **najważniejsze przykłady**, a pozostałe — **bardziej wyspecjalizowane** — **przesunięto** do towarzyszącego podręcznikowi **Zbioru za-**

**dań uzupełniających**, który jest opisany w dalszej części **przedmowy**.

► **Zapis wektorów.** Wektory są obecnie zapisywane jako symbol ze strzałką nad literą (np.  $\vec{F}$ ), a nie za pomocą **czcionki półgrubej** (jak **F**).

► **Użycie jednostek metrycznych.** W podręczniku **stosowane** są **niemal wyłącznie** jednostki metryczne. Jedynym **wyjątkiem** jest rozdział 1, w którym **przedstawione** są **różne układy** jednostek.

► **Układ i kolejność zadań.** Zebrane w podręczniku **zadania**, przeznaczone do rozwiązania w ramach **pracy domowej**, są podzielone na grupy odnoszące się do **kolejnych** paragrafów tekstu głównego, a w ramach tych grup są **ułożone** w kolejności **wzrastającej** trudności. **Wiele** **zadań** z wydania **piątego** **przesunięto** jednak do **Zbioru zadań uzupełniających**, przy czym **nie porządkowano** ich ani pod **względem** trudności, ani **tematyki** w ramach **rozdziału** (łączna liczba zadań w podręczniku i w **Zbiorze zadań uzupełniających** jest **większa** od liczby zadań w **wydaniu** piątym).

► **Rozwiązania zadań.** Rozwiązania części zadań o **numerach** nieparzystych są dostępne w postaci **elektronicznej**. W tym przypadku na końcu treści zadania **umieszczona** jest **ikonka** informująca studenta i wykładowcę, gdzie może **w razie** potrzeby znaleźć rozwiązanie. Informacja o **znaczeniu** poszczególnych ikonek jest **zawarta** na początku **każdego** zestawu zadań domowych. Ma ona postać:


**www** Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej **podręcznika**: <http://www.wiley.com/college/hrw>

**ilw** Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, **wykorzystującej** oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

Materiały te są opisane w dalszej części **przedmowy**.

## Zmiany natury dydaktycznej

➤ **Rozumowanie a proste ćwiczenia.** Głównym celem podręcznika jest nauczenie studenta rozumowania — od podstawowych zasad do rozwiązania zagadnienia — przez stawianie go wobec kolejnych wyzwań. W związku z tym w większości zadań nacisk położony jest właśnie na umiejętność rozumowania. Niemniej jednak niektóre zadania są prostymi ćwiczeniami, wymagającymi jedynie podstawienia danych do wzoru.

➤ **Stwierdzenia kluczowe.** Rozwiązania wszystkich 360 przykładów w podręczniku i *Zbiorze zadań uzupełniających* zostały zredagowane od nowa, tak by zaczynały się od jednego lub więcej stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania zadania (oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza — ) , wykorzystujących podstawowe prawa wprowadzone w głównym toku wykładu.

➤ **Obszerniejsze rozwiązania przykładów.** Rozwiązania większości przykładów (czyli zadań rozwiązanych w podręczniku) są teraz bardziej szczegółowe niż w poprzednim wydaniu, gdyż postępują krok po kroku od podanych na początku rozwiązania stwierdzeń kluczowych aż do końcowej odpowiedzi, przy czym często przytoczone są obszernie fragmenty rozumowania przedstawione w tekście głównym.

➤ **Zadania z zastosowań fizyki.** W wielu miejscach — w treści przykładów lub zadań domowych — przedstawione są zagadnienia z zakresu zastosowań fizyki, oparte na opublikowanych wynikach badań; porównaj np. przykład 11.6, zadanie 64 z rozdziału 4 i zadanie 56 z rozdziału 10. Przykładem zadań domowych tworzących serię zadań na ten sam temat są zadania 4, 32 i 48 z rozdziału 6.

## Zmiany w treści podręcznika

➤ **Rozdział 5 o sile i ruchu** zawiera teraz bardziej szczegółowe omówienie siły ciężkości, ciężaru i siły normalnej.

➤ **Rozdział 7 o energii kinetycznej i pracy** zaczyna się od bardzo ogólnych uwag na temat energii. Następnie definiuje się energię kinetyczną i pracę oraz omawia się związek między nimi w taki sposób, by bardziej niż w

wydaniu piątym nawiązać do drugiej zasady dynamiki Newtona, nie tracąc jednak spójności tych definicji z pojęciami termodynamicznymi.

➤ **Rozdział 8 o zachowaniu energii** nie zawiera silnie krytykowanej definicji pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą — zastąpiono ją omówieniem zmian energii pod wpływem siły niezachowawczej (użyte sformułowania nie uniemożliwiają jednak wykładowcy wprowadzenia pojęcia pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą).

➤ **Rozdział 10 o zderzeniach** zawiera teraz najpierw omówienie ogólnego przypadku zderzeń niesprężystych w jednym wymiarze, a dopiero później przypadku szczególnego zderzeń sprężystych w jednym wymiarze.

➤ **Rozdziały 16, 17 i 18 o ruchu harmonicznym i falach** zostały napisane na nowo, tak by ułatwić studentom przyswojenie sobie tych trudnych zagadnień.

➤ **Rozdział 21 o entropii** zawiera obecnie omówienie silnika Carnota jako idealnego silnika cieplnego o największej sprawności.

## Elementy towarzyszące tekstowi głównemu podręcznika

➤ **Ciekawostki.** Każdy rozdział zaczyna się od opisu ciekawego zjawiska lub doświadczenia, które zostaje później szczegółowo wyjaśnione w którymś miejscu tego rozdziału. Ma to za zadanie zachęcenie czytelnika do uważnego przeczytania całego rozdziału.

➤ **Sprawdziany** pojawiają się w miejscach, w których czytelnik powinien przerwać na chwilę lekturę i spróbować odpowiedzieć na pytanie: „czy potrafisz — wykorzystując informacje zawarte w przeczytanym właśnie paragrafie lub przykładzie — dać sobie radę z tym krótkim zadaniem, nie wymagającym obliczeń, lecz tylko chwili namysłu?” Jeśli nie, to należy jeszcze raz przestudiować ten materiał przed dalszą lekturą; porównaj np. sprawdzian 3 w rozdziale 5 oraz sprawdzian 1 w rozdziale 6. **Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów podane są na końcu książki.**

➤ **Przykłady**, czyli zadania rozwiązane w podręczniku, mają pomóc czytelnikowi w utrwaleniu pojęć wprowadzonych w głównym tekście oraz w stopniowym opano-

Dane oryginału:  
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 1  
John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published by JohnWiley & Sons, Inc.  
Copyright © 2001 by John Wiley & Sons, Inc.  
All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przekład z języka angielskiego **Mirosław Łukaszewski**

Redaktor naukowy **Jan Mostowski**

Redaktor **Beata Mikołajek-Zielińska**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. 022 69 54 321  
faks 022 69 54 031  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

ISBN 978-83-01-14024-3 t. 1  
ISBN 978-83-01-13997-1 t. 1-5

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie pierwsze, 3 dodruk  
Arkuszy drukarskich 47  
Druk ukończono w kwietniu 2007 r.  
Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa  
Druk i oprawa: GRAFMAR Sp. z o.o.  
36-100 Kolbuszowa Dolna, ul. Wiejska 43

umiejętności rozwiązywania zadań. Ich rozwiązania wychodzą od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania danego zadania, oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza (O→), a następnie prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► Fragmenty zatytułowane *Sztuka rozwiązywania zadań* zawierają porady praktyczne, ułatwiające początkującemu studentowi fizyki nabycie umiejętności rozwiązywania typowych zadań i uniknięcie często spotykanych błędów.

► Na końcu tekstu głównego każdego rozdziału znajduje się *Podsumowanie*, w którym zebrane są podstawowe pojęcia i prawa wprowadzone w tym rozdziale. *Lektura* tego podsumowania nie może oczywiście zastąpić starannego przeczytania całego tekstu rozdziału.

► *Pytania* są podobne do sprawdzianów — uzyskanie odpowiedzi na postawione pytania nie wymaga wykonywania obliczeń, lecz dobrego zrozumienia omówionego materiału i niezbyt skomplikowanego rozumowania, czasem prostych obliczeń w pamięci. *Odpowiedzi na pytania o numerach nieparzystych* podane są na końcu książki.

► *Zadania* są zebrane w grupy dotyczące kolejnych paragrafów, a w ramach takiej grupy są ustawione z grubsza w kolejności wzrastającej trudności. *Odpowiedzi do zadań o numerach nieparzystych* podane są na końcu książki. Rozwiązania części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej (informacja o oznaczeniu zadań, których rozwiązania można znaleźć w różnych materiałach, jest podana na początku każdego zestawu zadań domowych). Zadania trudniejsze oznaczono gwiazdką.

► W niektórych rozdziałach na samym końcu zestawu zadań występują *zadania dodatkowe*. Nie są one przypisane do konkretnych paragrafów i dotyczą nieraz zagadnień z zastosowań fizyki.

## Zbiór zadań uzupełniających

Podręcznikowi będzie towarzyszył *Zbiór zadań uzupełniających*. Zbiór ten będzie zawierał inny zestaw pytań i zadań domowych oraz więcej przykładów. Oto jego cechy:

► *Przykłady uzupełniające* są częściowo przeniesione z podręcznika głównego, częściowo całkiem nowe. Wszystkie zaczynają się od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania zadania (oznaczonych ikonką O→) i prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► *Pytania* są trzech rodzajów:

1. *pytania typu sprawdzianów*, jak w głównej części podręcznika;

2. *pytania porządkujące*, wymagające zebrania rozwiązań potrzebnych w określonej sytuacji, mające charakter rozgrzewki przed jednym z dalszych zadań;

3. *pytania do dyskusji*, przywrócone z wydań czwartego i wcześniejszych na żądanie czytelników.

► *Zadania* uzupełniają zestawy zadań przytoczone w głównej części książki; niektóre zostały przesunięte do zbioru z podręcznika głównego. Ich kolejność nie jest związana ani z ich trudnością, ani z kolejnością paragrafów czy pojęć w danym rozdziale. Niektóre nowe zadania dotyczą zagadnień z zakresu zastosowań fizyki. W niektórych rozdziałach końcowe zadania tworzą *zestawy zadań* dotyczących podobnych zagadnień. W innych rozdziałach na końcu podano *zadania z rozwiązaniami*.

## Wersje podręcznika

Szóste wydanie *Podstaw fizyki* w angielskiej wersji językowej jest dostępne w kilku wersjach, tak by zaspokoić różne potrzeby wykładowców i studentów. Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–38 (ISBN 0-471-32000-5). Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie 45 rozdziałów (ISBN 0-471-33236-4). Każde z tych wydań jest dostępne w postaci jednego tomu w twardej oprawie lub w następujących częściach:

► tom 1 — rozdziały 1–21 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, 0-471-33235-6;

► tom 2 — rozdziały 22–45 (elektryczność i magnetyzm oraz fizyka współczesna), oprawa twarda 0-471-36037-6;

► część 1 — rozdziały 1–12, oprawa miękka 0-471-33234-8;

# 1 Pomiar

Gdy morze jest spokojne, możesz obserwować zachód Słońca, leżąc na plaży, a potem, wstając, zobaczyć jeszcze raz, jak Słońce znika za horyzontem. Ciekawe, że mierząc czas między tymi dwoma zachodami Słońca, możesz wyznaczyć przybliżony promień Ziemi.

**Jak to możliwe, że tak prosta obserwacja może posłużyć do pomiaru wielkości Ziemi?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 1.1. Jak się mierzy różne rzeczy?

Fizyka opiera się na pomiarach. Poznajemy ją, ucząc się mierzyć różne wielkości fizyczne. Są to między innymi: długość, czas, masa, temperatura, ciśnienie i natężenie prądu elektrycznego.

Każdą wielkość fizyczną mierzymy w jej jednostkach, porównując mierzoną wielkość z wzorcem. **Jednostka** to nazwa miary danej wielkości — na przykład jednostką długości jest metr (oznaczenie: m). Wzorec zawiera dokładnie jedną (1,0) jednostkę wielkości. Jak dowiesz się niebawem, wzorec metra, którego długość wynosi dokładnie 1,0 m, to droga przebyta przez światło w próżni w pewnym określonym ułamku sekundy. Jednostkę i jej wzorec możemy wybrać, jak nam się tylko podoba. Dobrze jednak zrobić to tak, aby wszyscy naukowcy zgadzali się, że jest to wybór rozsądny i użyteczny.

Gdy już wybierzemy wzorec, powiedzmy długości, musimy uzgodnić metody porównywania z nim wszelkich możliwych długości — promienia atomu wodoru, rozstawu osi deskorolki czy odległości gwiazdy od Ziemi. Jedną z takich metod może być użycie linijki, stanowiącej w przybliżeniu wzorec długości. Jednak często musimy korzystać z metod pośrednich. Za pomocą linijki nie da się zmierzyć na przykład promienia atomu czy odległości do gwiazdy.

Wielkości fizycznych jest tak wiele, że musimy je jakoś uporządkować. Na szczęście, nie wszystkie są niezależne od siebie — na przykład prędkość to stosunek długości do czasu. Można więc wybrać — na mocy umowy międzynarodowej — niezbyt dużą liczbę wielkości fizycznych, między innymi długość i czas, i tylko dla nich ustalić wzorce, a wszystkie inne wielkości fizyczne wyrażać przez te *wielkości podstawowe* i ich wzorce (*wzorce wielkości podstawowych*). Na przykład prędkość wyrażamy przez długość i czas, stosując przy tym wzorce wielkości podstawowych.

Wzorce wielkości podstawowych powinny być łatwo dostępne i niezmiennie. Jeśli za wzorec długości przyjmiemy odległość nosa od palca wskazującego wyciągniętej ręki, to będzie to z pewnością wzorec łatwo dostępny dla każdego, ale oczywiście jego wartość będzie inna dla różnych osób. Pomiary w nauce i technice wymagają coraz większej dokładności, dlatego też bardzo istotna jest niezmiennosc wzorca. Wiele wysiłku wkłada się w to, aby kopie wzorców podstawowych były dostępne dla każdego, kto ich potrzebuje.

## 1.2. Międzynarodowy Układ Jednostek

W 1971 roku, na XIV Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wąg dokonano wyboru siedmiu podstawowych wielkości fizycznych, tworząc w ten sposób Międzynarodowy Układ Jednostek, nazywany *układem SI*, od skrótu jego nazwy w języku francuskim. W tabeli 1.1 podano nazwy jednostek długości, masy i czasu — trzech wielkości podstawowych, którymi będziemy się zajmować w początkowych rozdziałach podręcznika. Jednostki te zdefiniowano tak, aby ich wartości były bliskie pojęciu większości ludzi.

Za pomocą tych jednostek podstawowych definiujemy wiele *jednostek pochodnych* układu SI. Na przykład jednostkę mocy w układzie SI, czyli wat (sym-

Tabela 1.1. Niektóre jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol jednostki
długość	metr	m
czas	sekunda	s
masa	kilogram	kg

bol W), wyrażamy przez jednostki podstawowe masy, długości i czasu. Jak przekonasz się w rozdziale 7:

$$1 \text{ wat} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3. \quad (1.1)$$

Kombinację jednostek po prawej stronie tej równości odczytujemy jako: kilogram razy metr kwadrat na sekundę do sześćcianu.

Do zapisu wielkości bardzo dużych i bardzo małych, z którymi w fizyce mamy często do czynienia, stosujemy zapis w postaci iloczynu liczby z przedziału między 0 a 10 i odpowiedniej potęgi 10. W tym zapisie:

$$3\,560\,000\,000 \text{ m} = 3,56 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad (1.2)$$

zaś

$$0,000\,000\,492 \text{ s} = 4,92 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (1.3)$$

Na komputerze nieraz zapisywane jest to w skrócie, jako 3,56 E9 i 4,92 E-7, gdzie E oznacza „wykładnik potęgi o podstawie 10”. Na kalkulatorach spotykamy postać jeszcze bardziej skróconą, w której E zastąpione jest spacją.

Innym wygodnym sposobem zapisu wielkości bardzo dużych i bardzo małych jest zastosowanie przedrostków, podanych w tabeli 1.2. Jak widać, dodanie do jednostki określonego przedrostka daje jednostkę różniącą się od jednostki głównej o czynnik, będący pewną potęgą liczby 10. Na przykład pewną wartość mocy możemy wyrazić jako:

$$1,27 \cdot 10^9 \text{ wata} = 1,27 \text{ gigawata} = 1,27 \text{ GW}, \quad (1.4)$$

a pewien odstęp czasu jako:

$$2,35 \cdot 10^{-9} \text{ sekundy} = 2,35 \text{ nanosekundy} = 2,35 \text{ ns}. \quad (1.5)$$

Niektóre z tych jednostek, na przykład mililitr, centymetr, kilogram czy megabajt są już wam zapewne dobrze znane.

### 1.3. Zamiana jednostek

Często musimy dokonać zamiany jednostek, w których wyrażona jest jakaś wielkość fizyczna. W tym celu mnożymy wynik pomiaru przez współczynnik przeliczeniowy, czyli równy jedności stosunek wielkości wyrażonej w różnych jednostkach. Na przykład: 1 minuta i 60 sekund to takie same odstępy czasu, a więc otrzymujemy:

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1.$$

Stosunki (1 min)/(60 s) i (60 s)/(1 min) mogą służyć więc za współczynniki przeliczeniowe. *Nie wolno* oczywiście napisać: 1/60 = 1, ani 60 = 1 — liczba jednostek musi zawsze występować łącznie z jednostką.

Mnożenie dowolnej wielkości przez jedność nie zmienia tej wielkości, dlatego też współczynniki przeliczeniowe możemy wstawiać w dowolne miejsca. Przy zamianie jednostek korzystamy z nich w celu wyeliminowania pewnych jednostek. Na przykład, aby zamienić 2 minuty na sekundy postępujemy w następujący sposób:

$$2 \text{ min} = (2 \text{ min})(1) = (2 \text{ min}) \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 120 \text{ s}. \quad (1.6)$$

Tabela 1.2. Nazwy przedrostków jednostek SI.

Czynnik	Przedrostek <sup>1</sup>	Symbol
10 <sup>24</sup>	jotta	Y
10 <sup>21</sup>	zetta	Z
10 <sup>18</sup>	eksa	E
10 <sup>15</sup>	peta	P
10 <sup>12</sup>	tera	T
10 <sup>9</sup>	giga	G
10 <sup>6</sup>	mega	M
10 <sup>3</sup>	kilo	k
10 <sup>2</sup>	hekto	h
10 <sup>1</sup>	deka	da
10 <sup>-1</sup>	decy	d
10 <sup>-2</sup>	centy	c
10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>-6</sup>	mikro	μ
10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>-12</sup>	piko	p
10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>-18</sup>	atto	a
10 <sup>-21</sup>	zepto	z
10 <sup>-24</sup>	jokto	y

<sup>1</sup> Przedrostki najczęściej używane oznaczono tłustym drukiem.

Jeśli po wprowadzeniu współczynnika przeliczeniowego *nie* uzyskujesz skrócenia jednostek, które chciałeś wyeliminować, to spróbuj użyć jego odwrotności. Przy zamianie jednostek ich symbole podlegają takim samym prawom algebry, jak zmienne i liczby.

Współczynniki przeliczeniowe między jednostkami SI i jednostkami innych układów podane są w dodatku D i na wewnętrznej stronie tylnej okładki. Jednak podano je tam nie w wyżej omówionej postaci stosunków, lecz równości, jak:  $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ . W przykładzie pokazano, jak je zastosować.

## Przykład 1.1

Gdy w 490 r. p.n.e. Filippides przebiegł z Maratonu do Aten, aby przekazać wiadomość o zwycięstwie Greków nad Persami, pokonał tę drogę z prędkością wynoszącą około 23 jazdy na godzinę (jazdy/h). Jazda to używana w starożytnej Grecji jednostka długości, podobnie jak stadion i pletron: 1 jazdę definiowano jako 4 stadia, 1 stadion jako 6 pletronów, a 1 pletron to w dzisiejszych jednostkach 30,8 m. Wyznacz prędkość Filippidesa w kilometrach na sekundę (km/s).

### ROZWIĄZANIE:

➡ Należy zastosować współczynniki przeliczeniowe w celu wyeliminowania niepożądanych jednostek. Zapisujemy:

$$\begin{aligned} 23 \text{ jazdy/h} &= \left(23 \frac{\text{jazdy}}{\text{h}}\right) \left(\frac{4 \text{ stadia}}{1 \text{ jazdę}}\right) \left(\frac{6 \text{ pletronów}}{1 \text{ stadion}}\right) \\ &\times \left(\frac{30,8 \text{ m}}{1 \text{ pletron}}\right) \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \\ &= 4,7227 \cdot 10^{-3} \text{ km/s} \approx 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ km/s. (odpowiedź)} \end{aligned}$$

## Przykład 1.2

Beczka jest jednostką objętości, stosowaną w Szkocji do pomiaru ilości świeżo złowionych śledzi: 1 beczka = 170,474 litrów (l) ryb, co daje około 750 śledzi. Wyobraźmy sobie, że transport 1255 beczek śledzi ma być dostarczony do Arabii Saudyjskiej, gdzie jednostką długości jest 1 covido = 48,26 cm, a więc w deklaracji celnej należy podać wielkość ładunku w covido sześciennych. Jaką liczbę należy wpisać do deklaracji celnej?

### ROZWIĄZANIE:

W dodatku D odczytujemy, że  $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$ . ➡ Aby zamienić centymetry *sześciennie* na covido *sześciennie*, musimy wstawić do wzoru przeliczeniowego *sześcian* współczynnika przeliczeniowego między centymetrami a covido. Otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned} 1255 \text{ beczek} &= (1255 \text{ beczek}) \left(\frac{170,474 \text{ l}}{1 \text{ beczka}}\right) \left(\frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ l}}\right) \left(\frac{1 \text{ covido}}{48,26 \text{ cm}}\right)^3 \\ &= 1,903 \cdot 10^3 \text{ covido}^3. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Cyfry znaczące i cyfry po przecinku

Jeśli w przykładzie 1.1 do dzielenia użyjesz kalkulatora, to na wyświetlaczu otrzymasz np.  $4,722\,666\,666\,67 \cdot 10^{-3}$  (zależnie od liczby wyświetlanych cyfr). Dokładność tej liczby jest iluzoryczna. Wynik zaokrągliliśmy do  $4,7 \cdot 10^{-3}$ , aby zachować zgodność z dokładnością danych w zadaniu. Podana wartość prędkości, 23 jazdy/h, zawiera dwie cyfry nazywane **cyframi znaczącymi**. Wobec tego wynik również zaokrągliliśmy do dwóch cyfr znaczących. W tym podręczniku będziemy zwykle podawać wynik zaokrąglony do takiej liczby cyfr znaczących, która odpowiada danej znanej najmniej dokładnie (tylko czasem podaje się jeszcze jedną cyfrę znaczącą). Gdy pierwsza z cyfr, które opuszczamy, wynosi 5 lub więcej, ostatnią pozostawianą cyfrę zwiększamy o jeden; w przeciwnym wypadku nie zmieniamy jej. Na przykład, zaokrąglając liczbę 11,3516 do trzech cyfr znaczących podajemy 11,4, a zaokrąglając do trzech cyfr

znaczących liczbę 11,3279 podajemy 11,3 (przy podaniu odpowiedzi stosujemy zwykle znak równości (=), a nie znak równości przybliżonej ( $\approx$ ), nawet wtedy, gdy dokonujemy zaokrąglenia liczby).

Jeśli dana jest liczba postaci 3,15 lub  $3,15 \cdot 10^3$ , to liczba jej cyfr znaczących jest oczywista, lecz jak potraktować liczbę 3000? Czy zawiera jedną cyfrę znaczącą, tzn. że można zapisać ją jako  $3 \cdot 10^3$ ? Czy może wszystkie cztery jej cyfry są znaczące, tzn. że należy zapisać ją jako  $3,000 \cdot 10^3$ ? W tym podręczniku, podając liczbę w postaci 3000, będziemy zawsze mieć na myśli, że wszystkie cztery jej cyfry są znaczące, lecz czytając inne książki, możesz spotkać się z inną umową.

Nie należy mylić *cyfr znaczących* z *cyframi po przecinku*. Rozważmy odcinki o długościach: 35,6 mm, 3,56 m i 0,00356 m. Każda z nich ma trzy cyfry znaczące, choć odpowiednio jedną, dwie i pięć cyfr po przecinku.



## 1.4. Długość

W roku 1792 w nowo powstałej Republice Francuskiej ustanowiono nowy układ miar i wag — układ metryczny. Jego kamieniem węgielnym był metr, zdefiniowany jako jedna dziesięciomilionowa część odległości od bieguna północnego do równika. Później, ze względów praktycznych, wzorzec ten związany z wymiarami Ziemi zarzucono, a metr określono jako odległość między dwiema rysami, wygrawerowanymi blisko końców pręta z platyny i irydu — wzorca metra, przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag pod Paryżem. Dokładne kopie tego wzorca rozesłano do biur wzorców na całym świecie. Na podstawie wzorców wtórnych sporządzano wzorce jeszcze bardziej powszechnie, tak że w rezultacie każdy układ pomiarowy powiązany był ze wzorcem pierwotnym za pośrednictwem złożonej procedury porównawczej.

Wraz z upływem czasu rozwój nauki i techniki doprowadził do sytuacji, w której niezbędne stało się ustalenie wzorca dokładniejszego od odstępów dwóch rys na metalowym pręcie. W 1960 roku przyjęto nowy wzorzec metra, związany z długością fali światła. Dokładnie rzecz biorąc, wzorzec metra zdefiniowano jako 1 650 763,73 długości fali wybranej pomarańczowoczerwonej linii, wysyłanej przez atomy kryptonu-86 (tzn. określonego izotopu tego pierwiastka) podczas wyładowania w gazie. Tak dziwna liczba długości fali została przyjęta po to, aby nowy wzorzec był bliski starymu wzorcowi z metalu.

Jednakże, w 1983 roku stwierdzono, że nawet wzorzec kryptonowy nie może już sprostać wzrastającym wymaganiom, dotyczącym dokładności pomiarów i zdecydowano się na krok radykalny. Metr został zdefiniowany jako droga, którą przebywa światło w ustalonym czasie. Podczas XVII Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag przyjęto, że:

➤ Metr jest długością drogi, którą przebywa światło w próżni w czasie  $1/299\,792\,458$  sekundy.

Tabela 1.3. Wybrane długości (w przybliżeniu)

Wielkość	Długość w metrach
odległość Ziemi od najstarszych galaktyk	$2 \cdot 10^{26}$
odległość Ziemi od galaktyki Andromedy	$2 \cdot 10^{22}$
odległość Ziemi od najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
odległość Ziemi od Plutona	$6 \cdot 10^{12}$
promień Ziemi	$6 \cdot 10^6$
wysokość Mt. Everestu	$9 \cdot 10^3$
grubość tej kartki	$1 \cdot 10^{-4}$
rozmiar wirusa	$1 \cdot 10^{-8}$
promień atomu wodoru	$5 \cdot 10^{-11}$
promień protonu	$1 \cdot 10^{-15}$

Ten przedział czasu został tak ustalony, aby prędkość światła  $c$  była równa dokładnie:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Pomiary prędkości światła stały się już wówczas tak bardzo dokładne, że można było przyjąć wartość prędkości światła jako stałą definicyjną i użyć jej do określenia wzorca metra.

W tabeli 1.3 podano różne typowe wartości długości — od charakteryzujących Wszechświat, aż do rozmiarów obiektów bardzo małych.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Rząd wielkości

*Rzędem wielkości* nazywamy wykładnik potęgi liczby 10, gdy wielkość wyrażamy w ten sposób, że przed potęgą stoi liczba z przedziału od 0 do 10. Na przykład, jeśli  $A = 2,3 \cdot 10^4$ , a  $B = 7,8 \cdot 10^4$ , to rząd obydwu tych wielkości,  $A$  i  $B$ , wynosi 4.

Inżynierowie i naukowcy szacują często wynik obliczeń do *najbliższego* rzędu wielkości. W naszym przykładzie najbliższy rząd wielkości wynosi 4 dla  $A$  i 5 dla  $B$ . Oszacowanie rzędu wielkości stosuje się zwykle wtedy, gdy dokładne wartości danych do obliczeń są nieznane lub trudne do wyznaczenia. Przykład 1.3 zawiera takie właśnie oszacowanie.

### Przykład 1.3

Największy na świecie kłębek sznurka ma promień około 2 m. Ile wynosi — co do najbliższego rzędu wielkości — całkowita długość  $L$  sznura w tym kłębku?

#### ROZWIĄZANIE:

Moglibyśmy, oczywiście, rozwinąć kłębek i zmierzyć całkowitą długość  $L$  sznura, ale wymagałoby to wiele trudu, a do tego sprawiłoby wielką przykrość budownicemu kłębka.

☛ Skoro jednak interesuje nas tylko wynik podany z dokładnością do najbliższego rzędu wielkości, to możemy wziąć pod uwagę jedynie oszacowania wszystkich potrzebnych nam wielkości.

Założmy więc, że kłębek jest kulą o promieniu  $R = 2$  m. Sznurek nie wypełnia całkowicie objętości tej kuli — między sąsiednimi zwojami sznurka jest wiele obszarów pustych. Aby uwzględnić istnienie tych luk, oszacujemy pole przekroju po-

przecznego sznurka z nadmiarem, zakładając, że jest on kwadratem o boku  $d = 4$  mm. Sznurek o długości  $L$  i polu przekroju poprzecznego  $d^2$  zajmuje objętość:

$$V = (\text{pole przekroju poprzecznego})(\text{długość}) = d^2 L.$$

Objętość ta jest w przybliżeniu równa objętości kłębka, czyli  $\frac{4}{3}\pi R^3$ , co wynosi około  $4R^3$ , bo  $\pi$  jest równe około 3. Otrzymujemy więc:

$$d^2 L = 4R^3,$$

a stąd:

$$L = \frac{4R^3}{d^2} = \frac{4(2 \text{ m})^3}{(4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} \\ = 2 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 10^6 \text{ m} = 10^3 \text{ km.} \quad (\text{odpowiedź})$$

(Zauważ, że do tak prostych obliczeń wcale nie potrzebujesz kalkulatora). Tak więc z dokładnością do najbliższego rzędu wielkości kłębek zawiera około 1000 km sznurka!

## 1.5. Czas

Słowo czas ma dwa znaczenia. W życiu codziennym, a nieraz i w nauce musimy znać aktualny czas (wskazanie zegara), aby móc ustalić kolejność zdarzeń. W nauce musimy ponadto bardzo często wiedzieć, jak długo trwa jakieś zjawisko. Tak więc wzorzec czasu musi dać odpowiedź na dwa pytania: „*Kiedy* to się zdarzyło?” i „*Jak długo* to trwało?” W tabeli 1.4 podano kilka przedziałów czasu.

Wzorcem czasu może być dowolne zjawisko powtarzalne. Wyznaczający długość dnia okres obrotu Ziemi był używany do tego celu przez wiele stuleci —

na rysunku 1.1 przedstawiono względnie nowy przykład zegara, opartego na obrocie Ziemi. Zegar kwarcowy, w którym stosuje się ciągłe drgania pierścienia z kwarcu, można wykalibrować względem okresu obrotu Ziemi na podstawie obserwacji astronomicznych i używać go do pomiaru przedziałów czasu w laboratorium. Okazuje się jednak, że takiej kalibracji nie można dokonać z dokładnością wymaganą przez nowoczesną naukę i technikę.

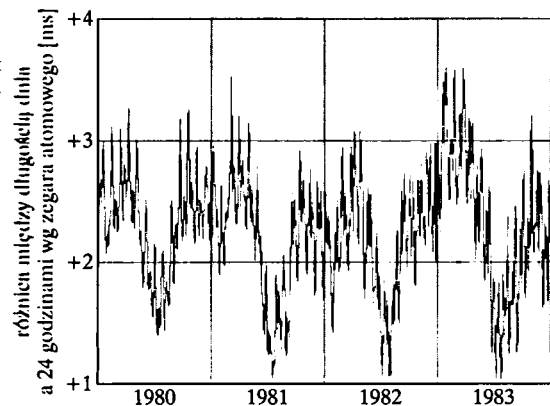
Aby otrzymać lepsze wzorce czasu, zbudowano tzw. zegary atomowe. W Stanach Zjednoczonych wzorcem czasu jest zegar atomowy, znajdujący się w Państwowym Instytucie Wzorców i Techniki (NIST) w Boulder, w stanie Kolorado. Pochodzące z niego sygnały czasu są wysyłane przez radio na falach krótkich i przez telefon, a także dostępne są na stronie internetowej Obserwatorium Marynarki Stanów Zjednoczonych: [tycho.usno.navy.mil/time.html](http://tycho.usno.navy.mil/time.html). Podobne systemy działają w innych krajach. Aby dokładnie ustalić czas w określonym miejscu na świecie, należy uwzględnić czas, potrzebny na dotarcie do tego miejsca sygnału z odpowiedniego obserwatorium.

Na rysunku 1.2 przedstawiono zmiany długości jednego dnia na Ziemi w okresie 4 lat, otrzymane przez porównanie jej ze wskazaniem cezowego zegara atomowego. Zmiany te są powtarzalne i skorelowane z porami roku, dlatego też za rozbieżności między wskazaniem zegara ziemskiego i atomowego skłonni jesteśmy winić Ziemię. Są one prawdopodobnie związane z przyptywami, powodowanymi przez Księżyc i z wpływem silnych wiatrów.

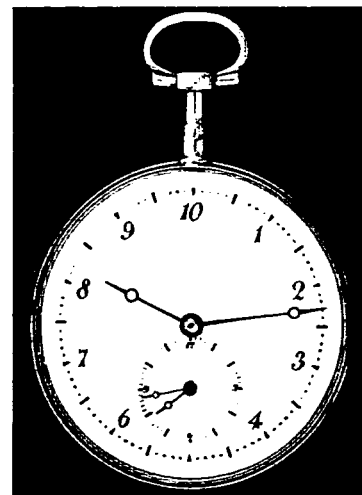
Podczas XIII Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wąg przyjęto w 1967 roku następujący wzorec sekundy, oparty na zegarze cezowym:

➤ Sekunda jest to czas 9 192 631 770 drgań promieniowania (o ustalonej długości fali), wysyланego przez atom cezu-133.

Zegary atomowe są ze sobą tak zgodne, że wskazania dwóch takich zegarów różniłyby się od siebie o 1 s dopiero po 6000 lat. Lecz nawet ta dokładność błędnie w porównaniu z dokładnością zegarów, które są dziś w budowie — mają one mieć dokładność  $1:10^{18}$ , tzn. 1 s na  $1 \cdot 10^{18}$  s (czyli około  $3 \cdot 10^{10}$  lat).



Rys. 1.2. Zmiany długości dnia zarejestrowane w czasie 4 lat. Zauważ, że cała skala na osi pionowej odpowiada zaledwie 3 ms (3 milisekundy = 0,003 s)



Rys. 1.1. Gdy w 1792 roku wprowadzono układ metryczny, zmieniono również definicję godziny, tak aby dzień miał 10 godzin. Pomysł ten się nie przyjął. Producent tego 10-godzinnego zegara był jednak tak mądry, że zaopatrzył go także w małą tarczę z tradycyjnym 12-godzinnym podziałem dnia. Czy wskazówki tych dwóch tarcz pokazują ten sam czas?

Tabela 1.4. Wybrane przedziały czasu (w przybliżeniu)

Wielkość	Czas [s]
czas życia protonu (przewidywany)	$1 \cdot 10^{39}$
wiek Wszechświata	$5 \cdot 10^{17}$
wiek piramidy Cheopsa	$1 \cdot 10^{11}$
średni czas życia ludzkiego	$2 \cdot 10^9$
dość	$9 \cdot 10^4$
czas między kolejnymi uderzeniami ludzkiego serca	$8 \cdot 10^{-1}$
czas życia mionu	$2 \cdot 10^{-6}$
najkrótszy impuls światła w laboratorium	$6 \cdot 10^{-15}$
czas życia najbardziej nietrwałej cząstki	$1 \cdot 10^{-23}$
czas Plancka <sup>1</sup>	$1 \cdot 10^{-43}$

<sup>1</sup> Jest to najkrótszy czas od Wielkiego Wybuchu, po jakim zaczęły już obowiązywać znane nam dziś prawa fizyki.

## Przykład 1.4\*

Wyobraź sobie, że leżąc na plaży obserwujesz Słońce, zachodzące nad spokojnym morzem. W chwili, gdy Słońce znika ci z oczu, włączasz stoper. Następnie wstajesz, wznosząc oczy na wysokość  $h = 1,7$  m, i zatrzymujesz stoper, gdy po raz drugi przestajesz widzieć Słońce. Stoper wskazał czas  $t = 11,1$  s. Ile wynosi promień Ziemi  $r$ ?

ROZWIĄZANIE:

W chwili, gdy Słońce znika za horyzontem, twój wzrok jest skierowany wzdłuż stycznej do powierzchni Ziemi. Dwie takie styczne nakreślono na rysunku 1.3. Gdy leżysz, masz oczy w punkcie A, a gdy stoisz, są one o  $h$  wyżej. W tym drugim wypadku patrzysz wzdłuż linii stycznej do powierzchni Ziemi w punkcie B. Oznaczmy przez  $d$  odległość tego punktu od oczu i zaznaczmy na rysunku 1.3 promień Ziemi  $r$  w punktach A i B. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2,$$

czyli

$$d^2 = 2rh + h^2. \quad (1.7)$$

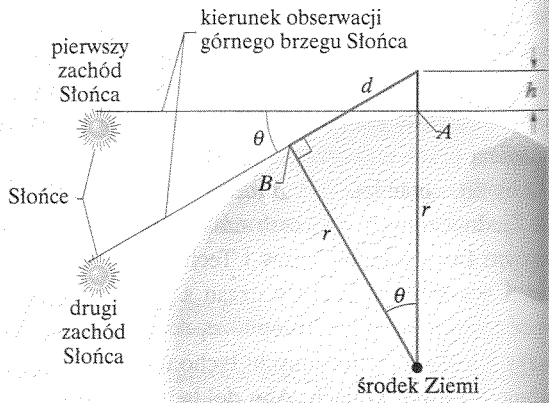
Wysokość  $h$  jest niezwykle mała w porównaniu z promieniem Ziemi  $r$ , więc wyraz  $h^2$  jest znikomo mały w porównaniu z wyrazem  $2rh$  i wzór (1.7) można zapisać w postaci:

$$d^2 = 2rh. \quad (1.8)$$

Na rysunku 1.3 zaznaczono też kąt  $\theta$  między promieniami Ziemi w punktach A i B. Jest to kąt zakreślony nad powierzchnią Ziemi przez Słońce, w zmierzonym przez ciebie czasie  $t = 11,1$  s. W ciągu pełnej doby, czyli w przybliżeniu 24 godzin, Słońce zakreśla nad Ziemią kąt  $360^\circ$ . Możemy więc zapisać proporcję:

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24 \text{ h}},$$

\* Na podstawie artykułu Dennisa Rawlinsa w *American Journal of Physics*, t. 47, s. 126 (luty 1979). Metoda ta daje najlepsze wyniki na równiku.



Rys. 1.3. Przykład 1.4. Linia, wzdłuż której patrzysz na zniknięcie Słońca za horyzontem obraca się o kąt  $\theta$  gdy wstajesz, a wznosisz oczy na wysokość  $h$  nad punkt A (dla wyrazistości rysunku kąt  $\theta$  i odcinek  $h$  narysowano przesadnie duże)

a po podstawieniu  $t = 11,1$  s otrzymujemy:

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11,1 \text{ s})}{(24 \text{ h})(60 \text{ min/h})(60 \text{ s/min})} = 0,04625^\circ.$$

Na rysunku 1.3 widać także, że  $d = r \operatorname{tg} \theta$ . Wstawiając ten związek do równania (1.8), otrzymujemy:

$$r^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 2rh,$$

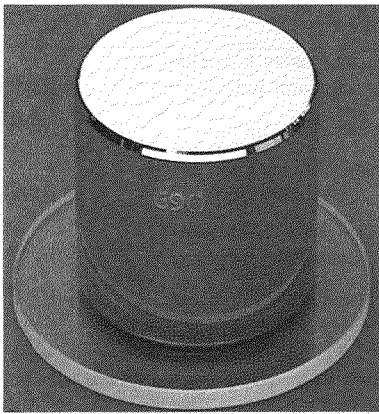
czyli

$$r = \frac{2h}{\operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Podstawiając do tego wzoru  $\theta = 0,04625^\circ$  oraz  $h = 1,7$  m, otrzymujemy ostatecznie:

$$r = \frac{(2)(1,7 \text{ m})}{\operatorname{tg}^2 0,04625^\circ} = 5,22 \cdot 10^6 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten jest zgodny z przyjętą obecnie wartością średniego promienia Ziemi ( $6,37 \cdot 10^6$  m), z dokładnością do 20%.



## 1.6. Masa

### Wzorec kilograma

Wzorcem masy w układzie SI jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag pod Paryżem walec z platyny i irydu (rys. 1.4), któremu, na mocy umowy międzynarodowej, przypisuje się masę jednego kilograma. Dokładne kopie znajdują się w laboratoriach wzorców w innych krajach, dzięki czemu

Rys. 1.4. Międzynarodowy wzorec masy 1 kg, w postaci wykonanego z platyny i irydu walca, o wysokości i średnicy podstawy równej 3,9 cm

dowolnych ciał można porównać z kopią wzorca za pomocą wagi. W tabeli 1.5 podano różne przykłady masy wyrażonej w kilogramach, różniące się od siebie w skrajnym przypadku o ponad 83 rzędy wielkości.

W Stanach Zjednoczonych kopia wzorca kilograma przechowywana jest w podziemiach Instytutu NIST. Wyjmuje się ją stamtąd — nie częściej niż raz na rok — aby sprawdzić masy jej kopii wtórnych, używanych w innych laboratoriach amerykańskich. Od roku 1889 dwa razy przewożono ją do Francji, w celu porównania z wzorcem pierwotnym.

## Inny wzorzec masy

Masy atomów mogą być porównywane ze sobą znacznie dokładniej niż ze wzorcem kilograma. Z tego względu mamy też inny wzorzec masy. Jest nim atom węgla-12, któremu na mocy umowy międzynarodowej przypisano masę 12 atomowych jednostek masy (symbol: u). Dwie jednostki masy związane są ze sobą w następujący sposób:

$$1 \text{ u} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad (1.9)$$

przy czym dokładność czynnika liczbowego wynosi  $\pm 10$  na dwóch ostatnich miejscach dziesiętnych. Naukowcy są dziś w stanie wyznaczać doświadczalnie masy różnych atomów w stosunku do masy atomu węgla-12 z bardzo dobrą dokładnością, jednak nie udało się dotychczas porównać ich równie dokładnie z masą jednostki bliższej codziennym pomiarom, tzn. kilograma.

Tabela 1.5. Wybrane masy (w przybliżeniu)

Obiekt	Masa [kg]
znany Wszechświat	$1 \cdot 10^{53}$
nasza Galaktyka	$2 \cdot 10^{41}$
Słońce	$2 \cdot 10^{30}$
Księżyc	$7 \cdot 10^{22}$
planetoida Eros	$5 \cdot 10^{14}$
niewielka góra	$1 \cdot 10^{12}$
transatlantyk	$7 \cdot 10^7$
słoń	$5 \cdot 10^3$
winogrono	$3 \cdot 10^{-3}$
ziarnko kurzu	$7 \cdot 10^{-10}$
cząsteczka penicyliny	$5 \cdot 10^{-17}$
atom uranu	$4 \cdot 10^{-25}$
proton	$2 \cdot 10^{-27}$
elektron	$9 \cdot 10^{-31}$

## Podsumowanie

**Pomiary w fizyce** Fizyka opiera się na pomiarach wielkości fizycznych. Niektóre z tych wielkości (m.in. długość, czas i masę) wybrano jako wielkości podstawowe. Dla każdej z nich ustalono jednostkę (np. metr, sekundę i kilogram) oraz jej wzorzec. Inne wielkości fizyczne definiuje się za pomocą wielkości podstawowych oraz ich jednostek i wzorców.

**Jednostki SI** W niniejszej książce korzystamy przede wszystkim z Międzynarodowego Układu Jednostek SI. W kilku pierwszych rozdziałach będziemy posługiwać się trzema wielkościami fizycznymi, podanymi w tabeli 1.1. Wzorce ich jednostek, które muszą być niezmiennie i dostępne, zostały ustalone na mocy umów międzynarodowych. Z wzorców tych korzystamy podczas wszelkich pomiarów fizycznych wielkości podstawowych oraz wielkości wyznaczonych na ich podstawie. Do uproszczenia zapisu wyników pomiarów stosujemy zapis potęgowy oraz przedrostki podane w tabeli 1.2.

**Zamiana jednostek** Do zamiany jednych jednostek na inne (np. mil na godzinę na kilometry na sekundę) stosujemy metodę mno-

żenia danych przez współczynniki przeliczeniowe równe jedności, w której jednostki skracamy jak wyrażenia algebraiczne, aż do uzyskania jednostek pożądaných.

**Długość** Jednostka długości — metr — jest zdefiniowana jako droga, którą przebywa światło w dokładnie określonym czasie.

**Czas** Jednostkę czasu — sekundę — wiązano dawniej z okresem ruchu obrotowego Ziemi. Dziś definiujemy ją za pomocą drgań promieniowania, wysyłanego przez atomy cezu-133. Dokładne sygnały czasu, pochodzące z zegarów atomowych w laboratoriach wzorców są dostępne na całym świecie drogą radiową.

**Masa** Jednostka masy — kilogram — jest zdefiniowana za pomocą wzorca z platyny i irydu, przechowywanego we Francji, pod Paryżem. Do pomiarów mas atomów stosuje się zwykle inną jednostkę masy, określoną względem masy atomu węgla-12.

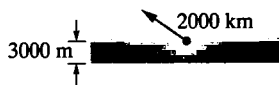
- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

## 1.4. Długość

1. a) Z ilu mikrometrów składa się 1 kilometr? b) Jaką częścią centymetra jest  $1 \mu\text{m}$ ? c) Ile mikrometrów zawiera 1 jard?
2. W latach dwudziestych XX wieku w Stanach Zjednoczonych były używane dwie jednostki objętości o nazwie beczułka. Beczułka do jabłek miała objętość ustaloną prawnie jako 7056 cali sześciennych, a beczułka do żurawin — jako 5826 cali sześciennych. Jeśli handlarz sprzedaje towar w ilości 20 beczułek do żurawin klientowi, który myśli, że są to beczułki do jabłek, to o ile litrów towaru różnią się ich obliczenia objętości dostawy?
3. Na pewnym torze trawiastym w Anglii konie ścigają się na dystansie 4 furlongów. Ile wynosi długość tego biegu w: a) żerdziach, b) łańcuchach? 1 furlong = 201,168 m, 1 żerdź = 5,0292 m, 1 łańcuch = 20,117 m.
4. Drukarze, do pomiaru wielkości czcionek, odstepu wierszy itd. stosują tradycyjne jednostki typograficzne. W Europie są to główne punkty typograficzne i cycera, przy czym 12 punktów = 1 cycero, a 6 cycer = 1,07 cala. Przy korekcie stwierdzono, że pewien rysunek został wydrukowany o 0,8 cm za wysoko. Ile wynosi przesunięcie rysunku w: a) punktach, b) cycerach?
5. Ziemia jest w przybliżeniu kulą o promieniu  $6,37 \cdot 10^6$  m. Ile wynosi: a) obwód Ziemi w kilometrach, b) pole powierzchni Ziemi w kilometrach kwadratowych, c) objętość Ziemi wyrażona w kilometrach sześciennych?

6. Jak wynika z dawnego manuskryptu, właściciel ziemski w czasach Króla Artura miał 3 akry ziemi uprawnej oraz pastwisko, o rozmiarach 25 prętów na 4 pręty. Ile wynosi całkowita powierzchnia jego gruntów: a) w ówczesnych jednostkach zwanych krzyżami, b) w metrach kwadratowych? 1 akr to powierzchnia pola o wymiarach 40 prętów na 4 pręty, 1 krzyż to 40 prętów na 1 pręt, a 1 pręt to 16,5 stopy.

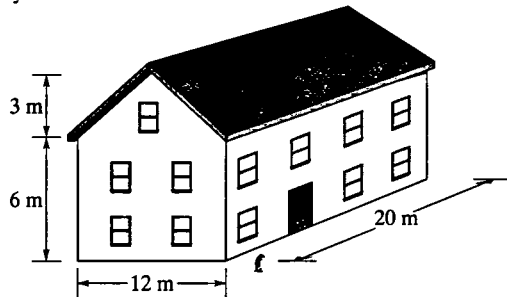
7. Antarktyda ma kształt zbliżony do półkola o promieniu 2000 km (rys. 1.5). Średnia grubość jej pokrywy lodowej wynosi 3000 m. Ile centymetrów sześciennych lodu zawiera Antarktyda (pomiń krzywiznę Ziemi)?



Rys. 1.5. Zadanie 7

8. W Stanach Zjednoczonych domek dla lalek jest normalnym domem w skali 1:12, tzn. każdy wymiar domku dla lalek jest równy

$\frac{1}{12}$  odpowiedniego wymiaru normalnego domu, a domek miniaturowy, tzn. domek dla lalek do domku dla lalek, jest normalnym domem w skali 1:144. Załóżmy, że normalny dom ma długość 20 m, szerokość 12 m i wysokość 6 m, a standardowy dach jest w przekroju trójkątem równoramiennym o wysokości 3 m (rys. 1.6). Ile wynosi objętość odpowiadającego mu: a) domku dla lalek, b) domku miniaturowego? Podaj odpowiedź w metrach sześciennych.



Rys. 1.6. Zadanie 8

9. Hydraulicy w Stanach Zjednoczonych, jako jednostki objętości używają często tzw. akrostopy, zdefiniowanej jako objętość wody, która pokrywa powierzchnię 1 akra warstwą o grubości 1 stopy. W wyniku potężnej burzy miasto o powierzchni  $26 \text{ km}^2$  zostało pokryte w ciągu 30 minut warstwą wody deszczowej o grubości 2 cali. Ile wynosi w akrostopach objętość wody, jaka spadła na to miasto? ilw www

## 1.5. Czas

10. Fizyk Enrico Fermi zauważył kiedyś, że czas standardowego wykładu (45 min) to mniej więcej jedno mikrostulecie. a) Ile minut ma mikrostulecie? b) Wyznacz błąd procentowy przybliżenia Fermiego. Skorzystaj z faktu, że błąd procentowy to:

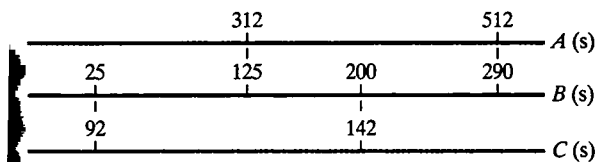
$$\left( \frac{\text{wartość dokładna} - \text{wartość przybliżona}}{\text{wartość dokładna}} \right) 100\%$$

11. Podaj wartość prędkości światła, która jest równa  $3 \cdot 10^8$  m/s, w: a) stopach na nanosekundę, b) milimetrach na pikosekundę.

12. a) W fizyce zjawisk mikroskopowych stosuje się czasem jednostkę czasu, zwaną *shake* (co można od biedy przełożyć jako „drgnięcie”). 1 *shake* jest równy  $10^{-8}$  s. Czy sekunda ma więcej tych jednostek niż rok sekund? b) Ludzkość istnieje na Ziemi od około  $10^6$  lat, a wiek Wszechświata wynosi około  $10^{10}$  lat. Jeśli przyjąć obecny wiek Wszechświata za „dzień Wszechświata”, to od ilu „sekund Wszechświata” istnieje ludzkość?

13. Zakładając, że długość dnia rośnie jednostajnie w tempie 0,001 sekundy na stulecie (na takie spowolnienie obrotu Ziemi wskazują pomiary momentów zaćmień Słońca w ciągu wielu stuleci) oblicz łączny wpływ tego zjawiska na wskazania czasu po 20 stuleciach. www

14. Trzy zegary cyfrowe chodzą z różną szybkością i nie wskazują zgodnie zera. Na rysunku 1.7 przedstawiono wyniki równoczesnych odczytów par tych zegarów — na przykład w pewnej chwili odczytano 25,5 s na zegarze B i 92 s na zegarze C. Jeśli odstępek czasu dwóch zdarzeń wynosi 600 s według zegara A, to ile wynosi on według: a) zegara B, b) zegara C? c) Jakie jest wskazanie zegara B, gdy zegar A wskazuje 400 s? d) Jakie jest wskazanie zegara B, gdy zegar C wskazuje 15 s? Wskazania poprzedzające chwilę zerową przyjmij za ujemne.



Rys. 1.7. Zadanie 14

15. Jednostka astronomiczna (AU, j.a.) jest to średnia odległość Ziemi od Słońca, równa w przybliżeniu  $1,5 \cdot 10^8$  km. Prędkość światła wynosi około  $3 \cdot 10^8$  m/s. Wyraż prędkość światła w jednostkach astronomicznych na minutę.

16. Przed 1883 rokiem każde miasto w Stanach Zjednoczonych miało własny czas lokalny. Dziś osoby podróżujące po tym kraju muszą zmieniać czas lokalny jedynie skokami, o 1 godzinę. O ile średnio musisz zmienić swoje położenie w stopniach długości geograficznej, abyś mógł przesunąć zegarek o 1 godzinę? Wskazówka: Ziemia obraca się o  $360^\circ$  w czasie około 24 godzin.

17. Pięć zegarów poddano sprawdzeniu w laboratorium. Przez kolejne dni tygodnia, dokładnie w południe — według radiowego sygnału czasu — odczytywano ich wskazania. Wyniki podano w tabelce niżej. Uszereguj te zegary od najlepszego do najgorszego miernika czasu. Uzasadnij odpowiedź.

Zegar	Niedziela	Poniedz.	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota
A	12:36:40	12:36:57	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

18. Wzorcami czasu są dziś zegary atomowe. Rozważa się również zastosowanie do tego celu pulsarów, czyli obracających się gwiazd neutronowych (gwiazd o bardzo dużej gęstości, składających się z samych neutronów). Szybkość obrotu niektórych z nich jest bardzo stabilna. Wysyłają one sygnały radiowe w kierunku Ziemi raz na okres obrotu, podobnie jak latarnie morskie wysyłają impulsy światła. Na przykład okres obrotu pulsara PSR 1937+21 wynosi  $1,557\,806\,448\,872\,75 \pm 3$  ms, gdzie zapis  $\pm 3$  oznacza niepewność ostatniej cyfry dziesiątej (a nie  $\pm 3$  ms). a) Ile obrotów wykonuje pulsar PSR 1937+21 w czasie 7 dni? b) W ciągu jakiego czasu pulsar ten wykonuje  $10^6$  obrotów? c) Z jaką dokładnością możemy określić ten czas?

## 1.6. Masa

19. Masa Ziemi wynosi  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg. Średnia masa atomów, z których składa się Ziemia, jest równa 40 u. Z ilu atomów składa się Ziemia?

20. Złoto, którego każdy centymetr sześcienny ma masę 19,32 g jest najbardziej kowalnym i ciągliwym metalem — można z niego wykuwać bardzo cienkie folie i wyciągać bardzo długie druty. a) Ile wynosi pole powierzchni folii o grubości 1  $\mu\text{m}$ , wykutej z jednej uncji złota o masie 27,63 g? Ile wynosi długość drutu, którego przekrojem jest koło o promieniu 2,5  $\mu\text{m}$ , wyciągniętego z takiej samej ilości złota?

21. a) Zakładając, że każdy centymetr sześcienny wody ma masę równą dokładnie 1 g, podaj masę jednego metra sześciennego wody w kilogramach. b) Zbiornik z wodą o pojemności 5700  $\text{m}^3$  został opróżniony w ciągu 10 godzin. Ile wynosiła prędkość wypływu masy z tego zbiornika na sekundę?

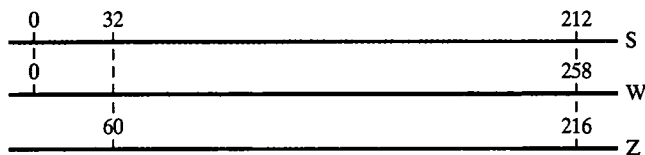
22. Ile wynosi masa wody, która spadła w czasie burzy na miasto z zadania 9? Metr sześcienny wody ma masę  $10^3$  kg.

23. Centymetr sześcienny żelaza ma masę 7,87 g, a masa atomu żelaza wynosi  $9,27 \cdot 10^{-26}$  kg. Przyjmując, że atomy żelaza mają kształt kuli i są ciasno upakowane w objętości metalu oblicz: a) objętość atomu żelaza, b) odległość środków sąsiednich atomów.

24. Ziarnka drobnego piasku z kalifornijskiej plaży są w przybliżeniu kulkami z dwutlenku krzemu, a ich średni promień wynosi 50  $\mu\text{m}$ . Sześciąt ze stałego dwutlenku krzemu o objętości 1  $\text{m}^3$  ma masę 2600 kg. Ile wynosi masa piasku, którego ziarnka mają łączne pole powierzchni (tzn. pole powierzchni wszystkich kulek składowych) równe polu powierzchni sześciątku o boku 1 m?

## Zadania dodatkowe

25. Most Harvarda, łączący kampus MIT z siedzibami korporacji studenckich na drugim brzegu rzeki Charles River, ma długość 364,4 smootów plus jedno ucho. Jednostka smoot jest równa wzrostowi niejakiego Olivera Reeda Smoota, studenta z rocznika 1962, który został przeniesiony przez swych kolegów (miejscami przeciągnięty) przez most, tak aby studenci wstępujący do korporacji Lambda Chi Alpha mogli stawiać znaczki (farbą) co 1 smoot przez całą długość mostu. Znaki te są co dwa lata odmalowywane przez nowych członków korporacji, zwykle w czasie korków drogowych na moście, co utrudnia interwencję policji (panuje przekonanie, że policja była początkowo przeciwna tej akcji ze względu na to,



Rys. 1.8. Zadanie 25

że smoot nie jest jednostką podstawową w układzie SI, lecz dziś pogodziła się już z jej istnieniem). Na rysunku 1.8 przedstawiono trzy równoległe linie, do których wyznaczenia posłużyli studenci Smoot (S), Willie (W) i Zelda (Z). Wyraź 50 smootów w willich i zeldach.

26. W starym wierszyku angielskim mała Miss Muffet siedziała na kamieniu i zjadała zsiadłe mleko, gdy zjawił się pająk i siadł obok niej. Pająk przysiadł się do niej nie ze względu na zsiadłe mleko, lecz dlatego, że panna Muffet miała zapas 11 kamieni suszonych much. Kamień to miara objętości równa 2 garncom lub 0,5 buszla, przy czym buszel angielski wynosi 36,3687 litrów (l). Ile wynosił zapas suszonych much panny Muffet w: a) garncach, b) buszlach, c) litrach?

27. W strefie podbiegunowej, w lecie po zachodzie Słońca, gdy zwykłe chmury są już w cieniu Ziemi, a więc nie są widoczne, widuje się czasem nieco upiorne chmury barwy srebrnoniebieskiej. Chmury te nazywano *nocnymi obłokami świecącymi*, lecz obecnie określa się je najczęściej jako *obłoki mezosferyczne*, od nazwy warstwy atmosfery, w której powstają.

Obłoki te zaobserwowano po raz pierwszy w czerwcu 1885 roku, gdy pył i para wodna z potężnego wybuchu wulkanu na wyspie Krokatoa (w pobliżu Jawy, w południowo-wschodniej części Oceanu Spokojnego), który zdarzył się w 1883 roku, dotarły do półkuli północnej, na dużej wysokości nad Ziemią. W niskiej temperaturze, panującej w mezosferze, para wodna skropliła się na cząstkach pyłu wulkanicznego (a zapewne i na cząstkach obecnego tam pyłu z komet i meteoroidów), tworząc pierwsze obserwowane obłoki. Od tego czasu obłoki mezosferyczne pojawiają się coraz częściej i są coraz

jaśniejsze, co jest zapewne spowodowane coraz większą produkcją metanu na Ziemi, przede wszystkim w przemyśle i rolnictwie (nawozy chemiczne, hodowla bydła, produkcja ryżu). Metan przedostaje się do górnych warstw atmosfery i ulega przemianom chemicznym, w wyniku których powstają cząsteczki wody, a z nich kryształki lodu tworzące obłoki mezosferyczne.

Obłoki mezosferyczne zaobserwowano w 38 minut po zachodzie Słońca wprost nad obserwatorem. Na jakiej wysokości się one utworzyły? Wskazówka: skorzystaj z przykładu 4.

28. Standardowe schody wewnętrzne mają schodki o wysokości 19 cm i szerokości (głębokości w poziomie) 23 cm. Badania wykazują, że bardziej bezpieczne przy schodzeniu byłyby schody o szerokości schodków 28 cm. Jak dużo dalej musiałyby się kończyć na dole schody o wysokości 4,57 m, gdyby dokonać takiej zmiany szerokości schodka?

29. Aby porównać miary staroświeckie z nowoczesnymi i jednostki duże z małymi, rozważmy następujący przykład. W dawnej, rolniczej Anglii uważano, że jedna rodzina może się wyżywić (przy jednym plonie rocznie) z uprawy ziemi o powierzchni 100–120 akrów (1 akr to 4047 m<sup>2</sup>). Powierzchnia ziemi, potrzebnej 100 rodzinom, nosiła nazwę *wapentake* (tak samo nazywała się jednostka podziału administracyjnego hrabstwa). W fizyce kwantowej tzw. przekrój czynny jądra (zdefiniowany za pomocą prawdopodobieństwa, że jądro pochłonie padającą na nie cząstkę) mierzy się w barnach: 1 barn = 1·10<sup>-28</sup> m<sup>2</sup> (w żargonie fizyki jądrowej jądro jest „duże”, jeśli trafienie w nie cząstką jest równie łatwe, jak trafienie ze strzelby we wrota stodoły; stąd nazwa „barn” — po angielsku „stodoła”). Ile wynosi stosunek 25 *wapentaków* do 11 barnów?



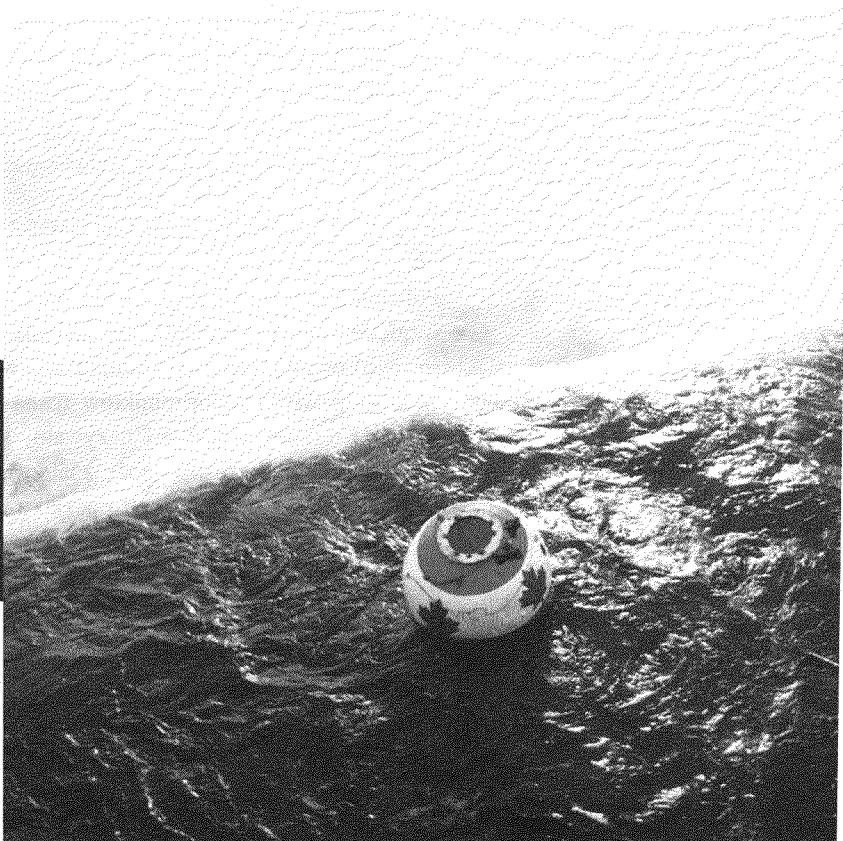
## 2 Ruch prostoliniowy

26 września 1993 roku Dave Munday, z zawodu mechanik samochodowy, po raz drugi spłynął z Wodospadu Niagara w pobliżu brzegu kanadyjskiego, spadając z wysokości 48 m na wodę (i skały) na dole. Jego pojazdem była stalowa kula z otworami umożliwiającymi oddychanie.

Bardzo zadowolony, że przeżył upadek, podczas którego zginęło czterech innych amatorów tego wyczynu, przeprowadził solidne badania fizycznych i technicznych aspektów spadku.

**Jak długo Munday spadał swobodnie i z jaką prędkością uderzył w spienione wody na dole wodospadu?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



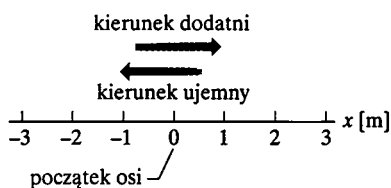
## 2.1. Ruch

Cały świat i wszystkie jego składniki są w ciągłym ruchu. Nawet pozornie tak nieruchome rzeczy, jak np. szosa, też biorą udział w ruchu obrotowym Ziemi; Ziemia krąży wokół Słońca, Słońce wokół środka Drogi Mlecznej, czyli naszej Galaktyki, a Galaktyka przemieszcza się względem innych galaktyk. Klasyfikacja i porównanie różnych ruchów (co nazywamy **kinematyką**) wcale nie są łatwe. Co właściwie należy mierzyć i jak porównywać różne ruchy?

Zanim spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie, zbadamy pewne ogólne cechy ruchów, spełniających dane niżej warunki.

1. Ruch może zachodzić tylko wzdłuż linii prostej. Może być ona pionowa (jak przy spadku kamienia), pozioma (jak przy ruchu samochodu na płaskim odcinku autostrady), a także ukośna, lecz musi być prosta.
2. Ruch może odbywać się pod wpływem sił, ale tymczasem (aż do rozdziału 5) nie będziemy się nimi zajmować. W tym rozdziale będziemy badać sam ruch i jego zmiany. Na przykład zastanowimy się, czy poruszające się ciało przyspiesza, zwalnia, zatrzymuje się, czy zaczyna poruszać się w przeciwnym kierunku. A jeśli ruch ulega zmianom, to jak zależą one od czasu?
3. Poruszające się ciało jest albo **cząstką** (tzn. obiektem punktowym, jak elektron), albo porusza się jak cząstka (tzn. każda jego część porusza się w tym samym kierunku i z taką samą prędkością). Sztywne prosię, które ześlizguje się po zjeżdźalni na placu zabaw, porusza się jak cząstka, a toczący się kłobek nie porusza się jak cząstka, bo każdy jego punkt przemieszcza się w innym kierunku.

## 2.2. Położenie i przemieszczenie



Rys. 2.1. Położenie wyznaczamy na osi, rozciągającej się nieograniczenie w obydwu kierunkach, na której zaznaczono jednostki długości (tutaj metry). Symbol osi, tutaj  $x$ , zapisujemy zawsze po stronie współrzędnych dodatnich

Położenie ciała, czyli współrzędną punktu, w jakim się ono znajduje, wyznaczamy względem pewnego punktu odniesienia, najczęściej **początku** (czyli punktu zerowego) osi, np. osi  $x$  na rysunku 2.1. **Kierunkiem dodatnim** osi jest kierunek, w którym współrzędne punktów rosną — na rysunku 2.1 jest to kierunek na prawo. Kierunek przeciwny nazywamy **kierunkiem ujemnym**.

Na przykład cząstka może znajdować się w punkcie  $x = 5$  m, co oznacza, że jest ona odległa o 5 m od początku osi w kierunku dodatnim. Jeśli znajduje się ona w punkcie  $x = -5$  m, to jest w takiej samej odległości od początku osi, jak poprzednio, ale w kierunku ujemnym. Punkt o współrzędnej  $-5$  m leży na osi, na lewo od punktu o współrzędnej  $-1$  m, a obydwa leżą na lewo od punktu o współrzędnej  $+5$  m. Znak plus przy współrzędnej można opuścić, lecz znak minus musi być zawsze podany.

Zmianę położenia od punktu  $x_1$  do innego punktu  $x_2$  nazywamy **przemieszczeniem**  $\Delta x$ , przy czym:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1)$$

(symbol  $\Delta$ , czyli wielka litera grecka delta oznacza zwykle zmianę jakiejś wielkości i jest różnicą wartości końcowej i początkowej tej wielkości). Po podstawieniu do tego wzoru konkretnych wartości  $x_1$  i  $x_2$  otrzymujemy wartość dodatnią dla przemieszczeń w kierunku dodatnim (czyli na prawo na rysunku 2.1), a wartość ujemną dla przemieszczeń w kierunku przeciwnym. Na przykład, jeśli cząstka przemieściła się z punktu  $x_1 = 5$  m do punktu  $x_2 = 12$  m, to  $\Delta x = (12 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = +7$  m. Wynik dodatni oznacza, że ruch zachodził w kierunku dodatnim. Jeśli cząstka powróciła następnie do punktu  $x = 5$  m, to całkowite przemieszczenie wynosiło zero. Całkowita droga, przebyta w trakcie ruchu nie ma znaczenia dla wartości przemieszczenia — liczy się tylko położenie początkowe i końcowe.

Znak plus przy przemieszczeniu można opuścić, natomiast znak minus należy zawsze podawać. Gdy zapomnimy o znaku (a więc i kierunku) przemieszczenia, będziemy znać tylko jego wartość bezwzględną (moduł). W przytoczonym poprzednio przykładzie wartość bezwzględna  $\Delta x$  jest równa 7 m.

Przemieszczenie jest przykładem wielkości wektorowej, tzn. takiej, która ma wartość bezwzględną i kierunek. Wektory omówimy obszernie w rozdziale 3 (który być może niektórzy z was już przeczytali); teraz zapamiętaj jedynie, że przemieszczenie ma dwie cechy: 1) jego wartość bezwzględna to odległość (np. w metrach) między położeniem pierwotnym i końcowym; 2) jego kierunek, od punktu początkowego do końcowego, jest w przypadku ruchu po linii prostej dany przez znak plus lub minus.

*Niżej znajdziesz pierwszy sprawdzian, jakich wiele w tej książce. Każdy z nich zawiera jedno lub kilka pytań. Aby na nie odpowiedzieć, trzeba wykonać proste rozumowanie lub obliczenie w pamięci, co pozwoli ci sprawdzić zrozumienie omówionego materiału. Prawidłowe odpowiedzi podane są na końcu książki.*

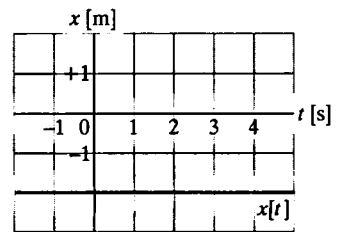
**SPRAWDZIAN 1:** Niżej podano trzy pary położenia początkowych i końcowych na osi  $x$ . Które z nich dają ujemne przemieszczenie: a)  $-3$  m,  $+5$  m; b)  $-3$  m,  $-7$  m; c)  $7$  m,  $-3$  m?

## 2.3. Prędkość średnia

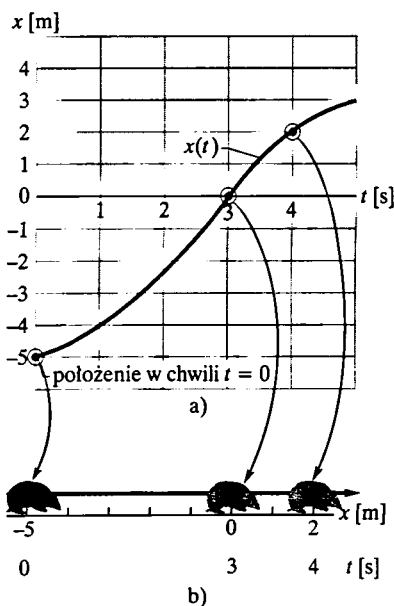
Wygodnym sposobem przedstawienia ruchu ciała jest wykreślenie jego położenia  $x$  jako funkcji czasu  $t$ , tzn. sporządzenie wykresu  $x(t)$  (zapis  $x(t)$  oznacza  $x$  jako funkcję  $t$ , a nie iloczyn  $x$  i  $t$ ). Na rysunku 2.2 przedstawiono — jako bardzo prosty przykład — funkcję  $x(t)$  dla borsuka (traktowanego jako cząstka), który pozostaje w bezruchu w punkcie  $x = -2$  m.

Rysunek 2.3a dotyczy ciekawszej sytuacji, albowiem borsuk się porusza. Pojawia się on w chwili  $t = 0$ , w punkcie  $x = -5$  m, po czym porusza się w kierunku punktu  $x = 0$ , mija go w chwili  $t = 3$  s, a następnie przesuwa się ku punktom o coraz większych współrzędnych dodatnich  $x$ .

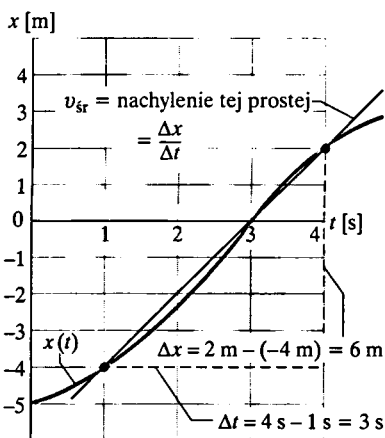
Na rysunku 2.3b pokazano rzeczywisty ruch prostoliniowy borsuka, czyli to, co możemy zaobserwować. Wykres na rysunku 2.3a ilustruje ruch borsuka



Rys. 2.2. Wykres  $x(t)$  dla borsuka, który pozostaje w spoczynku w punkcie  $x = -2$  m. Położenie borsuka  $x$  jest równe  $-2$  w każdej chwili



Rys. 2.3. a) Wykres  $x(t)$  dla poruszającego się borsuka. b) Ruch borsuka, który ilustruje ten wykres. Pod osią  $x$  zaznaczono chwile, w których borsuk osiąga odpowiednie wartości położenia  $x$



Rys. 2.4. Wyznaczanie średniej prędkości w przedziale czasu od  $t = 1$  s do  $t = 4$  s, jako nachylenia prostej, łączącej punkty na krzywej  $x(t)$ , odpowiadające tym chwilom

w sposób bardziej abstrakcyjny. Tej zależności nie można zobaczyć wprost, ale zawiera ona więcej informacji niż sam widok poruszającego się borsuka. Można się z niej dowiedzieć, jak szybko porusza się borsuk.

To, jak szybko porusza się cząstka, możemy wyrazić w różny sposób. Jedną z możliwości jest podanie **średniej prędkości**  $v_{sr}$ , którą opisujemy stosunkiem przemieszczenia cząstki  $\Delta x$  w pewnym przedziale czasu  $\Delta t$ , do wielkości tego przedziału czasu:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.2)$$

Zapis ten oznacza, że cząstka znajduje się w położeniu  $x_1$  w chwili  $t_1$ , a w położeniu  $x_2$  w chwili  $t_2$ . Typowym przykładem jednostki  $v_{sr}$  jest metr na sekundę (m/s). W zadaniach spotkasz też inne jednostki, lecz zawsze będą mieć one postać ilorazu jednostki długości i jednostki czasu.

Na wykresie  $x$  jako funkcji  $t$  wartość  $v_{sr}$  jest równa **nachyleniu** (współczynnikowi kierunkowemu) prostej, łączącej dwa punkty na krzywej  $x(t)$ : punkt odpowiadający wartościom  $x_2$  i  $t_2$  oraz punkt odpowiadający wartościom  $x_1$  i  $t_1$ . Podobnie jak przemieszczenie,  $v_{sr}$  ma zarówno wartość bezwzględna, jak i kierunek (jest to również wielkość wektorowa). Wartość bezwzględna prędkości średniej jest równa wartości bezwzględnej nachylenia prostej. Jeśli  $v_{sr}$ , a więc i nachylenie są dodatnie, to linia na wykresie wznosi się wraz ze wzrostem  $t$ , a jeśli  $v_{sr}$  i nachylenie są ujemne, to linia na wykresie opada wraz ze wzrostem  $t$ . Prędkość średnia  $v_{sr}$  ma zawsze taki sam znak, jak przemieszczenie  $\Delta x$ , gdyż  $\Delta t$  we wzorze (2.2) jest zawsze dodatnie.

Na rysunku 2.4 pokazano sposób wyznaczenia  $v_{sr}$  dla borsuka z rysunku 2.3, w przedziale czasu od  $t = 1$  s do  $t = 4$  s. Wykreśliamy prostą, łączącą punkty na krzywej, odpowiadający początkowi tego przedziału i punkt odpowiadający końcowi przedziału. Następnie wyznaczamy nachylenie prostej  $\Delta x/\Delta t$ . Tak więc prędkość średnia w zadanym przedziale czasu wynosi:

$$v_{sr} = \frac{6 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}.$$

Na pytanie, jak szybko poruszała się cząstka, możemy też odpowiedzieć w inny sposób, dzieląc przez czas nie przemieszczenie cząstki  $\Delta x$ , lecz całkowitą drogę (na przykład w metrach), przebytą w tym czasie przez cząstkę, niezależnie od kierunku, tzn. podając wielkość:

$$s_{sr} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Wielkość ta *nie* uwzględnia kierunku ruchu (mając w istocie znaczenie **średniej wartości bezwzględnej prędkości**), zatem nie ma znaku. Czasem jest ona równa wartości bezwzględnej  $v_{sr}$ , ale — jak pokażemy w przykładzie 2.1 — może się od niej bardzo różnić, gdy ciało porusza się dwa razy po tej samej drodze. Wielkość tę nazywamy czasem prędkością „podróżną”.

## Przykład 2.1

Wjechałeś starą furgonetką po prostej drodze, z prędkością 70 km/h. Po przebyciu drogi 8,4 km skończyła ci się benzyna i samochód się zatrzymał. Musiałeś więc iść pieszo 2 km do najbliższej stacji benzynowej, co zajęło ci 30 minut.

a) Ile wynosiło twoje całkowite przemieszczenie od początku podróży do stacji benzynowej?

### ROZWIĄZANIE:

Założmy dla wygody, że poruszałeś się w dodatnim kierunku osi  $x$ , od położenia początkowego  $x_1 = 0$  do położenia  $x_2$ . Twoje położenie końcowe to  $x_2 = 8,4 \text{ km} + 2 \text{ km} = 10,4 \text{ km}$ . Twoje przemieszczenie wzdłuż osi  $x$  jest równe różnicy położenia końcowego i początkowego. Z równania (2.1) otrzymujemy:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10,4 \text{ km} - 0 = 10,4 \text{ km}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc twoje całkowite przemieszczenie było równe 10,4 km w dodatnim kierunku osi  $x$ .

b) Ile czasu  $\Delta t$  upłynęło od początku podróży, do chwili przybycia na stację benzynową?

### ROZWIĄZANIE:

Znamy już czas marszu  $\Delta t_m$ , równy 0,5 h, ale nie znamy czasu jazdy samochodem  $\Delta t_j$ . Wiemy jednak, że w czasie jazdy przejechałeś się o  $\Delta x_j$ , wynoszące 8,4 km, oraz że średnia prędkość jazdy  $v_{sr,j}$  wynosiła 70 km/h. Możemy więc skorzystać ze wzoru (2.2): prędkość ta jest równa ilorazowi przemieszczenia w czasie jazdy i czasu jazdy:

$$v_{sr,j} = \frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}$$

Przekształcając ten wzór i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$\Delta t_j = \frac{\Delta x_j}{v_{sr,j}} = \frac{(8,4 \text{ km})}{(70 \text{ km/h})} = 0,12 \text{ h}.$$

Wobec tego:

$$\Delta t = \Delta t_j + \Delta t_m = 0,12 \text{ h} + 0,5 \text{ h} = 0,62 \text{ h}. \quad (\text{odpowiedź})$$

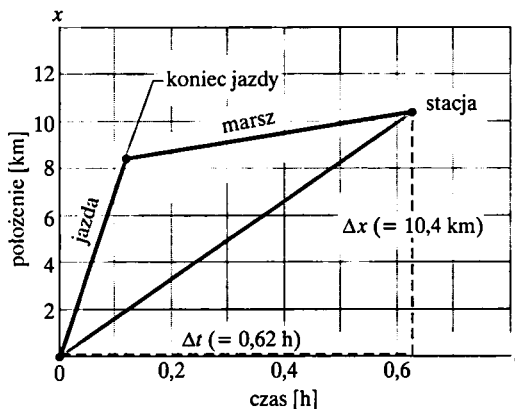
c) Ile wynosiła twoja średnia prędkość  $v_{sr}$  w czasie, który upłynął od początku podróży, do chwili przybycia na stację benzynową? Wyznacz ją na drodze obliczeń oraz graficznie.

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy znów ze wzoru (2.2):  $v_{sr}$  dla całej podróży jest równa ilorazowi przemieszczenia w czasie całej podróży, równemu 10,4 km, oraz czasu całej podróży, równemu 0,62 h. Z równania (2.2) otrzymujemy więc:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10,4 \text{ km}}{0,62 \text{ h}} = 16,8 \text{ km/h} \approx 17 \text{ km/h}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Aby wyznaczyć  $v_{sr}$  graficznie, sporządźmy najpierw wykres, jak na rysunku 2.5 zaznaczając, że ruch odbywa się od początku układu współrzędnych do punktu oznaczonego jako „stacja”. Prędkość średnia jest równa nachyleniu prostej, łączącej te dwa punkty, czyli ilorazem różnicy ich rzędnych ( $\Delta x = 10,4 \text{ km}$ ) i różnicy ich odciętych ( $\Delta t = 0,62 \text{ h}$ ), skąd otrzymujemy  $v_{sr} = 16,8 \text{ km/h}$ .



Rys. 2.5. Przykład 2.1. Odcinki oznaczone jako „jazda” i „marsz” są wykresami zależności położenia od czasu dla części podróży przebytych samochodem i pieszo (założono, że maszerowałeś ze stałą prędkością). Nachylenie prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych i punkt oznaczony jako „stacja”, jest równe średniej prędkości dla całej podróży, od jej początku do chwili przybycia na stację benzynową

d) Załóżmy, że nabrałeś benzyny do kanistra, zapłaciłeś za nią i wróciłeś do samochodu w czasie 45 minut. Ile wynosi średnia droga, przebyta przez ciebie w jednostce czasu, od początku podróży do chwili powrotu z benzyną do furgonetki?

### ROZWIĄZANIE:

Musimy obliczyć iloraz całkowitej przebytej przez ciebie drogi i całkowitego czasu podróży. Całkowita droga wynosi: 8,4 km + 2 km + 2 km = 12,4 km. Całkowity czas podróży jest równy: 0,12 h + 0,5 h + 0,75 h = 1,37 h. Ze wzoru (2.3) otrzymujemy więc:

$$s_{sr} = \frac{(12,4 \text{ km})}{(1,37 \text{ h})} = 9,1 \text{ km/h}. \quad (\text{odpowiedź})$$

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Załóżmy, że po naleniu benzyny do baku powróciłeś do punktu  $x_1$  z prędkością 35 km/h. Ile wynosiła średnia prędkość całej podróży?

**Porada 1: Czy rozumiesz zadanie?**

Największą trudnością dla początkujących stanowi dobre zrozumienie treści zadania. Najlepiej sprawdzisz, czy rozumiesz zadanie, gdy spróbujesz przedstawić jego treść własnymi słowami.

Na początku zapisz wielkości dane w zadaniu, wraz z ich jednostkami, używając symboli wprowadzonych w omawianym rozdziale (w przykładzie 2.1 dane powinny umożliwić ci wyznaczenie całkowitego przemieszczenia  $\Delta x$  w punkcie (a) oraz przedziału czasu  $\Delta t$  w punkcie (b)). Określ, jaką wielkość należy wyznaczyć i jaki jest jej symbol (w powyższym przykładzie niewiadomą w punkcie (c) jest twoja średnia prędkość  $v_{\text{sr}}$ ). Wreszcie, znajdź związek między wielkością niewiadomą a danymi (jest nią wzór (2.2), czyli definicja prędkości średniej).

**Porada 2: Sprawdź jednostki**

Zanim podstawisz dane liczbowe do równań upewnij się, że są one wyrażone w zgodnych jednostkach. W przykładzie 2.1 logiczne jest wyrażenie odległości w kilometrach, czasu w godzinach, a prędkości w kilometrach na godzinę. W razie potrzeby należy dokonać zamiany jednostek.

**Porada 3: Czy wynik jest rozsądny?**

Czy odpowiedź ma sens? Czy nie jest o wiele za duża lub o wiele za mała? Czy jej znak jest poprawny? Czy jest wyrażona we właściwych jednostkach? W punkcie (c) przykładu 2.1 prawidłowa odpowiedź wynosi 17 km/h. Gdybyś otrzymał na przykład 0,00017 km/h,  $-17$  km/h, 17 km/s lub 17 000 km/h, powinieneś od razu zauważyć, że coś się nie zgadza. Przyczyną błędu może być zła metoda rozwiązywania, pomyłka w obliczeniach lub złe wprowadzenie liczb do kalkulatora.

**Porada 4: Jak korzystać z wykresu?**

Na rysunkach 2.2, 2.3a, 2.4 i 2.5 dane przedstawiono w postaci wykresów, które powinieneś bez trudu odczytywać. Na każdym z nich na osi poziomej odłożono czas  $t$ , wzrastający z lewa na prawo. Na osi pionowej odłożono położenie  $x$  poruszającej się cząstki, przy czym kierunek dodatni  $x$  to kierunek do góry wykresu. Zawsze zwracaj uwagę na to, w jakich jednostkach wyrażone są zmienne (sekundy czy minuty, metry czy kilometry).

## 2.4. Prędkość chwilowa

Wiesz już, że szybkość poruszania się ciała można określić na dwa sposoby: podając średnią prędkość i średnią drogę, przebytą w jednostce czasu. Obie te wielkości odnoszą się do pewnego przedziału czasu  $\Delta t$ . Najczęściej jednak pytając, jak szybko porusza się cząstka, chcemy wiedzieć, jak szybko porusza się ona w danej chwili, tzn. pytamy o jej **prędkość chwilową** (czyli po prostu **prędkość**)  $v$ .

Prędkość w danej chwili otrzymujemy z prędkości średniej, zmniejszając przedział czasu  $\Delta t$  do wartości coraz bliższej zeru. Przy zmniejszaniu się  $\Delta t$  średnia prędkość dąży do granicy, którą jest prędkość w danej chwili:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.4)$$

Z tego równania możemy określić dwie cechy prędkości chwilowej  $v$ . Po pierwsze,  $v$  jest szybkością zmiany położenia cząstki  $x$  przy zmianie czasu w danej chwili; tak więc  $v$  jest pochodną  $x$  względem  $t$ . Po drugie, wartość  $v$  jest w każdej chwili równa nachyleniu prostej stycznej do wykresu położenia cząstki, jako funkcji czasu, w punkcie odpowiadającym tej chwili. Prędkość jest kolejną pożądaną przez nas wielkością wektorową, a więc ma kierunek.

Czasem wygodnie jest mówić nie o prędkości chwilowej, a tylko o jej wartości bezwzględnej. Oczywiście, wielkości te mogą się od siebie różnić, gdyż prędkość zawiera w sobie informację o kierunku ruchu, a jej wartość bezwzględna — nie. Na przykład, zarówno prędkość równa  $+5$  m/s, jak i równa  $-5$  m/s mają wartość bezwzględną równą 5 m/s. Szybkościomierz w samochodzie pokazuje wartość bezwzględną prędkości, ponieważ jego wskazania nie zależą od kierunku ruchu pojazdu.

## Przykład 2.2

Na rysunku 2.6a przedstawiono wykres  $x(t)$  dla windy, początkowo nieruchomej, a następnie jadącej do góry (ten kierunek przyjmijmy za dodatni kierunek  $x$ ) i w końcu się zatrzymującej. Sporządź wykres  $v$  w funkcji czasu.

### ROZWIĄZANIE:

Wartość  $v$  w każdej chwili można wyznaczyć jako nachylenie krzywej  $x(t)$  dla tej chwili. W przedziale od  $t = 0$  do  $t = 3$  s dla  $t = 9$  s i chwil późniejszych nachylenie wykresu  $x(t)$ , a więc i prędkość są równe zero, tzn. winda jest w spoczynku. Między punktami  $b$  i  $c$  nachylenie jest stałe i różne od zera, tzn. winda porusza się ze stałą prędkością. Nachylenie to możemy obliczyć:

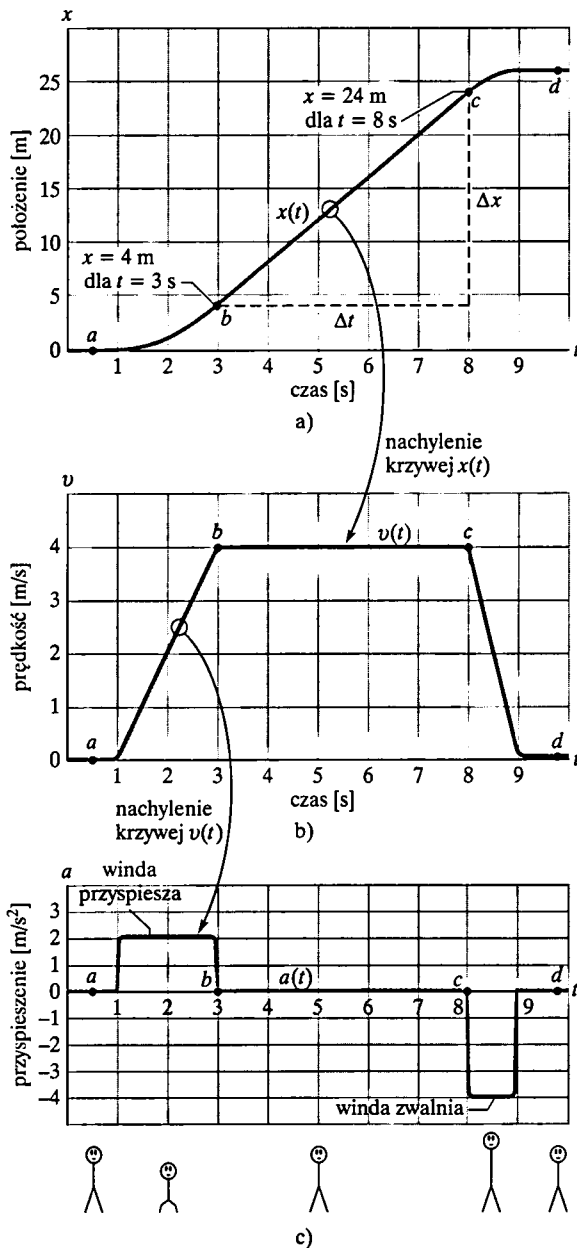
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{(24 \text{ m}) - (4 \text{ m})}{(8 \text{ s}) - (3 \text{ s})} = +4 \text{ m/s.}$$

Znak plus oznacza, że wagonik porusza się w dodatnim kierunku  $x$ . Dla wymienionych przedziałów (dla których prędkość jest stała i wynosi  $v = 0$  oraz  $v = 4 \text{ m/s}$ ) wykreślamy zatem na rysunku 2.6b odcinki poziome. Ponadto, winda początkowo zostaje wprowadzona w ruch, a później zwalnia, aż do zatrzymania, odpowiednio w przedziałach czasu od  $1 \text{ s}$  do  $3 \text{ s}$  oraz od  $8 \text{ s}$  do  $9 \text{ s}$ . Dorysowując odcinki odpowiadające tym fazom ruchu, otrzymujemy żądany wykres — rysunek 2.6b (rysunek 2.6c omówimy w paragrafie 2.5).

Mając już wykres  $v(t)$ , jak na rysunku 2.6b, możemy spróbować „odwrócić” zadanie i wyznaczyć na tej podstawie wykres  $x(t)$  (rys. 2.6a). Nie możemy jednak wyznaczyć konkretnych wartości  $x$  w poszczególnych momentach, gdyż wykres  $v(t)$  informuje tylko o zmianach  $x$ . Aby otrzymać zmianę  $x$  w danym przedziale czasu, musimy obliczyć — jak wynika z rachunku całkowego — pole pod krzywą  $v(t)$  dla tego przedziału. Na przykład, w przedziale od  $3 \text{ s}$  do  $8 \text{ s}$ , gdy wagonik ma prędkość  $4 \text{ m/s}$ , zmiana położenia wynosi:

$$\Delta x = (4 \text{ m/s})(8 \text{ s} - 3 \text{ s}) = +20 \text{ m}$$

Pole jest dodatnie, ponieważ krzywa  $v(t)$  leży nad osią  $t$ . Jak widać z rysunku 2.6a, położenie istotnie zmienia się o  $20 \text{ m}$  w tym przedziale czasu. Jednakże z rysunku 2.6b nie możemy wyznaczyć wartości  $x$  w chwili początkowej i końcowej tego przedziału. Aby je wyznaczyć, musimy mieć jeszcze jakieś dodatkowe informacje, na przykład wartość  $x$  dla dowolnej chwili.



Rys. 2.6. Przykład 2.2. a) Wykres  $x(t)$  dla windy, wznoszącej się wzdłuż osi  $x$ . b) Wykres  $v(t)$  dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji  $x(t)$  (gdyż  $v = dx/dt$ ). c) Wykres  $a(t)$  dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji  $v(t)$  (gdyż  $a = dv/dt$ ). Figurki z patyczków, narysowane pod wykresem pokazują, jak przyspieszenie działa na ciało pasażera


## Przykład 2.3

Położenie cząstki, poruszającej się wzdłuż osi  $x$ , jest opisane następującym równaniem:

$$x = 7,8 + 9,2t - 2,1t^3, \quad (2.5)$$

przy czym  $x$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach. Ile wynosi prędkość cząstki w chwili  $t = 3,5$  s? Czy ciało porusza się wówczas ze stałą prędkością, czy też jego prędkość zmienia się wraz z upływem czasu?

### ROZWIĄZANIE:

Dla uproszczenia obliczeń opuściliśmy jednostki współczynników w równaniu (2.5). Możesz je wstawić, pisząc 7,8 m, 9,2 m/s oraz  $-2,1 \text{ m/s}^3$ .  Prędkość jest pierwszą pochodną funkcji  $x(t)$  względem czasu. Wobec tego:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7,8 + 9,2t - 2,1t^3),$$


skąd otrzymujemy:

$$v = 0 + 9,2 - (3)(2,1)t^2 = 9,2 - 6,3t^2. \quad (2.6)$$

W chwili  $t = 3,5$  s:

$$v = 9,2 - (6,3)(3,5)^2 = -68 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W chwili  $t = 3,5$  s cząstka porusza się w ujemnym kierunku osi  $x$  (gdyż otrzymaliśmy wynik ze znakiem minus), z prędkością o wartości bezwzględnej równej 68 m/s. W równaniu (2.6) występuje zmienna  $t$ , dlatego też prędkość  $v$  zależy od czasu  $t$ , a więc nie jest stała, lecz zmienia się w sposób ciągły wraz z upływem czasu.

 **SPRAWDZIAN 3:** Niżej podano równania opisujące zależność położenia cząstki od czasu  $x(t)$  (we wszystkich przypadkach  $x$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach, przy czym  $t > 0$ ): 1)  $x = 3t - 2$ ; 2)  $x = -4t^2 - 2$ ; 3)  $x = 2/t^2$ ; 4)  $x = -2$ . a) W którym przypadku prędkość cząstki  $v$  jest stała? b) W którym przypadku cząstka porusza się w ujemnym kierunku osi  $x$ ?

## 2.5. Przyspieszenie

Gdy prędkość cząstki się zmienia, mówimy, że doznaje ona **przyspieszenia** (przyspiesza). Dla ruchu wzdłuż osi **przyspieszenie średnie**  $a_{sr}$  w przedziale czasu  $\Delta t$  jest równe:

$$a_{sr} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2.7)$$

gdzie  $v_1$  jest prędkością cząstki w chwili  $t_1$ , a  $v_2$  — prędkością w późniejszej chwili  $t_2$ . **Przyspieszenie chwilowe** (czyli po prostu **przyspieszenie**) jest pochodną prędkości względem czasu:

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (2.8)$$

Wyrażając to słowami, przyspieszenie cząstki w danej chwili jest równe szybkości zmiany prędkości cząstki w tej chwili. Na wykresie przedstawiającym zależność  $v(t)$  przyspieszenie cząstki w danym punkcie jest równe nachyleniu krzywej  $v(t)$  w tym punkcie.

Łącząc wzory (2.8) i (2.4), otrzymujemy:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.9)$$

Oznacza to, że przyspieszenie cząstki w danej chwili jest równe drugiej pochodnej jej położenia  $x(t)$  względem czasu.

Typową jednostką przyspieszenia jest metr na sekundę na sekundę:  $\text{m}/(\text{s} \cdot \text{s})$ , czyli  $\text{m}/\text{s}^2$ . W treści zadań spotkasz i inne jednostki, które mają zawsze postać ilorazu jednostki długości i kwadratu jednostki czasu. Przyspieszenie ma zarówno



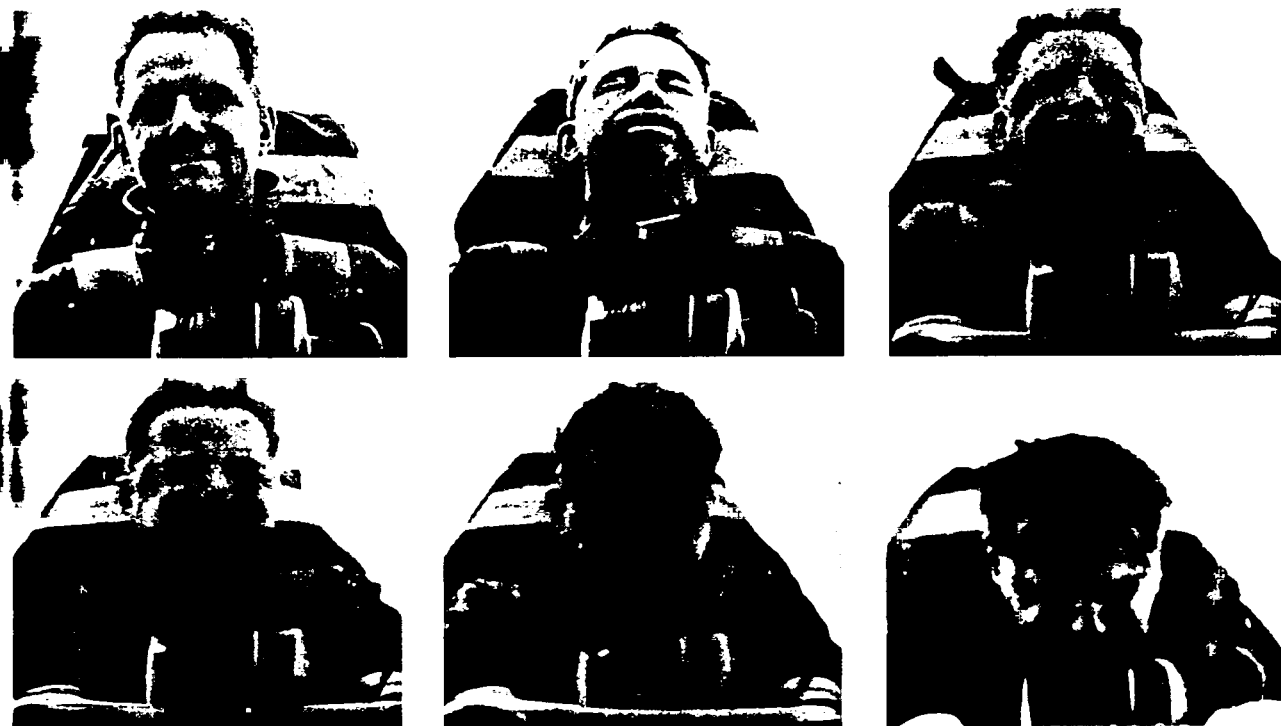
wartość bezwzględna, jak i kierunek, czyli jest wielkością wektorową. Jego znak określa kierunek względem osi, podobnie jak dla położenia i prędkości: przyspieszenie dodatnie jest skierowane w dodatnim kierunku osi, a przyspieszenie ujemne — w kierunku ujemnym.

Na rysunku 2.6c przedstawiono wykres przyspieszenia windy z przykładu 2.2. Porównajmy wykres  $a(t)$  z wykresem  $v(t)$  — wartość  $a(t)$  w każdym punkcie jest równa pochodnej krzywej  $v(t)$  w tym punkcie (tzn. nachyleniu stycznej do krzywej). Gdy prędkość jest stała (w naszym przykładzie wynosi 0 lub 4 m/s), jej pochodna jest równa zero, a więc przyspieszenie jest też równe zero. Gdy wagonik nabiera prędkości, funkcja  $v(t)$  ma pochodną dodatnią (nachylenie krzywej  $v(t)$  jest dodatnie), a więc  $a(t)$  jest dodatnie. Gdy wagonik zwalnia, aby się zatrzymać, pochodna i nachylenie są ujemne, a więc  $a(t)$  jest ujemne.

Porównajmy jeszcze nachylenie krzywej  $v(t)$  dla dwóch przedziałów, gdy winda porusza się z przyspieszeniem różnym od zera. Krzywa odpowiadająca hamowaniu windy (potocznie mówimy wtedy o ruchu opóźnionym) jest bardziej stroma, gdyż czas hamowania jest dwukrotnie krótszy od czasu rozpędzania windy. Bardziej stroma krzywa ma większe nachylenie (co do wartości bezwzględnej), a więc wartość bezwzględna przyspieszenia jest większa w czasie hamowania windy niż w czasie jej rozpędzania, jak pokazano na rysunku 2.6c.

Figurki narysowane w dolnej części rysunku 2.6c przedstawiają doznania pasażera windy. Gdy winda nabiera prędkości, pasażer czuje się przyciskany do podłogi, a gdy winda hamuje, ma on poczucie rozciągania ku górze. Między tymi fazami ruchu nie odczuwa niczego niezwykłego. Jak widać, nasze ciało reaguje na przyspieszenie (jest „przyspieszeniomierzem”), a nie reaguje na

Rys. 2.7. Pułkownik J.P. Stapp w saniach rakietowych, najpierw szybko nabierających prędkości (przyspieszenie skierowane zza zdjęcia), a potem gwałtownie hamujących (przyspieszenie skierowane w głąb zdjęcia)



prędkość (nie jest szybkościomierzem). W samochodzie jadącym z prędkością 90 km/h, czy w samolocie lecącym z prędkością 900 km/h, nasze ciało nie ma poczucia ruchu. Gdy jednak samochód lub samolot szybko zmieniają swoje prędkości, odczuwamy te zmiany wyraźnie, czasem nawet reagujemy na nie przestraszonym. Emocje, jakich doznajemy jadąc kolejką w wesołym miasteczku, związane są ze zmianami jej prędkości (płaci się za przyspieszenie, a nie za prędkość). Dramatyczny przykład reakcji na przyspieszenie pokazano na rysunku 2.7, na którym przedstawiono zdjęcia pasażera sań raketowych, najpierw gwałtownie przyspieszających, a potem gwałtownie hamowanych aż do zatrzymania.

Duże wartości przyspieszenia podajemy czasem w jednostkach  $g$ , którego wartość jest równa:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad (2.10)$$

(jak dowiesz się w paragrafie 2.8,  $g$  jest przyspieszeniem, z jakim spadają ciała w pobliżu powierzchni Ziemi). W czasie jazdy kolejką podczas zabawy w wesołym miasteczku możesz na krótko doznawać przyspieszenia nawet do  $3g$ , co wynosi  $(3)(9,8 \text{ m/s}^2)$ , czyli około  $29 \text{ m/s}^2$ , co bez wątplenia uzasadnia cenę biletu na tę przejażdżkę.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 5: Znak przyspieszenia

W języku potocznym mówimy czasem — co może być mylące — o przyspieszeniu („przyspieszeniu dodatnim”), gdy ciało porusza się coraz szybciej i opóźnieniu („przyspieszeniu ujemnym”), gdy ciało porusza się coraz wolniej. W fizyce, a więc i w tym podręczniku, znak przyspieszenia wskazuje na jego kierunek, a nie na to, czy wartość bezwzględna prędkości rośnie czy maleje.

Na przykład, jeśli samochód poruszający się z prędkością początkową  $v = -25 \text{ m/s}$  hamuje i zatrzymuje się po 5 s, to  $a_{\text{sr}} = +5 \text{ m/s}^2$ . Przyspieszenie jest *dodatnie*, choć wartość bezwzględna prędkości zmalała. Przyczyną jest różnica znaków prędkości i przyspieszenia — przyspieszenie ma kierunek przeciwny do prędkości.

Znak przyspieszenia należy interpretować następująco:

➤ Jeśli znaki przyspieszenia i prędkości cząstki są takie same, to cząstka porusza się coraz szybciej (wartość bezwzględna jej prędkości rośnie). Jeśli znaki przyspieszenia i prędkości są przeciwne, to cząstka zwalnia (wartość bezwzględna jej prędkości maleje).

✔ **SPRAWDZIAN 4:** Wombat (mały torbaczk australijski) porusza się wzdłuż osi  $x$ . Jaki jest znak jego przyspieszenia, jeśli porusza się on: a) coraz szybciej w kierunku dodatnim; b) coraz wolniej w kierunku dodatnim; c) coraz szybciej w kierunku ujemnym; d) coraz wolniej w kierunku ujemnym?

## Przykład 2.4

Położenie cząstki na osi  $x$  (patrz rys. 2.1), jest dane wzorem:

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

gdzie  $x$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach.

a) Znajdź funkcje, opisujące zależności prędkości od czasu  $v(t)$  i przyspieszenia od czasu  $a(t)$ .

### ROZWIĄZANIE:

➔ Funkcja  $v(t)$  jest pochodną funkcji  $x(t)$  względem czasu. Wobec tego otrzymujemy:

$$v = -27 + 3t^2, \quad (\text{odpowiedź})$$

przy czym  $v$  jest wyrażone w metrach na sekundę.

Podobnie, przyspieszenie jako funkcję czasu znajdziemy, różniczkując prędkość  $v(t)$  względem czasu, co daje:

$$a = +6t, \quad (\text{odpowiedź})$$

przy czym  $a$  jest wyrażone w metrach na sekundę kwadrat.

b) Czy w jakiegokolwiek chwili  $v = 0$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Kładąc  $v(t) = 0$ , otrzymujemy równanie:

$$0 = -27 + 3t^2,$$

którego rozwiązaniem jest:

$$t = \pm 3 \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc prędkość cząstki jest równa zeru, zarówno 3 s przed, jak i 3 s po zerowym wskazaniu zegara.

c) Opisz ruch cząstki dla  $t \geq 0$ .

c)

**ROZWIĄZANIE:**

Musimy przeanalizować wyrażenia na  $x(t)$ ,  $v(t)$  i  $a(t)$ .

W chwili  $t = 0$  położenie cząstki wynosi  $x(0) = +4$  m. Jej prędkość jest równa  $v(0) = -27$  m/s, tzn. jest skierowana w kierunku ujemnym osi  $x$ . Przyspieszenie cząstki  $a(0) = 0$ , ponieważ w tej chwili prędkość cząstki się nie zmienia.

Dla  $0 < t < 3$  s cząstka ma wciąż prędkość ujemną, tzn. porusza się w kierunku ujemnym. Jednakże jej przyspieszenie nie jest już równe zero, lecz jest dodatnie i rośnie. Znaki prędkości

i przyspieszenia są przeciwne, dlatego też cząstka porusza się coraz wolniej.

Jak już przekonaliśmy się wcześniej, cząstka jest nieruchoma w chwili  $t = 3$  s. W tej właśnie chwili jest ona najbardziej wysunięta w lewą stronę od początku osi na rysunku 2.1, w zakresie całego ruchu. Podstawiając  $t = 3$  s do wyrażenia na  $x(t)$  stwierdzamy, że położenie cząstki w tej chwili wynosi  $x = -50$  m. Przyspieszenie cząstki jest nadal dodatnie.

Dla  $t > 3$  s cząstka porusza się po osi w prawą stronę. Jej przyspieszenie jest przez cały czas dodatnie, a jego wartość bezwzględna rośnie wraz z upływem czasu. Prędkość cząstki jest dodatnia, a jej wartość bezwzględna również rośnie wraz z upływem czasu.

## 2.6. Ważny przypadek szczególny: ruch ze stałym przyspieszeniem

Bardzo często spotykamy się z ruchami, dla których przyspieszenie jest stałe lub niemal stałe. Na przykład, gdy na skrzyżowaniu ulic światła zmieniają się z czerwonych na zielone, ruszasz samochodem z miejsca, z przyspieszeniem przybliżeniu stałym. Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia samochodu mają wówczas postać taką, jak na rysunku 2.8 (zauważ, że skoro  $a(t)$  na rysunku 2.8c jest funkcją stałą, to nachylenie wykresu  $v(t)$  na rysunku 2.8b musi być stałe). Gdy później hamujesz, aby zatrzymać samochód, jego opóźnienie jest też przybliżeniu stałe.

Takie sytuacje występują bardzo często, dlatego też warto poznać równania wiążące ze sobą położenie, prędkość i przyspieszenie dla tego rodzaju ruchu. W tym paragrafie pokażemy jeden sposób ich wyprowadzenia, a w paragrafie następnym przedstawimy inne podejście do tego zagadnienia. W trakcie lektury tych paragrafów, a także przy rozwiązywaniu zadań domowych należy pamiętać, że równania te są spełnione tylko w przypadku stałego przyspieszenia (lub gdy założenie stałości przyspieszenia jest dobrym przybliżeniem sytuacji rzeczywistej).

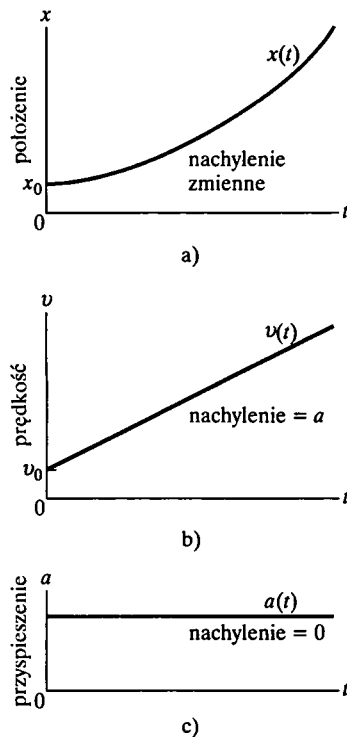
Gdy przyspieszenie jest stałe, przyspieszenie średnie jest równe przyspieszeniu chwilowemu i — zmieniając nieco oznaczenia — możemy zapisać wzór (2.7) w postaci:

$$a = a_{\text{sr}} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

Przez  $v_0$  oznaczyliśmy tu prędkość w chwili  $t = 0$ , a przez  $v$  — prędkość w pewnej późniejszej chwili  $t$ . Przekształcając to równanie, otrzymujemy:

$$v = v_0 + at. \tag{2.11}$$

Jak widać, dla  $t = 0$  równanie powyższe daje  $v = v_0$ , co jest zgodne z naszym założeniem. Ponadto, różniczkując stronami równanie (2.11), otrzymujemy  $dv/dt = a$ , co jest zgodne z definicją przyspieszenia. Na rysunku 2.8b przedstawiono wykres zależności  $v(t)$  opisanej równaniem (2.11); zależność ta jest liniowa, a więc jej wykresem jest prosta.



Rys. 2.8. a) Położenie  $x(t)$  cząstki poruszającej się ze stałym przyspieszeniem. b) Prędkość tej cząstki  $v(t)$ , równa w każdej chwili nachyleniu krzywej z rysunku (a). c) Przyspieszenie tej cząstki, które jest stałe, równe stałemu nachyleniu krzywej  $v(t)$

W podobny sposób, przekształcając równanie (2.2), otrzymujemy:

$$v_{\text{sr}} = \frac{x - x_0}{t - 0},$$

a stąd:

$$x = x_0 + v_{\text{sr}}t, \quad (2.12)$$

gdzie  $x_0$  oznacza położenie cząstki w chwili  $t = 0$ , a  $v_{\text{sr}}$  — średnią prędkość cząstki w przedziale od  $t = 0$  do pewnej późniejszej chwili  $t$ .

Gdy prędkość zmienia się liniowo w czasie, jak w równaniu (2.11), prędkość *średnia* w pewnym przedziale czasu (powiedzmy od  $t = 0$  do  $t$ ) jest równa średniej arytmetycznej prędkości na początku tego przedziału ( $v_0$ ) i na jego końcu ( $v$ ). Tak więc, w przedziale od  $t = 0$  do późniejszej chwili  $t$  prędkość średnia wynosi:

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (2.13)$$

Podstawiając do tego równania  $v$  ze wzoru (2.11), otrzymujemy:

$$v_{\text{sr}} = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (2.14)$$

I wreszcie, wstawiając (2.14) do (2.12), mamy:

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.15)$$

Jak widać, dla  $t = 0$  równanie powyższe daje  $x = x_0$ , co jest zgodne z naszym założeniem. Ponadto, różniczkując stronami równanie (2.15), otrzymujemy równanie (2.11), a zatem równania te są ze sobą zgodne. Na rysunku 2.8a przedstawiono wykres zależności opisanej równaniem (2.15); zależność ta jest kwadratowa, a więc jej wykres jest zakrzywiony.

Równania (2.11) i (2.15) są to *podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem*; korzystając z nich, można rozwiązać każde zadanie z tej książki, dotyczące takiego ruchu. Możemy również wyprowadzić inne równania, przydatne do rozwiązywania pewnych konkretnych rodzajów zadań. Zauważ najpierw, że w zadaniach na temat ruchu ze stałym przyspieszeniem możemy mieć do czynienia z pięcioma wielkościami:  $x - x_0$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $a$  i  $v_0$ . Zwykle jedna z tych wielkości *nie występuje* w zadaniu *ani jako dana, ani jako niewiadoma* — dane są trzy z pozostałych wielkości, a znaleźć należy czwartą.

Równania (2.11) i (2.15) zawierają właśnie po cztery z tych wielkości, w innych zestawach. W równaniu (2.11) nie występuje przemieszczenie  $x - x_0$ , a w równaniu (2.15) — prędkość  $v$ . Z tych dwóch równań można otrzymać trzy inne, z których każde nie zawiera innej ze wspomnianych pięciu wielkości. Po pierwsze, możemy z nich wyeliminować  $t$ , otrzymując:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2.16)$$

Równanie to jest przydatne, gdy nie znamy  $t$  i nie musimy tej wielkości wyznaczyć. Natomiast z równań (2.11) i (2.15) możemy wyeliminować przyspieszenie  $a$ , uzyskując równanie nie zawierające  $a$ :

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \quad (2.17)$$

Wreszcie, eliminując  $v_0$ , otrzymujemy:

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \quad (2.18)$$

Zwróć uwagę na różnicę między tym równaniem a równaniem (2.15): jedno z nich zawiera prędkość początkową  $v_0$ , a drugie — prędkość  $v$  w chwili  $t$ .

Tabela 2.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem<sup>1</sup>

Numer równania	Równanie	„Brakująca” wielkość
(2.11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$v$
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	$v_0$

<sup>1</sup>Zanim zastosujesz równania z tej tabeli upewnij się, że zadanie, które rozwiążesz, dotyczy istotnie ruchu ze stałym przyspieszeniem.

W tabeli 2.1 podano podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, tzn. równania (2.11) i (2.15), oraz wyprowadzone przed chwilą równania dla przypadków szczególnych. Proste zadania, dotyczące ruchu ze stałym przyspieszeniem będziesz mógł zwykle rozwiązać, wybierając właściwe równanie z tej tabeli (oczywiście, o ile będziesz ją miał pod ręką). Należy wybrać to równanie, które zawiera trzy wielkości dane w zadaniu oraz wielkość, którą trzeba wyznaczyć. Można też pamiętać tylko równania (2.11) i (2.15) i rozwiązywać je łącznie, jako układ równań. Taką właśnie metodę rozwiązywania zastosujemy w przykładzie 2.5.

**SPRAWDZIAN 5:** Niżej podano równania opisujące zależność położenia cząstki od czasu dla czterech przypadków: 1)  $x = 3t - 4$ ; 2)  $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$ ; 3)  $x = 2/t^2 - 4/t$ ; 4)  $x = 5t^2 - 3$ . W którym z tych przypadków można skorzystać z równań zamieszczonych w tabeli 2.1?

## Przykład 2.5

Mając swoim Porschem z prędkością 100 km/h, spostrzegasz rażącego policjanta. Naciskasz na hamulec i zmniejszasz prędkość do 80 km/h na drodze 88 m, hamując ze stałym przyspieszeniem. Jaką wartość ma to przyspieszenie?

### ROZWIĄZANIE:

Przyjmijmy, że ruch zachodzi w dodatnim kierunku osi  $x$ . Dla prostoty założmy, że początek hamowania następuje w chwili  $t = 0$ , wtedy położenie samochodu jest  $x_0$ . Skoro przyspieszenie jest stałe, to jest ono związane z prędkością i przemieszczeniem samochodu za pośrednictwem podstawowych równań ruchu ze stałym przyspieszeniem, tzn. równań (2.11) i (2.15). Prędkość początkowa jest równa  $v_0 = 100 \text{ km/h} = 27,78 \text{ m/s}$ , przemieszczenie  $x - x_0 = 88 \text{ m}$ , a prędkość po przebyciu tej drogi wynosi  $v = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/s}$ . Nie znamy przyspieszenia  $a$  i czasu hamowania  $t$ , które występują w tych równaniach. Musimy więc łączyć je łącznie, jako układ równań.

Aby wyeliminować niewiadomą  $t$ , przekształćmy równanie (2.11) do postaci:

$$t = \frac{v - v_0}{a}, \quad (2.19)$$

a następnie podstawiamy to wyrażenie do wzoru (2.15), co daje:

$$x - x_0 = v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2}a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2.$$

Rozwiązując to równanie względem  $a$  i podstawiając wartości liczbowe danych, otrzymujemy:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(22,22 \text{ m/s})^2 - (27,78 \text{ m/s})^2}{2(88 \text{ m})} = -1,58 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że w celu wyznaczenia  $a$  mogliśmy również skorzystać z równania (2.16), które nie zawiera zmiennej  $t$ .

b) Jak długo trwało hamowanie?

### ROZWIĄZANIE:

Mając już  $a$ , wyznaczamy  $t$  z równania (2.19):

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(22,22 \text{ m/s}) - (27,78 \text{ m/s})}{(-1,58 \text{ m/s}^2)} = 3,519 \text{ s} \approx 3,52 \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Widać, że jeśli jedziesz z nadmierną prędkością i starasz się szybko wyhamować do prędkości dozwolonej, to policjant ma na ogół dostatecznie dużo czasu, aby zmierzyć twoją prędkość.

## Porada 6: Sprawdzaj wymiary

Wymiarem prędkości jest  $[L/T]$ , tzn. iloraz długości  $L$  i czasu  $T$ , a wymiarem przyspieszenia —  $[L/T^2]$ . W każdym równaniu wymiary wszystkich jego składników muszą być jednakowe. Jeśli masz wątpliwości co do poprawności równania, to sprawdź w nim zgodność wymiarów.

Sprawdźmy wymiary w równaniu (2.15), tzn.  $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ . Łatwo zauważyć, że każdy składnik powinien mieć wymiar długości, ponieważ taki jest wymiar wielkości  $x$  i  $x_0$ . Wyraz  $v_0 t$  ma wymiar  $[(L/T)(T)] = [L]$ , a wyraz  $\frac{1}{2} a t^2 = [(L/T^2)(T^2)] = [L]$ . Tak więc wymiary w tym wzorze są zgodne.

## 2.7. Stałe przyspieszenie w innym świetle\*

Dwa pierwsze równania podane w tabeli 2.1 są równaniami podstawowymi, z których wyprowadzamy pozostałe. Te dwa równania można otrzymać, całkując równanie definiujące przyspieszenie, przy założeniu, że  $a$  jest stałe. Aby wyprowadzić równanie (2.11), zapiszmy definicję przyspieszenia (wzór (2.8)) w postaci:

$$dv = a dt.$$

Biorąc całkę nieoznaczoną z obydwu stron równania, otrzymujemy:

$$\int dv = \int a dt.$$

Przyspieszenie  $a$  jest stałe, dlatego możemy je wynieść przed znak całki. Otrzymujemy więc:

$$\int dv = a \int dt,$$

a stąd:

$$v = at + C. \quad (2.20)$$

Wyznaczając stałą całkowania  $C$  zauważ, że dla  $t = 0$  mamy  $v = v_0$ . Podstawiając te wartości do równania (2.20) (które obowiązuje w każdej chwili, a więc i w chwili  $t = 0$ ), otrzymujemy:

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Wstawiając ten wynik do równania (2.20), dostajemy równanie (2.11).

Aby wyprowadzić równanie (2.15), zapiszmy definicję prędkości (wzór (2.4)) w postaci:

$$dx = v dt.$$

Biorąc całkę nieoznaczoną z obydwu stron tego równania, otrzymujemy:

$$\int dx = \int v dt.$$

Prędkość nie musi być stała, więc nie można jej wynieść przed znak całki. Możemy jednak w jej miejsce wstawić wyrażenie dane wzorem (2.11), otrzymując:

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt.$$

Zarówno  $v_0$ , jak i  $a$  są stałe, dlatego też równanie powyższe można zapisać w postaci:

$$\int dx = v_0 \int dt + a \int t dt.$$

\* Paragraf ten przeznaczony jest dla czytelników znających już rachunek całkowy.

Całkowanie prowadzi do wzoru:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C', \quad (2.21)$$

gdzie  $C'$  jest inną stałą całkowania. W chwili  $t = 0$  mamy  $x = x_0$ . Wstawiając to do równania (2.21), otrzymujemy  $x_0 = C'$ . Zastępując  $C'$  w równaniu (2.21) przez  $x_0$ , dostajemy równanie (2.15).

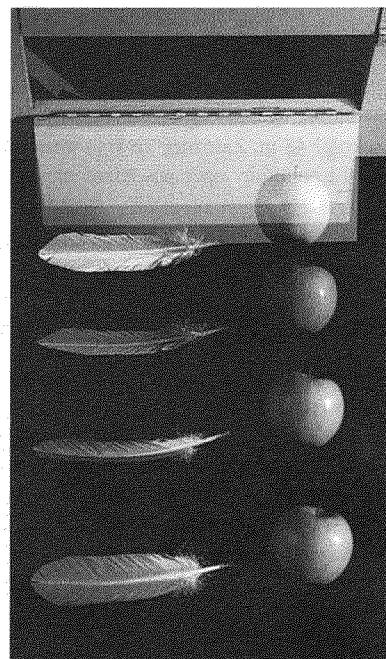
## 2.8. Spadek swobodny

Chybaś rzucił jakieś ciało w górę lub w dół i mógł w jakiś sposób wyeliminować wpływ powietrza na jego ruch, mógłbyś stwierdzić, że doznaje ono przyspieszenia o stałej wartości skierowanego w dół. Przyspieszenie to nazywamy **przyspieszeniem ziemskim**, a jego wartość bezwzględną oznaczamy przez  $g$ . Nie zależy ono od właściwości przedmiotu, takich jak: masa, gęstość czy kształt — jest takie samo dla wszystkich ciał.

Przykład swobodnego spadku ciał pokazano na rysunku 2.9, na którym przedstawiono serię zdjęć stroboskopowych spadającego pióra i jabłka. Obydwa te przedmioty spadają z takim samym przyspieszeniem, którego wartość bezwzględna wynosi  $g$ . Inaczej mówiąc, ich prędkość rośnie w jednakowym tempie.

Wartość  $g$  zmienia się nieznacznie w zależności od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza. W zadaniach z tego rozdziału będziemy używać wartości  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , odpowiadającej średniej szerokości geograficznej i poziomowi morza.

Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, podane w tabeli 2.1, opisują także spadek swobodny ciał w pobliżu powierzchni Ziemi, tzn. ruch w pionie ciał poruszających się do góry lub w dół, o ile tylko wpływ powietrza na ruch ciała można zaniedbać. Zauważ jednak, że dla spadku swobodnego: 1) ruch zachodzi nie wzdłuż poziomej osi  $x$ , lecz wzdłuż pionowej osi  $y$ , przy czym kierunek dodatni  $y$  to kierunek ku górze (będzie to ważne w dalszych rozdziałach, gdy będziemy badać ruch łączny w pionie i w poziomie); 2) przyspieszenie ciała spadającego swobodnie jest zawsze ujemne, tzn. ma kierunek ujemny osi  $y$  — jest skierowane do środka Ziemi. W zadaniach będziemy więc zawsze przyjmować, że wynosi ono  $-g$ .



Rys. 2.9. Spadając swobodnie w próżni, pióro i jabłko poruszają się w dół z takim samym przyspieszeniem o wartości bezwzględnej  $g$ . Ruch jest przyspieszony, dlatego też kolejne obrazy ciał są coraz bardziej odległe od siebie. Widać jednak, że pod nieobecność powietrza odległości kolejnych obrazów są jednakowe dla pióra i dla jabłka

Przyspieszenie spadku swobodnego w pobliżu powierzchni Ziemi wynosi  $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$ , a jego wartość bezwzględna jest równa  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . W miejsce  $g$  nie wolno podstawiać wartości  $-9,8 \text{ m/s}^2$ .

Wyobraź sobie, że rzuciłeś pomidora prosto do góry, z prędkością początkową  $v_0$ , a potem złapałeś go, gdy znalazł się znów w punkcie wyrzutu. W czasie jego lotu swobodnego, tzn. od chwili wyrzucenia do chwili pochwycenia, ruch pomidora opisują równania z tabeli 2.1. Przyspieszenie wynosi przez cały czas  $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$  — jest ujemne, tzn. skierowane w dół. Natomiast prędkość pomidora zmienia się, jak to wskazują równania (2.11) i (2.16). W czasie wznoszenia się pomidora jego prędkość jest dodatnia, lecz coraz mniejsza, aż do zera. W chwili, gdy prędkość pomidora jest równa zero, osiąga on największą wysokość. W czasie ruchu w dół jego prędkość jest ujemna, a jej wartość bezwzględna rośnie.

## Przykład 2.6

Powróćmy teraz do otwierającej rozdział historii o spadku Dave'a Mundaya, w stalowej kuli z Wodospadu Niagara. Spadł on z wysokości 48 m. Załóżmy, że jego prędkość początkowa była równa zeru i pomińmy opór powietrza stawiany kuli w czasie spadku.

a) Jak długo spadał Munday do chwili, gdy uderzył w powierzchnię wody na dole wodospadu?

### ROZWIĄZANIE:

➔ Ruch Mundaya był spadkiem swobodnym, a więc można zastosować do niego równania z tabeli 2.1. Przyjmijmy za oś  $y$  prostą pionową, wzdłuż której spadał Munday, za punkt  $y = 0$  — punkt początkowy spadku, a za kierunek dodatni — kierunek ku górze (rys. 2.10). Przyspieszenie ruchu wzdłuż osi  $y$  wynosi  $a = -g$ , a powierzchnia wody znajduje się w punkcie  $y = -48$  m (o współrzędnej ujemnej, bo leży poniżej punktu  $y = 0$ ). Załóżmy, że ruch rozpoczyna się w chwili  $t = 0$ , a prędkość początkowa wynosi  $v_0 = 0$ .

$y$	$t$	$y$	$v$	$a$
	[s]	[m]	[m/s]	[m/s <sup>2</sup> ]
0	0	0	0	-9,8
	1	-4,9	-9,8	-9,8
	2	-19,6	-19,6	-9,8
	3	-44,1	-29,4	-9,8
		-48		-9,8

Rys. 2.10. Przykład 2.6. Położenie, prędkość i przyspieszenie przedmiotu spadającego swobodnie, w tym przypadku kuli stalowej z Davem Mundayem w środku, spadającej z Wodospadu Niagara

Z tabeli 2.1 wybieramy równanie (2.15) (zapisując je dla współrzędnej  $y$ ), gdyż zawiera ono niewiadomą  $t$ , a pozostałe wielkości są dane. Otrzymujemy:

$$y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$(-48 \text{ m}) - 0 = 0 t - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t^2,$$

$$t^2 = 48/4,9,$$

a stąd:

$$t = 3,1 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że przemieszczenie Mundaya  $y - y_0$  jest ujemne — spadał on w dół, a więc w kierunku ujemnym osi  $y$  (przecież nie mógł spadać do góry!). Zauważ też, że równanie  $t^2 = 48/4,9$  ma dwa pierwiastki: 3,1 i -3,1. Wybieramy pierwiastek dodatni, ponieważ Munday spadł oczywiście na powierzchnię wody *później*, niż zaczął spadać w chwili  $t = 0$ .

b) Siedząc w swej kuli, Munday mógł w czasie spadku odliczyć trzy sekundy, lecz nie widział, jakie jest jego położenie. Wyznacz to położenie po każdej całkowitej sekundzie spadku.

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy znów z równania (2.15), podstawiając do niego kolejno wartości  $t = 1$  s, 2 s i 3 s, oraz wyznaczając odpowiadające im wartości położenia  $y$  Dave'a Mundaya. Wyniki podane są na rysunku 2.10.

c) Ile wynosiła prędkość Dave'a Mundaya w chwili osiągnięcia powierzchni wody?

### ROZWIĄZANIE:

Aby wyznaczyć tę prędkość z danych wyjściowych, tzn. nie korzystając z czasu spadku, obliczonego w punkcie (a), zapisujemy równanie (2.16) dla współrzędnej  $y$  i podstawiamy dane, co daje

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) = 0 - (2)(9,8 \text{ m/s}^2)(-48 \text{ m}),$$

czyli

$$v = -30,67 \text{ m/s} \approx -31 \text{ m/s} = -110 \text{ km/h.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Tym razem wybieramy pierwiastek ujemny, bo prędkość ma kierunek ujemny osi.

d) Ile wynosiła prędkość Mundaya na końcu każdej sekundy spadku? Czy zdawał on sobie sprawę z tego, że jego prędkość rośnie?

### ROZWIĄZANIE:

Aby wyznaczyć prędkość z danych wyjściowych, tzn. nie korzystając z wartości położenia, obliczonych w punkcie (b), podstawiamy do równania (2.11)  $a = -g$ , a następnie kolejno  $t = 1$  s, 2 s i 3 s. Oto przykład obliczeń:

$$v = v_0 - g t$$

$$= 0 - (9,8 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s}) = -9,8 \text{ m/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

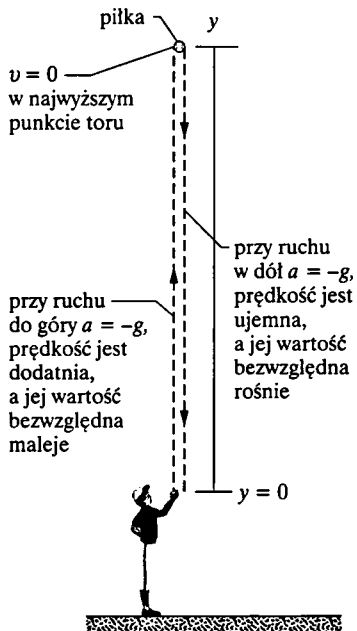
Pozostałe wyniki podano na rysunku 2.10.

W czasie spadku swobodnego Munday nie odczuwał narastania prędkości, ponieważ jego przyspieszenie wynosiło przez cały czas  $-9,8 \text{ m/s}^2$ , jak podano w ostatniej kolumnie na rysunku 2.10. Oczywiście odczuł on — i to bardzo mocno — uderzenie kuli w powierzchnię wody, gdyż wówczas jego przyspieszenie uległo gwałtownej zmianie (Munday przeżył upadek, lecz za swój szalony czyn został surowo ukarany karą pieniężną).



## Przykład 2.7

Jak pokazano na rysunku 2.11, zawodnik rzuca piłkę baseballową pionowo do góry, wzdłuż osi  $y$ , z prędkością początkową 12 m/s.



Rys. 2.11. Przykład 2.7.

Zawodnik rzuca piłkę baseballową pionowo do góry. Równania dla spadku swobodnego można również dobrze zastosować do przedmiotów wznoszących się, jak i do spadających, o ile opór powietrza można pominąć.

Jak długo piłka będzie się wznosić, aż do osiągnięcia największej wysokości?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że:

1. Podczas całego ruchu piłki — od momentu jej wyrzucenia do chwili powrotu do punktu wyjścia — porusza się ona z przyspieszeniem  $a = -g$ . Jej ruch jest więc opisany równaniami z tabeli 2.1.

2. Wiadomo, że w punkcie największego wzniesienia prędkość piłki  $v$  musi być równa 0. Znamy  $v$ ,  $a$  i prędkość początkową  $v_0 = 12$  m/s, dlatego też możemy skorzystać z równania (2.11), przekształcając je, otrzymujemy:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - (12 \text{ m/s})}{(-9,8 \text{ m/s}^2)} = 1,2 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi największa wysokość, na jaką wzniesie się piłka w stosunku do punktu wyrzucenia?

### ROZWIĄZANIE:

Przyjmijmy punkt wyrzucenia piłki za  $y_0 = 0$ . Zapiszmy równanie (2.16) dla współrzędnej  $y$ , połączmy w nim  $y - y_0 = y$  oraz  $v = 0$  (w punkcie największego wzniesienia) i rozwiążmy je względem  $y$ . Otrzymamy:

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12 \text{ m/s})^2}{2(-9,8 \text{ m/s}^2)} = 7,3 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jak długo będzie się wznosić piłka do punktu leżącego 5 m nad punktem jej wyrzucenia?

### ROZWIĄZANIE:

Znamy  $v_0$ ,  $a = -g$  i przemieszczenie  $y - y_0 = 5$  m, a szukamy  $t$ , skorzystamy więc z równania (2.15). Zapisując je dla współrzędnej  $y$  i podstawiając  $y_0 = 0$ , otrzymujemy:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

czyli

$$5 \text{ m} = (12 \text{ m/s})t - \left(\frac{1}{2}\right)(9,8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Pomijając chwilowo jednostki (po stwierdzeniu, że są one zgodne), możemy zapisać to równanie w postaci:

$$4,9t^2 - 12t + 5 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe względem  $t$ , otrzymujemy:

$$t = 0,53 \text{ s} \quad \text{i} \quad t = 1,9 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Istnieją dwa rozwiązania! Nie powinno cię to jednak dziwić, gdyż piłka przechodzi przecież dwukrotnie przez punkt  $y = 5$  m — raz wznosząc się, a drugi raz spadając.

**SPRAWDZIAN 6:** Odpowiedz na pytania, odnoszące się do powyższego przykładu: a) Jaki jest znak przemieszczenia piłki w czasie jej wznoszenia, od punktu wyrzucenia do punktu największego wzniesienia? b) Jaki jest ten znak w czasie spadku piłki, od punktu największego wzniesienia do punktu jej wyrzucenia? c) Jakie jest przyspieszenie piłki w punkcie jej największego wzniesienia?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Zadanie 7: Co oznacza znak minus?

W przykładach 2.6 i 2.7 wiele razy otrzymywaliśmy wynik ze znakiem minus. Należy sobie dobrze zdawać sprawę z tego, co oznacza ten znak. W tych dwóch zadaniach, dotyczących spadku swobodnego, ruch zachodził wzdłuż osi pionowej (osi  $y$ ), której kierunek dodatni przyjęliśmy — całkiem dowolnie — jako kierunek do góry.

Następnie wybieraliśmy początek osi  $y$  (tzn. punkt  $y = 0$ ), jak nam było wygodnie. W przykładzie 2.6 był nim najwyższy punkt, z którego spadało ciało, a w przykładzie 2.7 — punkt, w którym znajdowała się ręka rzucającego piłkę zawodnika. Ujemna wartość  $y$  odpowiada punktom, znajdującym się niżej wybranego początku osi. Ujemna prędkość oznacza, że ciało porusza się w kierunku ujemnym osi, tzn. w dół. To ostatnie stwierdzenie jest słuszne, niezależnie od położenia ciała.

We wszystkich zadaniach, dotyczących spadku swobodnego, przyjmowaliśmy ujemną wartość przyspieszenia ( $-9,8 \text{ m/s}^2$ ). Przyspieszenie ujemne oznacza, że wraz z upływem czasu prędkość ciała albo jest dodatnia i jej wartość maleje, albo jest ujemna i jej wartość rośnie. Stwierdzenie to jest słuszne, niezależnie od położenia ciała oraz od tego, jak szybko i w jakim kierunku się ono porusza. W przykładzie 2.7 przyspieszenie piłki jest ujemne (skierowane w dół) w czasie całego jej ruchu, niezależnie od tego, czy piłka się wznosi, czy spada.

## Porada 8: Nieoczekiwane wyniki

Rozwiązując równania, otrzymujemy nieraz wyniki, których się nie spodziewaliśmy, jak w przykładzie 2.7c. Gdy otrzymasz taki niespodziewany wynik, nie odrzucaj go automatycznie. Przeanalizuj uważnie jego sens fizyczny. Jeśli dotyczy czasu, to wartość ujemna też może być do przyjęcia — czas ujemny odnosi się do chwil wcześniejszych niż  $t = 0$ , czyli chwili wybranej (w sposób dowolny) za chwilę uruchomienia stopera.

## Podsumowanie

**Położenie** Położenie ciała na osi  $x$ , czyli współrzędną punktu, w którym się ono znajduje, wyznaczamy w stosunku do początku, czyli punktu zerowego osi. Położenie może być dodatnie lub ujemne, zależnie od tego, po której stronie początku osi znajduje się ciało, może też być równe zero, jeśli ciało znajduje się w początku osi. **Kierunek dodatni** osi to kierunek, w którym wzrastają współrzędne dodatnie punktów osi; kierunek przeciwny to **kierunek ujemny** osi.

**Przemieszczenie** Przemieszczeniem  $\Delta x$  ciała nazywamy zmianę jego położenia:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.1)$$

Przemieszczenie jest wielkością wektorową. Jest dodatnie, jeśli ciało przemieściło się w dodatnim kierunku osi  $x$ , oraz ujemne, jeśli ciało przemieściło się w kierunku ujemnym.

**Prędkość średnia** Jeśli ciało zmieniło położenie z  $x_1$  na  $x_2$  w przedziale czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$ , to **prędkość średnia** w tym przedziale czasu wynosi:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.2)$$

Znak wielkości  $v_{sr}$  wskazuje średni kierunek ruchu ( $v_{sr}$  jest wielkością wektorową). Prędkość średnia nie zależy od drogi, po jakiej poruszała się cząstka, a tylko od jej położenia początkowego i końcowego.

Na wykresie  $x$  jako funkcji  $t$ , prędkość średnia w przedziale czasu  $\Delta t$  jest równa nachyleniu prostej, przechodzącej przez punkty na krzywej, odpowiadające początkowi i końcowi tego przedziału czasu.

**Średnia wartość bezwzględna prędkości** Średnia wartość bezwzględna prędkości  $s_{sr}$  ciała w przedziale czasu  $\Delta t$  zależy od drogi, którą przebywa ciało w tym przedziale czasu:

$$s_{sr} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

**Prędkość chwilowa** Prędkość chwilowa (czyli po prostu prędkość)  $v$  ciała, jest równa:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad (2.4)$$

przy czym wielkości  $\Delta x$  i  $\Delta t$  są zdefiniowane w równaniu (2.2). Prędkość chwilowa (w pewnej chwili) jest równa nachyleniu wykresu  $x$  jako funkcji  $t$ , w punkcie odpowiadającym tej chwili.

**Przyspieszenie średnie** Przyspieszenie średnie jest to iloraz zmiany prędkości  $\Delta v$  ciała i przedziału czasu  $\Delta t$ , w jakim zaszła ta zmiana:

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Znak przyspieszenia średniego wskazuje kierunek wektora  $a_{sr}$ .

**Przyspieszenie chwilowe** Przyspieszenie chwilowe (czyli po prostu przyspieszenie)  $a$  ciała jest równe szybkości zmian prędkości w czasie, czyli drugiej pochodnej położenia  $x(t)$  względem czasu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.8, 2.9)$$

Na wykresie  $v$  jako funkcji  $t$ , przyspieszenie  $a$  w chwili  $t$  jest równe nachyleniu krzywej w punkcie, odpowiadającym tej chwili.

**Przyspieszenie stałe** Ruch ciała ze stałym przyspieszeniem jest opisany przez pięć równań zebranych w tabeli 2.1:

$$v = v_0 + at, \quad (2.11)$$

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad (2.15)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (2.16)$$

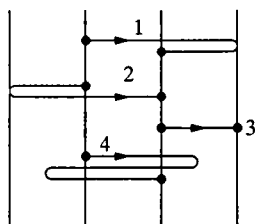
$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad (2.17)$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \quad (2.18)$$

Równania te *nie są spełnione*, gdy przyspieszenie nie jest stałe.

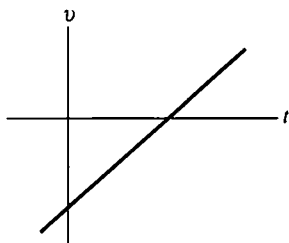
**Spadek swobodny** Ważnym przykładem ruchu po prostej ze stałym przyspieszeniem jest ruch ciała spadającego lub wznoszącego się swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi. Do opisu tego ruchu stosujemy równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, przyjmując dwie zmiany w ich zapisie: 1) oś pionową, wzdłuż której zachodzi ruch nazywamy osią  $y$  o kierunku dodatnim, skierowanym *ku górze*; 2) w miejsce  $a$  wstawiamy  $-g$ , przy czym  $g$  jest wartością bezwzględną przyspieszenia ziemskiego. W pobliżu powierzchni Ziemi  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

1. Na rysunku 2.12 przedstawiono drogi przebyte przez cztery ciała w tym samym czasie. Linie pionowe są jednakowo odległe od siebie. Uszereguj te ciała pod względem: a) średniej prędkości, b) średniej wartości bezwzględnej prędkości, poczynając od największej wartości tych wielkości.



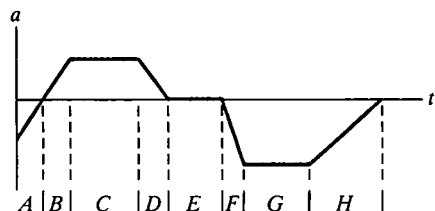
Rys. 2.12. Pytanie 1

2. Na rysunku 2.13 przedstawiono wykres prędkości cząstki, poruszającej się wzdłuż osi  $x$  jako funkcji czasu. Jaki jest kierunek ruchu cząstki: a) początkowy, b) końcowy? c) Czy w jakiejś chwili cząstka się nie porusza? d) Czy przyspieszenie cząstki jest dodatnie, czy ujemne? e) Czy jest stałe, czy zmienne?



Rys. 2.13. Pytanie 2

3. Na rysunku 2.14 przedstawiono przyspieszenie  $a(t)$  ratlerka zaniętego owczarka alzackiego wzdłuż osi  $x$ . Wskaż przedział lub przedziały czasu, w których ratlerki biegnie ze stałą prędkością.



Rys. 2.14. Pytanie 3

4. W chwili  $t = 0$  cząstka, poruszająca się wzdłuż osi  $x$ , znajduje się w punkcie  $x_0 = -20$  m. Niżej podano znak prędkości początkowej cząstki  $v_0$  (w chwili  $t_0$ ) oraz znak jej stałego przyspieszenia  $a$  w czterech przypadkach: 1) +, +; 2) +, -; 3) -, +; 4) -, -. W którym z tych przypadków cząstka: a) będzie miała w pewnej chwili prędkość równą zero, b) z pewnością przejdzie przez początek osi (jeśli poczekamy dostatecznie długo), c) nigdy nie przejdzie przez początek osi?

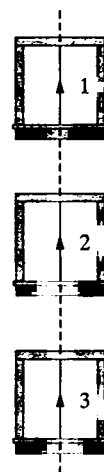
5. Niżej podano równania, opisujące prędkość cząstki  $v(t)$  w czterech przypadkach: a)  $v = 3$ ; b)  $v = 4t^2 + 2t - 6$ ; c)  $v = 3t - 4$ ;

d)  $v = 5t^2 - 3$ . W którym z tych przypadków spełnione są równania z tabeli 2.1?

6. Kierowca niebieskiego samochodu, jadącego z prędkością o wartości bezwzględnej 80 km/h, spostrzega nagle, że grozi mu najechanie na tył czerwonego samochodu jadącego przed nim z prędkością o wartości bezwzględnej 60 km/h. Jaką maksymalną prędkość może mieć samochód niebieski, w chwili dotarcia do samochodu czerwonego, aby nie doszło do zderzenia (rozgrzewka przed zadaniem 38)?

7. W chwili  $t = 0$  niebieski samochód, początkowo stojący w punkcie  $x = 0$ , rusza z miejsca ze stałym przyspieszeniem  $2 \text{ m/s}^2$  w dodatnim kierunku osi  $x$ . W chwili  $t = 2 \text{ s}$  czerwony samochód, jadący sąsiednim pasem w tym samym kierunku, przejeżdża przez punkt  $x = 0$  z prędkością  $8 \text{ m/s}$  i stałym przyspieszeniem  $3 \text{ m/s}^2$ . Ułóż układ dwóch równań, którego rozwiązanie pozwoli wyznaczyć chwilę, w której samochód czerwony wyprzedzi samochód niebieski (rozgrzewka przed zadaniem 36).

8. Jak pokazano na rysunku 2.15, rzucona pionowo do góry mandarynka mija trzy okna o jednakowej wysokości, znajdujące się w takiej samej odległości od siebie. Uszereguj okna pod względem: a) średniej prędkości, b) czasu, c) wartości przyspieszenia, d) zmiany prędkości  $\Delta v$ , odpowiadających przelotowi mandarynki przed każdym z okien, od największych do najmniejszych wartości tych wielkości.



Rys. 2.15. Pytanie 8

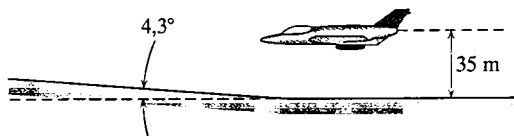
9. Rzucasz piłkę pionowo do góry na krawędzi urwiska i po pewnym czasie spada ona na ziemię pod urwiskiem. Jeśli rzuciłbyś tę piłkę pionowo w dół z taką samą wartością bezwzględną prędkości, to czy jej prędkość w chwili upadku byłaby większa, mniejsza, czy taka sama, jak w pierwszym przypadku? (Wskazówka: przeanalizuj równanie (2.16)).

- www** Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw** Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

W wielu z podanych zadań będziesz musiał sporządzić wykresy położenia, prędkości lub przyspieszenia jako funkcji czasu. Zwykle wystarczy rysunek odręczny, odpowiednio opisany, o dobrze widocznych częściach prosto- i krzywoliniowych. Jeśli dysponujesz komputerem, to możesz oczywiście z niego skorzystać w celu wykonania wykresu.

## 2.3 Prędkość średnia

- Zawodnik rzuca „szybką” piłkę baseballową poziomo, z prędkością początkową równą 160 km/h. Po jakim czasie doleci ona do pola odległego od miejsca wyrzutu o 18.4 m?
- Światowy rekord prędkości jazdy rowerem został ustanowiony w 1992 roku przez Chrisa Hubera, jadącego na nowoczesnym rowerze o nazwie CheetaH (Gepard), zbudowanym przez trzech młodych inżynierów mechaników. Rekordową prędkość średnią 110,6 km/h zmierzono na dystansie 200 m, na pustej szosie. Kończąc jazdę, Huber wykrzyknął: „Cogito ergo zoom!” (myślę, więc pędzę!). Ile czasu zajęło Huberowi przejechanie tych 200 m?
- Samochód jadący po prostej drodze przebył 40 km z prędkością 30 km/h, a następnie 40 km, w tym samym kierunku, przebył z prędkością 60 km/h. a) Ile wynosi średnia prędkość samochodu w czasie 80-kilometrowej podróży (przyjmij, że samochód porusza się w dodatnim kierunku osi  $x$ )? b) Ile wynosi średnia wartość bezwzględna prędkości pojazdu? c) Wykreśl zależność  $x$  od  $t$  dla tego ruchu i pokaż, jak z wykresu wyznaczyć prędkość średnią.
- Znakomity pilot, w czasie ćwiczenia manewrów unikania radaru nieprzyjaciela, leci poziomo z prędkością 1300 km/h, na wysokości zaledwie 35 m nad ziemią. Nagle spostrzega, że teren przed nim wznosi się łagodnie pod kątem  $4.3^\circ$ , co jest nachyleniem tak małym, że niełatwo je wykryć wzrokiem (rys. 2.16). Ile czasu ma pilot, aby skorygować kierunek lotu przed uderzeniem w ziemię?



Rys. 2.16. Zadanie 4

- Jedziesz autostradą międzystanową z San Antonio do Houston z prędkością 55 km/h przez połowę czasu jazdy, a drugą połowę

czasu z prędkością 90 km/h. Wracając, połowę drogi przebywasz z prędkością 55 km/h, a drugą połowę z prędkością 90 km/h. Wynosi średnia wartość bezwzględna twojej prędkości: a) w czasie jazdy z San Antonio do Houston, b) w czasie drogi powrotu z Houston do San Antonio, c) w czasie całej podróży? d) Wynosi twoja prędkość średnia w czasie całej podróży? e) Wykreśl zależność  $x$  od  $t$  dla przypadku (a), zakładając, że ruch odbył się przez cały czas w kierunku dodatnim osi  $x$ . Pokaż, jak z tego wykresu wyznaczyć prędkość średnią. **ilw**

- Oblicz swoją prędkość średnią w dwóch następujących przypadkach: a) gdy prostą ścieżką przeszedłeś 73.2 m z prędkością 1.22 m/s, a potem przebiegłeś 73.2 m z prędkością 3.05 m/s b) gdy idziesz po tej samej ścieżce przez 1 minutę z prędkością 1.22 m/s, a następnie biegniesz przez 1 minutę z prędkością 3.05 m/s. c) Sporządź wykres zależności  $x$  od  $t$  w obydwu przypadkach i pokaż, jak z tych wykresów wyznaczyć prędkość średnią.

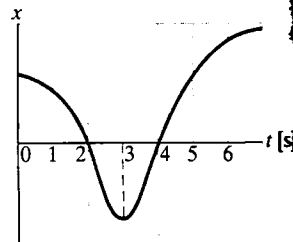
- Położenie ciała, poruszającego się wzdłuż osi  $x$  jest dane wzorem:  $x = 3t - 4t^2 + t^3$ , przy czym  $x$  wyrażono w metrach, a  $t$  w sekundach. a) Ile wynosi położenie ciała w chwilach  $t = 1$ ,  $t = 3$  i  $t = 4$  s? b) Jakie jest przemieszczenie ciała od chwili  $t = 0$  do chwili  $t = 4$  s? c) Ile wynosi średnia prędkość ciała w przedziale czasu od  $t = 2$  s do  $t = 4$  s? d) Sporządź wykres  $x$  jako funkcji czasu dla  $0 \leq t \leq 4$  s i pokaż, jak, korzystając z tego wykresu, znaleźć odpowiedź na pytanie (c). **www**

- Dwa pociągi jadą naprzeciwko siebie po prostym torze z prędkością 30 km/h każdy. Ptak rozwijający w locie prędkość 60 km/h wylatuje z lokomotywy jednego z pociągów, gdy są one od siebie od siebie o 60 km i leci w stronę drugiego pociągu. Doleciawszy do niego zawraca i leci z powrotem do pierwszego itd. (nie mamy zielonego pojęcia, dlaczego ptak miałby zachowywać się w ten sposób). Jaką całkowitą drogę przeleci ptak?

- Dwaj zawodnicy uzyskali w biegu na 1 km czasy: 2 min 27.95 s i 2 min 28.15 s; biegli oni jednak po różnych torach. O ile większa mogła być rzeczywista długość toru, po którym biegł drugi zawodnik, jeśli biegacz, który uzyskał krótszy czas, istotnie biegł szybciej? **ilw**

## 2.4 Prędkość chwilowa

- Wykres na rysunku 2.17 dotyczy borsuka pędzącego w lewo (tzn. w kierunku ujemnym osi), a następnie w prawo wzdłuż osi  $x$ .



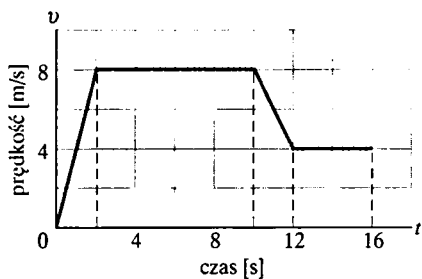
Rys. 2.17. Zadanie 10

10. Czy kiedykolwiek, a jeśli tak, to kiedy zwierzę znajduje się lewo od początku osi? Czy kiedykolwiek, a jeśli tak, to kiedy prędkość jest: b) ujemna, c) dodatnia, d) równa zero?

11. Położenie cząstki opisano wzorem:  $x = 4 - 12t + 3t^2$ , przy czym  $t$  wyrażono w sekundach, a  $x$  w metrach. a) Ile wynosi prędkość cząstki w chwili  $t = 1$  s? b) Czy w tej chwili porusza się ona w dodatnim, czy w ujemnym kierunku osi  $x$ ? c) Ile wynosi wartość bezwzględna jej prędkości w tej chwili? d) Czy w następnych chwilach wartość bezwzględna jej prędkości jest większa, czy mniejsza? Na następne dwa pytania postaraj się odpowiedzieć bez wykonywania dalszych obliczeń. e) Czy w jakiejś chwili prędkość cząstki jest równa zero? f) Czy istnieje chwila późniejsza niż  $t = 3$  s, w której cząstka poruszałaby się w ujemnym kierunku osi  $x$ ?

12. Położenie cząstki, poruszającej się wzdłuż osi  $x$ , jest opisane wzorem:  $x = 9,75 + 1,50t^3$ , przy czym  $x$  jest wyrażone w centymetrach, a  $t$  — w sekundach. Oblicz: a) prędkość średnią w przedziale czasu od  $t = 2$  s do  $t = 3$  s; b) prędkość chwilową w chwili  $t = 2$  s; c) prędkość chwilową w chwili  $t = 3$  s; d) prędkość chwilową w chwili  $t = 2,5$  s, e) prędkość chwilową cząstki, gdy jest ona w połowie drogi między położeniami zajmowanymi w chwilach  $t = 2$  s i  $t = 3$  s. f) Wykreśl zależność  $x$  od  $t$  i wskaż, jak otrzymać graficznie odpowiedzi na poprzednie pytania.

13. Na rysunku 2.18 przedstawiono wykres zależności prędkości od czasu. Jaką drogę przebiegnie on w ciągu 16 s? ilw



Rys. 2.18. Zadanie 13

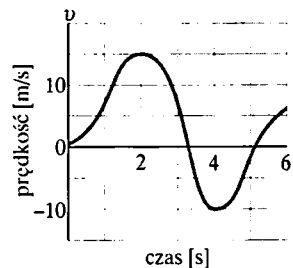
## 2.5 Przyspieszenie

14. Naskicuj wykres zależności położenia od czasu, opisującej ruch cząstki poruszającej się wzdłuż osi  $x$ , która w chwili  $t = 1$  s ma: a) prędkość równą zero i przyspieszenie dodatnie; b) prędkość równą zero i przyspieszenie ujemne; c) ujemną prędkość i dodatnie przyspieszenie; d) ujemną prędkość i ujemne przyspieszenie. e) W którym z tych przypadków wartość bezwzględna prędkości cząstki rośnie w chwili  $t = 1$  s?

15. Jakie wielkości fizyczne są opisane przez wyrażenia: a)  $(dx/dr)^2$ , b)  $d^2x/dr^2$ ? c) Jakie są ich jednostki w układzie SI?

16. Spłoszony struś biegnie po linii prostej z prędkością, której zależność od czasu przedstawiono na rysunku 2.19. Naskicuj wykres jego przyspieszenia jako funkcji czasu.

17. Cząstka ma w pewnej chwili prędkość, o wartości bezwzględnej równej 18 m/s. W chwili późniejszej o 2,4 s wartość bezwzględna jej prędkości wynosi 30 m/s, lecz cząstka porusza się wówczas w przeciwnym kierunku. Jaka jest wartość bezwzględna i kierunek średniego przyspieszenia cząstki w ciągu tych 2,4 s?



Rys. 2.19. Zadanie 16

18. Od chwili  $t = 0$  do chwili  $t = 5$  min człowiek stoi nieruchomo, a następnie od chwili  $t = 5$  min do chwili  $t = 10$  min idzie szybko po linii prostej ze stałą prędkością równą 2,2 m/s. Ile wynosi: a) jego średnia prędkość  $v_{sr}$ , b) jego średnie przyspieszenie  $a_{sr}$  w przedziale czasu od 2 min do 8 min? Ile wynosi: c)  $v_{sr}$ , d)  $a_{sr}$  w przedziale czasu od 3 min do 9 min? e) Naskicuj wykresy zależności  $x(t)$  i  $v(t)$  oraz pokaż jak, korzystając z tych wykresów, otrzymać odpowiedzi na pytania od (a) do (d).

19. Proton porusza się wzdłuż osi  $x$  zgodnie z równaniem:  $x = 50t + 10t^2$ , w którym  $x$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach. Oblicz: a) średnią prędkość protonu w czasie pierwszych 3 s jego ruchu, b) prędkość chwilową protonu w chwili  $t = 3$  s, c) przyspieszenie chwilowe protonu w chwili  $t = 3$  s. d) Wykreśl  $x$  jako funkcję  $t$  i pokaż jak, korzystając z tego wykresu, uzyskać odpowiedź na pytanie (a). e) Wskaż jak, korzystając z tego wykresu, otrzymać odpowiedź na pytanie (b). f) Wykreśl  $v$  jako funkcję  $t$  i wyznacz z tego wykresu odpowiedź na pytanie (c).

20. Elektron porusza się wzdłuż osi  $x$ , a jego położenie jest dane wzorem:  $x = 16te^{-t}$  m, gdzie  $t$  wyrażono w sekundach. W jakiej odległości od początku osi elektron znajduje się przez chwilę w bezruchu?

21. Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi  $x$  zależy od czasu, zgodnie z równaniem:  $x = ct^2 - bt^3$ , przy czym  $x$  wyrażono w metrach, a  $t$  w sekundach. a) W jakich jednostkach muszą być wyrażone wielkości  $c$  i  $b$ ? Załóżmy, że ich wartości liczbowe wynoszą odpowiednio 3 i 2. b) W jakiej chwili cząstka osiąga swe największe położenie dodatnie na osi  $x$ ? Ile wynosi: c) droga przebyta przez cząstkę, d) jej przemieszczenie w przedziale czasu od  $t = 0$  do  $t = 4$  s? Ile wynoszą: e) prędkość, f) przyspieszenie cząstki w chwilach  $t = 1, 2, 3$  i  $4$  s?

## 2.6 Ruch ze stałym przyspieszeniem

22. Automobilista zwiększa prędkość pojazdu w sposób jednostajny, od 25 km/h do 55 km/h, w czasie 0,5 min. Rowerzysta rozpędza się jednostajnie od spoczynku do prędkości równej 30 km/h w czasie 0,5 min. Oblicz ich przyspieszenia.

23. Mion (rodzaj cząstki elementarnej) wpada w pewien obszar z prędkością równą  $5 \cdot 10^6$  m/s i jest w nim spowalniany w tempie  $1,25 \cdot 10^{14}$  m/s<sup>2</sup>. a) Po przebyciu jakiej drogi mion się zatrzyma? b) Sporządź dla tego mionu wykresy zależności  $x(t)$  i  $v(t)$ .

24. Łeb grzechotnika atakującego swoją ofiarę może poruszać się z przyspieszeniem równym nawet 50 m/s<sup>2</sup>. Gdyby udało się zbudować samochód zdolny do takiego przyspieszenia, to ile czasu zajmowałoby mu rozpędzenie się od stanu spoczynku do prędkości równej 100 km/h?

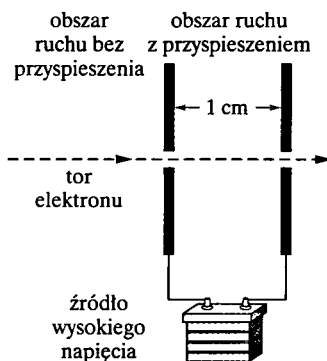
25. Elektron porusza się ze stałym przyspieszeniem równym  $+3,2$  m/s<sup>2</sup>. W pewnej chwili jego prędkość wynosiła  $+9,6$  m/s. Wyznacz jego prędkość w chwili: a) o 2,5 s wcześniejszej, b) o 2,5 s późniejszej.

26. Prędkość pocisku została zmierzona w chwili, kiedy wychodził on z lufy o długości 1,2 m. Otrzymano wynik równy 640 m/s. Zakładając, że pocisk poruszał się w lufie ze stałym przyspieszeniem oblicz czas, przez jaki pocisk przebywał w lufie od chwili jego odpalenia.

27. Wyobraź sobie, że pojazd raketowy porusza się w kosmosie z przyspieszeniem o wartości 9,8 m/s<sup>2</sup>, co daje załodze złudzenie, że znajduje się w standardowym ziemskim polu grawitacyjnym. a) Zakładając, że w chwili początkowej pojazd spoczywa oblicz czas, potrzebny na osiągnięcie prędkości równej jednej dziesiątej prędkości światła (przyjmij, że prędkość światła wynosi  $3 \cdot 10^8$  m/s). b) Jaką drogę przebędzie pojazd w tym czasie?

28. Jumbojet musi rozpędzić się na pasie startowym do prędkości o wartości 360 km/h, aby mógł wznieść się w powietrze. Z jakim najmniejszym stałym przyspieszeniem musi się on poruszać na pasie startowym o długości 1,8 km, aby mógł się od niego oderwać?

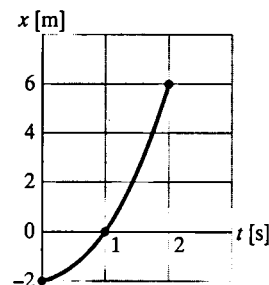
29. Elektron o prędkości początkowej o wartości  $v_0 = 1,5 \cdot 10^5$  m/s wpada w obszar o długości 1 cm, w którym jest przyspieszany polem elektrycznym (rys. 2.20). Wylatuje z tego obszaru z prędkością o wartości  $v = 5,7 \cdot 10^6$  m/s. Ile wynosiło jego przyspieszenie przy założeniu, że było ono stałe (właśnie tak przyspieszane są elektrony w zwykłych odbiornikach telewizyjnych)?



Rys. 2.20. Zadanie 29

30. Rekord świata prędkości lądowej został ustanowiony przez pułkownika Johna P. Stappa, który w marcu 1954 roku osiągnął w saniach raketowych prędkość o wartości 1020 km/s. Pojazd został zatrzymany w czasie 1,4 s (patrz rysunek 2.7). Wyraż przyspieszenie, jakiego doznawał rekordzista w czasie zatrzymywania pojazdu, w jednostkach przyspieszenia ziemskiego  $g$ .

31. Hamulce twojego samochodu są zdolne hamować pojazd z przyspieszeniem równym  $5,2$  m/s<sup>2</sup>. a) Jeśli jedziesz z prędkością o wartości 137 km/h i nagle spozstrzegasz patrol policyjny, to w jakim czasie możesz zwolnić do dopuszczalnej prędkości 90 km/h (odpowiedź na to pytanie pokaże ci, że nie masz szans, aby uniknąć zmierzenia twej nadmiernej prędkości przez radar policyjny)? b) Sporządź wykresy zależności  $x(t)$  i  $v(t)$  w czasie hamowania samochodu. www



Rys. 2.21. Zadanie 32

32. Wykres na rysunku 2.21 ilustruje ruch cząstki wzdłuż osi  $x$ , ze stałym przyspieszeniem. Jaka jest wartość bezwzględna i kierunek tego przyspieszenia?

33. Samochód jadący z prędkością 56 km/h znajdował się w odległości 24 m od bariery, gdy kierowca z całej siły nacisnął na pedał hamulca. Dwie sekundy później pojazd uderzył w barierę. a) Ile wynosiło stałe przyspieszenie pojazdu w czasie jego hamowania? b) Ile wynosiła prędkość samochodu w chwili zderzenia? ilw

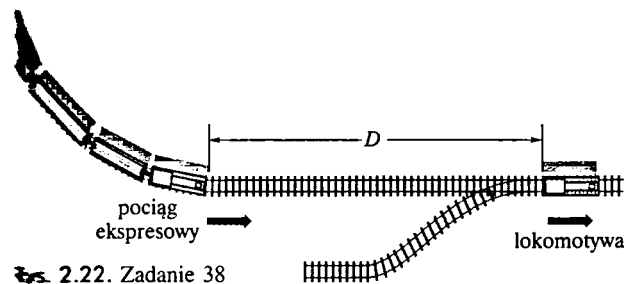
34. Pociąg czerwony, jadący ze stacją prędkością 72 km/h i pociąg zielony, jadący ze stacją prędkością 144 km/h, jadą naprzeciw siebie po prostym, poziomym torze. Gdy pociągi są od siebie o 950 m, obaj maszyniści dostrzegają niebezpieczeństwo i zaczynają hamować. Hamulce obydwu pociągów są zdolne hamować z przyspieszeniem równym  $1$  m/s<sup>2</sup>. Czy dojdzie do zderzenia? Jeśli tak, to ile wynosić będzie prędkość każdego pociągu w chwili zderzenia? Jeśli nie, to w jakiej odległości od siebie zatrzymają się pociągi?

35. Samochód poruszający się ze stałym przyspieszeniem przebył drogę między dwoma punktami, odległymi o 60 m, w czasie 6 s. W drugim punkcie jego prędkość wynosiła 15 m/s. a) Ile wynosiła prędkość samochodu w pierwszym punkcie? b) Z jakim przyspieszeniem poruszał się samochód? c) W jakiej odległości przed pierwszym punktem samochód pozostawał w spoczynku? d) Wykreśl zależności  $x(t)$  i  $v(t)$  dla tego samochodu, rozpoczynając od chwili, w której spoczywał ( $t = 0$ ). www

36. W chwili, gdy zapala się zielone światło, samochód osobowy rusza z miejsca ze stałym przyspieszeniem  $a$  równym  $2,2$  m/s<sup>2</sup>. W tej samej chwili wyprzedza go ciężarówka, jadąca ze stałą prędkością 9,5 m/s. a) W jakiej odległości od sygnalizatora samochód osobowy dogoni ciężarówkę? b) Ile wynosić będzie wówczas jego prędkość?

37. Czas zatrzymania samochodu składa się z czasu reakcji kierowcy, po którym naciska on pedał hamulca, oraz czasu, w którym pojazd jest faktycznie hamowany, czyli poddany stałemu opóźnieniu. Załóżmy, że całkowita droga przebyta przez samochód od momentu, w którym kierowca stwierdził potrzebę hamowania do chwili zatrzymania pojazdu wyniosła 56,7 m, gdy prędkość początkowa była równa 80,5 km/h, a 24,4 m, gdy prędkość początkowa była równa 48,3 km/h. Ile wynosiły: a) czas reakcji kierowcy, b) wartość bezwzględna opóźnienia?

38. Gdy pasażerski pociąg ekspresowy jadący z prędkością  $161 \text{ km/h}$  wychodzi z zakrętu na prosty tor, jego maszynista dostrzega z przerażeniem, że z bocznicy wyjeżdża właśnie omyłkowo na główny tor lokomotywa, w odległości  $D = 676 \text{ m}$  przed jego pociągiem (rys. 2.22). Lokomotywa porusza się z prędkością  $9 \text{ km/h}$ . Maszynista pociągu ekspresowego natychmiast zaczyna hamować. a) Jaka musi być wartość bezwzględna stałego opóźnienia pociągu, aby nie doszło do zderzenia? b) Załóż, że w chwili  $t = 0$ , w której maszynista spostrzega lokomotywę, czoło pociągu znajduje się w punkcie  $x = 0$ . Naskicuj wykres zależności  $x(t)$  dla lokomotywy i pociągu ekspresowego w dwóch przypadkach: gdy ostatecznie nie doszło do zderzenia, oraz gdy zderzenie jednak nastąpiło, lecz było bardzo słabe.



rys. 2.22. Zadanie 38

39. Wysokość szybu windy w hotelu Marquis Marriott w Nowym Jorku wynosi  $190 \text{ m}$ . Maksymalna prędkość kabiny jest równa  $36 \text{ m/min}$ . Przyspieszenie windy w obydwu kierunkach jazdy ma wartość  $1,22 \text{ m/s}^2$ . a) Na jakiej drodze ruszający z miejsca wagonik osiąga maksymalną prędkość jazdy? b) Jak długo trwa przejazd wagonika bez zatrzymania po drodze, licząc od chwili zatrzymania na dole do chwili zatrzymania na górze? ilw

## 2.8 Spadek swobodny

40. Krople deszczu spadają na ziemię z chmury, znajdującej się na wysokości  $1700 \text{ m}$ . a) Jaka prędkość miałyby te krople w chwili spadku na ziemię, gdyby ich ruch nie był spowalniany w wyniku oporu powietrza? b) Czy byłoby wówczas rzeczą bezpieczną spacerować po dworze w czasie silnego deszczu?

41. Na budowie spadający klucz hydrauliczny uderzył w ziemię z prędkością  $24 \text{ m/s}$ . a) Na jakiej wysokości wypadł on komuś z ręki? b) Jak długo spadał? c) Naskicuj wykres zależności  $y$ ,  $v$  i  $a$  od  $t$  dla tego klucza.

42. Łobuz rzuca z dachu budynku kamień, pionowo w dół, z prędkością początkową o wartości  $12 \text{ m/s}$ . Dach znajduje się  $30 \text{ m}$  nad ziemią. a) Jak długo będzie leciał kamień, do chwili uderzenia w ziemię? b) Ile wynosić będzie jego prędkość na końcu lotu?

43. a) Z jaką prędkością trzeba rzucić piłkę z ziemi pionowo do góry, aby jej maksymalne wzniesienie wyniosło  $50 \text{ m}$ ? b) Jak długo będzie ona w powietrzu? c) Naskicuj wykresy zależności  $x$ ,  $v$  i  $a$  od  $t$  dla tej piłki. Na pierwszych dwóch wykresach zaznacz chwilę, w której piłka osiąga wysokość  $50 \text{ m}$ .

44. W laboratorium NASA, w którym bada się ruch w warunkach nieważkości, w Ośrodku Badawczym w Cleveland, znajduje się opróżniona z powietrza wieża o wysokości  $145 \text{ m}$ . Służy ona m.in. do badania spadku pojemników w kształcie kuli, o średnicy  $1 \text{ m}$ , zawierających różne ciała. a) Jak długo spada swobodnie taka kula? b) Ile wynosi jej prędkość, gdy dociera do układu wychwytu, znajdującego się na dole wieży? c) W układzie wychwytu kula doznaje zatrzymującego ją opóźnienia  $25 \text{ g}$ . Na jakiej drodze układ ten zatrzymuje kulę?

45. Z urwiska skalnego o wysokości  $100 \text{ m}$  spada mały odłamek skały. Jak długo zajmuje mu przebycie: a) pierwszych  $50 \text{ m}$ , b) drugich  $50 \text{ m}$ ?

46. Piłkę rzucono pionowo w dół z wysokości  $h$ , z prędkością początkową o wartości bezwzględnej  $v_0$ . a) Ile wynosi jej prędkość tuż przed uderzeniem w ziemię? b) W jakim czasie piłka spada na ziemię? Jaka byłaby odpowiedź na: c) pytanie (a), d) pytanie (b), gdyby piłkę rzucono pionowo do góry z takiej samej wysokości i z taką samą wartością bezwzględną prędkości? Zanim zaczniesz rozwiązywać równania zastanów się, czy w przypadkach (c) i (d) otrzymasz wynik większy, mniejszy czy taki sam, jak w przypadkach (a) i (b).

47. Przerażony zajęc podskakuje, wznosząc się na wysokość  $0,544 \text{ m}$  w ciągu pierwszych  $0,2 \text{ s}$  skoku. a) Z jaką początkową prędkością oderwał się on od ziemi? b) Ile wynosi jego prędkość na wysokości  $0,544 \text{ m}$ ? Jak dużo wyżej jeszcze się wzniesie? www

48. Kamień spada (z prędkością początkową równą zero) z dachu budynku o wysokości  $60 \text{ m}$ . Jak wysoko nad ziemią znajdzie się ten kamień na  $1,2 \text{ s}$  przed upadkiem na ziemię?

49. Klucz spada z mostu o wysokości  $45 \text{ m}$  nad wodą i trafia w model łódki, płynącej ze stałą prędkością, który w chwili upuszczenia klucza znajdował się w odległości  $12 \text{ m}$  od miejsca zderzenia. Ile wynosi prędkość łódki? ilw

50. Piłkę rzucono pionowo w dół z dachu budynku o wysokości  $36,6 \text{ m}$ . Piłka mija górną framugę okna na wysokości  $12,2 \text{ m}$  nad ziemią po  $2 \text{ s}$  od początku lotu. Ile wynosi prędkość piłki w chwili, gdy mija górną framugę tego okna?

51. Kula mokrej gliny spada na ziemię z wysokości  $15 \text{ m}$ . Jej zetknięcie z ziemią następuje na  $20 \text{ ms}$  przed całkowitym zatrzymaniem. Ile wynosi średnie przyspieszenie kuli od początku zetknięcia z ziemią (potraktuj kulę jako cząstkę)?

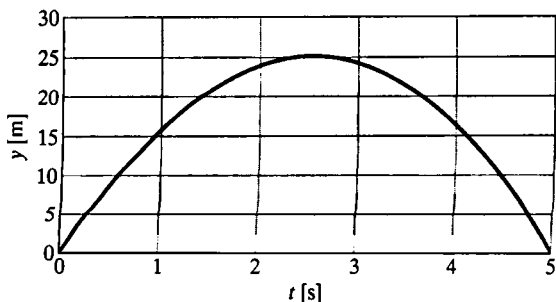
52. Model rakiety zostaje wystrzelony pionowo w górę i wznosi się ze stałym przyspieszeniem, równym  $4 \text{ m/s}^2$ , przez  $6 \text{ s}$ . Po tym czasie paliwo się kończy i rakieta leci w górę jak cząstka swobodna, a następnie spada na ziemię. a) Ile wynosi maksymalna wysokość lotu rakiety? b) Po jakim czasie od startu rakieta spadnie na ziemię?

53. Aby sprawdzić jakość piłki tenisowej, upuszczasz ją na ziemię z wysokości  $4 \text{ m}$ . Po odbiciu piłka wznosi się na wysokość  $2 \text{ m}$ . Ile wynosi średnie przyspieszenie piłki w czasie zetknięcia się jej z ziemią, jeśli zetknięcie trwa  $12 \text{ ms}$ ?

54. Koszykarz stojący pod koszem skacze w górę na wysokość 76 cm, aby przechwycić piłkę odbitą od tablicy. Jak długo (w sumie) znajduje się on: a) na wysokości mniejszej o 15 cm od maksymalnej wysokości wyskoku, b) na wysokości nie większej niż 15 cm od parkietu? Czy odpowiedzi na te pytania pomagają ci w wyjaśnieniu, dlaczego zawodnicy zdają się zawisać w powietrzu w wyskoku?

55. Woda wycieka kroplami z sitka prysznica znajdującego się na wysokości 200 cm nad podłogą. Krople wypadają z sitka w równych odstępach czasu, przy czym pierwsza kropla spada na podłogę w chwili, gdy czwarta kropla odrywa się od sitka. Znajdź położenie nad podłogą kropli drugiej i trzeciej, gdy pierwsza kropla uderza w podłogę.

56. Kulę wyrzuciono pionowo w górę, z powierzchni planety odległego układu słonecznego. Na rysunku 2.23 pokazano wykres  $y(t)$  dla tej kuli, przy czym  $y$  jest wysokością kuli ponad punkt startowy, a wyrzut nastąpił w chwili  $t = 0$ . Wyznacz wartość bezwzględna: a) przyspieszenia grawitacyjnego na tej planecie, b) prędkości początkowej kuli.



Rys. 2.23. Zadanie 56

57. Dwa brylanty spadają swobodnie z prędkością początkową równą zero, z tej samej wysokości, przy czym jeden z nich zaczyna spadać 1 s po drugim. Po jakim czasie od początku ruchu pierwszego brylantu będą one odległe od siebie o 10 m?

58. Pewien żongler zwykle podrzuca kule na wysokość  $H$ . Na jaką wysokość należałoby je wyrzucać, aby przebywały w powietrzu dwa razy dłużej?

59. Balon na ogrzane powietrze wznosi się z prędkością 12 m/s. Gdy znajduje się on na wysokości 80 m, za burtę wypada pewien pakunek. a) Po jakim czasie pakunek spadnie na ziemię? b) Z jaką prędkością uderzy on w ziemię?

60. Z mostu o wysokości 43,9 m nad wodą upuszczono jeden kamień, a o 1 s później rzucono pionowo w dół drugi. Te dwa kamienie wpadły do wody jednocześnie. a) Ile wynosiła prędkość

początkowa drugiego kamienia? b) Sporządź wykres prędkości każdego kamienia jako funkcji czasu, przyjmując za chwilę zerową moment upuszczenia pierwszego kamienia.

61. Otwarta od góry kabina windy wznosi się ze stałą prędkością, równą 10 m/s. Windziarz wystrzela kulę pionowo do góry z wysokości 2 m nad podłogą kabiny, gdy podłoga ta znajduje się 28 m nad dnem szybu. Początkowa prędkość kuli względem kabiny wynosi 20 m/s. a) Na jaką maksymalną wysokość nad dnem szybu wzniesie się kula? b) Po jakim czasie kula spadnie na podłogę windy?

62. Kamień rzucono pionowo do góry. Mija on punkt  $A$  z prędkością  $v$ , a punkt  $B$ , leżący 3 m wyżej niż punkt  $A$  — z prędkością  $\frac{1}{2}v$ . Oblicz: a) prędkość  $v$ , b) maksymalną wysokość wzniesienia się kamienia ponad punkt  $B$ .

63. Na rysunku 2.24 pokazano prosty przyrząd do pomiaru twego czasu reakcji. Jest to pasek kartonowy, na którym zaznaczono podziałkę i dwie duże kropki. Kolega trzyma pasek pionowo, ujmując go kciukiem i palcem wskazującym, w miejscu kropki u góry rysunku 2.24. Ty umieszczasz kciuk i palec wskazujący w pobliżu drugiej kropki (dolnej na rys. 2.24), nie dotykając jednak paska. Kolega puszcza pasek, a ty starasz się schwycić go natychmiast po zauważeniu, że pasek spada. Miejsce, w którym złapiesz pasek wskazuje twój czas reakcji. a) Jak daleko od dolnej kropki musi znajdować się kreska, oznaczająca czas reakcji 50 ms? b) O ile wyżej należy umieścić kreski dla 100, 150, 200 i 250 ms? Na przykład, czy kreska oznaczona 100 ms powinna być dwa razy dalej od kropki niż kreska oznaczona 50 ms? Czy potrafisz dostrzec, jaka prawidłowość rządzi układem kresek?



Rys. 2.24. Zadanie 63

64. Spadochroniarz wyskakuje z samolotu i spada swobodnie przez pierwsze 50 m. Następnie otwiera spadochron i od tego czasu spada z opóźnieniem  $2 \text{ m/s}^2$ . W chwili zetknięcia z ziemią ma prędkość 3 m/s. a) Jak długo spadochroniarz pozostaje w powietrzu? b) Z jakiej wysokości odbył się ten skok?

65. Układający się do drzemki kot spostrzega doniczkę, przelatującą za oknem, najpierw w górę, a potem w dół. Łączny czas, w jakim kot ma doniczkę w polu widzenia, wynosi 0,5 s, a wysokość okna, przez które ją obserwuje, jest równa 2 m. Jak wysoko nad górną framugę okna wzniosła się doniczką?



# 3 Wektory

Przez dwadzieścia lat zespoły grotolazów czołgały się, wspinały i przeciskały przez 200 km korytarzy w jaskiniach Mammoth Cave i Flint Ridge, starając się wykryć, czy są one ze sobą połączone. Na zdjęciu widać Richarda Zoopa, przepychającego swój plecak przez ciasną studnię o nazwie Tight Tube, głęboko w jaskini Flint Ridge. Po 12 godzinach wędrówki w podziemnym labiryncie Zoop i sześciu jego towarzyszy przebrnęli przez pas słodkawatej wody i znaleźli się w jaskini Mammoth Cave. Ich wyczyn przyczynił się do stwierdzenia, że układ jaskiń Mammoth–Flint stanowi najdłuższą caskinię na świecie.



**Jak można określić położenie początkowe i końcowe zespołu speleologów inaczej, niż opisując szczegółowo przebytą przez nich drogę?**

**Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.**

### 3.1. Wektory i skalary

Cząstka poruszająca się wzdłuż linii prostej ma do wyboru tylko dwa kierunki ruchu. Jeden z tych kierunków możemy przyjąć za dodatni, a drugi — za ujemny. Jednak dla cząstki poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej znak plus lub minus nie wystarcza już do wskazania kierunku ruchu. Musimy wtedy zastosować pojęcie *wektora*.

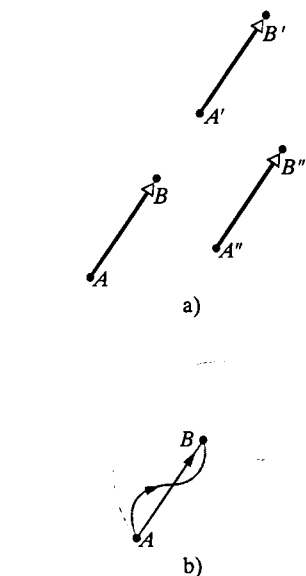
**Wektor** ma nie tylko wartość, lecz i kierunek. Działania na wektorach podlegają pewnym szczególnym prawom (prawom rachunku wektorowego), które omówimy w tym rozdziale. **Wielkość wektorowa** to wielkość, która ma zarówno wartość (wartość bezwzględna, moduł), jak i kierunek, a więc może być przedstawiona za pomocą pewnego wektora. Wektorowymi wielkościami fizycznymi są m.in. przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie. W niniejszej książce spotkasz wiele innych wielkości wektorowych, warto zatem poznać teraz prawa działań na wektorach, gdyż bardzo przydadzą się one tobie w dalszych rozdziałach podręcznika.

Nie wszystkie wielkości fizyczne wiążą się z jakimś kierunkiem. Na przykład takie wielkości, jak: temperatura, ciśnienie, energia, masa i czas nie wskazują żadnego kierunku w przestrzeni. Takie wielkości nazywamy **skalarami**. Skalary podlegają zwykłym prawom algebry. Do określenia skalaru wystarczy podać wartość bezwzględną oraz znak (np. temperatura  $-40^{\circ}\text{C}$ ).

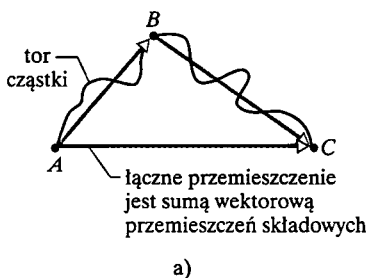
Najprostszą wielkością wektorową jest przemieszczenie, czyli zmiana położenia. Przedstawiający je wektor nazywamy, jak się można domyślać, **wektorem przemieszczenia** (podobnie, mamy wektory prędkości i przyspieszenia). Jeśli cząstka zmienia swe położenie, poruszając się z punktu  $A$  do punktu  $B$ , jak na rysunku 3.1, to mówimy, że cząstka doznaje przemieszczenia z  $A$  do  $B$ , co przedstawiamy za pomocą strzałki łączącej punkt  $A$  z punktem  $B$ . Strzałka jest graficznym symbolem wektora. Aby odróżnić wektory od innego rodzaju strzałek, z jakimi spotkamy się w tej książce, grot wektora będziemy zaznaczać jako trójkąt.

Trzy strzałki pokazane na rysunku 3.1a, łączące punkty  $A$  i  $B$ ,  $A'$  i  $B'$  oraz  $A''$  i  $B''$  mają taką samą długość i taki sam kierunek. Ilustrują one zatem takie same wektory przemieszczenia, a więc taką samą *zmianę położenia* cząstki. Wektor nie zmienia swej wielkości, jeśli ulega przesunięciu bez zmiany jego długości (modułu) i kierunku.

Wektor przemieszczenia nie informuje nas o drodze, po jakiej poruszała się cząstka. Na rysunku 3.1b przedstawiono trzy możliwe drogi między punktami  $A$  i  $B$ , którym odpowiada ten sam wektor przemieszczenia — ten, który pokazano na rysunku 3.1a. Tak więc wektor przemieszczenia ilustruje efekt końcowy ruchu, a nie sam ruch.



Rys. 3.1. a) Wszystkie trzy strzałki mają taką samą długość i taki sam kierunek, ilustrują więc takie samo przemieszczenie. b) Wszystkie pokazane drogi, po których poruszają się ciała między punktami  $A$  i  $B$ , odpowiadają takiemu samemu wektorowi przemieszczenia



Rys. 3.2. a)  $AC$  jest sumą wektorową wektorów  $AB$  i  $BC$ . b) Te same wektory w innych oznaczeniach

### 3.2. Geometryczne dodawanie wektorów

Założmy, że cząstka porusza się od punktu  $A$  do  $B$ , a następnie od punktu  $B$  do  $C$ , jak pokazano na diagramie wektorowym na rysunku 3.2a. Całkowite przemieszczenie cząstki możemy przedstawić (niezależnie od drogi, po jakiej poruszała się cząstka między tymi punktami) za pomocą wektorów kolejnych przemieszczeń, tzn.  $AB$  i  $BC$ . Efekt *łączny* tych dwóch przemieszczeń jest przemieszczeniem cząstki od punktu  $A$  do  $C$ . Wektor  $AC$  nazywamy **sumą wektorową** (lub **wektorem wypadkowym**) wektorów  $AB$  i  $BC$ . Nie jest to zwykła suma algebraiczna.

Na rysunku 3.2b przerysowaliśmy wektory z rysunku 3.2a, oznaczając je — jak będziemy odąd zawsze postępować — za pomocą strzałki nad symbolem zapisanym kursywą, np.  $\vec{a}$ . Długość (moduł) wektora, czyli wielkość nie mająca ani znaku, ani kierunku będziemy oznaczać takim samym symbolem bez strzałki, np.  $a$ ,  $b$  lub  $s$  (takie same oznaczenia należy stosować przy zapisie odręcznym). Symbol ze strzałką u góry będzie zawsze oznaczał wszystkie cechy wektora, tzn. i długość, i kierunek.

Związek między trzema wektorami z rysunku 3.2b możemy przedstawić jako równanie wektorowe:

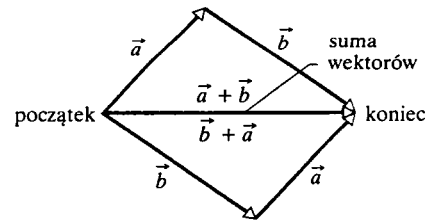
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (3.1)$$

oznaczające, że wektor  $\vec{s}$  jest sumą wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Symbol  $+$  w równaniu (3.1), a także słowa „suma” i „dodawanie” mają inne znaczenie w działaniach na wektorach niż w zwykłej algebrze, ponieważ wynik operacji zależy zarówno od wartości bezwzględnych, jak i od kierunków składników.

Z rysunku 3.2 wynika sposób, w jaki należy dodawać geometrycznie dwuwymiarowe wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ : 1) na kartce należy narysować wektor  $\vec{a}$  w jakiejś dogodnej skali i pod właściwym kątem; 2) w tej samej skali należy narysować wektor  $\vec{b}$  tak, aby jego początek był końcem wektora  $\vec{a}$ , oczywiście pod odpowiednim kątem; 3) sumą tych dwóch wektorów jest wektor  $\vec{s}$ , którego początkiem jest początek wektora  $\vec{a}$ , a końcem — koniec wektora  $\vec{b}$ .

Zdefiniowane w ten sposób dodawanie wektorów ma dwie ważne właściwości. Po pierwsze, wynik nie zależy od kolejności składników. Dodając  $\vec{a}$  do  $\vec{b}$ , dostajemy to samo, co dodając  $\vec{b}$  do  $\vec{a}$  (rys. 3.3), tzn.:

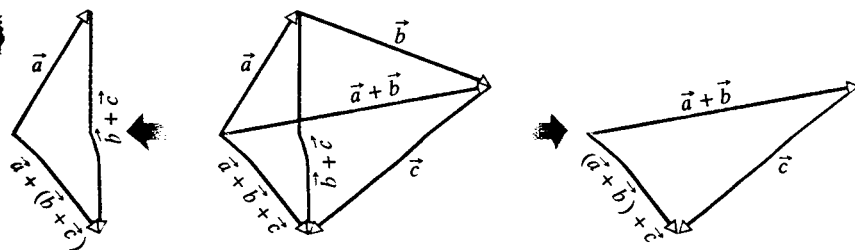
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{przemienność dodawania}). \quad (3.2)$$



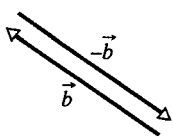
Rys. 3.3. Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  można do siebie dodawać w dowolnej kolejności — patrz równanie (3.2)

Po drugie, jeśli mamy dodać więcej niż dwa wektory, to możemy ustawić je przy tym w dowolnej kolejności. Tak więc, jeśli mamy dodać do siebie wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , to możemy najpierw dodać do siebie  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , a potem ich sumę dodać do  $\vec{c}$ . Możemy również najpierw dodać do siebie  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , a potem dodać tę sumę do  $\vec{a}$ . W obydwu przypadkach otrzymujemy taki sam wynik, co pokazano na rysunku 3.4. Wobec tego mamy:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{łączność dodawania}). \quad (3.3)$$



Rys. 3.4. Dodając trzy wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  można je grupować w dowolny sposób — patrz równanie (3.3)



Rys. 3.5. Wektory  $\vec{b}$  i  $-\vec{b}$  mają taką samą długość, lecz przeciwny kierunek

Wektor  $-\vec{b}$  jest to wektor o takiej samej długości jak wektor  $\vec{b}$ , lecz o przeciwnym kierunku (patrz rysunek 3.5). Z rysunku 3.5 wynika, że dodając te wektory otrzymujemy:

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0.$$

Dodanie  $-\vec{b}$  daje więc taki sam wynik, jak odjęcie  $\vec{b}$ . Właściwość tę można zastosować do określenia różnicy dwóch wektorów. Jeśli  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ , to:

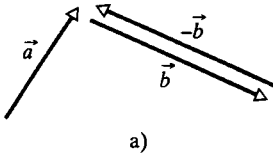
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{odejmowanie wektorów}), \quad (3.4)$$

co oznacza, że aby znaleźć różnicę wektorów  $\vec{d}$ , należy dodać wektor  $-\vec{b}$  do wektora  $\vec{a}$ . Na rysunku 3.6 pokazano, jak to się robi geometrycznie.

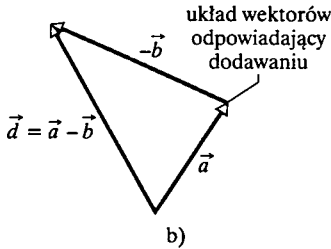
Podobnie, jak w zwykłej algebrze, wyraz zawierający wektor można przemieścić na drugą stronę równania, zmieniając jego znak. Na przykład, jeśli mamy dane równanie (3.4) i chcemy z niego wyznaczyć  $\vec{a}$ , to możemy przekształcić je do postaci:

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}, \quad \text{czyli} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}.$$

Zapamiętaj, że choć w powyższych rozważaniach zastosowaliśmy wektory przemieszczenia, to prawa dodawania i odejmowania wektorów obowiązują dla wszystkich wektorów, niezależnie o tego, czy są to wektory przedstawiające prędkość, przyspieszenie, czy jakąkolwiek inną wielkość wektorową. Jednak dodawanie do siebie można tylko wektory tej samej wielkości fizycznej, np. dwa wektory przemieszczenia lub dwa wektory prędkości, natomiast dodawanie przemieszczenia do prędkości nie ma sensu. Podobnie jest i dla skalarów: nie ma sensu dodawanie 21 s do 12 m.



a)



b)

Rys. 3.6. a) Wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $-\vec{b}$ . b) Aby odjąć wektor  $\vec{b}$  od wektora  $\vec{a}$ , dodaj wektor  $-\vec{b}$  do wektora  $\vec{a}$

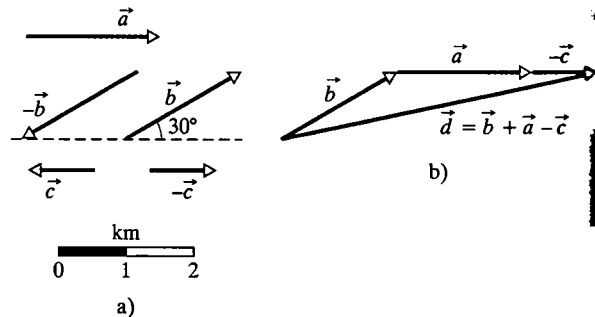
**SPRAWDZIAN 1:** Długości przemieszczeń  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  wynoszą odpowiednio 3 m i 4 m, a  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Rozważ różne ustawienia wzajemne wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i powiedz, jaka jest długość  $\vec{c}$ : a) największa, b) najmniejsza z możliwych.

### Przykład 3.1

Podczas ćwiczenia orientacji w terenie masz za zadanie jak najbardziej oddalić się od obozu (licząc w linii prostej), pokonując marszem trzy odcinki. Masz do wyboru następujące długości i kierunki marszu (w dowolnej kolejności): a) 2 km w kierunku wschodnim ( $\vec{a}$ ), b) 2 km w kierunku północno-wschodnim,  $30^\circ$  od kierunku wschodniego ( $\vec{b}$ ); c) 1 km w kierunku zachodnim ( $\vec{c}$ ). Możesz także wybrać  $-\vec{b}$  zamiast  $\vec{b}$  oraz  $-\vec{c}$  zamiast  $\vec{c}$ . Ile wynosi największa odległość od obozu, jaką możesz uzyskać na końcu trzeciego odcinka?

#### ROZWIĄZANIE:

W dogodnej skali rysujemy wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $-\vec{b}$  i  $-\vec{c}$ , jak na rysunku 3.7a. Następnie wyobrażamy sobie przesuwanie tych wektorów po kartce, łącząc ich końce z początkami tak, aby wyznaczyć ich sumę  $\vec{d}$ . Początek pierwszego wektora oznacza



Rys. 3.7. Przykład 3.1. a) Wektory przemieszczenia; można zastosować trzy z nich. b) Osiągniesz największą odległość od obozu, jeśli wybierzesz przemieszczenia  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $-\vec{c}$  (w dowolnej kolejności). Narysowano jedno z ustawień, dających przemieszczenie łączne  $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$

łożenie obozu, koniec trzeciego — miejsce, do którego dotrzesz na końcu wyprawy. Początek wektora  $\vec{d}$  pokrywa się z początkiem wektora pierwszego, a jego koniec — z końcem wektora trzeciego. Długość wektora  $\vec{d}$  ( $d$ ), oznacza twoją odległość od obozu na końcu marszu.

Nietrudno zauważyć, że  $d$  jest największe, jeśli wybierzemy wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $-\vec{c}$ . Ich kolejność nie ma znaczenia, ponieważ suma

wektorów nie zależy od kolejności ich dodawania. Na rysunku 3.7b sumę tę obliczono w kolejności:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c}).$$

Korzystając ze skali podanej na rysunku 3.7a. mierzymy długość wektora  $\vec{d}$ , co daje:

$$d = 4,8 \text{ km.} \quad (\text{odpowiedź})$$

### 3.3. Składowe wektorów

Geometryczne dodawanie wektorów bywa żmudne. Można to zrobić dokładniej i łatwiej metodą algebraiczną. Wymaga to jednak umieszczenia wektorów w prostokątnym układzie współrzędnych. Jego osie  $x$  i  $y$  rysujemy zwykle tak, jak na rysunku 3.8a. Oś  $x$  skierowana jest do góry, prostopadle do kartki i przechodzi przez początek układu; tymczasem nie będziemy jej uwzględniać i zajmiemy się tylko wektorami dwuwymiarowymi.

Składową wektora nazywamy jego rzut na oś. Na przykład, na rysunku 3.8a  $a_x$  jest składową wektora  $\vec{a}$  wzdłuż osi  $x$ , a  $a_y$  jego składową wzdłuż osi  $y$ . Aby znaleźć rzut wektora na oś, rysujemy linie prostopadłe do osi, przechodzące przez obydwa końce wektora, jak pokazano na rysunku. Rzut wektora na oś  $x$  nazywamy jego *składową  $x$* , a rzut na oś  $y$  — *składową  $y$* . Proces znajdowania składowych wektora nazywamy jego *rozkładem na składowe*.

Na rysunku 3.8 obie składowe  $a_x$  i  $a_y$  są dodatnie, ponieważ wektor  $\vec{a}$  jest skierowany w stronę dodatnią wzdłuż obydwu osi (zwróć uwagę na małe grotki na końcach składowych). Gdybyśmy odwrócili wektor  $\vec{a}$ , to otrzymalibyśmy obie składowe ujemne, tzn. skierowane ku ujemnym wartościom współrzędnych  $x$  i  $y$ . Rozkład na składowe wektora  $\vec{b}$  na rysunku 3.9 daje dodatnią składową  $b_x$  i ujemną składową  $b_y$ .

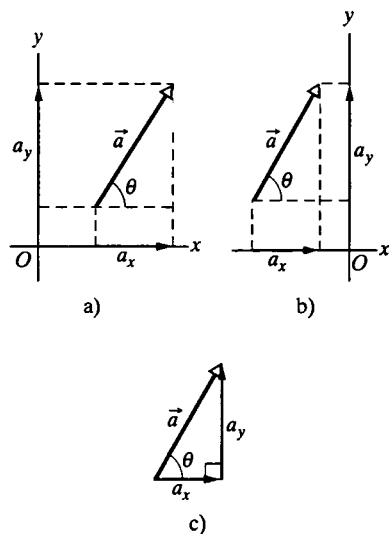
W przypadku ogólnym wektor ma trzy składowe — wektor pokazany na rysunku 3.8a można uważać za wektor trójwymiarowy o składowej wzdłuż osi  $z$  równej zero. Jak widać z rysunków 3.8a i b, przy przesunięciu wektora bez zmiany jego długości i kierunku, jego składowe się nie zmieniają.

Składowe wektora  $\vec{a}$  z rysunku 3.8a możemy wyznaczyć z narysowanego trójkąta jako:

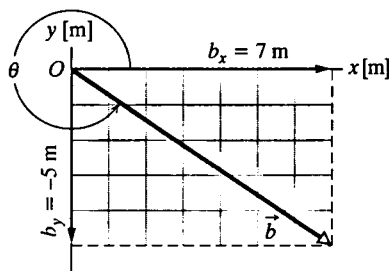
$$a_x = a \cos \theta \quad \text{oraz} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (3.5)$$

przy czym  $\theta$  jest kątem, jaki tworzy wektor  $\vec{a}$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ , a  $a$  jest długością wektora  $\vec{a}$ . Na rysunku 3.8c pokazano, że wektor  $\vec{a}$  oraz jego składowe  $x$  i  $y$  tworzą trójkąt prostokątny. Widać też, że wektor możemy utworzyć z jego składowych, ustawiając je tak, aby koniec jednej był początkiem drugiej. Wektor  $\vec{a}$  jest skierowany wzdłuż przeciwprostokątnej powstałego trójkąta tak, że jego początek jest początkiem jednej składowej, a koniec — końcem drugiej.

Gdy dokonamy rozkładu wektora na składowe w ustalonym układzie współrzędnych, możemy zamiast wektora zastosować te składowe. Na przykład, wek-



Rys. 3.8. a) Składowe  $a_x$  i  $a_y$  wektora  $\vec{a}$ . b) Składowe wektora nie ulegają zmianie przy jego przesunięciu, przy którym nie zmieniają się jego długość i kierunek. c) Składowe wektora są przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest moduł tego wektora



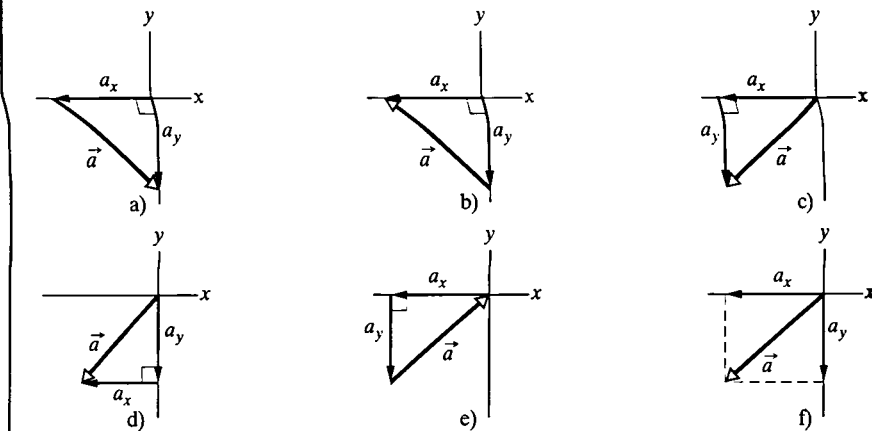
Rys. 3.9. Składowa wektora  $\vec{b}$  wzdłuż osi  $x$  jest dodatnia, a jego składowa wzdłuż osi  $y$  — ujemna

tor  $\vec{a}$  z rysunku 3.8a jest dany (tzn. całkowicie wyznaczony) przez wielkości  $a$  i  $\theta$ . Można go również określić, podając składowe  $a_x$  i  $a_y$ . Obie pary wielkości zawierają tę samą informację. Są one ze sobą powiązane zależnościami:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a_y}{a_x}. \quad (3.6)$$

W bardziej ogólnym przypadku trójwymiarowym wektor jest wyznaczony przez jego długość i dwa kąty (np.  $a$ ,  $\theta$  i  $\phi$ ) lub jego trzy składowe ( $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$ ).

**SPRAWDZIAN 2:** Na którym z poniższych rysunków poprawnie wyznaczono wektor  $\vec{a}$  na podstawie jego składowych  $x$  i  $y$ ?



### Przykład 3.2

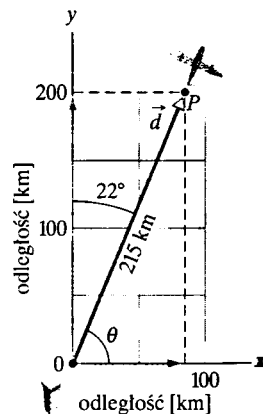
Mały samolot wystartował z lotniska i wkrótce przestał być widoczny, gdyż niebo było zachmurzone. Dostrzeżono go dopiero w odległości 215 km od lotniska, w kierunku północno-wschodnim, tworzącym kąt  $22^\circ$  z kierunkiem północnym. Jak daleko na północy i jak daleko na wschodzie znajdował się wówczas samolot?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ Mamy dane: długość wektora (215 km) i kąt, jaki tworzy on z pewnym kierunkiem ( $22^\circ$  na wschód od kierunku północnego), a musimy wyznaczyć składowe tego wektora. Narysujmy układ współrzędnych  $xy$  tak, że kierunek dodatni osi  $x$  jest kierunkiem ku wschodowi, a osi  $y$  — ku północy (rys. 3.10). Dla wygody wybierzmy początek tego układu w miejscu, w którym znajduje się lotnisko. Tak więc wektor przemieszczenia samolotu  $\vec{d}$  ma początek w początku układu, a koniec w punkcie, w którym dostrzeżono samolot.

Aby obliczyć składowe wektora  $\vec{d}$ , korzystamy z równania (3.5), do którego podstawiamy  $\theta = 68^\circ (= 90^\circ - 22^\circ)$ , co daje

**Rys. 3.10.** Przykład 3.2. Samolot wystartował z lotniska umieszczonego w początku układu współrzędnych, a po pewnym czasie został dostrzeżony w punkcie  $P$



$$d_x = d \cos \theta = (215 \text{ km})(\cos 68^\circ) = 81 \text{ km}. \quad (\text{odpowiedź})$$

$$d_y = d \sin \theta = (215 \text{ km})(\sin 68^\circ) = 199 \text{ km}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Dany samolot oddalił się zatem od lotniska o 81 km na wschód i o 199 km na północ.

### Przykład 3.3

Zespół grotolazów, którzy w 1972 roku dokonali przejścia z jaskini Flint Ridge, wchodząc do niej wejściem Austin, do Echo River w jaskini Mammoth (rys. 3.11a), i dowiedli w ten sposób, że jaskinie te są połączone, przemieścił się łącznie 2,6 km na zachód, 3,9 km na południe i 25 m do góry. Wyznacz wektor przemieszczenia tego zespołu, od punktu wyjściowego do punktu końcowego wędrówki.

#### ROZWIĄZANIE:

Dane są składowe wektora trójwymiarowego, a należy wyznaczyć jego długość i dwa kąty, określające jego kierunek. Najpierw narysujmy te składowe w układzie współrzędnych, jak na rysunku 3.11b. Składowe poziome (2,6 km na zachód i 3,9 km na południe) są przyprostokątnymi poziomego trójkąta prostokątnego. Przesunięcie w poziomie jest przeciwprostokątną tego trójkąta, a jej długość  $d_h$  obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$d_h = \sqrt{(2,6 \text{ km})^2 + (3,9 \text{ km})^2} = 4,69 \text{ km}.$$

Z tego samego trójkąta poziomego na rysunku 3.11b wnioskujemy, że przemieszczenie poziome zespołu jest skierowane na południe od kierunku zachodniego, pod kątem  $\theta_h$  danym przez:

$$\operatorname{tg} \theta_h = \frac{(3,9 \text{ km})}{(2,6 \text{ km})}.$$

skąd otrzymujemy:

$$\theta_h = \operatorname{arctg} \frac{(3,9 \text{ km})}{(2,6 \text{ km})} = 56^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to jeden z dwóch kątów, które wyznaczają kierunek całkowitego przemieszczenia zespołu.

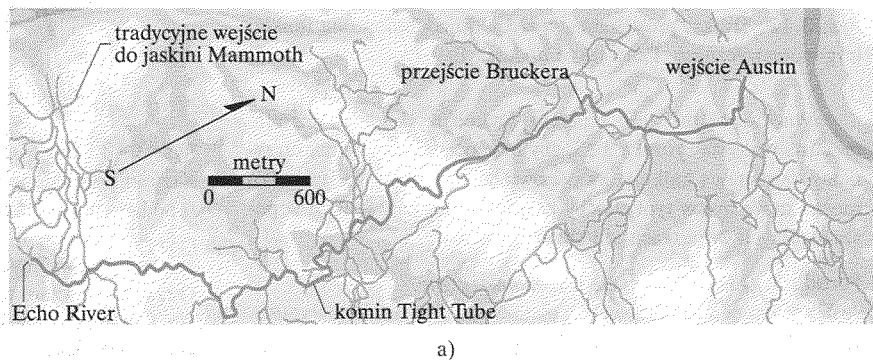
Aby uwzględnić przemieszczenie w pionie (25 m = 0,025 km), narysowaliśmy (na rysunku 3.11c) widok z boku, w kierunku północno-zachodnim. Na tym rysunku znów mamy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątnymi są tym razem przemieszczenie w pionie i przemieszczenie w poziomie  $d_h$ . Całkowite przemieszczenie zespołu jest przeciwprostokątną tego trójkąta, której długość wynosi:

$$d = \sqrt{(4,69 \text{ km})^2 + (0,025 \text{ km})^2} = 4,69 \text{ km} \approx 4,7 \text{ km}. \quad (\text{odpowiedź})$$

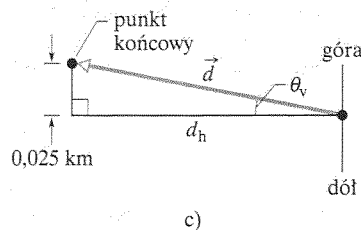
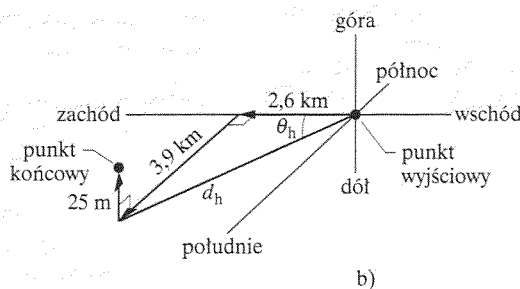
Przesunięcie to jest skierowane od poziomu w górę pod kątem:

$$\theta_v = \operatorname{arctg} \frac{0,025 \text{ km}}{4,69 \text{ km}} = 0,3^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc wektor przemieszczenia zespołu miał długość 4,7 km i był skierowany w poziomie pod kątem  $56^\circ$  na południe od kierunku zachodniego, a w pionie — pod kątem  $0,3^\circ$  ku górze. Łączne przemieszczenie w pionie było bardzo małe w porównaniu z przemieszczeniem w poziomie. Grotolazi nie mieli jednak z tego wielkiego pożytku, gdyż w rzeczywistości musieli niezliczoną liczbę razy wspiąć się i schodzić w dół, w trakcie wędrówki przez jaskinię. Przebyta przez nich droga była zupełnie inna niż wektor przemieszczenia, który jedynie łączy wzdłuż linii prostej punkt początkowy i końcowy wędrówki.



Rys. 3.11. Przykład 3.3. a) Część układu jaskiń Mammoth-Flint z zaznaczonym na czerwono szlakiem zespołu speleologów od wejścia Austin do Echo River (na podstawie mapy Fundacji Badania Jaskiń). b) Składowe całkowitego przemieszczenia zespołu oraz jego przemieszczenie w poziomie  $d_h$ . c) Widok z boku, ukazujący  $d_h$  i wektor całkowitego przemieszczenia zespołu  $\vec{d}$ .



**Porada 1: Miara kąta — stopnie i radiany**

Kąty mierzymy względem dodatniego kierunku osi  $x$ , przy czym kąt jest dodatni, jeśli liczy się go w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemny, jeśli liczy się go w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na przykład wartości  $210^\circ$  i  $-150^\circ$  oznaczają ten sam kąt.

Jednostkami kąta są stopnie oraz radiany (rad). Związek między tymi jednostkami łatwo zapamiętać, wiedząc, że kąt pełny jest równy  $360^\circ$  lub  $2\pi$  rad. Jeśli trzeba zamienić — powiedzmy —  $40^\circ$  na radiany, to wystarczy podstawić:

$$40^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,7 \text{ rad.}$$

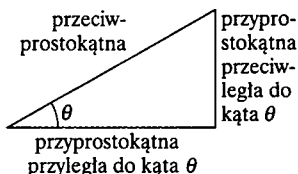
**Porada 2: Funkcje trygonometryczne**

Musisz znać definicje podstawowych funkcji trygonometrycznych — sinusa, cosinusa i tangensa — bo są one powszechnie stosowane w nauce i technice. Definicje te podano na rysunku 3.12, w postaci niezależnej od oznaczeń wierzchołków trójkąta prostokątnego.

$$\sin \theta = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa do kąta } \theta}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{przyprostokątna przyległa do kąta } \theta}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa do kąta } \theta}{\text{przyprostokątna przyległa do kąta } \theta}$$



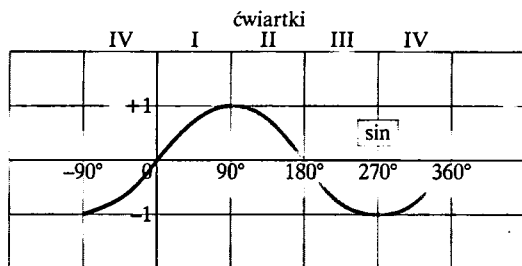
Rys. 3.12. Trójkąt prostokątny, służący do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych. Patrz także dodatek E

Powinieneś też znać wykresy funkcji trygonometrycznych, przedstawione na rysunku 3.13, aby móc ocenić, czy wynik otrzymany za pomocą kalkulatora odpowiada warunkom zadania. Pomocna może być w tym choćby znajomość znaków funkcji w poszczególnych ćwiartkach układu.

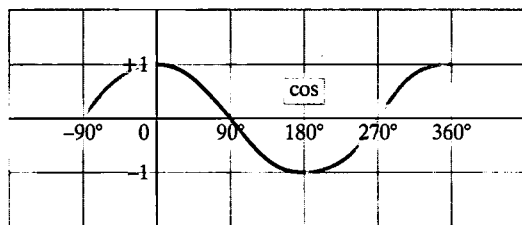
**Porada 3: Odwrotne funkcje trygonometryczne**

Jeśli wyznaczasz za pomocą kalkulatora odwrotne funkcje trygonometryczne —  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  i  $\text{arctg } x$  (oznaczane na klawiszach kalkulatora np. jako  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ ,  $\text{tg}^{-1}$  lub otrzymywane przez naciśnięcie kolejno dwóch klawiszy, np. „inv” i „sin”), musisz zastanowić się nad tym, czy otrzymana wartość odpowiada warunkom zadania, gdyż może je spełniać wartość, której kalkulator ci nie poda. Zakresy, w których zdefiniowane są odwrotne funkcje trygonometryczne, a więc do których należy kąt podawany przez kalkulator, zaznaczono na rysunku 3.13. Na przykład,  $\arcsin 0,5 = 30^\circ$  (i taki wynik podaje kalkulator), ale wartość  $0,5$  ma także  $\sin 150^\circ$ . Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować na wykresie z rysunku 3.13a prostą poziomą, przecinającą oś  $y$  w punkcie  $y = 0,5$  i zauważyć, w których punktach przecina ona wykres funkcji sinus.

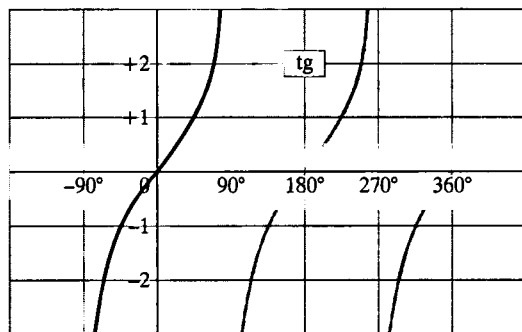
Jak poznać, która odpowiedź jest właściwa? Trzeba się zastanowić, która z nich odpowiada warunkom rozwiązywanego



a)



b)



c)

Rys. 3.13. Trzy ważne krzywe, których kształt należy pamiętać. Krzywą pogrubiono w zakresie kątów, w którym są zdefiniowane (i podawane przez kalkulator) odwrotne funkcje trygonometryczne

zadania. Rozważmy sposób obliczenia kąta  $\theta_h$  w przykładzie 3.3. Otrzymaliśmy tam  $\text{tg } \theta = 3,9/2,6 = 1,5$ . Wyznaczając przy użyciu kalkulatora  $\text{arctg } 1,5$ , otrzymujesz  $\theta_h = 56^\circ$ , ale równanie  $\text{tg } \theta = 1,5$  spełnia również kąt  $\theta_h = 236^\circ (= 180^\circ + 56^\circ)$ . Który z tych kątów jest właściwym rozwiązaniem? Spojrzenie na rysunek 3.11b pozwala stwierdzić, że kąt  $56^\circ$  spełnia warunki zadania, a kąt  $236^\circ$  — nie.

**Porada 4: Jak mierzyć kąty?**

Równanie (3.5), w którym występują funkcje  $\cos \theta$  i  $\sin \theta$  oraz równanie (3.6), w którym występuje funkcja  $\text{tg } \theta$ , są słuszne tylko wtedy, gdy kąt jest mierzony względem dodatniego kierunku osi  $x$ . Jeśli jest on liczony względem innego kierunku, to może zająć potrzeba zamiany funkcji trygonometrycznych w równaniu (3.5) lub wzięcia odwrotności stosunku w równaniu (3.6). Aby nie popełnić błędów, najlepiej zawsze liczyć kąty względem dodatniego kierunku osi  $x$ .



### 3.4. Wektory jednostkowe

Wektorem jednostkowym nazywamy wektor o długości równej 1, skierowany w określonym kierunku. Nie ma on wymiaru ani jednostki, służy jedynie do wskazywania, czyli wyznaczania kierunku. Wektory jednostkowe dodatnich kierunków osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  oznaczamy jako  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$ , gdzie w miejsce strzałki nad wektorem używamy symbolu:  $\hat{\phantom{x}}$  (rys. 3.14). Układ osi przedstawiony na rysunku 3.14 nazywamy **prawoskrętnym układem współrzędnych**. Obrót takiego układu, przy którym nie zmienia się wzajemne ustawienie osi, daje układ, który jest również prawoskrętny. W tym podręczniku będziemy posługiwać się wyłącznie takimi układami współrzędnych.

Wektorów jednostkowych można używać także do zapisu innych wektorów. Na przykład, wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  z rysunków 3.8 i 3.9 można zapisać jako:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (3.7)$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}, \quad (3.8)$$

jak pokazano na rysunku 3.15. Wielkości  $a_x \hat{i}$  i  $a_y \hat{j}$  są wektorami, zwanymi **wektorami składowymi** wektora  $\vec{a}$ . Wielkości  $a_x$  i  $a_y$  są skalarami, zwanymi **składowymi skalarnymi** wektora  $\vec{a}$  (lub, jak poprzednio, po prostu jego **składowymi**).

Zapiszmy przemieszczenie  $\vec{d}$  zespołu grotolazów z przykładu 3.3 za pomocą wektorów jednostkowych. Po pierwsze, zastąpmy układ współrzędnych z rysunku 3.11b układem prawoskrętnym z rysunku 3.14. Wektory  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$  będą więc skierowane odpowiednio na wschód, do góry i na południe. Przesunięcie zespołu od punktu wyjścia do punktu końcowego wyprawy można zatem wygodnie zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako:

$$\vec{d} = -(2,6 \text{ km})\hat{i} + (0,025 \text{ km})\hat{j} + (3,9 \text{ km})\hat{k}. \quad (3.9)$$

W tym wzorze  $-(2,6 \text{ km})\hat{i}$  jest to wektor składowy wektora  $\vec{d}$  wzdłuż osi  $x$ ,  $d_x \hat{i}$ , a  $-(2,6 \text{ km})$  jest składową  $x$  wektora  $\vec{d}$ ,  $d_x$  (i analogicznie dla pozostałych osi).

### 3.5. Dodawanie wektorów na składowych

Korzystając z rysunku, możemy dodawać wektory geometrycznie. Inną metodą dodawania wektorów jest dodawanie ich składowych dla każdej osi.

Na początek rozważmy równanie:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (3.10)$$

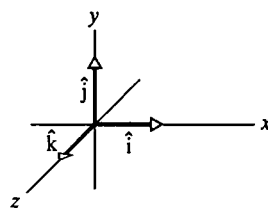
z którego wynika, że wektor  $\vec{r}$  jest taki sam, jak wektor  $(\vec{a} + \vec{b})$ . Skoro tak jest, to obydwa te wektory ( $\vec{r}$  i  $(\vec{a} + \vec{b})$ ) muszą mieć jednakowe odpowiednie składowe, tzn.:

$$r_x = a_x + b_x, \quad (3.11)$$

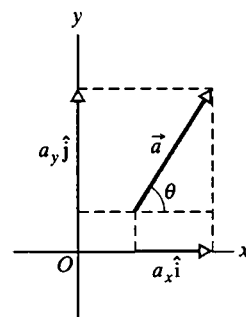
$$r_y = a_y + b_y, \quad (3.12)$$

$$r_z = a_z + b_z. \quad (3.13)$$

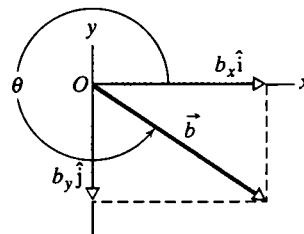
Innymi słowy, dwa wektory są sobie równe, jeśli są sobie równe ich odpowiednie składowe. Z równań (3.10)–(3.13) wynika, że aby dodać do siebie dwa wektory



Rys. 3.14. Wektory jednostkowe  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$  wyznaczają kierunki osi prawoskrętnego układu współrzędnych



a)



b)

Rys. 3.15. a) Wektory składowe wektora  $\vec{a}$ . b) Wektory składowe wektora  $\vec{b}$

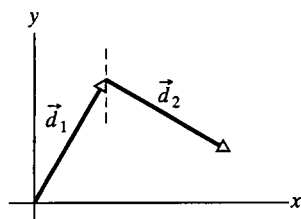
$\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , należy: 1) rozłożyć wektory na składowe (skalarne); 2) dodać do siebie składowe dla każdej osi tak, aby otrzymać składowe sumy wektorów  $\vec{r}$ ; 3) wyznaczyć wektor  $\vec{r}$  na podstawie jego składowych. W ostatnim punkcie mamy możliwość wyboru sposobu postępowania. Możemy wyrazić  $\vec{r}$  przez wektory jednostkowe, jak w równaniu (3.9), lub przez jego moduł i kąt, jak w odpowiedzi do zadania, zamieszczonego w przykładzie 3.3.

W podobny sposób można odejmować wektory na składowych. Przypomnijmy, że różnicę wektorów, np.  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  można sprowadzić do sumy, pisząc  $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Tak więc, odejmując wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , po prostu dodajemy składowe wektorów  $\vec{a}$  i  $-\vec{b}$ , co daje:

$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y \quad \text{oraz} \quad d_z = a_z - b_z,$$

przy czym:

$$\vec{d} = d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}.$$



**SPRAWDZIAN 3:** Spójrz na rysunek obok i powiedz: a) jakie są znaki składowych  $x$  wektorów  $\vec{d}_1$  i  $\vec{d}_2$ , b) jakie są znaki składowych  $y$  wektorów  $\vec{d}_1$  i  $\vec{d}_2$ , c) jakie są znaki składowych  $x$  i  $y$  wektora  $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$ .

### Przykład 3.4

Na rysunku 3.16a przedstawiono trzy wektory:

$$\vec{a} = (4,2 \text{ m})\hat{i} - (1,5 \text{ m})\hat{j},$$

$$\vec{b} = (-1,6 \text{ m})\hat{i} + (2,9 \text{ m})\hat{j},$$

$$\vec{c} = (-3,7 \text{ m})\hat{j}.$$

Wyznacz wektor  $\vec{r}$ , który jest ich sumą (również pokazany na tym rysunku).

#### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Trzy dane wektory możemy dodać, dodając ich odpowiednie składowe. Dodając składowe  $x$  wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , otrzymujemy składową  $x$  wektora  $\vec{r}$ :

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4,2 \text{ m} - 1,6 \text{ m} + 0 = 2,6 \text{ m}.$$

Analogicznie:

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1,5 \text{ m} + 2,9 \text{ m} - 3,7 \text{ m} = -2,3 \text{ m}.$$

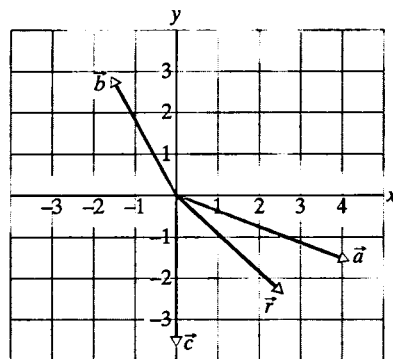
➔ 2. Znając składowe wektora  $\vec{r}$ , możemy go zapisać za pomocą wektorów jednostkowych:

$$\vec{r} = (2,6 \text{ m})\hat{i} - (2,3 \text{ m})\hat{j}, \quad (\text{odpowiedź})$$

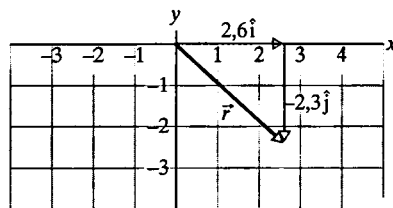
przy czym  $(2,6 \text{ m})\hat{i}$  jest wektorem składowym wektora  $\vec{r}$  wzdłuż osi  $x$ , a  $-(2,3 \text{ m})\hat{j}$  — wzdłuż osi  $y$ . Na rysunku 3.16b przedstawiono jeden ze sposobów, w jaki można z nich utworzyć wektor  $\vec{r}$  (czy potrafisz narysować drugi z tych sposobów?).

➔ 3. Możemy również podać odpowiedź w postaci modułu wektora  $\vec{r}$  i kąta wyznaczającego jego kierunek. Z równania (3.6) wynika, że moduł jest równy:

$$r = \sqrt{(2,6 \text{ m})^2 + (-2,3 \text{ m})^2} \approx 3,5 \text{ m}, \quad (\text{odpowiedź})$$



a)



b)

Rys. 3.16. Przykład 3.4. Wektor  $\vec{r}$  jest sumą trzech pozostałych wektorów

a kąt (mierzony od dodatniego kierunku osi  $x$ ) wynosi:

$$\theta = \arctg\left(\frac{-2,3 \text{ m}}{2,6 \text{ m}}\right) = -41^\circ, \quad (\text{odpowiedź})$$

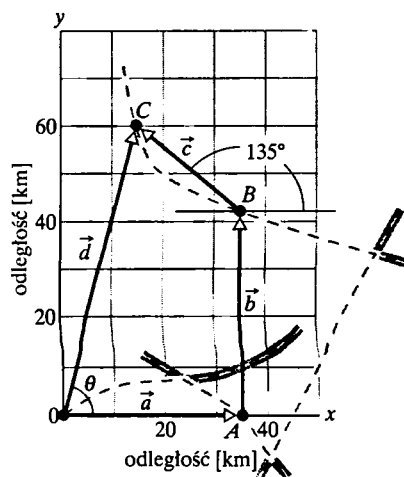
przy czym znak minus wskazuje, że kąt jest mierzony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

## Przykład 3.5

Na rysunku 3.17 przedstawiono fragment mapy, na której zaznaczono trasę rajdu samochodowego. Startując z miejsca wybranego jako początek układu współrzędnych, musisz dotrzeć do wolną drogą kolejno do trzech punktów kontrolnych:

- 1) punktu kontrolnego Adamów, leżącego o 36 km na wschód od początku układu (przemieszczenie  $\vec{a}$ ),
- 2) punktu kontrolnego Borki, leżącego na północ od Adamowa (przemieszczenie  $\vec{b}$ ),
- 3) punktu kontrolnego Ciche, odległego o 25 km od Borki w kierunku wyznaczonym przez kąt, zaznaczony na rysunku (przemieszczenie  $\vec{c}$ ).

Całkowite przemieszczenie  $\vec{d}$  wynosi 62 km. Jaki jest moduł przemieszczenia  $\vec{b}$ ?



Rys. 3.17. Przykład 3.5. Mapa z trasą rajdu, na której zaznaczono drogi, punkt startu i punkty kontrolne: Adamów (A), Borki (B) i Ciche (C)

### ROZWIĄZANIE:

Przemieszczenie całkowite  $\vec{d}$  jest sumą trzech przemieszczeń pośrednich, a więc można napisać:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

stąd wynika, że:

$$\vec{b} = \vec{d} - \vec{a} - \vec{c}. \quad (3.14)$$

Zapiszmy równanie (3.14) w postaci równań dla składowych  $x$  i  $y$ . Wektor  $\vec{b}$  jest równoległy do osi  $y$ , dlatego też z równania dla składowych  $y$  można wyznaczyć moduł tego wektora. Możemy napisać więc:

$$b_y = d_y - a_y - c_y. \quad (3.15)$$

Korzystając z równania (3.5), podstawiając dane i zauważając, że  $b = b_y$ , otrzymujemy:

$$b = (62 \text{ km}) \sin \theta - 0 - (25 \text{ km}) \sin 135^\circ. \quad (3.16)$$

Niestety, nie znamy kąta  $\theta$  (znamy moduł i kierunek wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{c}$ , lecz nie znamy kierunku wektora  $\vec{d}$ ). Aby go wyznaczyć, napiszemy równanie (3.14) dla składowych  $x$ :

$$b_x = d_x - a_x - c_x, \quad (3.17)$$

co daje:

$$0 = (62 \text{ km}) \cos \theta - 36 \text{ km} - (25 \text{ km}) \cos 135^\circ,$$

a stąd:

$$\theta = \arccos \frac{36 + (25)(\cos 135^\circ)}{62} = 72,81^\circ.$$

Wstawiając to do równania (3.16), otrzymujemy:

$$b \approx 42 \text{ km}. \quad (\text{odpowieź})$$

## 3.6. Wektory a prawa fizyki

Na wszystkich rysunkach zawierających układ współrzędnych, jakie przedstawiliśmy do tej pory, osie  $x$  i  $y$  były równoległe do krawędzi strony. Gdy więc rozważaliśmy wektory, ich składowe były także równoległe do tych krawędzi, jak składowe  $a_x$  i  $a_y$  wektora  $\vec{a}$  na rysunku 3.18a. Nie ma żadnego istotnego powodu, aby tak właśnie wybierać kierunki osi (poza tym, że taki rysunek najwygodniej oglądać). Możemy równie dobrze obrócić osie (ale nie wektor  $\vec{a}$ ) np. o kąt  $\phi$ , jak na rysunku 3.18b, otrzymując inne składowe wektora, które oznaczyliśmy przez  $a'_x$  i  $a'_y$ . Istnieje nieskończenie wiele różnych kątów  $\phi$ , dlatego też możemy mieć nieskończenie wiele różnych par składowych wektora  $\vec{a}$ .

Która z tych par jest „najwłaściwsza”? Otóż każda z nich jest równie prawidłowa, gdyż każda z nich (w połączeniu z odpowiadającymi jej osiami) pokazuje inny sposób wyrażenia tego samego wektora  $\vec{a}$ ; każda z nich pozwala wyznaczyć

taki sam moduł i kierunek danego wektora. Z rysunku 3.18 otrzymujemy:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \quad (3.18)$$

oraz

$$\theta = \theta' + \phi. \quad (3.19)$$

Ważne jest to, że mamy wielką swobodę wyboru układu współrzędnych, ponieważ związki między wektorami (m.in. ich dodawanie — równanie (3.1)) nie zależą od położenia początku układu współrzędnych i kierunku jego osi. Dotyczy to również związków między wielkościami fizycznymi: nie zależą one od wyboru układu współrzędnych. Ponadto, opis wektorowy odznacza się prostotą zapisu bogatej treści — jedno równanie, jak (3.10), zawiera w sobie trzy równania, jak (3.11), (3.12) i (3.13), a czasem nawet większą ich liczbę — trudno się zatem dziwić, że prawa fizyki przedstawiane są niemal zawsze w postaci wektorowej.

### 3.7. Mnożenie wektorów\*

Mnożenie wektorów można wykonywać na trzy sposoby, lecz żaden z nich nie jest taki sam, jak zwykle mnożenie algebraiczne, należy zatem dobrze poznać podstawowe prawa tych działań.

#### Mnożenie wektora przez skalar

W wyniku pomnożenia wektora  $\vec{a}$  przez skalar  $s$  otrzymujemy nowy wektor. Jego moduł jest równy iloczynowi modułu  $\vec{a}$  i wartości bezwzględnej  $s$ . Jego kierunek jest zgodny z kierunkiem  $\vec{a}$ , jeśli  $s$  jest dodatnie, a przeciwny, jeśli  $s$  jest ujemne. Aby podzielić  $\vec{a}$  przez  $s$ , mnożymy  $\vec{a}$  przez  $1/s$ .

#### Mnożenie wektora przez wektor

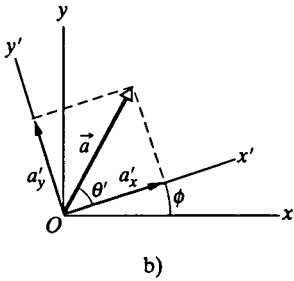
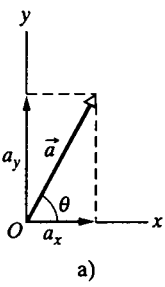
Istnieją dwa sposoby mnożenia wektora przez wektor: w jednym przypadku otrzymujemy w wyniku skalar (nazywany *iloczynem skalarnym*), a w drugim — nowy wektor (nazywany *iloczynem wektorowym*). Studentom często mylą się te dwa iloczyny, postaraj się więc odróżniać je od siebie.

#### Iloczyn skalarny

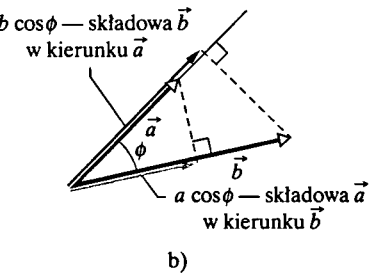
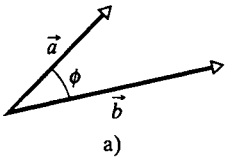
Iloczyn skalarny wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  (patrz rysunek 3.19), oznaczany  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , jest zdefiniowany jako:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi, \quad (3.20)$$

\* Przedstawione w tym paragrafie zagadnienia będą niezbędne w dalszych częściach wykładu (iloczyn skalarny w rozdziale 7, a iloczyn wektorowy w rozdziale 12), wobec czego jego lektura może być odłożona na później.



Rys. 3.18. a) Wektor  $\vec{a}$  i jego składowe.  
b) Ten sam wektor w układzie współrzędnych obróconym o kąt  $\phi$



Rys. 3.19. a) Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  tworzące ze sobą kąt  $\phi$ . b) Składowe każdego z tych wektorów w kierunku drugiego z nich

przy czym  $a$  jest modułem  $\vec{a}$ ,  $b$  — modułem  $\vec{b}$ , a  $\phi$  — kątem między  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  (czyli — mówiąc ściślej — między kierunkami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ). W rzeczywistości są dwa kąty, spełniające ten warunek:  $\phi$  oraz  $360^\circ - \phi$ . Do równania (3.20) możesz wstawić którykolwiek z nich, gdyż ich cosinusy mają taką samą wartość.

Zauważ, że po prawej stronie równania (3.20) występują same skalary (w tym wartość  $\cos \phi$ ). Wobec tego wyrażenie po lewej stronie równania, tzn.  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , jest wielkością skalarną.

Iloczyn skalarny można uważać za iloczyn dwóch wielkości: 1) modułu jednego z wektorów, 2) składowej drugiego wektora w kierunku pierwszego z nich. Na przykład, jak pokazano na rysunku 3.19b,  $a \cos \phi$  jest składową  $\vec{a}$  w kierunku  $\vec{b}$ ; zauważ, że jest ona równa rzutowi prostopadłemu  $\vec{a}$  na kierunek  $\vec{b}$ . Analogicznie  $b \cos \phi$  jest składową  $\vec{b}$  w kierunku  $\vec{a}$ .

Jeśli kąt  $\phi$  między dwoma wektorami jest równy  $0^\circ$ , to składowa jednego wektora w kierunku drugiego jest maksymalna, a więc iloczyn skalarny wektorów jest też największy. Jeśli natomiast  $\phi$  jest równe  $90^\circ$ , to składowa jednego wektora w kierunku drugiego jest równa zero, zatem iloczyn skalarny wektorów także wynosi zero.

Równanie (3.20) można zapisać w takiej postaci, w której składowe są wyraźnie wyróżnione:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \quad (3.21)$$

Iloczyn skalarny jest przemienny, można więc napisać:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Jeśli wyrazimy obydwa wektory przez wektory jednostkowe, to ich iloczyn skalarny możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3.22)$$

a następnie skorzystać z rozdzielności mnożenia względem dodawania i wyrazić prawą stronę powyższego równania w postaci sumy iloczynów skalarnych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego. W ten sposób można wykazać, że:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3.23)$$

**SPRAWDZIAN 4:** Długości wektorów  $\vec{C}$  i  $\vec{D}$  wynoszą odpowiednio 3 jednostki i 4 jednostki. Ile wynosi kąt między kierunkami  $\vec{C}$  i  $\vec{D}$ , jeśli  $\vec{C} \cdot \vec{D}$  wynosi: a) zero, b) 12 jednostek, c) -12 jednostek?

### Przykład 3.6

Wynosi kąt  $\phi$ , utworzony przez wektory  $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$  i  $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$ ?

**ROZWIĄZANIE:**

1. Kąt między kierunkami dwóch wektorów występuje w definicji ich iloczynu skalarnego (równanie (3.20)):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \quad (3.24)$$

W równaniu tym  $a$  jest długością wektora  $\vec{a}$ , czyli:

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad (3.25)$$

a  $b$  jest długością wektora  $\vec{b}$ , czyli:

$$b = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3,61. \quad (3.26)$$

2. Zapisując obydwa wektory za pomocą wektorów jednostkowych i stosując rozdzielność mnożenia względem dodawania, możemy obliczyć wartość lewej strony równania (3.24):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$

$$= (3\hat{i}) \cdot (-2\hat{i}) + (3\hat{i}) \cdot (3\hat{k}) + (-4\hat{j}) \cdot (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \cdot (3\hat{k}).$$

Następnie zastosujemy równanie (3.20) do wyznaczenia wartości każdego składnika prawej strony powyższego równania. Kąt między wektorami w pierwszym składniku (tzn.  $3\hat{i}$  i  $-2\hat{i}$ ) wynosi  $0^\circ$ , w pozostałych jest równy  $90^\circ$ . Mamy więc:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(6)(1) + (9)(0) + (8)(0) - (12)(0) = -6.$$

Podstawiając ten wynik oraz wartości z równań (3.25) i (3.26) do równania (3.24), otrzymujemy:

$$-6 = (5)(3,61) \cos \phi,$$

a stąd:

$$\phi = \arccos \frac{-6}{(5)(3,61)} = 109^\circ \approx 110^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

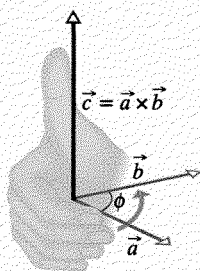
## Iloczyn wektorowy

**Iloczynem wektorowym** wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , oznaczanym jako  $\vec{a} \times \vec{b}$ , jest wektor  $\vec{c}$  o długości:

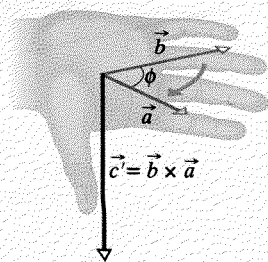
$$c = ab \sin \phi, \quad (3.27)$$

przy czym  $\phi$  jest *mniejszym* z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  (ważne jest, aby wziąć mniejszy z dwóch kątów między wektorami, ponieważ wartości  $\sin \phi$  i  $\sin(360^\circ - \phi)$  różnią się znakiem).

➤ Jeśli wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są równoległe lub antyrównoległe, to  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ . Długość wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$ , którą można zapisać w postaci  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  jest największa, gdy wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są do siebie prostopadłe.



a)



b)

**Rys. 3.20.** Reguła prawej dłoni do wyznaczania kierunku iloczynu wektorowego. a) Jeśli ustawisz palce wzdłuż łuku mniejszego kąta między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , to odgięty kciuk wskazuje kierunek wektora  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . b) Jak widać, kierunek wektora  $\vec{b} \times \vec{a}$  jest przeciwny do kierunku wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

Kierunek wektora  $\vec{c}$  jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Na rysunku 3.20 pokazano, jak wyznaczyć kierunek  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , korzystając z tzw. **reguły prawej dłoni**. W tym celu przesunij wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  tak, aby miały wspólny początek (nie zmieniając oczywiście ich kierunków) i wyobraź sobie przechodzącą przez ten punkt linię, prostopadłą do płaszczyzny tworzonej przez  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Otocz tę linię *prawą* dłonią tak, aby kierunek palców pokazywał łuk od  $\vec{a}$  do  $\vec{b}$  wzdłuż mniejszego kąta między nimi. Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora  $\vec{c}$ .

Kolejność wektorów w iloczynie wektorowym jest istotna. Na rysunku 3.20b przedstawiono sposób wyznaczania kierunku wektora  $\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$ , przy którym palce ustawione są wzdłuż łuku mniejszego kąta od  $\vec{b}$  do  $\vec{a}$ . Kciuk wskazuje teraz kierunek przeciwny do poprzedniego, wobec czego  $\vec{c}' = -\vec{c}$ , czyli:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (3.28)$$

Innymi słowy, iloczyn wektorowy nie jest przemiennej.

Korzystając z zapisu za pomocą wektorów jednostkowych, otrzymujemy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}). \quad (3.29)$$

Wyrażenie to można rozwinąć, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania i zapisać prawą stronę w postaci sumy iloczynów wektorowych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego. Wartości iloczynu wektorowego wektorów jednostkowych podane są

w dodatku E (w punkcie: Iloczyny wektorów). Na przykład, w rozwinięciu prawej strony równania (3.29) występuje wyraz:

$$a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) = 0.$$

Jest on równy zero, ponieważ wektory jednostkowe  $\hat{i}$  oraz  $\hat{i}$  są równoległe, a więc ich iloczyn wektorowy jest równy zero. Podobnie, otrzymujemy:

$$a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} = a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że długość wektora  $\hat{i} \times \hat{j}$  jest równa jedności. Wynika to z równania (3.27) — wektory  $\hat{i}$  i  $\hat{j}$  mają długość równą jedności, a kąt między nimi wynosi  $90^\circ$ . Kierunek wektora  $\hat{i} \times \hat{j}$  wyznaczyliśmy za pomocą reguły prawej dłoni. Jest to dodatni kierunek osi  $z$ , a więc kierunek wektora  $\hat{k}$ .

Wyznaczając w ten sposób wartości wszystkich składników rozwinięcia prawej strony równania (3.29), otrzymujemy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}. \quad (3.30)$$

Wartość iloczynu wektorowego można również wyznaczyć, zapisując i obliczając odpowiedni wyznacznik (jak pokazano w dodatku E).

Aby stwierdzić, czy dany układ współrzędnych  $xyz$  jest prawoskrętny, zastosujemy regułę prawej dłoni do iloczynu wektorowego  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$  w tym układzie. Jeśli ustawisz palce prawej ręki wzdłuż łuku od  $\hat{i}$  (dodatniego kierunku osi  $x$ ) do  $\hat{j}$  (dodatniego kierunku osi  $y$ ), a odgięty kciuk wskaże dodatni kierunek osi  $z$ , to układ jest prawoskrętny.

**SPRAWDZIAN 5:** Długości wektorów  $\vec{C}$  i  $\vec{D}$  wynoszą odpowiednio 3 jednostki i 4 jednostki. Ile wynosi kąt między kierunkami  $\vec{C}$  i  $\vec{D}$ , jeśli długość iloczynu wektorowego  $\vec{C} \times \vec{D}$  wynosi: a) zero, b) 12 jednostek?

### Przykład 3.7

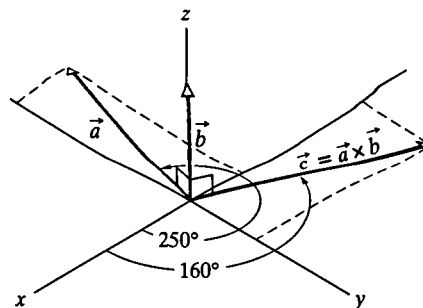
Jak pokazano na rysunku 3.21 wektor  $\vec{a}$  leży w płaszczyźnie  $xy$ , ma długość równą 18 jednostek, a jego kierunek tworzy kąt  $250^\circ$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . Wektor  $\vec{b}$  ma długość równą 12 jednostek i kierunek dodatni osi  $z$ . Wyznacz iloczyn wektorowy  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

#### ROZWIĄZANIE:

1. Mając długości i (dane za pomocą kątów) kierunki dwóch wektorów, możemy wyznaczyć długość ich iloczynu wektorowego (tzn. wektora otrzymanego w wyniku obliczenia ich iloczynu wektorowego) na podstawie równania (3.27). Dla danych z tego zadania otrzymujemy:

$$c = ab \sin \phi = (18)(12)(\sin 90^\circ) = 216. \quad (\text{odpowiedź})$$

2. Znając długości i kierunki dwóch wektorów, możemy wyznaczyć kierunek ich iloczynu wektorowego na podstawie reguły prawej dłoni z rysunku 3.20. Wyobraźmy sobie na rysunku 3.21 prawą dłoń, której palce otaczają linię prostopadłą do kierunku wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  (tzn. linię, na której leży pokazany na rysunku



Rys. 3.21. Przykład 3.7. Wektor  $\vec{c}$  (leżący w płaszczyźnie  $xy$ ) jest iloczynem wektorowym wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

wektor  $\vec{c}$ ) wzdłuż łuku od  $\vec{a}$  do  $\vec{b}$ . Odgięty kciuk wyznacza wówczas kierunek wektora  $\vec{c}$ . Jak widać z rysunku 3.21, wektor  $\vec{c}$  leży w płaszczyźnie  $xy$ . Jego kierunek jest prostopadły do kierunku wektora  $\vec{a}$ , dlatego też tworzy on z dodatnim kierunkiem osi  $x$  kąt:

$$250^\circ - 90^\circ = 160^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 3.8

Jeśli  $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ , a  $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$ , to ile wynosi  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

☛ Gdy mamy dane dwa wektory, wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych, wtedy ich iloczyn wektorowy możemy znaleźć, mnożąc kolejno przez siebie składniki rozwinięcia obydwu wektorów. W przypadku tego zadania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.\end{aligned}$$

Następnie obliczamy każdy wektor składowy, wyznaczając jego wartość z równania (3.27), a kierunek — z reguły prawej dłoni. Dla pierwszego wyrazu wyrazu kąt między wektorami wynosi  $0^\circ$ , a dla pozostałych —  $90^\circ$ . Mamy więc:

$$\vec{c} = 6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i} = -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wektor  $\vec{c}$  jest prostopadły zarówno do  $\vec{a}$ , jak i do  $\vec{b}$ , co łatwo sprawdzić obliczając, że  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  oraz  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ . Innymi słowy oznacza to, że składowe  $\vec{c}$  w kierunkach  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  wynoszą zero.

## Sztuka rozwiązywania zadań

**Porada 5:** *Typowe błędy, popełniane przy obliczaniu iloczynu wektorowego*

Istnieje kilka błędów, które popełniamy najczęściej przy wyznaczaniu iloczynu wektorowego. 1) Gdy rysunek przedstawia wektory ustawione tak, że koniec jednego styka się z początkiem drugiego, zapominamy nieraz o przesunięciu wektorów tak, aby miały wspólny początek: należy w myśli przesunąć wektory do tego ustawienia, bez zmiany ich kierunku, a najlepiej zrobić nowy rysunek. 2) Gdy w prawej dłoni trzymamy ołówek lub kalkulator,

łatwo pomylić ręce i chcąc skorzystać z reguły prawej dłoni, wykorzystujemy do tego rękę lewą. 3) Gdy wektory ustawione są tak, że prawą rękę trzeba ustawić w niewygodnym położeniu, zdarza się omyłkowe przesunięcie nie wektora pierwszego do drugiego, lecz na odwrót. Błąd ten popełniamy też nieraz, gdy tylko wyobrażamy sobie zastosowanie reguły prawej dłoni, bez wykonywania ruchów ręką. 4) Gdy nie pamiętamy, jak narysować prawoskrętny układ współrzędnych (rysunek 3.14), możemy omyłkowo korzystać z układu lewoskrętnego.

## Podsumowanie

**Skalary i wektory** Skalar, np. temperatura, ma tylko wartość. Podajemy go jako liczbę i jednostkę (np.  $10^\circ\text{C}$ ); spełnia on prawa arytmetyki i zwykłej algebry. **Wektor**, np. przemieszczenie, ma wartość bezwzględną i kierunek (np. 5 m na północ); działania na wektorach wymagają użycia reguł algebry wektorów.

**Geometryczne dodawanie wektorów** Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  można do siebie dodać geometrycznie, rysując je w jednakowej skali i umieszczając początek drugiego w tym samym punkcie, co koniec pierwszego. Wektor łączący początek pierwszego wektora z końcem drugiego jest wtedy ich sumą wektorową  $\vec{c}$ . Aby odjąć  $\vec{b}$  od  $\vec{a}$ , należy odwrócić kierunek  $\vec{b}$ , co daje wektor  $-\vec{b}$ , a następnie dodać  $-\vec{b}$  do  $\vec{a}$ . Dodawanie wektorów jest przemienne i łączne.

**Składowe wektora** Składowe wektora dwuwymiarowego  $\vec{a}$  w danym układzie współrzędnych  $a_x$  i  $a_y$  wyznaczamy, rzutując obydwie końce  $\vec{a}$  na osie układu współrzędnych. Są one równe:

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{i} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (3.5)$$

przy czym  $\theta$  jest kątem między kierunkiem  $\vec{a}$  a dodatnim kierunkiem osi  $x$ . Znak składowej wskazuje na kierunek wektora w

stosunku do odpowiedniej osi. Mając składowe wektora  $\vec{a}$ , można wyznaczyć jego długość i kierunek, korzystając ze związków:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{oraz} \quad \text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x}. \quad (3.6)$$

**Wektory jednostkowe** Wektory jednostkowe  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$  są to wektory o długości równej jedności i kierunkach osi — odpowiednio  $x$ ,  $y$  i  $z$  — prawoskrętnego układu współrzędnych. Wektor  $\vec{a}$  można zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (3.7)$$

gdzie  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  są składowymi wektora  $\vec{a}$ , a wektory  $a_x \hat{i}$ ,  $a_y \hat{j}$  i  $a_z \hat{k}$  — jego wektorami składowymi, skierowanymi wzdłuż osi układu współrzędnych.

**Dodawanie wektorów na składowych** Aby dodać dwa wektory dane za pomocą ich składowych, stosujemy wzory:

$$r_x = a_x + b_x, \quad r_y = a_y + b_y, \quad r_z = a_z + b_z, \quad (3.11\text{--}3.13)$$

przy czym wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są wektorami, które dodajemy, a wektor  $\vec{r}$  jest ich sumą.



**Wektory a prawa fizyki** Każdą sytuację fizyczną, w której mamy do czynienia z wektorami można opisywać w dowolnym układzie współrzędnych. Wybieramy zwykle ten układ, w którym opis zjawisk fizycznych jest najprostszy. Związki między wielkościami fizycznymi nie zależą od tego, w jakim układzie współrzędnych je wyrażono. Prawa fizyki także są niezależne od wyboru układu współrzędnych.

**Iloczyn skalara i wektora** Iloczynem skalara  $s$  i wektora  $\vec{v}$  jest wektor o długości  $sv$  i kierunku zgodnym z kierunkiem  $\vec{v}$ , jeśli  $s$  jest dodatnie, a przeciwnym — jeśli  $s$  jest ujemne. Aby podzielić  $\vec{v}$  przez  $s$ , należy pomnożyć  $\vec{v}$  przez  $(1/s)$ .

**Iloczyn skalarny wektorów** Iloczynem skalarnym dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , zapisywany jako  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , jest **skalar** o wartości:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi, \quad (3.20)$$

przy czym  $\phi$  jest kątem utworzonym przez kierunki wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Iloczyn skalarny wektorów może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem, w zależności od wartości kąta  $\phi$ . Iloczyn skalarny jest równy iloczynowi długości jednego z wektorów i składowej drugiego w kierunku pierwszego.

Gdy wektory są wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych, to ich iloczyn skalarny:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3.22)$$

można wyznaczyć, mnożąc kolejno przez siebie wektory składowe każdego z nich. Iloczyn skalarny jest przemienny, tzn.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

**Iloczyn wektorowy wektorów** Iloczynem wektorowym dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , zapisywany jako  $\vec{a} \times \vec{b}$ , jest **wektor**  $\vec{c}$  o długości:

$$c = ab \sin \phi, \quad (3.21)$$

przy czym  $\phi$  jest mniejszym z kątów między kierunkami wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Wektor  $\vec{c}$  jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , a jego kierunek jest wyznaczony przez regułę prawej dłoni, przedstawioną na rysunku 3.20. Należy pamiętać, że:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .

Mając wektory zapisane za pomocą wektorów jednostkowych, ich iloczyn wektorowy można obliczyć jako sumę iloczynów wektorowych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}). \quad (3.29)$$

## Pytania

1. Przemieszczenie  $\vec{D}$  jest wektorem o początku w punkcie o współrzędnych (5 m, 3 m) i końcu w punkcie o współrzędnych (7 m, 6 m) na płaszczyźnie  $xy$ . Który z podanych niżej wektorów przemieszczenia jest równoważny wektorowi  $\vec{D}$ : wektor  $\vec{A}$  o początku w punkcie (-6 m, -5 m) i końcu w punkcie (-4 m, -2 m), wektor  $\vec{B}$  o początku w punkcie (-6 m, 1 m) i końcu w punkcie (-4 m, 4 m), wektor  $\vec{C}$  o początku w punkcie (-8 m, -6 m) i końcu w punkcie (-10 m, -9 m)?

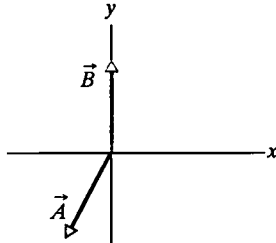
2. Czy długość wektora, który jest różnicą dwóch wektorów, może być kiedykolwiek większa niż: a) długość jednego z tych wektorów, b) długości obydwu z nich, c) długość ich sumy?

3. Z równania (3.2) wynika, że dodawanie dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  jest przemienne. Czy oznacza to, że przemienne jest także ich odejmowanie, tzn. że  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$ ?

4. Jeśli  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$ , to czy: a)  $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$ , b)  $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$ , c)  $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$ ?

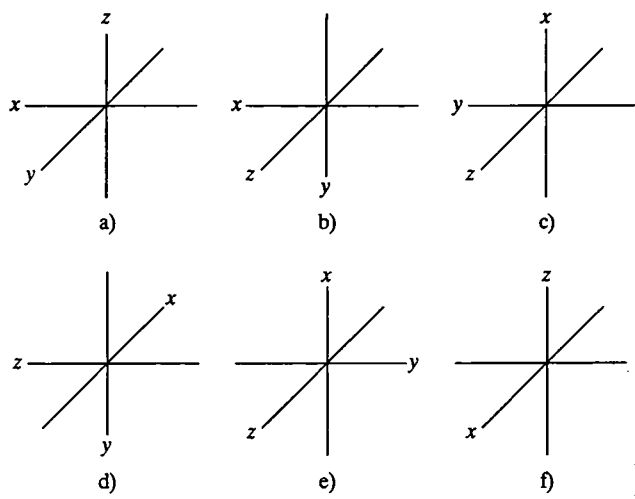
5. Dla jakich wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  spełnione są związki: a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  oraz  $a + b = c$ , b)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$ , c)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  oraz  $a^2 + b^2 = c^2$ ?

6. Na rysunku 3.22 przedstawiono dwa wektory,  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Czy: a) składowa  $x$



Rys. 3.22. Pytanie 6.

wektora  $\vec{A}$ , b) składowa  $y$  wektora  $\vec{A}$ , c) składowa  $x$  wektora  $\vec{A} - \vec{B}$ , d) składowa  $y$  wektora  $\vec{A} - \vec{B}$  są dodatnie, czy ujemne?



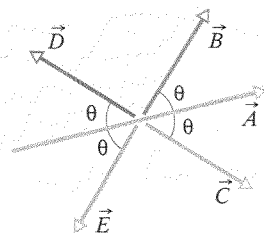
Rys. 3.23. Pytanie 7

7. Które z układów współrzędnych, pokazanych na rysunku 3.22 są układami prawoskrętnymi? Oznaczenie osi wskazuje jej kierunek dodatni.

8. Czy  $\vec{b}$  musi być równy  $\vec{c}$ , jeśli  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ?

9. Ile wynosi  $\vec{A} \times \vec{B}$  dla: a)  $\vec{B} = 8\hat{i} + 16\hat{j}$ , b)  $\vec{B} = -8\hat{i} - 16\hat{j}$ , jeśli  $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$  (odpowiedź na to pytanie nie wymaga wykonywania obliczeń)?

10. Na rysunku 3.24 pokazano wektor  $\vec{A}$  oraz cztery inne wektory o jednakowych długościach, lecz różnych kierunkach. O których z nich można powiedzieć, że: a) pomnożone skalarnie przez  $\vec{A}$  dadzą taki sam wynik, b) pomnożone skalarnie przez  $\vec{A}$  dadzą wynik ujemny?



Rys. 3.24. Pytanie 10

## Zadania

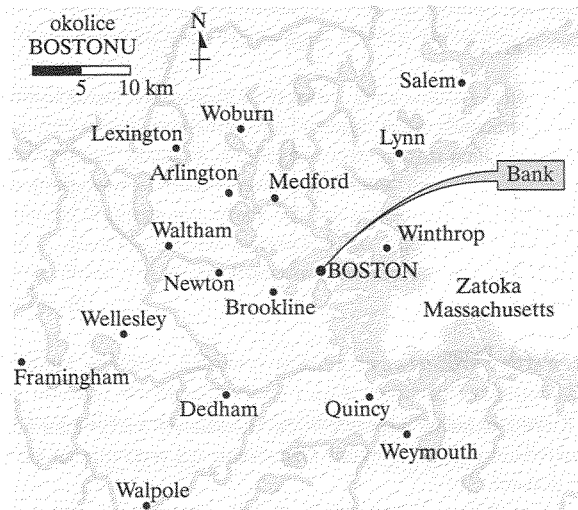
www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

### 3.2. Geometryczne dodawanie wektorów

1. Rozważ dwa wektory przemieszczenia, jeden o długości 3 m, a drugi o długości 4 m. Wskaż, jak muszą być względem siebie ustawione, aby przemieszczenie łączne miało długość: a) 7 m, b) 1 m, c) 5 m.

2. Obrabowano bank w centrum Bostonu (patrz mapka na rysunku 3.25). Uciekając przed pościgiem policyjnym, rabusie użyli śmigłowca, pokonując kolejno w powietrzu trzy odcinki o następujących przemieszczeniach: 32 km,  $45^\circ$  na południe od kierunku wschodniego; 53 km,  $26^\circ$  na północ od kierunku zachodniego; 26 km,  $18^\circ$  na wschód od kierunku południowego. Po zakończeniu trzeciego lotu zostali schwytani. W jakim mieście byli wówczas? Dodaj geometrycznie przemieszczenia na mapie.



Rys. 3.25. Zadanie 2

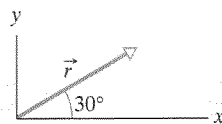
### 3.3. Składowe wektorów

3. Wektor  $\vec{a}$  leży w płaszczyźnie  $xy$ . Jego kierunek tworzy kąt  $250^\circ$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$  (licząc w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara), a jego długość wynosi 7,3 m. Jaka jest jego składowa: a)  $x$ , b)  $y$ ?

4. Wyraż w radianach kąty: a)  $20^\circ$ , b)  $50^\circ$ , c)  $100^\circ$ . Zamień następujące kąty na stopnie: d) 0,33 rad, e) 2,1 rad, f) 7,7 rad.

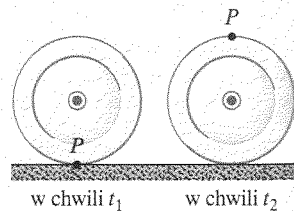
5. Składowa  $x$  wektora  $\vec{A}$  wynosi  $-25$  m, a jego składowa  $y$  jest równa  $+40$  m. a) Ile wynosi długość wektora  $\vec{A}$ ? b) Jaki kąt tworzy kierunek wektora  $\vec{A}$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ ?

6. Wektor przemieszczenia  $\vec{r}$  leży w płaszczyźnie  $xy$ , ma długość równą 15 m, a jego kierunek jest pokazany na rysunku 3.26. Wyznacz składowe tego wektora: a)  $x$ , b)  $y$ .



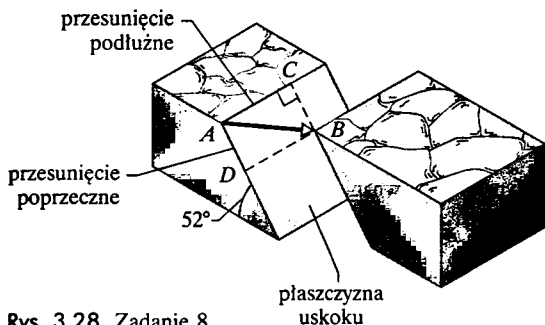
Rys. 3.26. Zadanie 6

7. Koło o promieniu 45 cm toczy się bez poślizgu po poziomym podłożu (rysunek 3.27). W chwili  $t_1$  kropka  $P$  namalowana na jego obwodzie znajduje się w punkcie zetknięcia koła z podłożem, a do późniejszej chwili  $t_2$  koło wykonuje pół pełnego obrotu. Ile wynosi: a) długość wektora przemieszczenia punktu  $P$  w przedziale czasu od  $t_1$  do  $t_2$ , b) kąt utworzony przez ten wektor z podłożem?



Rys. 3.27. Zadanie 7

8. Uskoki skalne są to pęknięcia skały, przy których ściany, wzdłuż których nastąpiło pęknięcie, przesunęły się względem siebie. Uskok taki pokazano na rysunku 3.28 — punkty  $A$  i  $B$  były jednym punktem przed pęknięciem, przy którym skała widoczna z przodu przesunęła się w prawo i w dół. Przemieszczenie  $\vec{AB}$  leży w płaszczyźnie uskoku. Jego składowa podłużna wynosi  $AC$ , a poprzeczna —  $AD$ . a) Ile wynosi długość wektora przemieszczenia, jeśli jego składowa podłużna wynosi 22 m, a składowa poprzeczna



Rys. 3.28. Zadanie 8

15. Wektor  $\vec{a}$  ma długość 5 m i jest skierowany na północ, a wektor  $\vec{b}$  ma długość 4 m i kierunek  $35^\circ$  na zachód od kierunku północnego. Wyznacz: a) długość, b) kierunek wektora  $\vec{a} + \vec{b}$ , c) długość, d) kierunek wektora  $\vec{b} - \vec{a}$ . e) Narysuj odpowiednie schematy wektorowe.

16. Oblicz sumę wektorów  $\vec{a} = (3 \text{ m})\hat{i} + (4 \text{ m})\hat{j}$  oraz  $\vec{b} = (5 \text{ m})\hat{i} + (-2 \text{ m})\hat{j}$ , wyrażając ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) jej długości, c) kąta utworzonego z wektorem  $\hat{i}$ . Wyznacz wektor  $\vec{b} - \vec{a}$ , zapisując go przy użyciu: d) wektorów jednostkowych, e) jego długości, f) kierunku.

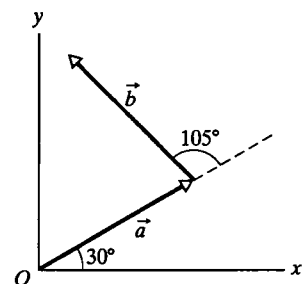
17. Dane są dwa wektory:  $\vec{a} = (4 \text{ m})\hat{i} - (3 \text{ m})\hat{j} + (1 \text{ m})\hat{k}$  i  $\vec{b} = (-1 \text{ m})\hat{i} + (1 \text{ m})\hat{j} + (4 \text{ m})\hat{k}$ . Wyraż za pomocą wektorów jednostkowych wektory: a)  $\vec{a} + \vec{b}$ , b)  $\vec{a} - \vec{b}$ , c) wektor  $\vec{c}$ , taki że  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$ .

18. Dane są dwa wektory:  $\vec{a} = (4 \text{ m})\hat{i} - (3 \text{ m})\hat{j}$  i  $\vec{b} = (6 \text{ m})\hat{i} + (8 \text{ m})\hat{j}$ . Wyznacz: a) długość wektora  $\vec{a}$ , b) kąt utworzony przez ten wektor z  $\hat{i}$ , c) długość wektora  $\vec{b}$ , d) kąt utworzony przez ten wektor z  $\hat{i}$ , e) długość wektora  $\vec{a} + \vec{b}$ , f) kąt utworzony przez ten wektor z  $\hat{i}$ , g) długość wektora  $\vec{b} - \vec{a}$ , h) kąt utworzony przez ten wektor z  $\hat{i}$ , i) długość wektora  $\vec{a} - \vec{b}$ , j) kąt utworzony przez ten wektor z  $\hat{i}$ . k) Ile wynosi kąt między kierunkami wektorów  $\vec{b} - \vec{a}$  i  $\vec{a} - \vec{b}$ ?

19. Trzy wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  mają długość 50 m każdy i leżą w płaszczyźnie  $xy$ . Ich kierunki tworzą z dodatnim kierunkiem osi  $x$  kąty odpowiednio  $30^\circ$ ,  $195^\circ$  i  $315^\circ$ . Wyznacz: a) długość wektora  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , b) kąt utworzony przez ten wektor z osią  $x$ , c) długość wektora  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ , d) kąt utworzony przez ten wektor z osią  $x$ . Ile wynosi: e) długość wektora  $\vec{d}$  spełniającego związek  $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$ , f) kąt utworzony przez ten wektor z osią  $x$ ? ilw

20. Wyznacz sumę następujących czterech wektorów:  $\vec{E}$ : 6 m,  $+0,9 \text{ rad}$ ;  $\vec{F}$ : 5 m,  $-75^\circ$ ;  $\vec{G}$ : 4 m,  $+1,2 \text{ rad}$ ;  $\vec{H}$ : 6 m,  $-210^\circ$  (dodatnia wartość kąta oznacza, że jest on mierzony względem dodatniego kierunku osi  $x$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemna — że jest mierzony zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) i wyraż ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) długości i kąta. W tym drugim przypadku podaj kąty zarówno w stopniach, jak i w radianach.

21. Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , przedstawione na rysunku 3.29, mają jednakowe długości, równe 10 m. Wyznacz: a) składową  $x$ , b) składową  $y$  wektora  $\vec{r}$ , który jest ich sumą. Podaj: c) długość wektora  $\vec{r}$ , d) kąt, jaki tworzy on z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . ilw www



Rys. 3.29. Zadanie 21

— 17 m? b) Ile wynosi składowa pionowa wektora  $\vec{AB}$ , jeśli płaszczyzna uskoku jest nachylona do poziomu pod kątem  $52^\circ$ ?

7. Pokój ma wymiary 3 m (wysokość)  $\times$  3,7 m  $\times$  4,3 m. Mucha, siedząca początkowo w jednym z rogów pokoju, podrywa się do drugiego, po którym siada w rogu przeciwnym (po przekątnej pokoju). a) Ile wynosi długość jej przemieszczenia? b) Czy droga przebyta przez muchę w locie może być mniejsza od tej długości? c) Czy może być od niej większa? d) Czy może być jej równa? e) Wybierz wygodny układ współrzędnych i wyznacz składowe wektora przemieszczenia w tym układzie. f) Wyznacz najkrótszą drogę muchy między przeciwległymi rogami pokoju przy założeniu, że może ona tylko iść po ścianie, a nie może latać. Wskazówka: Znalazienie odpowiedzi nie wymaga rachunku różniczkowego. Pokój ma kształt prostopadłościennego pudła. Wykonaj jego siatkę na płaszczyźnie. www

### 3.5. Dodawanie wektorów na składowych

10. Samochód przebywa 50 km na wschód, następnie 30 km na północ, a potem 25 km w kierunku  $30^\circ$  na wschód od kierunku północnego. Narysuj odpowiednie wektory i wyznacz: a) długość, b) kierunek całkowitego przemieszczenia samochodu od początku jego jazdy.

11. Kobieta idzie 250 m w kierunku  $30^\circ$  na wschód od kierunku północnego, a potem 175 m prosto na wschód. Znajdź: a) długość, b) kierunek jej całkowitego przemieszczenia od początku spaceru. c) Wyznacz drogę przebytą przez kobietę. d) Co jest większe: ta droga czy długość wektora przemieszczenia?

12. Pewna osoba odbyła następujący marsz: 3,1 km na północ, potem 2,4 km na zachód, wreszcie 5,2 km na południe. a) Narysuj wektory ilustrujące ten marsz. Wyznacz: b) długość, c) kierunek lotu ptaka, który leciałby po linii prostej od punktu startowego do punktu końcowego tego marszu.

13. a) Oblicz sumę wektorów  $\vec{a} = (4 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{j}$  oraz  $\vec{b} = (-13 \text{ m})\hat{i} + (7 \text{ m})\hat{j}$ , wyrażając ją za pomocą wektorów jednostkowych. Wyznacz: b) długość wektora  $\vec{a} + \vec{b}$ , c) jego kierunek (w stosunku do  $\hat{i}$ ).

14. Znajdź składowe: a)  $x$ , b)  $y$ , c)  $z$  z sumy  $\vec{r}$  dwóch przemieszczeń  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$ , których składowe wzdłuż trzech osi wynoszą w metrach:  $c_x = 7,4$ ;  $c_y = -3,8$ ;  $c_z = -6,1$ ;  $d_x = 4,4$ ;  $d_y = -2,0$ ;  $d_z = 3,3$ .

22. Wektor  $\vec{C}$  jest sumą wektorów  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  ( $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ). Wektor  $\vec{A}$  ma długość 12 m i jest skierowany pod kątem  $40^\circ$  (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) względem kierunku  $+x$ , a wektor  $\vec{C}$  ma długość 15 m i jest skierowany pod kątem  $20^\circ$  (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) względem kierunku  $-x$ . Znajdź: a) długość wektora  $\vec{B}$ , b) kąt, jaki tworzy on z kierunkiem  $+x$ .

23. Udowodnij, że jeśli suma dwóch wektorów jest prostopadła do ich różnicy, to muszą one mieć jednakową długość.

24. Wyznacz sumę następujących czterech wektorów:  $\vec{P}$ : 10 m,  $25^\circ$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku  $+x$ ;  $\vec{Q}$ : 12 m,  $10^\circ$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku  $+y$ ;  $\vec{R}$ : 8 m,  $20^\circ$  zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara względem kierunku  $-y$ ;  $\vec{S}$ : 9 m,  $40^\circ$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku  $-y$ ; i wyraż ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) długości, c) kąta względem kierunku  $+x$ .

25. Dwa wektory, których długości wynoszą  $a$  i  $b$ , tworzą ze sobą kąt  $\theta$ , gdy ich początki znajdują się w jednym punkcie. Wyznaczając ich składowe w prostokątnym układzie współrzędnych udowodnij, że suma  $\vec{r}$  tych wektorów ma długość:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}.$$

26. Wyznacz sumę następujących czterech wektorów:  $\vec{A}$ :  $(2 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{j}$ ;  $\vec{B}$ : 4 m,  $+65^\circ$ ;  $\vec{C}$ :  $(-4 \text{ m})\hat{i} - (6 \text{ m})\hat{j}$ ;  $\vec{D}$ : 5 m,  $-235^\circ$  (dodatnia wartość kąta oznacza, że jest on mierzony względem dodatniego kierunku osi  $x$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemna — że jest mierzony zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) i wyraż ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) długości, c) kąta.

27. a) Korzystając z wektorów jednostkowych, wyraż cztery przekątne sześcianu (tzn. odcinki łączące dwa wierzchołki i przechodzące przez środek sześcianu) za pomocą jego krawędzi, mających długość  $a$ . b) Wyznacz kąty utworzone przez te przekątne z sąsiadującymi z nimi krawędziami sześcianu. c) Znajdź długość przekątnej w jednostkach  $a$ .

### 3.6. Wektory a prawa fizyki

28. W układzie współrzędnych  $xy$  wektor  $\vec{A}$  ma długość 12 m, a jego kierunek tworzy kąt  $60^\circ$  (mierzony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) z dodatnim kierunkiem osi  $x$ ; wektor  $\vec{B} = (12 \text{ m})\hat{i} + (8 \text{ m})\hat{j}$ . Dokonujemy obrotu układu współrzędnych wokół jego początku, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt  $20^\circ$  i oznaczamy otrzymany w ten sposób nowy układ przez  $x'y'$ . Wyznacz wektory: a)  $\vec{A}$ , b)  $\vec{B}$  w tym nowym układzie współrzędnych, wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych.

### 3.7. Mnożenie wektorów

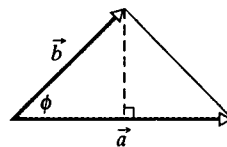
29. Wektor  $\vec{a}$  o długości 10 jednostek i wektor  $\vec{b}$  o długości 6 jednostek tworzą ze sobą kąt  $60^\circ$ . Ile wynosi: a) iloczyn skalarny tych wektorów, b) długość iloczynu wektorowego  $\vec{a} \times \vec{b}$ ?

30. Wyprowadź równanie (3.23) dla iloczynu skalarnego wektorów, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

31. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$ , oraz z tego, że  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$  (patrz zadanie 30), wyznacz kąt między wektorami  $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$  i  $\vec{b} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}$ . ilw www

32. Wyprowadź równanie (3.30) dla iloczynu wektorowego wektorów, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

33. Wykaż, że pole trójkąta, którego bokami są wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  oraz odcinek oznaczony na czerwono na rysunku 3.30, jest równe  $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ .



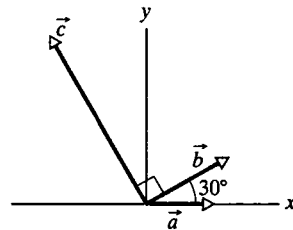
Rys. 3.30. Zadanie 33

34. W równaniu  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  przyjmij  $q = 2$ ,  $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$  i  $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}$ . Ile wynosi wektor  $\vec{B}$ , wyrażony przez wektory jednostkowe, jeśli  $B_x = B_y$ ?

35. a) Wykaż, że  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$  wynosi zero dla dowolnych wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . b) Ile wynosi długość wektora  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$ , jeśli kierunki wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  tworzą kąt  $\phi$ ?

36. Dane są trzy wektory:  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ,  $\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$  i  $\vec{C} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$ . Ile wynosi  $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$ ?

37. Trzy wektory, przedstawione na rysunku 3.31 mają długości:  $a = 3$  m,  $b = 4$  m i  $c = 10$  m. Wyznacz: a) składową  $x$ , b) składową  $y$  wektora  $a$ ; c) składową  $x$ , d) składową  $y$  wektora  $b$ ; e) składową  $x$ , f) składową  $y$  wektora  $c$ . Ile wynoszą wartości: g)  $p$ , h)  $q$ , jeśli  $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ ? ilw



Rys. 3.31. Zadanie 37

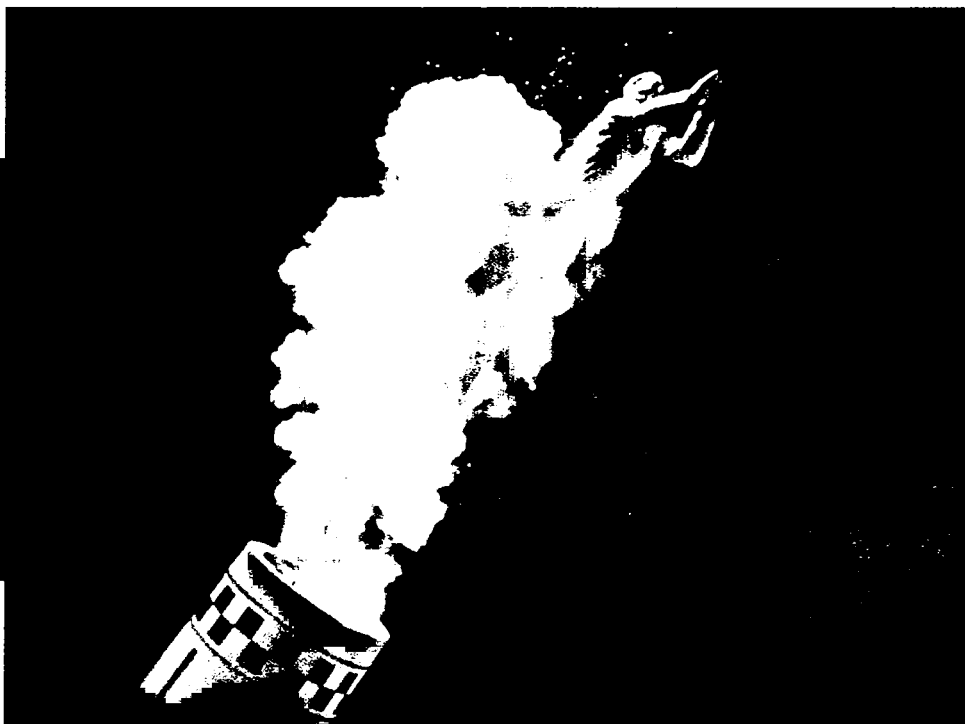
38. Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mają składowe (w metrach):  $a_x = 3,2$ ,  $a_y = 1,6$ ,  $b_x = 0,5$  i  $b_y = 4,5$ . a) Znajdź kąt między kierunkami wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Na płaszczyźnie  $xy$  można znaleźć dwa wektory, które są prostopadłe do wektora  $\vec{a}$  i mają długość równą 5 m. Jeden z nich  $\vec{c}$  ma dodatnią składową  $x$ , a drugi  $\vec{d}$  ma składową  $x$  ujemną. Wyznacz: b) składową  $x$ , c) składową  $y$  wektora  $c$ ; d) składową  $x$ , e) składową  $y$  wektora  $d$ .

# 4 Ruch w dwóch i trzech wymiarach

W 1922 roku, jeden z członków słynnej rodziny artystów cyrkowych Zacchini, jako pierwszy człowiek został pociskiem armatnim, wystrzelonym ponad areną, do sieci, umieszczonej na drugiej stronie. Dla zwiększenia efektu stopniowo powiększano wysokość i długość lotu, aż wreszcie w 1939 czy 1940 roku Emanuel Zacchini przeleciał nad trzema diabelskimi młynami i pokonał poziomą odległość  $\approx 9$  m.

Skąd Zacchini wiedział, gdzie należy umieścić sieć, i w jaki sposób upewnił się, że podczas lotu nie zaczepi o któryś z diabelskich młynów?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 4.1. Przechodzimy do dwóch lub trzech wymiarów

W tym rozdziale wykorzystamy z wiadomości, wprowadzonych w dwóch poprzednich rozdziałach, w celu omówienia ruchu w dwóch lub trzech wymiarach. Użyjemy wielu pojęć z rozdziału 2, takich jak położenie, prędkość i przyspieszenie, w sytuacji nieco bardziej złożonej przez istnienie dalszych wymiarów. Dla uproszczenia zapisu równań zastosujemy algebrę wektorową z rozdziału 3. Podczas lektury tego rozdziału zapewne czasem zajrzysz ponownie do rozdziałów poprzednich, aby sobie przypomnieć niektóre rzeczy.

## 4.2. Położenie i przemieszczenie

Do określenia położenia cząstki (lub innego ciała punkтового) stosujemy zwykle **wektor położenia**  $\vec{r}$  (nazywany także wektorem wodzącym), czyli wektor łączący punkt odniesienia (najczęściej początek układu współrzędnych) z punktem, w którym znajduje się cząstka. W zapisie z użyciem wektorów jednostkowych z paragrafu 3.4 wektor  $\vec{r}$  można wyrazić jako:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (4.1)$$

przy czym  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$  i  $z\hat{k}$  są wektorami składowymi wektora  $\vec{r}$  wzdłuż osi układu współrzędnych, a  $x$ ,  $y$  i  $z$  — składowymi tego wektora.

Współczynniki  $x$ ,  $y$  i  $z$  określają położenie cząstki, liczone wzdłuż osi układu współrzędnych, od początku tego układu, tzn. współrzędne cząstki w tym układzie wynoszą  $(x, y, z)$ . Na przykład, na rysunku 4.1 przedstawiono cząstkę o położeniu danym przez wektor:

$$\vec{r} = (-3 \text{ m})\hat{i} + (2 \text{ m})\hat{j} + (5 \text{ m})\hat{k},$$

a więc o współrzędnych  $(-3 \text{ m}, 2 \text{ m}, 5 \text{ m})$ . Licząc wzdłuż osi  $x$ , cząstka ta jest odległa od początku układu o  $3 \text{ m}$  w kierunku  $-\hat{i}$ , licząc wzdłuż osi  $y$  — o  $2 \text{ m}$  w kierunku  $\hat{j}$ , a licząc wzdłuż osi  $z$  — o  $5 \text{ m}$  w kierunku  $\hat{k}$ .

Gdy cząstka porusza się, wektor położenia zmienia się, tak aby zawsze łączył początek układu współrzędnych z punktem, w którym znajduje się cząstka. Jeśli w pewnym przedziale czasu wektor położenia zmienia się — powiedzmy — od  $\vec{r}_1$  do  $\vec{r}_2$ , to **przemieszczenie** cząstki w tym przedziale czasu wynosi:

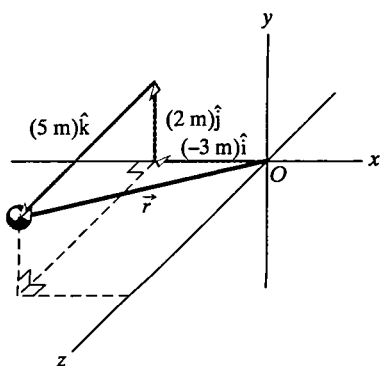
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4.2)$$

Możemy je zapisać za pomocą wektorów jednostkowych, jak w równaniu (4.1), co daje:

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}),$$

czyli

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \quad (4.3)$$



Rys. 4.1. Wektor położenia  $\vec{r}$  cząstki jest sumą jego wektorów składowych w kierunku osi układu współrzędnych

Przy czym współrzędne  $(x_1, y_1, z_1)$  odpowiadają wektorowi położenia  $\vec{r}_1$ , a współrzędne  $(x_2, y_2, z_2)$  — wektorowi położenia  $\vec{r}_2$ . Możemy to zapisać jeszcze inaczej, podstawiając  $\Delta x$  za  $(x_2 - x_1)$ ,  $\Delta y$  za  $(y_2 - y_1)$  oraz  $\Delta z$  za  $(z_2 - z_1)$ , co daje:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}. \quad (4.4)$$

## Przykład 4.1

Wektor położenia pewnej cząstki, pokazanej na rysunku 4.2, wynosi w chwili początkowej:

$$\vec{r}_1 = (-3 \text{ m})\hat{i} + (2 \text{ m})\hat{j} + (5 \text{ m})\hat{k}.$$

A w pewnej chwili późniejszej:

$$\vec{r}_2 = (9 \text{ m})\hat{i} + (2 \text{ m})\hat{j} + (8 \text{ m})\hat{k}.$$

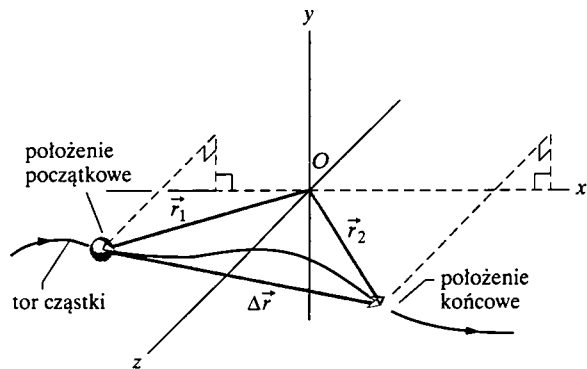
Oblicz przemieszczenie cząstki  $\Delta \vec{r}$  od  $\vec{r}_1$  do  $\vec{r}_2$ .

**ROZWIĄZANIE:**

Przemieszczenie  $\Delta \vec{r}$  otrzymujemy, odejmując wektor położenia  $\vec{r}_1$  w chwili początkowej, od wektora położenia  $\vec{r}_2$  w chwili końcowej. Najłatwiej zrobić to na składowych wektorów:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= [9 \text{ m} - (-3 \text{ m})]\hat{i} + [2 \text{ m} - 2 \text{ m}]\hat{j} + [8 \text{ m} - 5 \text{ m}]\hat{k} \\ &= (12 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wektor przemieszczenia jest równoległy do płaszczyzny  $xz$ . Zauważ jego składową  $y$  wynosi zero, co łatwiej wywnioskować z obliczeń niż z rysunku.



Rys. 4.2. Przykład 4.1. Przemieszczenie  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  cząstki jest wektorem prowadzącym od końca początkowego wektora położenia  $\vec{r}_1$  do końca końcowego wektora położenia  $\vec{r}_2$

**SPRAWDZIAN 1:** Nietoperz przeleciał z punktu o współrzędnych  $xyz$   $(-2 \text{ m}, 4 \text{ m}, -3 \text{ m})$  do punktu  $(6 \text{ m}, -2 \text{ m}, -3 \text{ m})$ . a) Podaj jego przemieszczenie wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych. b) Czy wektor  $\Delta \vec{r}$  jest równoległy do którejś z płaszczyzn układu współrzędnych? Jeśli tak, to do której?

## Przykład 4.2

Na parkingu wymalowano — co słusznie może ci się wydać dziwnie — układ osi współrzędnych. Po tym parkingu biegnie królik. Współrzędne położenia królika zależą od czasu  $t$  zgodnie z wzorami:

$$x = -0,31t^2 + 7,2t + 28 \quad (4.5)$$

$$y = 0,22t^2 - 9,1t + 30, \quad (4.6)$$

gdzie  $t$  wyrażono w sekundach, a  $x$  i  $y$  w metrach.

Znajdź wektor położenia  $\vec{r}$  królika w chwili  $t = 15 \text{ s}$ ; wyraż go za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jego długość i kierunek.

**ROZWIĄZANIE:**

Współrzędne  $x$  i  $y$  położenia królika, dane wzorami (4.5) i (4.6), są składowymi jego wektora położenia  $\vec{r}$ . Możemy więc zapisać, że:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (4.7)$$

(wektor położenia zapisaliśmy jako  $\vec{r}(t)$ , a nie  $\vec{r}$ , ponieważ jego składowe, a więc i sam wektor, są funkcjami  $t$ ).

W chwili  $t = 15 \text{ s}$  składowe wynoszą:

$$x = (-0,31)(15)^2 + (7,2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

$$y = (0,22)(15)^2 - (9,1)(15) + 30 = -57 \text{ m}.$$

Tak więc w chwili  $t = 15 \text{ s}$ ,

$$\vec{r} = (66 \text{ m})\hat{i} - (57 \text{ m})\hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

jak pokazano na rysunku 4.3a.

Aby wyznaczyć długość i kierunek wektora  $\vec{r}$ , możemy skorzystać z równania (3.6), co daje:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2} = 87 \text{ m} \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \left( \frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}} \right) = -41^\circ \quad (\text{odpowiedź})$$

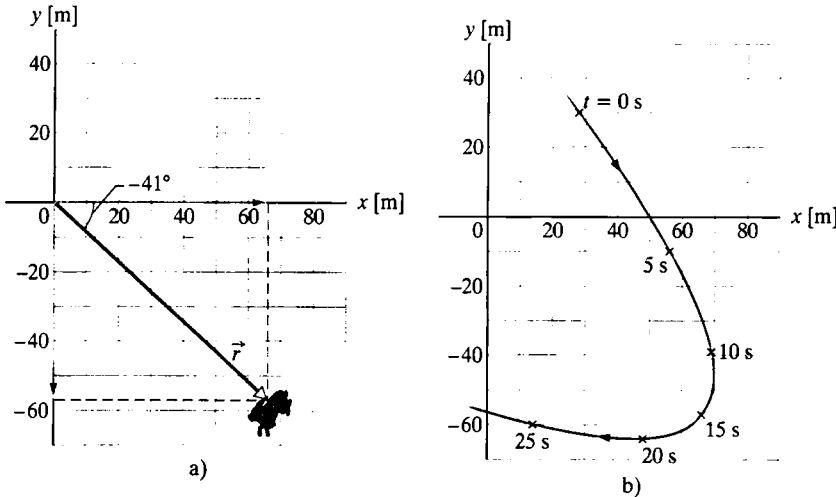
(tangens kąta  $\theta = 139^\circ$  jest taki sam, jak tangens kąta  $-41^\circ$ , lecz analiza znaków składowych wektora  $\vec{r}$  wykazuje, że kąt  $139^\circ$  nie spełnia warunków zadania).

b) Wykreśl tor królika od  $t = 0$  do  $t = 25$  s.

**ROZWIĄZANIE:**

Powtarzamy obliczenia z punktu (a) dla kilku wartości  $t$ , po czym odkładamy otrzymane wartości na wykresie. Na rysunku 4.3b

pokazano punkty, odpowiadające pięciu wartościom  $t$  i łączącą je linię. W celu sporządzenia tego wykresu, nazywanego *wykresem parametrycznym*, możesz także skorzystać z komputera, polecając mu sporządzenie wykresu  $y$  jako funkcji  $x$  przy założeniu, że wartości tych współrzędnych zależą od czasu  $t$  zgodnie z wzorami (4.5) i (4.6).



Rys. 4.3. Przykład 4.2. a) Wektor położenia  $\vec{r}$  królika w chwili  $t = 15$  s. Składowe tego wektora zaznaczono na osiach układu współrzędnych. b) Tor królika i jego położenie dla pięciu wartości  $t$

### 4.3. Prędkość średnia i prędkość chwilowa

Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  cząstka doznała przemieszczenia  $\Delta \vec{r}$ , to jej **prędkość średnia**  $\vec{v}_{sr}$  jest równa:

$$\text{prędkość średnia} = \frac{\text{przemieszczenie}}{\text{przedział czasu}}$$

czyli

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{4.8}$$

Z równania tego wynika, że kierunek  $\vec{v}_{sr}$  (wektora stojącego po lewej stronie równania (4.8)) jest taki sam, jak kierunek przemieszczenia  $\Delta \vec{r}$  (wektora stojącego po prawej stronie tego równania). Korzystając z równania (4.4), możemy zapisać równanie (4.8) za pomocą wektorów składowych jako:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \tag{4.9}$$

Na przykład, jeśli cząstka z przykładu 4.1 przemieszcza się od położenia początkowego do końcowego w czasie 2 s, to jej prędkość średnia w tym przedziale czasu wynosi:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{k}}{2 \text{ s}} = (6 \text{ m/s})\hat{i} + (1.5 \text{ m/s})\hat{k}$$

Mówiąc o **prędkości** cząstki, mamy zwykle na myśli jej **prędkość chwilową**  $\vec{v}$  w pewnej chwili. Wartość tę otrzymujemy jako wartość graniczną  $\vec{v}_{sr}$ , gdy prze-



dział czasu  $\Delta t$  zmierza do zera wokół tej chwili. Korzystając z pojęć rachunku różniczkowego, możemy zapisać  $\vec{v}$  jako pochodną:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.10)$$

Na rysunku 4.4 przedstawiono tor cząstki, poruszającej się w płaszczyźnie  $xy$ . Gdy cząstka porusza się po tym torze w prawą stronę, jej wektor położenia obraca się w prawo. W przedziale czasu  $\Delta t$  wektor położenia zmienia wartość z  $\vec{r}_1$  na  $\vec{r}_2$ , a przemieszczenie cząstki wynosi  $\Delta\vec{r}$ .

Aby znaleźć prędkość chwilową cząstki w chwili — dajmy na to —  $t_1$  (tzn. gdy cząstka zajmuje położenie 1), zmniejszamy przedział  $\Delta t$  wokół  $t_1$  do zera. Wówczas: 1) wektor położenia  $\vec{r}_2$  na rysunku 4.4 dąży do  $\vec{r}_1$ , tak że  $\Delta\vec{r}$  dąży do zera; 2) kierunek  $\Delta\vec{r}/\Delta t$  (a więc i kierunek  $\vec{v}_{sr}$ ) zmierza do kierunku stycznej do toru cząstki w punkcie 1; 3) prędkość średnia  $\vec{v}_{sr}$  dąży do prędkości chwilowej  $\vec{v}$  w chwili  $t_1$ .

W granicy, gdy  $\Delta t \rightarrow 0$ , mamy więc  $\vec{v}_{sr} \rightarrow \vec{v}$ , a także — co jest tu najważniejsze —  $\vec{v}_{sr}$  przyjmuje kierunek stycznej do toru. Jest to więc kierunek prędkości chwilowej  $\vec{v}$ :

➤ Kierunek prędkości chwilowej  $\vec{v}$  cząstki jest zgodny z kierunkiem stycznej do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje.

☞ Tak samo jest w przestrzeni trójwymiarowej: wektor  $\vec{v}$  jest zawsze styczny do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje.

Zapiszmy równanie (4.10) za pomocą wektorów jednostkowych, biorąc  $\vec{r}$  z równania (4.1). Otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

Równanie to można zapisać w nieco prostszej postaci:

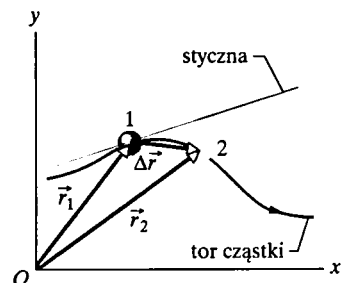
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (4.11)$$

wprowadzając składowe prędkości  $\vec{v}$ :

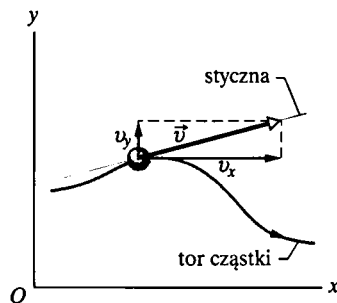
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{oraz} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (4.12)$$

Na przykład,  $dx/dt$  jest składową wektora  $\vec{v}$  wzdłuż osi  $x$ . Składowe wektora  $\vec{v}$  otrzymujemy, różniczkując po czasie składowe wektora  $\vec{r}$ .

Na rysunku 4.5 przedstawiono wektor prędkości  $\vec{v}$  oraz jego składowe  $x$  i  $y$ . Zauważ, że wektor  $\vec{v}$  jest styczny do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje. Uwaga: gdy na rysunkach 4.1–4.4 zaznaczaliśmy wektor położenia, był on odcinkiem ze strzałką, zaczynającym się w pewnym punkcie (jakimś „stąd”), a kończącym się w innym punkcie (jakimś „dotąd”). Gdy natomiast rysujemy wektor prędkości, jak na rysunku 4.5, to nie prowadzi on z jednego punktu do drugiego. Pokazuje on chwilowy kierunek ruchu cząstki, której położenie jest początkiem wektora; długość wektora prędkości (równa wartości bezwzględnej prędkości) może być narysowana w dowolnej skali.

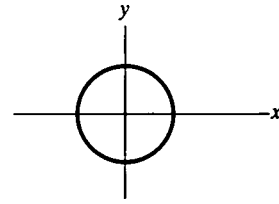


Rys. 4.4. Przesunięcie  $\Delta\vec{r}$  cząstki w przedziale czasu  $\Delta t$ . W chwili początkowej  $t_1$  cząstka znajduje się w punkcie 1, o wektorze położenia  $\vec{r}_1$ , a w chwili końcowej  $t_2$  — w punkcie 2, o wektorze położenia  $\vec{r}_2$ . Pokazano styczną do toru cząstki w punkcie 1



Rys. 4.5. Prędkość  $\vec{v}$  cząstki i jej składowe wzdłuż kierunków osi

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono kołowy tor cząstki. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się cząstka w chwili, gdy jej prędkość chwilowa wynosi  $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} - (2 \text{ m/s})\hat{j}$ , jeśli porusza się ona po tym okręgu w kierunku: a) zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, b) przeciwnym do ruchu wskazówek zegara? Zaznacz wektor  $\vec{v}$  na rysunku w tych dwóch przypadkach.



### Przykład 4.3

Znajdź prędkość  $\vec{v}$  królika z przykładu 4.2 w chwili  $t = 15 \text{ s}$  i wyraż ją za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jej długość i kierunek.

**ROZWIĄZANIE:** Zauważ, że:

➔ 1. Aby znaleźć prędkość  $\vec{v}$  królika możemy najpierw wyznaczyć jej składowe;

➔ 2. Składowe te możemy otrzymać, różniczkując składowe wektora położenia królika. Podstawiając równanie (4.5) do pierwszego z równań (4.12), znajdujemy składową  $x$  wektora  $\vec{v}$ , równą:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,31t^2 + 7,2t + 28) = -0,62t + 7,2. \quad (4.13)$$

W chwili  $t = 15 \text{ s}$  wynosi ona  $v_x = -2,1 \text{ m/s}$ . Analogicznie, podstawiając (4.6) do drugiego z równań (4.12), otrzymujemy składową  $y$  równą:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0,22t^2 - 9,1t + 30) = 0,44t - 9,1. \quad (4.14)$$

W chwili  $t = 15 \text{ s}$  mamy  $v_y = -2,5 \text{ m/s}$ . Z równania (4.11) otrzymujemy zatem:

$$\vec{v} = -(2,1 \text{ m/s})\hat{i} - (2,5 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wektor ten pokazano na rysunku 4.6 — jest on styczny do toru królika i skierowany w kierunku jego biegu w chwili  $t = 15 \text{ s}$ .

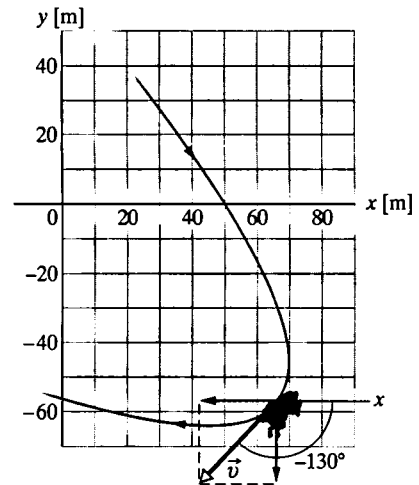
Aby wyznaczyć długość i kierunek tego wektora, skorzystamy z równania (3.6), co daje:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2,1 \text{ m/s})^2 + (-2,5 \text{ m/s})^2} = 3,3 \text{ m/s} \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz

$$\theta = \arctg \frac{v_y}{v_x} = \arctg \left( \frac{-2,5 \text{ m/s}}{-2,1 \text{ m/s}} \right) = \arctg 1,19 = -130^\circ \quad (\text{odpowiedź})$$

(tangens kąta  $50^\circ$  jest taki sam, jak tangens kąta  $-130^\circ$ , lecz znaki składowych prędkości świadczą o tym, że szukany kąt ma ramię w trzeciej ćwiartce, a więc warunki zadania spełnia wynik  $50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$ ).



Rys. 4.6. Przykład 4.3. Prędkość  $\vec{v}$  królika w chwili  $t = 15 \text{ s}$ . Wektor prędkości jest styczny do toru królika w punkcie, w którym znajduje się on w tej chwili. Pokazano także składowe wektora  $\vec{v}$

## 4.4. Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe

Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  prędkość cząstki zmienia się z  $\vec{v}_1$  na  $\vec{v}_2$ , to jej przyspieszenie średnie  $\vec{a}_{sr}$  w tym przedziale jest równe:

$$\text{przyspieszenie średnie} = \frac{\text{zmiana prędkości}}{\text{przedział czasu}},$$

czyli

$$\vec{a}_{\text{sr}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.15)$$

Jeśli zwięźamy przedział czasu  $\Delta t$  do zera wokół pewnej chwili, to przyspieszenie średnie  $\vec{a}_{\text{sr}}$  dąży w granicy do przyspieszenia chwilowego (czyli po prostu przyspieszenia)  $\vec{a}$  w tej chwili, tzn.:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.16)$$

Jeśli zmienia się wartość prędkości lub jej kierunek (lub obie te wielkości naraz), to cząstka doznaje przyspieszenia.

Równanie (4.16) możemy zapisać za pomocą wektorów jednostkowych, podstawiając do niego  $\vec{v}$  z równania (4.11), co daje:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}.$$

Możemy je też przedstawić w postaci:

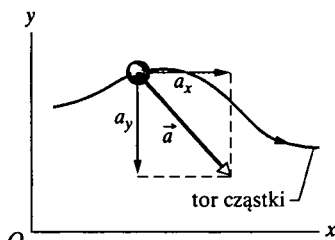
$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (4.17)$$

wprowadzając składowe przyspieszenia  $\vec{a}$ :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{oraz} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4.18)$$

Składowe przyspieszenia  $\vec{a}$  są pochodnymi składowych prędkości  $\vec{v}$ .

Na rysunku 4.7 pokazano wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  i jego składowe dla cząstki, poruszającej się w dwóch wymiarach. *Uwaga:* wektor przyspieszenia, np. ten z rysunku 4.7, nie łączy dwóch położenia cząstki. Pokazuje on kierunek przyspieszenia cząstki, której położenie stanowi jego początek; długość wektora przyspieszenia (równa wartości bezwzględnej przyspieszenia) może być narysowana w dowolnej skali.



Rys. 4.7. Wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  cząstki i jego składowe

## Przykład 4.4

Znajdź przyspieszenie  $\vec{a}$  królika z przykładów 4.2 i 4.3 w chwili  $t = 15$  s; wyraż je za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jego długość i kierunek.

**ROZWIĄZANIE:**

Zauważ, że:

1. Aby znaleźć przyspieszenie  $\vec{a}$  królika, wyznaczmy najpierw jego składowe.

2. Składowe te możemy otrzymać, różniczkując składowe prędkości królika. Podstawiając równanie (4.13) do pierwszego z równań (4.18), znajdujemy składową  $x$  wektora  $\vec{a}$  równą:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,62t + 7,2) = -0,62 \text{ m/s}^2.$$

Analogicznie, podstawiając (4.14) do drugiego z równań (4.12), otrzymujemy składową  $y$  równą:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0,44t - 9,1) = 0,44 \text{ m/s}^2.$$

Jak widać, przyspieszenie nie zależy od czasu (jest stałe), gdyż zmienna  $t$  nie występuje w wyrażeniu na żadną ze składowych przyspieszenia. Z równania (4.17) otrzymujemy:

$$\vec{a} = (-0,62 \text{ m/s}^2) \hat{i} + (0,44 \text{ m/s}^2) \hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

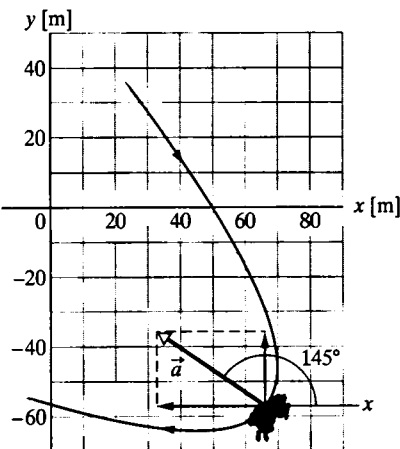
Wektor ten wraz z torem królika przedstawiono na rysunku 4.8.

Aby wyznaczyć długość i kierunek tego wektora, skorzystamy z równania (3.6). Otrzymujemy długość równą:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0,62 \text{ m/s}^2)^2 + (0,44 \text{ m/s}^2)^2} = 0,76 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wartość kąta wyznaczającego kierunek wektora przyspieszenia:

$$\theta = \arctg \frac{a_y}{a_x} = \arctg \left( \frac{0,44 \text{ m/s}^2}{-0,62 \text{ m/s}^2} \right) = -35^\circ,$$



Rys. 4.8. Przykład 4.4. Przyspieszenie  $\vec{a}$  królika w chwili  $t = 15 \text{ s}$ . W naszym przykładzie przyspieszenie to jest stałe, a więc jednakowe we wszystkich punktach toru królika

otrzymana za pomocą kalkulatora wskazuje na to, że wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  jest skierowany w prawo i w dół na rysunku 4.8. Jednak wiemy, że wartości otrzymanych wcześniej składowych tego wektora, że musi on być skierowany w lewo i do góry. Musimy więc znaleźć inny kąt, którego tangens wynosi tyle samo co tangens kąta  $-35^\circ$ . Jest to kąt:

$$-35^\circ + 180^\circ = 145^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta wartość jest zgodna z wartościami składowych  $\vec{a}$ . Zauważ, że wektor  $\vec{a}$  ma taką samą długość i taki sam kierunek w każdym punkcie toru królika, ponieważ — jak stwierdziliśmy nieco wcześniej — przyspieszenie ruchu królika jest stałe.

**SPRAWDZIAN 3:** Niżej podano równania, opisujące położenie krążka hokejowego w płaszczyźnie  $xy$  (w metrach), jako funkcję czasu dla czterech różnych przypadków jego ruchu:

1)  $x = -3t^2 + 4t - 2, y = 6t^2 - 4t;$

2)  $x = -3t^3 - 4t, y = -5t^2 + 6;$

3)  $\vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j};$

4)  $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}.$

Sprawdź dla każdego z przypadków, czy składowe  $x$  i  $y$  przyspieszenia krążka są stałe i czy stałe jest przyspieszenie  $\vec{a}$ .

## Przykład 4.5

Cząstka o prędkości  $\vec{v}_0 = -2\hat{i} + 4\hat{j}$  (w metrach na sekundę) doznaje w chwili  $t = 0$  stałego przyspieszenia  $\vec{a}$ , którego wartość wynosi  $a = 3 \text{ m/s}^2$ , a kierunek tworzy kąt  $\theta = 130^\circ$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . Wyznacz prędkość  $\vec{v}$  cząstki w chwili  $t = 5 \text{ s}$ ; wyraż ją za pomocą wektorów jednostkowych oraz podając jej długość i kierunek.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ przede wszystkim, że ruch jest dwuwymiarowy i zachodzi w płaszczyźnie  $xy$ . Zauważ ponadto, że:

➡ 1. Przyspieszenie jest stałe, a więc obowiązuje wzór (2.11), tzn.  $v = v_0 + at$ .

➡ 2. Ponieważ wzór (2.11) odnosi się jedynie do ruchu prostoliniowego, więc musimy go zastosować osobno do składowej ruchu równoległej do osi  $x$  i składowej równoległej do osi  $y$ . Oznacza to, że składowe prędkości  $v_x$  i  $v_y$  są dane wzorami:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{oraz} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Wielkości  $v_{0x}$  ( $= -2 \text{ m/s}$ ) i  $v_{0y}$  ( $= 4 \text{ m/s}$ ) są składowymi  $x$  i  $y$  wektora  $\vec{v}_0$ , a wielkości  $a_x$  i  $a_y$  — składowymi  $x$  i  $y$  wektora  $\vec{a}$ . Aby znaleźć  $a_x$  i  $a_y$ , rozkładamy  $\vec{a}$  na składowe, korzystając z równań (3.5), co daje:

$$a_x = a \cos \theta = (3 \text{ m/s})(\cos 130^\circ) = -1,93 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = a \sin \theta = (3 \text{ m/s})(\sin 130^\circ) = +2,3 \text{ m/s}^2.$$

Wstawiając te wartości do równań na  $v_x$  i  $v_y$  i obliczając te składowe w chwili  $t = 5 \text{ s}$ , otrzymujemy:

$$v_x = -2 \text{ m/s} + (-1,93 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -11,65 \text{ m/s},$$

$$v_y = 4 \text{ m/s} + (2,3 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = 15,5 \text{ m/s}.$$

W chwili  $t = 5 \text{ s}$  mamy więc (po zaokrągleniu):

$$\vec{v} = (-12 \text{ m/s})\hat{i} + (16 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Korzystając z równania (3.6), obliczamy długość i kierunek wektora  $\vec{v}$  jako:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19,4 \approx 19 \text{ m/s} \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz

$$\theta = \arctg \frac{v_y}{v_x} = 127^\circ \approx 130^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Sprawdź ostatnią linię obliczeń za pomocą kalkulatora. Czy na wyświetlaczu otrzymujesz wartość  $127^\circ$ , czy  $-53^\circ$ ? Narysuj wektor  $\vec{v}$  i jego składowe aby zdecydować, która wartość kąta spełnia warunki zadania.

**SPRAWDZIAN 4:** Położenie kulki jest dane wzorem  $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$ , przy czym  $\vec{r}$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach. W jakich jednostkach wyrażone są współczynniki 4,  $-2$  i 3?

# 4.5. Rzut ukośny

Rozważmy obecnie ważny przypadek szczególny ruchu w dwóch wymiarach. Polega on na tym, że cząstka porusza się w płaszczyźnie pionowej z pewną prędkością początkową  $v_0$  oraz z przyspieszeniem ziemskim  $\vec{g}$ , skierowanym zawsze pionowo w dół. Taki ruch nazywamy **rzutem ukośnym**. Może to być lot piłki golfowej, jak na rysunku 4.9, lub baseballowej, ale nie samolotu czy kaczkę, których lot nie jest swobodny. Opiszemy rzut ukośny, korzystając z pojęć omówionych w paragrafach 4.2–4.4 i zakładając, że opór powietrza nie ma wpływu na ruch cząstki.

Na rysunku 4.10, który omówimy szczegółowo w następnym paragrafie, przedstawiono tor cząstki (pocisku) w warunkach, gdy pomijamy opór powietrza. Pocisk wyrzucono z prędkością początkową  $\vec{v}_0$ , którą możemy zapisać jako:

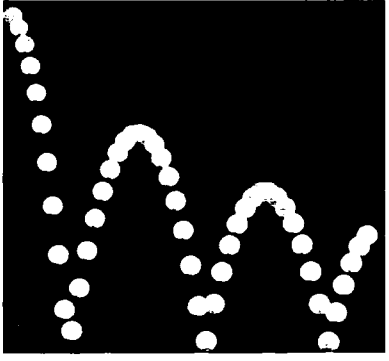
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \tag{4.19}$$

Składowe  $v_{0x}$  i  $v_{0y}$  możemy wyznaczyć, jeśli znamy kąt  $\theta_0$ , utworzony przez  $\vec{v}_0$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ , co daje:

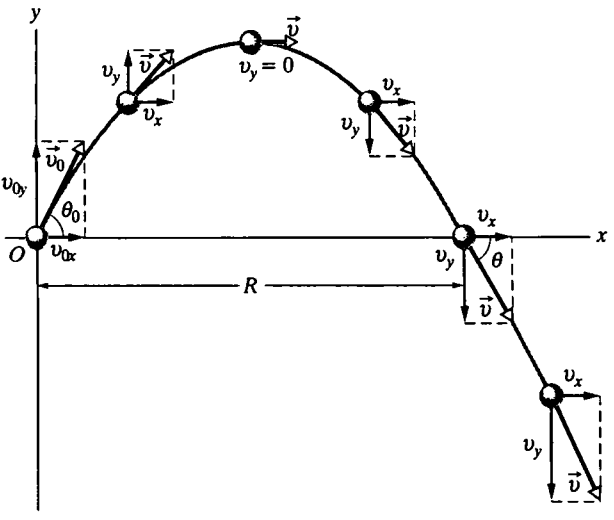
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{oraz} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \tag{4.20}$$

Podczas tego ruchu w dwóch wymiarach wektor położenia  $\vec{r}$  cząstki i wektor jej prędkości  $\vec{v}$  zmieniają się w sposób ciągły, lecz wektor jej przyspieszenia  $\vec{a}$  jest stały i zawsze skierowany pionowo w dół. Cząstka *nie doznaje* żadnego przyspieszenia w kierunku poziomym.

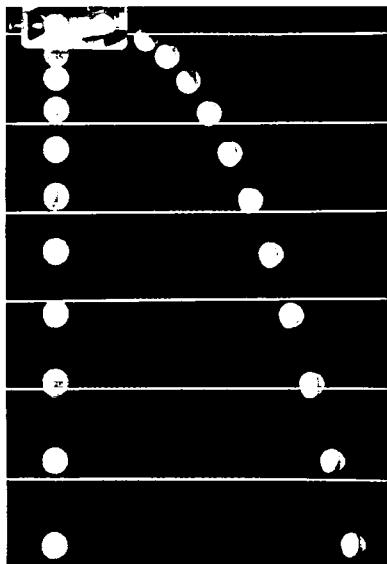
Rzut ukośny cząstki, taki jak przedstawione na rysunkach 4.9 i 4.10, może się wydawać nieco złożony, lecz jego opis można znacznie uprościć, korzystając ze znanej z doświadczenia właściwości.



Rys. 4.9. Zdjęcie stroboskopowe pomarańczowej piłki golfowej, odbijającej się od twardego podłoża. Ruch piłki między odbiciami jest rzutem ukośnym



Rys. 4.10. Tor pocisku wyrzelnego z punktu o współrzędnych  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 0$ , z prędkością początkową  $\vec{v}_0$ . Na rysunku pokazano wektor prędkości początkowej i wektory prędkości cząstki w różnych punktach jej toru oraz składowe tych wektorów. Należy zauważyć, że składowa pozioma prędkości pozostaje stała, a jej składowa pionowa zmienia się w sposób ciągły. Zasięg rzutu  $R$  jest to droga, którą przebywa cząstka w poziomie do chwili jej powrotu na wysokość, z której została wyrzucona



Rys. 4.11. Jedna piłka zostaje upuszczona w tej samej chwili, w której druga zostaje wystrzelona poziomo w prawą stronę. Ich ruch w pionie jest taki sam

➤ W rzucie ukośnym ruchy cząstki w kierunku poziomym i w kierunku pionowym można traktować jako niezależne — żaden z nich nie ma wpływu na drugi.

Dzięki tej właściwości zagadnienie ruchu w dwóch wymiarach można rozbić na dwa prostsze zagadnienia jednowymiarowe: ruch cząstki w kierunku poziomym (w którym *przyspieszenie wynosi zero*) oraz jej ruch w kierunku pionowym (ze *stałym przyspieszeniem skierowanym w dół*). Oto dwa doświadczenia świadczące o tym, że ruchy cząstki w kierunku poziomym i pionowym są niezależne

### Dwie piłki golfowe

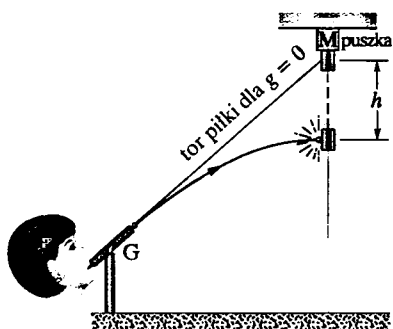
Na rysunku 4.11 przedstawione zostało zdjęcie stroboskopowe dwóch piłek golfowych, z których jedna została po prostu upuszczona, a druga — wystrzelona poziomo za pomocą sprężyny. Ruch w pionie obydwu piłek jest taki sam, tzn. obie przebywają takie same drogi w jednakowych odstępach czasu. *To, że jedna z nich oprócz tego, że spada, porusza się w poziomie, nie wpływa w żaden sposób na jej ruch w pionie.* Oznacza to, że jej ruchy w pionie i w poziomie są od siebie niezależne.

### Doświadczenie, które zawsze zachwyca studentów

Na rysunku 4.12 przedstawiono doświadczenie, które było już ozdobą wielu wykładowców. Wykonuje się je w ten sposób, że z armatki pneumatycznej  $G$  zostaje wystrzelona piłeczka. Celem jest puszką podwieszoną za pomocą magnesu  $M$ , przy czym armatka jest wycelowana wprost w puszkę. Doświadczenie przeprowadzone jest w taki sposób, że magnes zwalnia puszkę w chwili, gdy piłka opuszcza lufę armatki.

Gdyby przyspieszenie ziemskie  $g$  było równe zero, torem piłki na rysunku 2.12 byłaby linia prosta, a puszką, po uwolnieniu jej przez magnes, lewitowałaby ciągle w tym samym położeniu. Jednym słowem, piłka z pewnością trafiłaby w puszkę.

Jednak  $g$  *nie jest* równe zero, a mimo to piłka *i tak* trafia w puszkę! Jak widać z rysunku 4.12, w czasie lotu piłki zarówno piłka, jak i puszką tracą taką samą wysokość  $h$  w stosunku do ich położenia końcowych pod nieobecność przyciągania ziemskiego. Im silniej dmuchamy w armatkę, tym większą prędkość początkową nadajemy piłce. Lot trwa wtedy krócej i wartość  $h$  jest mniejsza.



Rys. 4.12. Piłeczka wystrzelona z armatki pneumatycznej zawsze trafia w spadającą puszkę. Piłka i puszką tracą taką samą wysokość  $h$  w stosunku do ich położenia końcowych pod nieobecność przyciągania ziemskiego

## 4.6. Analiza rzutu ukośnego

Teraz jesteś już przygotowany do szczegółowej analizy rzutu ukośnego, tzn. opisanie ruchu pocisku w pionie i w poziomie.

### Ruch w poziomie

Ruch w kierunku poziomym odbywa się *bez przyspieszenia*, dlatego też składowa pozioma prędkości pocisku nie ulega zmianie w czasie ruchu i pozostaje równa

swej wartości początkowej  $v_{0x}$ . Pokazano to np. na rysunku 4.13. Przemieszczenie cząstki w poziomie od jej położenia początkowego  $x_0$ ,  $x - x_0$ , jest dane wzorem (2.15), w którym należy przyjąć  $a = 0$ , czyli jest równe w chwili  $t$ :

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Ponieważ  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ , więc:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4.21)$$

## Ruch w pionie

Ruch pocisku w pionie jest taki sam, jak ruch ciała w rzucie pionowym, który omówiliśmy już w paragrafie 2.8. Najważniejsze jest to, że przyspieszenie jest stałe. Wobec tego możemy zastosować wzory z tabeli 2.1 pod warunkiem, że w miejsce  $a$  podstawimy  $-g$  i zamienimy współrzędną  $x$  na  $y$ . Na przykład, z równania (2.15) otrzymujemy:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4.22)$$

przy czym wartość początkową poziomej składowej prędkości  $v_{0y}$  zapisaliśmy w postaci  $v_0 \sin \theta_0$ . Podobnie z równań (2.11) i (2.16) otrzymujemy:

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (4.23)$$

i

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4.24)$$

Jak widać z rysunku 4.10 oraz z równania (4.23) składowa pionowa prędkości jest dokładnie taka sama, jak dla piłki rzuconej pionowo w górę. Na początku ruchu jest ona skierowana do góry, a potem jej wartość maleje stopniowo do zera, i jest równa zero w chwili, w której cząstka ma największą wysokość. Następnie kierunek składowej pionowej prędkości zmienia się na przeciwny, a jej wartość rośnie wraz z upływem czasu.

## Równanie toru

Równanie toru cząstki można wyznaczyć, eliminując  $t$  z równań (4.21) i (4.22). Wyznaczając  $t$  z równania (4.21) i podstawiając je do równania (4.22), otrzymujemy po drobnych przekształceniach:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad (\text{równanie toru}). \quad (4.25)$$

Jest to równanie toru, przedstawione na rysunku 4.10. Przy jego wyprowadzeniu przyjęliśmy dla prostoty  $x_0 = 0$  w równaniu (4.21) oraz  $y_0 = 0$  w równaniu (4.22). Wielkości  $g$ ,  $\theta_0$  i  $v_0$  są stałe, dlatego też równanie (4.25) ma postać  $y = ax + bx^2$ , przy czym  $a$  i  $b$  są stałymi. Jest to równanie paraboli, tzn. tor pocisku jest *paraboliczny*.

## Zasięg rzutu

Zasięgiem poziomym  $R$  pocisku jest, jak pokazano na rysunku 4.10, odległość, którą przebyła cząstka w poziomie, do chwili jej powrotu na wysokość początkową



Rys. 4.13. Gdy chłopak jadący na deskorolce wykonuje skok, zmienia się składowa pionowa jego prędkości, lecz składowa pozioma nie ulega zmianie. Składowa pozioma pozostaje równa prędkości deskorolki, dzięki czemu skoczek jest przez cały czas nad deskorolką, a więc może na niej wylądować po skoku

(tzn. tę, z której została wyrzucona). Aby wyznaczyć zasięg  $R$  wstawmy  $x - x_0 = R$  w równaniu (4.21) oraz  $y - y_0 = 0$  w równaniu (4.22), co daje:

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

oraz

$$0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminując z tych równań  $t$ , otrzymujemy:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznej  $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$  (patrz dane E), otrzymujemy:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4.26)$$

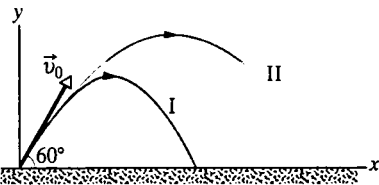
*Uwaga:* z równania tego *nie otrzymamy* odległości przebytej przez ciało w poziomie, jeśli położenie końcowe ciała nie znajduje się na tej samej wysokości co punkt jego wyrzelenia.

Warto zauważyć, że  $R$  w równaniu (4.26) osiąga największą wartość, gdy  $\sin 2\theta_0 = 1$ , co oznacza, że  $2\theta_0 = 90^\circ$ , czyli  $\theta_0 = 45^\circ$ .

➤ Zasięg  $R$  pocisku w poziomie jest największy, gdy pocisk zostaje wyrzuty pod kątem  $45^\circ$ .

## Opór powietrza

Dotychczas zakładaliśmy, że powietrze, w którym porusza się wyrzuty pocisk nie ma żadnego wpływu na jego ruch. Jednak w wielu przypadkach nasze obliczeń mogą dawać znaczne odstępstwa od rzeczywistych parametrów ruchu pocisku, gdyż powietrze stawia opór poruszającemu się w nim ciału. Na rysunku 4.14 pokazano, w charakterze przykładu, tory dwóch wysoko wyrzuty piłek baseballowych, o prędkości początkowej równej  $44,7 \text{ m/s}$  i kącie utworzonym przez tę prędkość z poziomem, równym  $60^\circ$ . Tor I („wysoka piłka” granej w baseball), to tor obliczony dla typowych warunków gry, tzn. w powietrzu. Tor II („wysoka piłka” profesora fizyki), to tor piłki w próżni.



Rys. 4.14. I) Tor „wysokiej piłki”, obliczony z uwzględnieniem oporu powietrza. II) Tor piłki w próżni, tzn. obliczony przy zastosowaniu metod przedstawionych w tym rozdziale. Dane liczbowe zebrano w tabeli 4.1 (na podstawie artykułu Petera J. Brancazio „The Trajectory of a Fly Ball”, *The Physics Teacher*, styczeń 1985)

Tabela 4.1. Dwie „wysokie piłki”<sup>1</sup>

	Tor I (w powietrzu)	Tor II (w próżni)
zasięg	98,5 m	177 m
największa wysokość	53 m	76,8 m
czas lotu	6,6 s	7,9 s

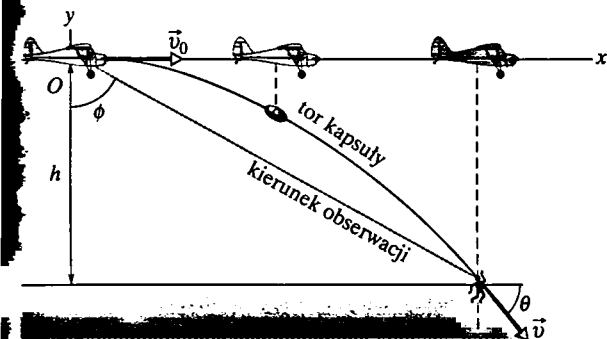
<sup>1</sup> Patrz rysunek 4.14. Prędkość początkowa ma wartość  $44,7 \text{ m/s}$  i jest skierowana pod kątem  $60^\circ$  do poziomu.



**SPRAWDZIAN 5:** Zawodnik odbił piłkę, posyłając ją wysoko w powietrze. Pomiń opór powietrza i powiedz, jak będą zmieniać się składowe prędkości piłki: a) pozioma, b) pionowa. Jakie są składowe przyspieszenia piłki: c) pozioma, d) pionowa, w czasie wznoszenia się i opadania piłki oraz w najwyższym punkcie jej toru?

## Przykład 4.6

Na rysunku 4.15 przedstawiono samolot ratowniczy lecący z prędkością 198 km/h (= 55 m/s) na stałej wysokości 500 m, ku punktowi znajdującemu się bezpośrednio nad rozbitkiem, zmagającym się z falami. Pilot chce wypuścić kapsułę ratowniczą tak, aby spadła do wody możliwie blisko rozbitka.



**Rys. 4.15.** Przykład 4.6. Z samolotu lecącego poziomo ze stałą prędkością wypuszczona zostaje kapsuła ratownicza. Gdy kapsuła spada, składowa pozioma jej prędkości jest nadal równa prędkości lecącego samolotu

a) Wyznacz kąt  $\phi$ , pod jakim pilot widzi rozbitka w chwili najbardziej odpowiedniej do zwolnienia kapsuły.

### ROZWIĄZANIE:

➡ Po oderwaniu się od samolotu kapsuła leci jak pocisk, a więc jej ruch w poziomie jest niezależny od ruchu w pionie, można je zatem rozważać oddzielnie. Na rysunku 4.15 pokazano także układ współrzędnych, którego początek wybrano w punkcie zwolnienia kapsuły. Kąt  $\phi$  jest więc równy:

$$\phi = \arctg \frac{x}{h}, \quad (4.27)$$

gdzie  $x$  jest współrzędną poziomą rozbitka w tym układzie (jak również współrzędną kapsuły w chwili upadku do wody), a  $h$  — wysokością samolotu nad wodą. Wiemy, że ta wysokość wynosi 500 m, a więc do wyznaczenia kąta  $\phi$  potrzebna jest nam tylko wartość  $x$ . Aby znaleźć  $x$ , możemy skorzystać z równania (4.21):

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4.28)$$

Początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie wyrzucenia kapsuły, dlatego też  $x_0 = 0$ . Ponadto, ponieważ kapsuła zostaje *upuszczona*, a nie *wystrzelona*, jej prędkość początkowa  $\vec{v}_0$  jest równa prędkości samolotu. Wiemy zatem, że prędkość początkowa kapsuły ma wartość  $v_0 = 55$  m/s i jest skierowana pod kątem

$\theta_0 = 0^\circ$  (w stosunku do dodatniego kierunku osi  $x$ ). Nie znamy jednak czasu  $t$ , po jakim kapsuła dotrze od samolotu do rozbitka.

Aby znaleźć  $t$ , rozważmy ruch kapsuły w pionie. Skorzystajmy z równania (4.22):

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.29)$$

Przemieszczenie kapsuły w pionie  $y - y_0$  wynosi  $-500$  m (znak minus wskazuje, że kapsuła porusza się *w dół*). Podstawiając do równania (4.29) tę i inne wartości liczbowe, otrzymujemy:

$$-500 \text{ m} = (55 \text{ m/s})(\sin 0^\circ)t - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Rozwiązując to równanie względem  $t$ , wyznaczamy  $t = 10,1$  s. Wstawiając tę wartość do równania (4.28), otrzymujemy:

$$x - 0 = (55 \text{ m/s})(\cos 0^\circ)(10,1 \text{ s}),$$

czyli

$$x = 555,5 \text{ m}.$$

Wobec tego równanie (4.27) daje:

$$\phi = \arctg \left( \frac{555,5 \text{ m}}{500 \text{ m}} \right) = 48^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz prędkość  $\vec{v}$  kapsuły w chwili, gdy wpada ona do wody; wyraż ją za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez długość i kierunek.

### ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Ruch kapsuły w poziomie jest niezależny od ruchu w pionie podczas jej lotu. W szczególności nie zależą od siebie składowe jej prędkości: pozioma i pionowa.

➡ 2. Składowa pozioma prędkości  $v_x$  jest cały czas równa jej wartości początkowej  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ , ponieważ ruch w poziomie odbywa się bez przyspieszenia. Wobec tego w chwili, gdy kapsuła wpada do wody:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 = (55 \text{ m/s})(\cos 0^\circ) = 55 \text{ m/s}.$$

➡ 3. Składowa pionowa prędkości  $v_y$  ulega zmianie w stosunku do jej wartości początkowej  $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$ , gdyż ruch kapsuły w pionie jest przyspieszony. Korzystając z równania (4.23) oraz z wartości czasu spadku kapsuły, równego  $t = 10,1$  s, wyznaczamy wartość tej składowej w chwili upadku kapsuły do wody:

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt \\ &= (55 \text{ m/s})(\sin 0^\circ) - (9,8 \text{ m/s}^2)(10,1 \text{ s}) = -99 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Wobec tego, w chwili upadku do wody kapsuła ma prędkość:

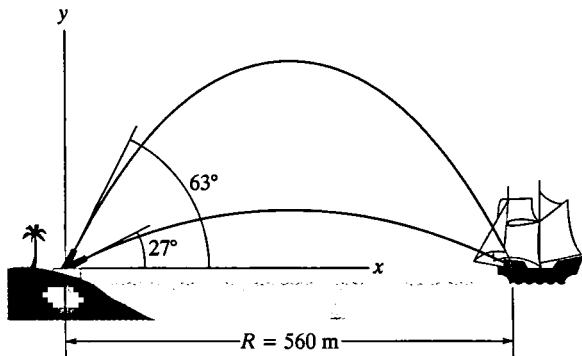
$$\vec{v} = (55 \text{ m/s})\hat{i} - (99 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Korzystając z równania (3.6), wyznaczamy długość i kierunek wektora  $\vec{v}$ :

$$v = 113 \text{ m/s} \quad \text{oraz} \quad \theta = -61^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 4.7

Na rysunku 4.16 pokazano okręt piratów, znajdujący się w odległości 560 m od fortu broniącego wejścia do portu na wyspie. Działo obrońców portu, ustawione na poziomie morza, wystrzeliwuje pociski z prędkością początkową  $v_0 = 82$  m/s.



Rys. 4.16. Przykład 4.7. Dla danej odległości od celu, w okręt piracki można trafić z działa, wystrzeliwując pociski pod dwoma różnymi kątami

a) Pod jakim kątem  $\theta_0$  w stosunku do poziomu należy strzelać z działa, aby pocisk trafił w okręt?

**ROZWIĄZANIE:**

Jest oczywiste, że:

➔ 1. Ruch pocisku jest to rzut ukośny, a więc stosują się do niego równania tego ruchu. Potrzebne nam jest równanie wiążące kąt wystrzelenia pocisku  $\theta_0$ , ze składową poziomą przemieszczenia pocisku od działa do okrętu.

➔ 2. Działo i okręt są na tym samym poziomie, a więc składowa pozioma przemieszczenia jest równa zasięgowi rzutu. Możemy więc skorzystać z równania (4.26) wiążącego ze sobą kąt  $\theta_0$

wystrzelenia pocisku i zasięg  $R$  rzutu:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0, \quad (4.30)$$

skąd otrzymujemy:

$$2\theta_0 = \arcsin \frac{gR}{v_0^2} = \arcsin \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(560 \text{ m})}{(82 \text{ m/s})^2} = \arcsin 0,816. \quad (4.31)$$

Wyznaczając kąt na podstawie wartości jego funkcji sinus, otrzymujemy zawsze dwie wartości kąta w zakresie kąta pełnego. Jedną z nich znajdujemy przy zastosowaniu kalkulatora (w naszym przypadku jest to  $54,7^\circ$ ), a drugą — odejmując tę pierwszą od  $180^\circ$  (w naszym przypadku wynosi ona  $125,3^\circ$ ). Z równania (4.31) zatem:

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(54,7^\circ) \approx 27^\circ \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(125,3^\circ) \approx 63^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Dowódca fortu może nakazać ustawienie działa pod jednym z tych dwóch kątów, aby trafić pociskiem w okręt piratów (oczywiście przy założeniu, że opór powietrza nie wpływa na tor pocisku!).

b) Jak daleko powinien oddalić się okręt piratów od działa, aby znalazł się poza maksymalnym zasięgiem strzału?

**ROZWIĄZANIE:**

Przekonaaliśmy się, że zasięg jest największy, gdy strzela się pod kątem  $\theta_0$  równym  $45^\circ$ . Podstawiając wartość  $\theta_0 = 45^\circ$  do równania (4.30), otrzymujemy:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(82 \text{ m/s})^2}{(9,8 \text{ m/s}^2)} \sin(2 \times 45^\circ) = 686 \text{ m} \approx 690 \text{ m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Gdy okręt oddala się, wartości dwóch kątów ustawienia działa, których pocisk trafia w okręt, zbliżają się sobie, aż dla  $\theta_0 = 45^\circ$  stają się sobie równe, co zachodzi dla odległości okrętu równo 690 m. Dla odległości większych od tej wartości okręt jest poza zasięgiem działa.

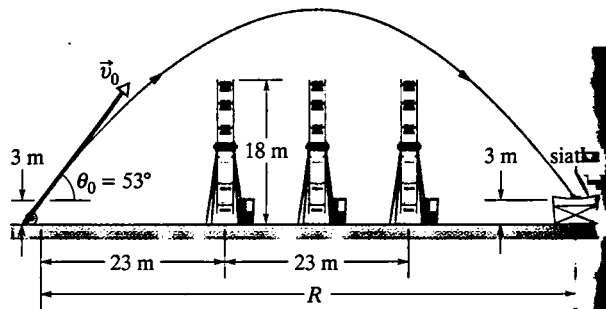
## Przykład 4.8

Na rysunku 4.17 przedstawiono lot Emanuela Zacchiniego nad trzema diabelskimi młynami o wysokości 18 m każdy, ustawionymi jak na rysunku. Zacchini został wystrzelony z prędkością początkową o wartości  $v_0 = 26,5$  m/s pod kątem  $\theta_0 = 53^\circ$  względem poziomu. Jego początkowa wysokość nad poziomem areny wynosiła 3 m. Siatka, w której wylądował, znajdowała się na takiej samej wysokości.

a) Czy Zacchini nie zaczął o pierwszy diabelski młyn?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ Zacchini leciał jak pocisk, dlatego też możemy skorzystać z równań dla rzutu ukośnego. Umieścimy początek układu



Rys. 4.17. Przykład 4.8. Tor lotu człowieka-pocisku ponad trzema diabelskimi młynami, z lądowaniem w siatce

współrzędnych  $xy$  u wylotu lufy działa. Wobec tego  $x_0 = 0$  oraz  $y_0 = 0$ . Musimy wyznaczyć wysokość lotu  $y$  dla  $x = 23$  m, ale nie mamy czasu  $t$ , po jakim Zacchini znalazł się w tym punkcie. Aby uzyskać zależność  $y$  od  $x$ , która nie zawiera czasu  $t$ , korzystamy z równania (4.25), co daje:

$$\begin{aligned} y &= (\operatorname{tg} \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \\ &= (\operatorname{tg} 53^\circ)(23 \text{ m}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2}{2(26,5 \text{ m/s})^2(\cos 53^\circ)^2} \\ &= 20,3 \text{ m}. \end{aligned}$$

Zacchini wystartował do lotu na wysokości 3 m nad poziomem terenu, dlatego też przeleciał na wysokości ok. 5,3 m nad pierwszym diabelskim młynem.

Zakładając, że najwyższy punkt toru lotu leży nad środkowym diabelskim młynem oblicz, ile metrów nad tym młynem przeleciał Zacchini.

#### ROZWIĄZANIE:

W najwyższym punkcie lotu składowa pionowa prędkość człowieka-pocisku jest równa zeru. Związek składowej  $v_y$  z wysokością  $y$  jest dany równaniem (4.24), zatem:

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Z powyższego równania wyznaczamy  $y$ :

$$y = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} = \frac{(26,5 \text{ m/s})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9,8 \text{ m/s}^2)} = 22,9 \text{ m}.$$

oznacza, że Zacchini przeleciał na wysokości 7,9 m nad środkowym diabelskim młynem.

c) W jakiej odległości od działa powinna znajdować się siatka?

#### ROZWIĄZANIE:

Wysokości startu i lądowania są takie same, dlatego też odległość w poziomie od działa do siatki jest równa zasięgowi rzutu w poziomie. Z równania (4.26) mamy więc:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(26,5 \text{ m/s})^2}{(9,8 \text{ m/s}^2)} \sin 2(53^\circ) = 69 \text{ m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie otwierające ten rozdział, tzn. skąd Zacchini wiedział, gdzie umieścić siatkę, i na jakiej podstawie mógł być pewien, że przeleci nad diabelskimi młynami. Musiał on (lub ktoś inny) wykonać takie obliczenia, jakie przeprowadziliśmy przed chwilą. Choć trudno było mu uwzględnić w obliczeniach opór powietrza wiedział on, że opór ten spowolni jego ruch, a więc zmniejszy zasięg w stosunku do wartości obliczeń. Wobec tego wziął dużą pewność, że wyląduje w siatce niezależnie od tego, w jakim stopniu opór powietrza zmniejszy jego prędkość w czasie lotu. Niemniej jednak zmienność oporu powietrza, od lotu do lotu, zapewne działała mu na wyobraźnię przed każdym występem.

Zacchini znajdował się jednak w niebezpieczeństwie, gdyż nawet podczas krótkich lotów jego przyspieszenie w lufie działa było tak duże, że tracił na chwilę przytomność. Gdyby wylądował nie odzyskawszy przytomności, mógłby złamać kręgosłup. Aby tak się nie stało, Zacchini ćwiczył możliwie szybkie odzyskiwanie przytomności. W rzeczy samej, utrata przytomności w czasie lotu (zwłaszcza możliwość nie odzyskania jej na czas) jest jedynym poważnym niebezpieczeństwem, na jakie narażają się dziś ludzie-pociski w czasie krótkich lotów.

## Sztuka rozwiązywania zadań

**Porada 1:** Obliczenia przeprowadzone na liczbach, a obliczenia na zmiennych

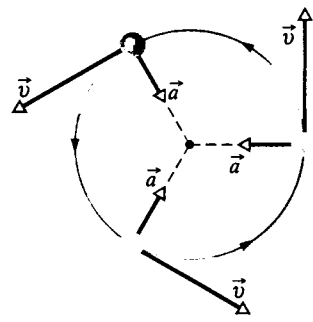
Jednym ze sposobów uniknięcia błędów zaokrąglenia i innych błędów liczbowych jest rozwiązanie zadania na zmiennych i podstawienie liczb do wzorów na końcu obliczeń — właśnie tak rozwiązują zadania ludzie w tym doświadczeni. W przykładach

4.6–4.8 jest to łatwe do zrobienia. W początkowych rozdziałach książki dzielimy zadania na części, aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie, jak wygląda każdy krok rozwiązywania zadania oraz orientację w wartościach liczbowych rozważanych wielkości. W dalszym ciągu nauki będziemy dłużej prowadzili obliczenia na symbolach zmiennych.

## 4.7. Ruch jednostajny po okręgu

Ruch cząstki nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu, jeśli porusza się ona po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości bezwzględnej. Choć wartość prędkości nie zmienia się, *ruch cząstki jest przyspieszony*. Może się to na pierwszy rzut oka wydawać zaskakujące, ponieważ przyspieszenie (czyli zmianę prędkości) kojarzymy często ze wzrostem lub zmniejszaniem się wartości bezwzględnej prędkości. Prędkość jest jednak wektorem, a nie skalarem. Jeśli więc zmienia się choćby tylko jej kierunek, to ruch jest przyspieszony — tak właśnie się dzieje w ruchu jednostajnym po okręgu.

Rys. 4.18. Wektory przyspieszenia i prędkości cząstki poruszającej się jednostajnie po okręgu, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Obydwa mają stałą długość, lecz ich kierunki zmieniają się w sposób ciągły



Na rysunku 4.18 przedstawiono wektory prędkości i przyspieszenia w różnych fazach ruchu jednostajnego po okręgu. Obydwa wektory mają przez cały czas takie same długości, lecz ich kierunki zmieniają się w sposób ciągły. Wektor prędkości jest zawsze styczny do okręgu i skierowany w kierunku ruchu cząstki. Wektor przyspieszenia jest zawsze skierowany *wzdłuż promienia okręgu, ku jego środkowi*. Z tego względu przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu nazywamy **przyspieszeniem dośrodkowym**. Jak wykażemy za chwilę, wartość tego przyspieszenia  $\vec{a}$  wynosi:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (\text{przyspieszenie dośrodkowe}), \quad (4.32)$$

przy czym  $r$  jest promieniem okręgu, a  $v$  — modułem prędkości cząstki.

W tym ruchu przyspieszonym o stałym module prędkości cząstka obiega okrąg (czyli przebywa drogę  $2\pi r$ ) w czasie:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{okres}). \quad (4.33)$$

Czas  $T$  nazywamy *okresem obiegu* lub po prostu *okresem* tego ruchu. Mówiąc ogólniej, jest to czas potrzebny cząstce na jednokrotny obieg zamkniętego toru.

### Wyprowadzenie wzoru (4.32)

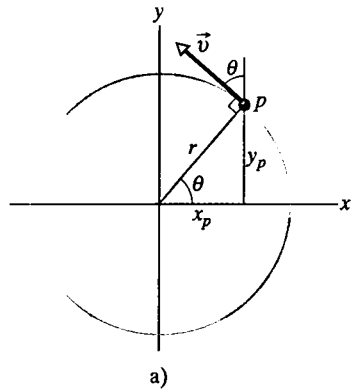
W celu wyznaczenia wartości i kierunku przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu przeanalizujmy rysunek 4.19. Na rysunku 4.19a cząstka  $p$  porusza się z prędkością  $v$  o stałej wartości po okręgu o promieniu  $r$ . W chwili, dla której wykonano ten rysunek współrzędne tej cząstki wynoszą  $x_p$  i  $y_p$ .

W paragrafie 4.3 stwierdziliśmy, że prędkość  $\vec{v}$  poruszającej się cząstki jest zawsze styczna do jej toru w punkcie, w którym cząstka właśnie się znajduje. Jak widać z rysunku 4.19a oznacza to, że wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do promienia w punkcie, w którym znajduje się cząstka. Kąt  $\theta$ , utworzony przez  $\vec{v}$  z pionem w punkcie  $p$  jest więc równy kątowi utworzonemu przez promień  $r$  z osią  $x$ .

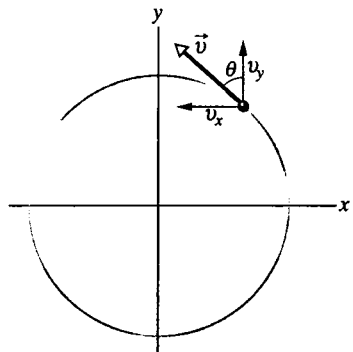
Składowe wektora  $\vec{v}$  pokazano na rysunku 4.19b. Korzystając z nich, możemy zapisać prędkość  $\vec{v}$  jako:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}. \quad (4.34)$$

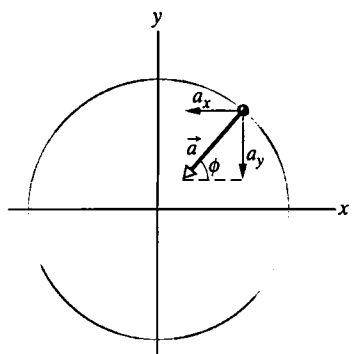
Rys. 4.19. Cząstka  $p$  porusza się jednostajnie po okręgu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara: a) jej położenie i prędkość  $\vec{v}$  w pewnej chwili; b) prędkość  $\vec{v}$  i jej składowe; c) przyspieszenie  $\vec{a}$  cząstki i jego składowe



a)



b)



c)

Z trójkąta prostokątnego na rysunku 4.19a widać, że  $\sin \theta = y_p/r$ , a  $\cos \theta = x_p/r$ , co daje:

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}. \quad (4.35)$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie  $\vec{a}$  cząstki  $p$ , należy zróżniczkować to równanie względem czasu. Wartości prędkości  $v$  oraz promienia  $r$  nie zależą od czasu, otrzymujemy więc:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}. \quad (4.36)$$

Zauważ teraz, że szybkość zmiany  $y_p$ ,  $dy_p/dt$ , jest równa składowej prędkości  $v_y$ . Analogicznie,  $dx_p/dt = v_x$ . Z rysunku 4.19b widać, że  $v_x = -v \sin \theta$ , a  $v_y = v \cos \theta$ . Podstawiając te związki do równania (4.36), otrzymujemy:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right)\hat{j}. \quad (4.37)$$

Ten wektor oraz jego składowe pokazano na rysunku 4.19c. W zgodzie z równaniem (3.6) otrzymujemy, że długość wektora  $\vec{a}$  jest równa:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r},$$

czego należało dowieść. Kierunek wektora  $\vec{a}$  jest wyznaczony przez kąt  $\phi$  z rysunku 4.19c:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta.$$

Tak więc  $\phi = \theta$ , co oznacza, że wektor  $\vec{a}$  jest skierowany wzdłuż promienia  $r$  z rysunku 4.19a, w kierunku środka okręgu, co także należało wykazać.

**SPRAWDZIAN 6:** Ciało porusza się w poziomej płaszczyźnie  $xy$  po torze kołowym, ● środku w początku układu współrzędnych, a jego prędkość ma stałą wartość. Gdy ciało ● znajduje się w punkcie o współrzędnej  $x = -2$  m, jego prędkość jest równa  $-(4 \text{ m/s})\hat{j}$ . ● Wynosi: a) prędkość, b) przyspieszenie ciała, gdy znajduje się ono w punkcie o współ-  
rzędnej  $y = 2$  m?

## Przykład 4.9

Piloci myśliwców zawsze obawiali się zbyt ostrych zakrętów. Gdy pilot ma przyspieszenie dośrodkowe, a jego głowa jest zwrócona w kierunku środka krzywizny łuku, ciśnienie krwi w mózgu maleje, co prowadzi do osłabienia funkcji tego organu.

Istnieją różne objawy, na podstawie których pilot może stwierdzić, że zwrot jest zbyt gwałtowny. Gdy przyspieszenie dośrodkowe wynosi od  $2g$  do  $3g$ , pilot odczuwa ociężałość. Przy wartości około  $4g$  pilot traci zdolność rozróżniania barw (widzi obrazy czarno-białe) i zmniejsza się jego kąt widzenia („widzenie tunelowe”). Gdy takie przyspieszenie utrzymuje się lub jeszcze wzrasta, pilot przestaje cokolwiek widzieć i wkrótce potem traci przytomność.

Ile wynosi przyspieszenie, w jednostkach  $g$ , pilota myśliwca F-22 pokonującego z prędkością o wartości  $v = 2500 \text{ km/h}$  ( $694 \text{ m/s}$ ) kołowy łuk o promieniu krzywizny  $r = 5,8 \text{ km}$ ?

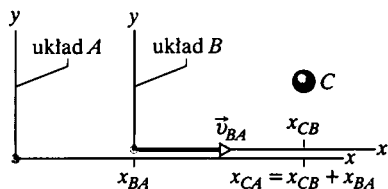
### ROZWIĄZANIE:

➡ Choć lot odbywa się z prędkością o stałej wartości, to na torze kołowym występuje przyspieszenie dośrodkowe o wartości danej równaniem (4.32), czyli:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(694 \text{ m/s})^2}{(5800 \text{ m})} = 83 \text{ m/s}^2 = 8,5g. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeśli nieostrożny pilot w ferworze walki skieruje samolot w lot po tak ostrym łuku, to straci przytomność niemal natychmiast, bez żadnych objawów, mogących go przed tym ostrzec.

## 4.8. Ruch względny w jednym wymiarze



Rys. 4.20. Adam (układ A) i Barbara (układ B) obserwują samochód C, przy czym ciała B i C poruszają się z różną prędkością wzdłuż wspólnej osi x obydwu układów współrzędnych. W chwili, dla której wykonano rysunek,  $x_{BA}$  jest współrzędną B w układzie A. Samochód C ma współrzędną  $x_{CB}$  w układzie B i współrzędną  $x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}$  w układzie A

Wyobraź sobie, że widzisz kaczkę lecącą na północ z prędkością — powiedzmy — 30 km/h. Innej kaczkę, lecącą obok niej, wydaje się ona nieruchoma. Innymi słowy, prędkość ciała zależy od układu odniesienia, z którego obserwujemy i mierzymy tę prędkość. Układem odniesienia jest jakiś obiekt fizyczny, z którym związany jest nasz układ współrzędnych. W życiu codziennym jest nim zwykle ziemia. Na przykład, prędkość wypisana na mandacie za zbyt szybką jazdę jest zawsze mierzona względem ziemi. Prędkość względem radiowozu policyjnego jest inna, jeśli radiowóz porusza się w trakcie pomiaru.

Załóżmy, że Adam siedzi w samochodzie zaparkowanym na poboczu szosy (w początku układu współrzędnych A) i widzi mijający go samochód C (ciało C). Barbara (znajdująca się w początku układu współrzędnych B) jedzie tą szosą z stałą prędkością i także widzi samochód C. Wyobraź sobie, że w pewnej chwili obydwoje określają położenie tego samochodu. Z rysunku 4.20, przedstawiającego tę sytuację wynika, że:

$$x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}. \quad (4.38)$$

Równanie to należy odczytać następująco: współrzędna  $x_{CA}$  ciała C, rejestrowana przez obserwatora A jest równa sumie współrzędnej  $x_{CB}$  ciała C, rejestrowanej przez obserwatora B i współrzędnej  $x_{BA}$  obserwatora B, rejestrowanej przez obserwatora A. Zauważ, że stwierdzenie to znajduje odbicie w kolejności liter we wskaźnikach przy współrzędnych.

Różniczkując stronami równanie (4.38) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(x_{CA}) = \frac{d}{dt}(x_{CB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}),$$

czyli

$$v_{CA} = v_{CB} + v_{BA}, \quad (4.39)$$

ponieważ  $v = dx/dt$ . Równanie to należy odczytać następująco: prędkość  $v_{CA}$  ciała C, rejestrowana przez obserwatora A jest równa sumie prędkości  $v_{CB}$  ciała C, rejestrowanej przez obserwatora B i prędkości  $v_{BA}$  obserwatora B, rejestrowanej przez obserwatora A. Wyraz  $v_{BA}$  jest prędkością układu B względem układu A (ponieważ ruch odbywa się wzdłuż jednej z osi, w równaniu (4.39) stosujemy składowe wzdłuż tej osi i opuszczamy strzałki nad symbolami wektorów).

Rozważamy tu jedynie układy odniesienia, poruszające się względem siebie ze stałą prędkością. W naszym przykładzie oznacza to, że Barbara (układ B) jedzie ze stałą prędkością  $v_{BA}$  względem Adama (układ A). Samochód (ciało C) może natomiast zwiększać lub zmniejszać prędkość, zatrzymywać się lub zmieniać kierunek ruchu na przeciwny (tzn. może się poruszać ruchem przyspieszonym).

W celu wyznaczenia przyspieszenia ciała C, rejestrowanego przez Barbarę i Adama, różniczkujemy stronami równanie (4.39), co daje:

$$\frac{d}{dt}(v_{CA}) = \frac{d}{dt}(v_{CB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Prędkość  $v_{BA}$  jest stała, dlatego też ostatni wyraz po prawej stronie jest równy zero, a więc:

$$a_{CA} = a_{CB}. \quad (4.40)$$

Inaczej mówiąc:

► Obserwatorzy w różnych układach odniesienia (poruszających się względem siebie ze stałą prędkością) rejestrują takie samo przyspieszenie poruszającej się cząstki.

**SPRAWDZIAN 7:** W tabeli podano prędkości (w km/h) Barbary i samochodu  $C$  z rysunku 4.20 w trzech różnych przypadkach. Uzupełnij puste miejsca w tabeli i odpowiedz, jak zmienia się w każdym przypadku odległość Barbary od samochodu  $C$ .

Przypadek	$v_{BA}$	$v_{CA}$	$v_{CB}$
a	+50	+50	
b	+30		+40
c		+60	-20

## Przykład 4.10

W sytuacji przedstawionej na rysunku 4.20 prędkość Barbary względem Adama jest stała i wynosi  $v_{BA} = 52$  km/h, a samochód  $C$  porusza się w kierunku ujemnym osi  $x$ .

a) Ile wynosi prędkość  $v_{CB}$  samochodu zmierzona przez Barbarę, jeśli pomiar dokonany przez Adama wykazał prędkość stałą  $v_{CA} = -78$  km/h?

**ROZWIĄZANIE:**

► Z Adamem możemy związać układ odniesienia  $A$ , a z Barbarą — układ odniesienia  $B$ . Te dwa układy poruszają się względem siebie ze stałą prędkością wzdłuż jednej z osi, dlatego też związek  $v_{CB}$  z  $v_{CA}$  wyraża równanie (4.39):

$$v_{CA} = v_{CB} + v_{BA}.$$

Wobec tego:

$$-78 \text{ km/h} = v_{CB} + 52 \text{ km/h},$$

a stałd:

$$v_{CB} = -130 \text{ km/h}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Gdyby samochód  $C$  był połączony z samochodem Barbary linią nawiniętą na bęben, to przy oddalaniu się samochodów od siebie linia odwijałaby się z bębna z szybkością 130 km/h.

b) Samochód  $C$  hamuje aż do zatrzymania się względem Adama (a więc i ziemi) w czasie  $t = 10$  s. Ile wynosi jego przyspieszenie  $a_{CA}$  względem Adama przy założeniu, że jest ono stałe?

**ROZWIĄZANIE:**

► Aby obliczyć przyspieszenie samochodu względem Adama, musimy skorzystać z jego prędkości względem Adama. Przyspieszenie to jest stałe, więc możemy posłużyć się wzorem (2.11) ( $v = v_0 + at$ ), wiążącym przyspieszenie z prędkością początkową i końcową  $C$ . Prędkość początkowa  $C$  względem Adama wynosi  $v_{CA} = -78$  km/h, a prędkość końcowa jest równa zero. Wobec tego ze wzoru (2.11) otrzymujemy:

$$a_{CA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{(10 \text{ s})} \frac{(1 \text{ m/s})}{(3,6 \text{ km/h})} = 2,2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile wynosi przyspieszenie samochodu  $C$  względem Barbary w czasie tego hamowania?

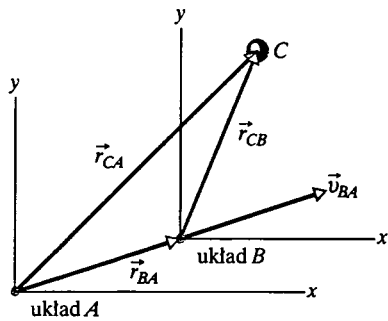
**ROZWIĄZANIE:**

► Aby obliczyć przyspieszenie samochodu względem Barbary, musimy skorzystać z jego prędkości względem Barbary. Prędkość początkową  $C$  względem Barbary wyznaczyliśmy w punkcie (a):  $v_{CB} = -130$  km/h. Prędkość końcowa  $C$  względem Barbary wynosi  $-52$  km/h (jest to prędkość zatrzymanego samochodu względem poruszającej się Barbary). Ze wzoru (2.11) mamy zatem:

$$\begin{aligned} a_{CB} &= \frac{v - v_0}{t} \\ &= \frac{(-52 \text{ km/h}) - (-130 \text{ km/h})}{(10 \text{ s})} \frac{(1 \text{ m/s})}{(3,6 \text{ km/h})} \\ &= 2,2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Ten wynik mogliśmy przewidzieć z góry — prędkość względna Adama i Barbary jest stała, więc ich pomiary muszą dać takie samo przyspieszenie samochodu.

## 4.9. Ruch względny w dwóch wymiarach



Rys. 4.21. Układ B porusza się w dwóch wymiarach ze stałą prędkością  $\vec{v}_{BA}$  względem układu A. Wektor  $\vec{r}_{BA}$  jest wektorem położenia układu B względem A. Cząstka C ma wektor położenia  $\vec{r}_{CA}$  w układzie A i  $\vec{r}_{CB}$  w układzie B

Zajmiemy się teraz ruchem względnym w dwóch (i, przez łatwe uogólnienie, w trzech) wymiarach. Na rysunku 4.21 ruch cząstki C jest badany przez dwóch obserwatorów, znajdujących się w początkach układów odniesienia A i B, przy czym B porusza się względem A ze stałą prędkością  $\vec{v}_{BA}$  (odpowiednie osie układów współrzędnych pozostają przy tym równoległe).

Rysunek 4.21 wykonano dla pewnej chwili  $t$ . W tej chwili wektor położenia układu B względem A jest równy  $\vec{r}_{BA}$ . Wektory położenia cząstki C to  $\vec{r}_{CA}$  w układzie A i  $\vec{r}_{CB}$  w układzie B. Widząc, jak ustawione są względem siebie te trzy wektory położenia, możemy stwierdzić, że:

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA}. \quad (4.41)$$

Różniczkując obie strony tego równania względem czasu, otrzymujemy związek między prędkościami  $\vec{v}_{CA}$  i  $\vec{v}_{CB}$  cząstki C względem każdego z obserwatorów:

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}. \quad (4.42)$$

Następnie, różniczkując równanie (4.42) względem czasu, otrzymujemy związek między przyspieszeniami  $\vec{a}_{CA}$  i  $\vec{a}_{CB}$  cząstki C względem każdego z obserwatorów. Prędkość  $\vec{v}_{BA}$  jest stała, więc jej pochodna względem czasu jest równa zero. Mamy zatem:

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}. \quad (4.43)$$

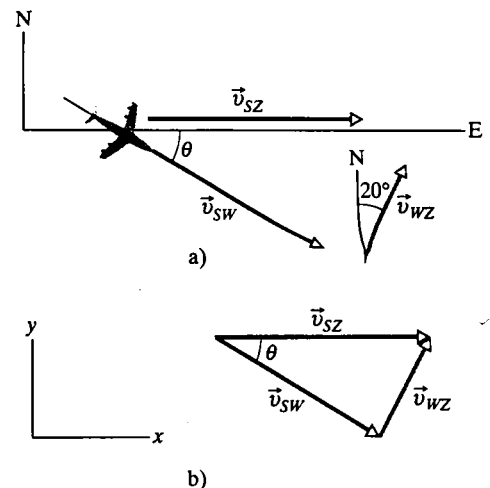
Podobnie, jak dla ruchu w jednym wymiarze, otrzymaliśmy następującą zasadę: obserwatorzy w różnych układach odniesienia, poruszających się względem siebie ze stałą prędkością, rejestrują *takie samo* przyspieszenie poruszającej się cząstki.

### Przykład 4.11

Na rysunku 4.22a pokazano samolot, lecący prosto na wschód, mimo że pilot kieruje go nieco na południowy wschód, gdyż samolot jest znoszony przez wiatr, wiejący w kierunku północno-wschodnim. Prędkość  $\vec{v}_{SW}$  samolotu względem powietrza unoszonego przez wiatr ma wartość 215 km/h i jest skierowana pod kątem  $\theta$  na południe od kierunku wschodniego. Prędkość  $\vec{v}_{WZ}$  wiatru względem ziemi ma wartość 65 km/h i jest skierowana pod kątem  $20^\circ$  na wschód od kierunku północnego. Jaka jest wartość prędkości  $\vec{v}_{SZ}$  samolotu względem ziemi i ile wynosi kąt  $\theta$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

➡ Mamy tu do czynienia z sytuacją podobną do tej, której dotyczy rysunek 4.21. Poruszającą się cząstką jest samolot (S), układ A (oznaczony teraz przez Z) jest związany z ziemią, a układ B (oznaczony przez W) — z powietrzem unoszonym przez wiatr. Chcemy skonstruować diagram wektorowy, podobny do



Rys. 4.22. Przykład 4.11. Aby samolot leciał prosto na wschód, pilot musi go kierować nieco w tę stronę, z której wieje wiatr („pod wiatr”)



z rysunku 4.21, lecz dla wektorów prędkości. Sformułujemy pierw związek między tymi trzema wektorami:

$$\begin{aligned} & \text{prędkość samolotu względem ziemi (SZ)} \\ &= \text{prędkość samolotu względem powietrza (SW)} \\ &+ \text{prędkość wiatru względem ziemi (WZ)}. \end{aligned}$$

związek, zilustrowany na rysunku 4.22b można zapisać jako równanie wektorowe:

$$\vec{v}_{SZ} = \vec{v}_{SW} + \vec{v}_{WZ}. \quad (4.44)$$

musimy znaleźć długość pierwszego z tych wektorów i kierunek jego. W tym celu rozłożymy wektory na składowe w układzie współrzędnych z rysunku 4.22b, a następnie rozwiążmy równania składowych, wynikające z równania (4.44), jak to robiliśmy w paragrafie 3.5. Dla składowych  $y$  mamy:

$$v_{SZ,y} = v_{SW,y} + v_{WZ,y},$$

$$0 = -(215 \text{ km/h}) \sin \theta + (65 \text{ km/h})(\cos 20^\circ).$$

Rozwiązując to równanie względem  $\theta$ , otrzymujemy:

$$\theta = \arcsin \frac{(65 \text{ km/h})(\cos 20^\circ)}{(215 \text{ km/h})} = 16,5^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie, dla składowych  $x$  mamy:

$$v_{SZ,x} = v_{SW,x} + v_{WZ,x},$$

Wektor  $\vec{v}_{SZ}$  jest równoległy do osi  $x$ , dlatego też jego składowa  $v_{SZ,x}$  jest równa jego długości  $v_{SZ}$ . Korzystając z tego faktu oraz z tego, że  $\theta = 16,5^\circ$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v_{SZ} &= (215 \text{ km/h})(\cos 16,5^\circ) + (65 \text{ km/h})(\sin 20^\circ) \\ &= 228 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 8:** Wyobraź sobie, że pilot z powyższego przykładu skieruje samolot prosto na wschód, bez zmiany wartości jego prędkości względem powietrza. Czy wartości: a)  $v_{SZ,y}$ , b)  $v_{SZ,x}$ , c)  $v_{SZ}$ , wzrosną, zmaleją czy pozostaną bez zmiany? Znajdź odpowiedź, nie wykonując obliczeń.

## Podsumowanie

**Wektor położenia** Położenie cząstki względem początku układu współrzędnych jest wyznaczone przez *wektor położenia*  $\vec{r}$ , który wyznaczamy przy zastosowaniu wektorów jednostkowych jako:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (4.1)$$

przy czym  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$  i  $z\hat{k}$  są *wektorami składowymi* wektora  $\vec{r}$  wzdłuż osi układu współrzędnych, a  $x$ ,  $y$  i  $z$  — *składowymi* tego wektora (czyli także współrzędnymi punktu, w którym znajduje się cząstka). Wektor położenia można opisać, podając jego długość i dwa kąty obejmujące jego kierunek lub podając jego składowe (albo wektory składowe).

**Przemieszczenie** Jeśli dana cząstka porusza się tak, że wektor jej położenia zmienia się z  $\vec{r}_1$  na  $\vec{r}_2$ , to *przemieszczenie*  $\Delta\vec{r}$  cząstki wynosi:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4.2)$$

Przemieszczenie można też zapisać jako:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (4.3)$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (4.4)$$

przy czym współrzędne  $(x_1, y_1, z_1)$  odpowiadają wektorowi położenia  $\vec{r}_1$ , a współrzędne  $(x_2, y_2, z_2)$  — wektorowi położenia  $\vec{r}_2$ .

**Prędkość średnia i prędkość chwilowa** Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  cząstka ulega przemieszczeniu o  $\Delta\vec{r}$ , to jej *prędkość średnia* w tym przedziale czasu jest równa:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4.8)$$

Gdy czas  $\Delta t$  w równaniu (4.8) dąży do zera, prędkość średnia  $\vec{v}_{sr}$  dąży do wartości granicznej, którą nazywamy *prędkością chwilową* (lub krótko: *prędkością*):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.10)$$

Możemy ją również zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (4.11)$$

przy czym  $v_x = dx/dt$ ,  $v_y = dy/dt$ , a  $v_z = dz/dt$ . Prędkość chwilowa  $\vec{v}$  cząstki jest zawsze styczna do toru cząstki w punkcie, w którym znajduje się cząstka.

**Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe** Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  prędkość cząstki zmienia się z  $\vec{v}_1$  na  $\vec{v}_2$ , to jej *przyspieszenie średnie* w tym przedziale czasu jest równe:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.15)$$

Gdy  $\Delta t$  w równaniu (4.15) dąży do zera,  $\vec{a}_{sr}$  dąży w granicy do *przyspieszenia chwilowego* (lub krótko: *przyspieszenia*)  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.16)$$

Zapisując to równanie przy zastosowaniu wektorów jednostkowych, otrzymujemy:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad (4.17)$$

przy czym  $a_x = dv_x/dt$ ,  $a_y = dv_y/dt$ , a  $a_z = dv_z/dt$ .

**Rzut ukośny** Rzut ukośny jest to ruch cząstki, wyrzuconej z prędkością początkową  $\vec{v}_0$ , w czasie którego przyspieszenie cząstki w kierunku poziomym jest równe zeru, a przyspieszenie w kierunku pionowym jest równe przyspieszeniu ziemskiemu  $-g$  (kierunek dodatni osi pionowej wybieramy jako skierowany do góry). Jeśli prędkość początkową  $\vec{v}_0$  wyrazimy przez jej wartość  $v_0$  i określający jej kierunek kąt  $\theta_0$ , to równania ruchu cząstki wzdłuż osi poziomej  $x$  i pionowej  $y$  są następujące:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \quad (4.21)$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4.22)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 - gt, \quad (4.23)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4.24)$$

**Tor** Tor cząstki w rzucie ukośnym jest parabolą o równaniu:

$$y = (\operatorname{tg} \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}, \quad (4.25)$$

przy czym początek układu współrzędnych wybrano tak, aby  $x_0$  i  $y_0$  w równaniach (4.21) i (4.22) były równe zeru. **Zasięg rzutu** w poziomie równy odległości w poziomie od punktu wyrzucenia ciała do punktu, w którym cząstka osiąga ponownie wysokość punktu wyjściowego wynosi:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4.26)$$

**Ruch jednostajny po okręgu** Ruchem jednostajnym po okręgu nazywamy ruch cząstki po okręgu lub po jego łuku o promieniu  $r$ , z prędkością o stałej wartości. Przyspieszenie  $\vec{a}$  w tym ruchu ma wartość:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4.27)$$

Przyspieszenie  $\vec{a}$  jest skierowane do środka okręgu lub jego łuku i nazywamy je **przyspieszeniem dośrodkowym**. Czas pełnego obiegu okręgu przez cząstkę wynosi:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4.28)$$

Czas  $T$  nazywamy **okresem obiegu** ruchu lub po prostu **okresem** tego ruchu.

**Ruch względny** Gdy dwa układy odniesienia  $A$  i  $B$  poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, prędkość cząstki  $C$  rejestrowana przez obserwatora w układzie  $A$  różni się na ogół od prędkości, rejestrowanej przez obserwatora w układzie  $B$ . Związek ten opisuje wzór:

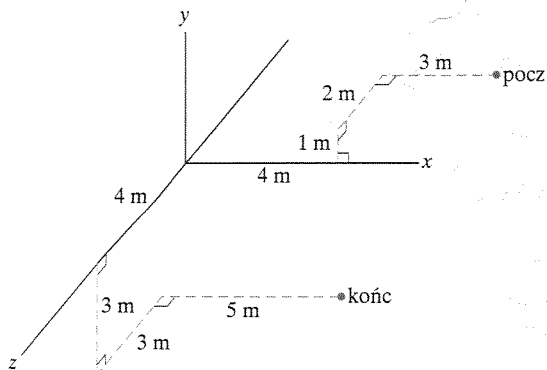
$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}, \quad (4.29)$$

przy czym  $\vec{v}_{BA}$  jest prędkością układu  $B$  względem układu  $A$ . Obaj obserwatorzy rejestrują takie samo przyspieszenie cząstki, tzn.:

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}. \quad (4.30)$$

## Pytania

1. Na rysunku 4.23 przedstawiono położenie początkowe poczyn i końcowe koniec pewnej cząstki. Podaj wektory położenia tej cząstki: a) początkowy  $\vec{r}_{\text{pocz}}$ , b) końcowy  $\vec{r}_{\text{końc}}$ , wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych. c) Podaj składową  $x$  przemieszczenia  $\Delta\vec{r}$  cząstki.



Rys. 4.23. Pytanie 1

2. Niżej podano zależność prędkości krążka hokejowego (w metrach na sekundę) od czasu, dla czterech przypadków:

1)  $v_x = -3t^2 + 4t - 2$  oraz  $v_y = 6t - 4$ ;

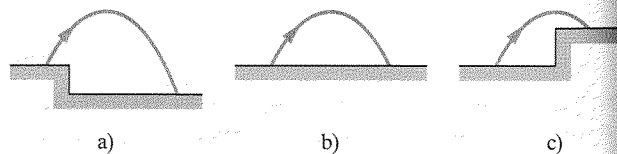
2)  $v_x = -3$  oraz  $v_y = -5t^2 + 6$ ;

3)  $\vec{v} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$ ;

4)  $\vec{v} = -2t\hat{i} + 3\hat{j}$ .

a) Dla każdego z przypadków określ, czy składowe  $x$  i  $y$  przyspieszenia oraz wektor przyspieszenia  $\vec{a}$  krążka są stałe. b) W jakich jednostkach wyrażone są współczynniki  $-2$  i  $3$  w przypadku 4, jeśli  $\vec{v}$  jest wyrażone w metrach na sekundę, a  $t$  w sekundach?

3. Na rysunku 4.24 pokazano trzy przypadki rzutu jednakowych pocisków z poziomu ziemi (czyli o jednakowych wysokościach początkowych) z prędkością początkową o jednakowych wartościach i jednakowych kierunkach. W każdym przypadku inny jednak poziom lądowania pocisku. Uszereguj te przypadki od największej do najmniejszej wartości prędkości końcowej pocisku.



Rys. 4.24. Pytanie 3

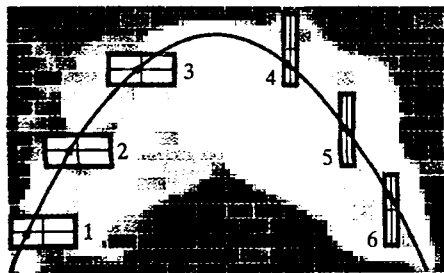
4. W pewnej chwili lotu piłka ma prędkość  $\vec{v} = 25\hat{i} - 4.9\hat{j}$  (oś  $x$  jest pozioma, oś  $y$  jest pionowa i skierowana do góry, a  $\vec{v}$  wyrażono w metrach na sekundę). Czy piłka przebyła już punkt największego wzniesienia?

Rzucasz wystrzelić raketę z poziomu ziemi, z prędkością początkową opisaną jednym z następujących wektorów: 1)  $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$ , 2)  $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$ , 3)  $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$ , 4)  $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$ . Układ współrzędnych wybrano tak, że oś  $x$  biegnie wzdłuż powierzchni ziemi, a oś  $y$  jest skierowana w górę. a) Uszereguj te przypadki od największej do najmniejszej ich wartości. b) Uszereguj te przypadki od najdłuższego do najkrótszego czasu przelotu.

10. Kawałek gliny zostaje wyrzucona z wysokości 2 m nad ziemią, z prędkością początkową  $\vec{v}_0 = (-2\hat{i} + 4\hat{j})$  m/s. Ile wynosi prędkość w chwili lądowania na powierzchni, znajdującej się na wysokości 2 m nad ziemią?

11. Na rysunku 4.25 przedstawiono tor mandarynki rzuconej ukośnie wzdłuż ściany tak, że przelatuje ona przed trzema oknami o jednakowych rozmiarach — 1, 2 i 3 — równo odległymi od siebie. Uszereguj te okna w zależności od: a) czasu przelotu mandarynki przed nimi (od najdłuższego do najkrótszego), b) wartości prędkości, z jaką przelatuje przed nimi mandarynka (od największej do najmniejszej).

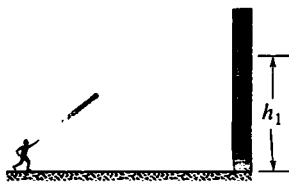
12. Spadając na ziemię, mandarynka przelatuje przed trzema oknami — 4, 5 i 6 — które są jednakowych rozmiarów i równo od siebie od siebie w poziomie. Uszereguj te okna w zależności od: c) czasu przelotu mandarynki przed nimi (od najdłuższego do najkrótszego), d) wartości prędkości, z jaką przelatuje przed nimi mandarynka (od największej do najmniejszej).



Rys. 4.25. Pytanie 7

13. Samolot, lecący poziomo ze stałą prędkością równą 350 km/h, nad płaskim, poziomym terenem, wypuszcza paczkę z żywnością. Ignorując opór powietrza na ruch paczki można pominąć. Jaka jest prędkość: a) pionowa, b) pozioma prędkości początkowej paczki? c) Jaka jest składowa pozioma prędkości paczki tuż przed jej lądowaniem na ziemię? d) Czy czas spadku paczki byłby dłuższy, gdyby samolot leciał z taką samą prędkością poprzecznie, gdyby prędkość samolotu była 450 km/h?

14. Rzucasz piłkę z prędkością  $\vec{v}_i = (3 \text{ m/s})\hat{i} + (5 \text{ m/s})\hat{j}$  w kierunku ściany, na jakiej wysokości  $h_1$  po czasie  $t_1$  uderzy w ścianę. Następnie rzucasz tę piłkę z prędkością  $\vec{v}_i =$

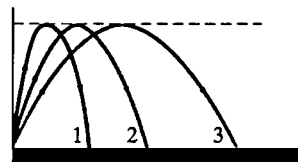


Rys. 4.26. Pytanie 9

$(5 \text{ m/s})\hat{i} + (4 \text{ m/s})\hat{j}$ . a) Czy czas, po którym piłka uderzy w ścianę będzie dłuższy, krótszy czy taki sam jak  $t_1$ , czy też nie da się na to pytanie odpowiedzieć bez dodatkowych informacji? b) Czy wysokość, na jakiej piłka uderzy w ścianę będzie większa, mniejsza czy taka sama jak  $h_1$ , czy też nie da się na to pytanie udzielić odpowiedzi bez dodatkowych informacji?

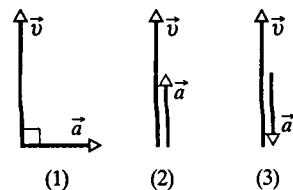
Rzucasz tę piłkę jeszcze raz, tym razem z prędkością  $\vec{v}_i = (3 \text{ m/s})\hat{i} + (5 \text{ m/s})\hat{j}$ . c) Czy czas, po którym piłka uderzy w ścianę będzie dłuższy, krótszy czy taki sam jak  $t_1$ , czy też nie da się na to pytanie odpowiedzieć bez dodatkowych informacji? d) Czy wysokość, na jakiej piłka uderzy w ścianę będzie większa, mniejsza czy taka sama jak  $h_1$ , czy też nie da się na to pytanie udzielić odpowiedzi bez dodatkowych informacji?

10. Na rysunku 4.27 pokazano trzy tory piłki futbolowej, kopniętej na ziemi. Pomijając opór powietrza, uszereguj te tory w zależności od: a) czasu lotu, b) składowej pionowej prędkości początkowej, c) składowej poziomej prędkości początkowej, d) wartości prędkości początkowej, od największej do najmniejszej wartości rozważanych wielkości.



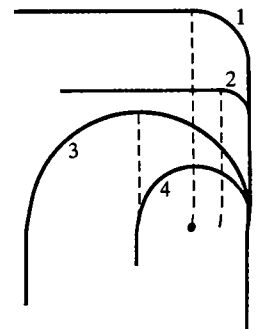
Rys. 4.27. Pytanie 10

11. Na rysunku 4.28 przedstawiono wektory prędkości i przyspieszenia cząstki w pewnej chwili, dla trzech różnych przypadków. W którym z przypadków: a) wartość prędkości cząstki rośnie, b) wartość prędkości cząstki maleje, c) wartość prędkości cząstki nie zmienia się, d) iloczyn  $\vec{v} \cdot \vec{a}$  jest dodatni, e) iloczyn  $\vec{v} \cdot \vec{a}$  jest ujemny, f)  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ ?



Rys. 4.28. Pytanie 11

12. Na rysunku 4.29 pokazano cztery tory (stanowiące połowę lub czwartą część okręgu), po których może pojechać pociąg, poruszający się ze stałą prędkością. Uszereguj te tory w zależności od wartości przyspieszenia — od największej do najmniejszej — z jakim pociąg będzie się poruszał w trakcie pokonywania łuku.



Rys. 4.29. Pytanie 12

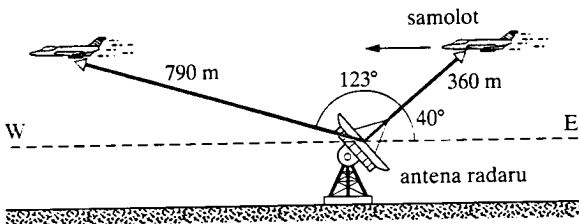
13. a) Czy można poruszać się ruchem przyspieszonym z prędkością o stałej wartości? Czy można poruszać się po łuku z: b) przyspieszeniem równym zeru, c) przyspieszeniem o stałej wartości?

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
 łącznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
 itw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
 wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
 Ware (na tej samej stronie)

## 4.2 Położenie i przemieszczenie

1. Pestka arbuza znajduje się w punkcie o współrzędnych:  $x = -5$  m,  $y = 8$  m,  $z = 0$  m. Znajdź jej wektor położenia wyrażony: a) za pomocą wektorów jednostkowych, b) przez jego długość, c) przez kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi  $x$ , d) Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych. Pestka ta z znalazła się potem w punkcie o współrzędnych  $xyz$  (3 m, 0 m, 0 m). Znajdź jej przemieszczenie wyrażone: e) za pomocą wektorów jednostkowych, f) przez jego długość, g) przez kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi  $x$ .
2. Wektor położenia elektronu wynosi:  $\vec{r} = (5 \text{ m})\hat{i} - (3 \text{ m})\hat{j} + (2 \text{ m})\hat{k}$ . a) Wyznacz długość wektora  $\vec{r}$ . b) Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych.
3. Wektor położenia protonu (w metrach) wynosi początkowo:  $\vec{r}_i = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ , a w chwili późniejszej:  $\vec{r}_f = -2\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ . a) Znajdź wektor przemieszczenia protonu. b) Do jakiej płaszczyzny jest on równoległy?

4. Posterunek radarowy wykrywa samolot, nadlatujący wprost od wschodu. Po raz pierwszy zarejestrowano jego obecność w odległości 360 m od anteny, w kierunku  $40^\circ$  nad horyzontem. W czasie obserwacji samolotu przez ten posterunek jego wzniesienie nad horyzontem zmieniło się o  $123^\circ$  w płaszczyźnie pionowej wschód-zachód, a po raz ostatni zarejestrowano jego obecność w odległości 790 m od anteny (patrz rysunek 4.30). Znajdź przemieszczenie samolotu podczas jego obserwacji przez posterunek.



Rys. 4.30. Zadanie 4

## 4.3. Prędkość średnia i prędkość chwilowa

5. Pociąg jedzie z prędkością o stałej wartości równej 60 km/h na wschód przez 40 min, potem w kierunku  $50^\circ$  na wschód od kierunku północnego przez 20 min, a jeszcze potem na zachód przez 50 min. Wyznacz prędkość średnią pociągu podczas tej podróży.

6. Wektor położenia jonu (w metrach) wynosi w pewnej chwili:  $\vec{r} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ , a 10 s później:  $\vec{r} = -2\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k}$ . Wyznacz prędkość średnią jonu w czasie tych 10 s.

7. Wektor położenia elektronu jest dany wyrażeniem:  $\vec{r} = 3t\hat{i} - 4t^2\hat{j} + 2\hat{k}$ , przy czym  $t$  wyrażono w sekundach, a  $\vec{r}$  — w metrach. a) Wyznacz prędkość  $\vec{v}(t)$  elektronu. Podaj prędkość  $\vec{v}$  w chwili  $t = 2$  s wyrażoną: b) za pomocą wektorów jednostkowych, c) przez jej długość, d) przez kąt określony względem dodatniego kierunku osi  $x$ .

8. Oaza A znajduje się w odległości 90 km na zachód od oazy B. Wielbłąd wyrusza z oazy A i idąc w kierunku  $37^\circ$  na północ od kierunku wschodniego przebywa 75 km w czasie 50 h. Następnie idąc na południe, przebywa 65 km w czasie 35 h, po czym odpoczywa przez 5 h. a) Wyznacz przemieszczenie wielbłąda od oazy A do miejsca odpoczynku. b) Wyznacz prędkość średnią wielbłąda od wyjścia z oazy do końca odpoczynku. c) Wyznacz średnią wartość bezwzględną prędkości wielbłąda w tym czasie. Wielbłąd może wytrzymać bez wody przez 5 dni (120 h). Z jaką średnią prędkością musi on iść po odpoczynku, aby zdążyć na czas do oazy B?

## 4.4. Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe

9. Cząstka porusza się tak, że zależność jej położenia (w metrach) od czasu (w sekundach) jest następująca:  $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$ . Podaj wyrażenia, opisujące zależność od czasu: a) prędkości, b) przyspieszenia tej cząstki.

10. Proton ma w pewnej chwili prędkość (w metrach na sekundę),  $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ , a 4 s później:  $\vec{v} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ . Wyznacz przyspieszenie średnie  $\vec{a}_{sr}$  protonu w czasie tych 4 s, wyrażone: a) za pomocą wektorów jednostkowych, b) przez jego długość i kierunek.

11. Położenie cząstki  $\vec{r}$  poruszającej się w płaszczyźnie  $xy$  jest dane wyrażeniem:  $\vec{r} = (2t^3 - 5t)\hat{i} + (6 - 7t^4)\hat{j}$ , przy czym  $\vec{r}$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach. Oblicz: a)  $\vec{r}$ , b)  $\vec{v}$ , c)  $\vec{a}$  w chwili  $t = 2$  s. d) Jaki jest kierunek stycznej do toru cząstki w chwili  $t = 2$  s?

12. Bojer ślizga się po powierzchni zamaryniętego jeziora ze stałym przyspieszeniem, pochodzącym od wiatru. W pewnej chwili prędkość bojera wynosi  $(6.3\hat{i} - 8.4\hat{j})$  m/s. Trzy sekundy później w wyniku zmiany kierunku wiatru prędkość chwilowa bojera wynosi zero. Ile wynosiło jego średnie przyspieszenie w ciągu tych 3 s?

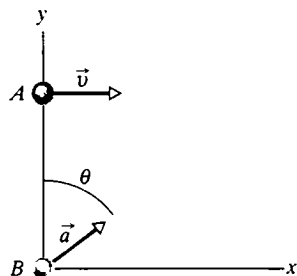
13. Cząstka startuje z punktu, będącego początkiem układu współrzędnych, z prędkością początkową  $\vec{v} = (3\hat{i})$  m/s i stałym

przyspieszeniem  $\vec{a} = (-1\hat{i} - 0.5\hat{j}) \text{ m/s}^2$ . Wyznacz: a) prędkość, b) wektor położenia cząstki w chwili, gdy współrzędna  $x$  cząstki jest największa. ilw [www](http://www)

14. Prędkość  $\vec{v}$  cząstki, poruszającej się w płaszczyźnie  $xy$  jest dana wyrażeniem  $\vec{v} = (6t - 4t^2)\hat{i} + 8\hat{j}$ , przy czym  $\vec{v}$  wyrażone jest w metrach na sekundę, a  $t (> 0)$  — w sekundach. a) Wyznacz przyspieszenie cząstki w chwili  $t = 3 \text{ s}$ . b) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, przyspieszenie cząstki jest równe zeru? c) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, prędkość cząstki jest równa zeru? d) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, prędkość cząstki ma wartość  $10 \text{ m/s}$ ?

15. Cząstka startuje z punktu, będącego początkiem układu współrzędnych, w chwili  $t = 0$  z prędkością  $(8\hat{j}) \text{ m/s}$  i porusza się w płaszczyźnie  $xy$  ze stałym przyspieszeniem  $(4\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ m/s}^2$ . Jaka jest: a) współrzędna  $y$ , b) wartość prędkości tej cząstki w chwili, gdy jej współrzędna  $x$  wynosi  $29 \text{ m}$ ?

16. Cząstka  $A$  porusza się wzdłuż prostej o równaniu  $y = 30 \text{ m}$  ze stałą prędkością  $\vec{v}$  o wartości  $3 \text{ m/s}$ , skierowaną zgodnie z dodatnim kierunkiem osi  $x$  (rysunek 4.31). Cząstka  $B$  startuje z punktu, będącego początkiem układu współrzędnych, z prędkością początkową równą zeru i stałym przyspieszeniem  $\vec{a}$  o wartości  $0.4 \text{ m/s}^2$  w chwili, gdy cząstka  $A$  przecina oś  $y$ . Kątem  $\theta$  musi tworzyć wektor  $\vec{a}$  z dodatnim kierunkiem osi  $y$ , aby te dwie cząstki zderzyły się (jeśli w obliczeniach otrzymasz ujemne rozwiązanie, zawierające wyraz z  $t^4$ , podstaw  $u = t^2$  i rozwiąż równanie kwadratowe względem  $u$ )?



Rys. 4.31. Pytanie 16

#### 4.6. Analiza rzutu ukośnego

W niektórych z niżej podanych zadań pominięcie oporu powietrza nie jest zbyt dobrym przybliżeniem, lecz bardzo upraszcza obliczenia.

17. Karabin jest wycelowany w tarczę, odległą od niego o  $30 \text{ m}$ . Kula trafia w tarczę,  $1.9 \text{ cm}$  poniżej punktu, w który celowano. Wyznacz: a) czas lotu kuli. b) wartość prędkości, z jaką kula opuszcza lufę.

18. Kulka stacza się poziomo ze stołu o wysokości  $1,2 \text{ m}$  i spada na podłogę, w punkcie odległym w poziomie od brzegu blatu o  $1,52 \text{ m}$ . a) Jak długo trwał lot kulki? b) Jaka była wartość jej prędkości w chwili, gdy spadła z blatu?

19. Baseballista rzuca piłkę poziomo, z prędkością  $161 \text{ km/h}$ . Zawodnik odbijający piłkę znajduje się w odległości  $18,3 \text{ m}$  od

niego. Pomijając opór powietrza, odpowiedz na pytania: Ile czasu potrzebuje piłka na przebycie: a) pierwszej, b) drugiej połowy tej odległości? O ile zmniejsza się wysokość piłki nad ziemią w czasie, gdy przebywa: c) pierwszą, d) drugą połowę odległości między zawodnikami? e) Dlaczego wartości otrzymane w punktach (c) i (d) nie są jednakowe?

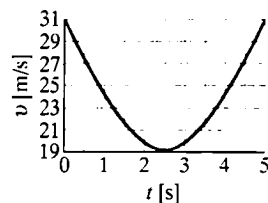
20. Lotkę rzucono poziomo, z prędkością początkową o wartości  $10 \text{ m/s}$  w kierunku punktu  $P$  na tarczy i po  $0,19 \text{ s}$  lotu trafia ona w punkt  $Q$  na obrzeżu tarczy, leżący poniżej punktu  $P$ . a) Jaka jest odległość punktów  $P$  i  $Q$ ? b) Z jakiej odległości od tarczy została rzucona ta lotka?

21. Elektron poruszający się poziomo z prędkością o wartości  $1 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$ , wchodzi w obszar między dwiema poziomymi, naładowanymi elektrycznie płytami metalowymi. Ich obecność powoduje, że elektron doznaje stałego przyspieszenia, skierowanego w dół, o wartości  $1 \cdot 10^{17} \text{ cm/s}^2$ . Wyznacz: a) czas, potrzebny elektronowi na przebycie w tym obszarze  $2 \text{ cm}$  w poziomie. b) odległość przebytą przez niego w tym czasie w pionie. Oblicz ponadto wartości składowych prędkości elektronu: c) poziomej, d) pionowej, po przebyciu tej drogi.

22. Podczas konkursu skoku w dal na mistrzostwach świata w lekkiej atletyce w Tokio w 1991 roku, Mike Powell oddał skok na odległość  $8,95 \text{ m}$ , bijąc 23-letni rekord świata Boba Beamona. Załóż, że prędkość Mike'a Powella w chwili odbicia wynosiła  $9,5 \text{ m/s}$  (dwa razy mniej niż prędkość sprintera) oraz, że w Tokio  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . O ile mniejsza była długość skoku Powella od maksymalnego poziomego zasięgu rzutu cząstki, wyrzuconej z taką samą prędkością, tzn.  $9,5 \text{ m/s}$ ? Pomiń opór powietrza.

23. Kamień został wyrzucony z katapulty w chwili  $t = 0$ . Jego prędkość początkowa miała wartość  $20 \text{ m/s}$  i była skierowana pod kątem  $40^\circ$  w górę od kierunku poziomego. Wyznacz składowe przemieszczenia cząstki od katapulty: a) poziomą, b) pionową, w chwili  $t = 1,1 \text{ s}$ . Oblicz także składowe przemieszczenia: c) poziomą, d) pionową, w chwili  $t = 1,8 \text{ s}$  oraz: e) poziomą, f) pionową w chwili  $t = 5 \text{ s}$ .

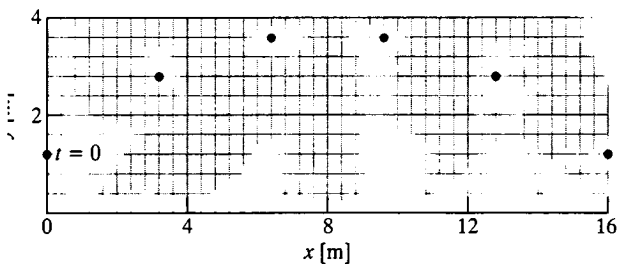
24. Piłkę golfową wybito z powierzchni ziemi. Na rysunku 4.32 przedstawiono wartość jej prędkości jako funkcję czasu, przy czym  $t = 0$  oznacza chwilę uderzenia piłki. a) Jaka odległość przebędzie ta piłka w poziomie, do chwili ponownego zetknięcia się z ziemią? b) Na jaką największą wysokość nad ziemię wzniesie się ta piłka?



Rys. 4.32. Zadanie 24

25. Z karabinu, wystrzeliwującego kule z prędkością  $460 \text{ m/s}$ , chcemy trafić w cel, znajdujący się na tej samej wysokości co karabin i odległy od niego o  $45,7 \text{ m}$ . O ile wyżej od celu należy skierować lufę karabinu, aby się to udało?

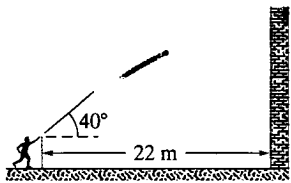
26. Siatkarz odbija piłkę na wysokości 1,2 m nad parkietem. Na rysunku 4.33 przedstawiono kilka położeń piłki, odpowiadających chwilom odległym o 0,25 s, przy czym moment odbicia piłki przyjęto za  $t = 0$ . a) Jaka jest wartość prędkości początkowej piłki? b) Jaka jest wartość prędkości piłki w chwili jej największego wzniesienia nad parkietem? c) Ile wynosi to największe wzniesienie piłki?



rys. 4.33. Zadanie 26

27. Wykaż, że maksymalna wysokość, osiągnięta w locie pocisku wynosi  $y_{\max} = (v_0 \sin \theta_0)^2 / 2g$ .

28. Rzucasz piłkę w kierunku ściany, z prędkością początkową o wartości 25 m/s, skierowaną pod kątem  $40^\circ$  w górę od kierunku poziomego (rys. 4.34). Ściana jest odległa od punktu wyrzucenia piłki o 22 m. a) Na jakiej wysokości, liczonej od punktu wyrzucenia, piłka uderzy w ścianę? b) Ile będą wynosić składowe prędkości piłki, pozioma i pionowa, w chwili jej uderzenia w ścianę? c) Czy w chwili uderzenia w ścianę piłka będzie już poza najwyższym punktem swego toru?



Rys. 4.34. Zadanie 28

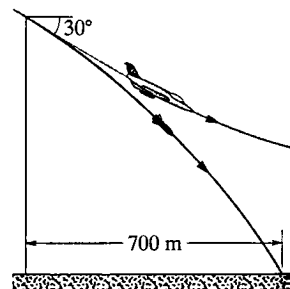
29. Piłkę wybito w powietrze z powierzchni ziemi. Na wysokości 9,1 m jej prędkość (w metrach na sekundę) jest równa:  $\vec{v} = 7,6\hat{i} + 6,1\hat{j}$ , przy czym  $\hat{i}$  jest wektorem jednostkowym w poziomie, a  $\hat{j}$  jest wektorem jednostkowym, skierowanym do góry. a) Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka? b) Jaką całkowitą odległość przebędzie ona w poziomie? Wyznacz: c) długość, d) kierunek wektora prędkości piłki tuż przed jej spadkiem na ziemię.

30. W ciągu dwóch sekund od wystrzelenia z powierzchni ziemi pocisk przemieścił się o 40 m w poziomie i o 53 m w pionie. Wyznacz składowe prędkości początkowej pocisku: a) poziomą, b) pionową. c) W jakiej odległości w poziomie od punktu jego wystrzelenia znajdzie się pocisk w chwili, gdy osiągnie maksymalną wysokość nad ziemią?

31. Piłkarz odbija piłkę z woleja tak, że po czasie 4,5 s upada ona na odległości 46 m od niego. Oblicz: a) wartość, b) kierunek prędkości początkowej piłki, jeśli w chwili odbicia noga piłkarza znajdowała się na wysokości 150 cm nad boiskiem.

32. Początkujący skoczek do wody odpycha się w poziomie z prędkością 2 m/s od brzoju pomostu, znajdującego się 10 m nad powierzchnią wody. a) Jak daleko w poziomie od brzoju pomostu znajdzie się ten skoczek po upływie 0,8 s od oderwania się od pomostu? b) Jak wysoko nad poziomem wody w basenie będzie się wówczas znajdował? c) W jakiej odległości w poziomie od brzoju pomostu wpadnie on do wody?

33. Samolot lecący z prędkością 290 km/h nurkuje pod kątem  $30^\circ$  do poziomu i wypuszcza pocisk, w celu zmylenia radaru nieprzyjaciela (rys. 4.35). Odległość w poziomie od punktu wyrzucenia pocisku do punktu jego spadku na ziemię wynosi 700 m. a) Jak długo trwał lot pocisku? b) Na jakiej wysokości nad ziemią pocisk ten został wypuszczony? ilw



Rys. 4.35. Zadanie 33

34. Wartość prędkości pewnego pocisku w chwili jego wystrzelenia jest pięć razy większa od wartości jego prędkości w punkcie maksymalnego wzniesienia. Oblicz kąt wzniesienia  $\theta_0$ , pod jakim pocisk został wystrzelony.

35. Piłka stacza się poziomo z prędkością 1,52 m/s na schody, których stopnie mają wysokość 20,3 cm i głębokość również 20,3 cm. Na który stopień spadnie piłka, gdy po raz pierwszy uderzy w schody?

36. Piłkarz wykopuje piłkę z powierzchni boiska z prędkością początkową o wartości 19,5 m/s, pod kątem  $45^\circ$  do poziomu. Inny zawodnik, stojący w odległości 55 m od miejsca wykopu w kierunku lotu piłki, rusza w tej samej chwili na jej spotkanie. Z jaką średnią prędkością powinien on biec, aby dotrzeć do piłki w chwili jej upadku na boisko? Pomiń opór powietrza.

37. Samolot lecący lotem nurkowym pod kątem  $53^\circ$  do pionu, wypuszcza pocisk na wysokości 730 m nad ziemią. Pocisk ten spada na ziemię po 5 s od jego wypuszczenia. a) Jaka jest wartość prędkości samolotu? b) Jaką odległość przebywa pocisk w poziomie w czasie swego lotu? Jakie są składowe prędkości pocisku: c) pozioma, d) pionowa, w chwili jego spadku na ziemię?

38. Podczas meczu piłki siatkowej górny brzeg siatki znajduje się na wysokości 2,24 m nad parkietem, a boisko ma wymiary 9 m na 9 m po każdej stronie siatki. Serwując z wysokości, zawodniczka uderza piłkę na wysokości 3 m nad parkietem i w odległości 8 m od siatki. Zakładając, że piłka jest zagrywana poziomo, wyznacz: a) minimalną prędkość początkową piłki, potrzebną do jej przejścia nad siatką, b) maksymalną wartość tej prędkości, niezbędną do tego, aby spadła ona na boisko przed linią końcową przeciwległej części boiska.

39. Baseballista odbijający piłkę uderza ją na wysokości 1,22 m nad boiskiem i nadaje jej kierunek tworzący z poziomem kąt 45°. Zasięg w poziomie tak uderzonej piłki (odległość przebyta w poziomie do punktu, leżącego na wysokości punktu odbicia) wynosi 107 m. a) Czy piłka przeleci nad ogrodzeniem o wysokości 1,32 m, znajdującym się w odległości 97,5 m od punktu wybiecia? b) Niezależnie od tego, jaka jest odpowiedź na pierwsze pytanie, wyznacz odległość środka piłki od górnego brzegu ogrodzenia w chwili, gdy piłka znajdzie się w takiej samej odległości od odbijającego, jak ogrodzenie. [www](#)

40. W czasie meczu tenisowego serwujący nadaje piłce prędkość początkową o wartości 23,6 m/s, uderzając ją poziomo na wysokości 2,37 m nad kortem. Znajduje się on wówczas w odległości 12 m od siatki o wysokości 0,9 m. a) Czy piłka przejdzie nad siatką? b) W jakiej odległości od górnego brzegu siatki będzie się ona znajdowała w chwili, gdy doleci do płaszczyzny siatki? Przy kolejnym serwie zawodnik uderza piłkę niemal tak samo, jedyna różnica polega na tym, że tym razem kieruje ją pod kątem 5° w dół od kierunku poziomego. c) Czy piłka przejdzie nad siatką? d) W jakiej odległości od górnego brzegu siatki będzie się ona znajdowała w chwili, gdy doleci do płaszczyzny siatki?

41. Piłkarz wykonujący rzut wolny z punktu leżącego na wprost bramki, w odległości 50 m od niej, nadaje piłce prędkość początkową o wartości 25 m/s. Wyznacz zakres kąta, pod jakim powinna zostać uderzona piłka, aby strzał trafił do bramki. Położenie bramki znajduje się na wysokości 3,44 m nad boiskiem. Jeśli chcesz rozwiązać to zadanie algebraicznie, skorzystaj z tożsamości  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , aby znaleźć związek między  $\tan^2 \theta$  a  $1/\cos^2 \theta$ , co pozwoli ci otrzymać równanie kwadratowe, które potem rozwiążesz.

#### 4.7. Ruch jednostajny po okręgu

42. Jaka jest wartość przyspieszenia sprintera, biegnącego z prędkością o wartości 10 m/s, po łuku o promieniu 25 m?

43. Satelita obiega Ziemię po orbicie kołowej na wysokości 400 km nad powierzchnią Ziemi. Okres obiegu wynosi 98 min. Wyznacz: a) wartość prędkości, b) wartość przyspieszenia dośrodkowego tego satelity.

44. Skrzydło małego wentylatora wykonuje 1200 obrotów na minutę, a jego koniec znajduje się w odległości 0,15 m od osi obrotu. a) Jaką drogę przebywa koniec skrzydła w czasie jednego obrotu? Jaka jest wartość jego: b) prędkości, c) przyspieszenia? d) Ile wynosi okres obrotu?

45. W czasie ćwiczeń na poziomej wirówce astronauta znajduje się w odległości 5 m od osi obrotu. a) Jaka jest wartość jego prędkości, jeśli przyspieszenie dośrodkowe ma wartość  $7g$ ? b) Ile obrotów na minutę musi wykonywać wirówka, aby osiągnąć takie przyspieszenie astronauty? c) Ile wynosi wówczas okres ruchu?

46. Karuzela obraca się wokół osi pionowej ze stałą szybkością. Pasażer znajdujący się na obrzeżu karuzeli porusza się z prędko-

ścią o stałej wartości, równej 3,66 m/s. Jak daleko od osi obrotu karuzeli i w jakim względem niej kierunku znajduje się pasażer, gdy jego przyspieszenie chwilowe: a) ma wartość  $1,83 \text{ m/s}^2$  i jest skierowane na wschód, b) ma wartość  $1,83 \text{ m/s}^2$  i jest skierowane na południe?

47. a) Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego ciała na równiku, wynikająca z ruchu obrotowego Ziemi? b) Ile musiałyby wynosić okres obrotu Ziemi, aby ciała na równiku doznawały przyspieszenia dośrodkowego o wartości  $9,8 \text{ m/s}^2$ ? [www](#)

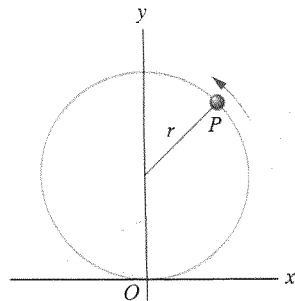
48. Francuski szybki pociąg o nazwie TGV (Train à Grande Vitesse) ma nominalną średnią wartość prędkości 216 km/h. Zakłada się, że jego pasażerowie nie powinni doznawać przyspieszenia o wartości większej niż  $0,05g$ . a) Ile wynosi najmniejszy promień toru, po jakim może jechać pociąg z podaną prędkością, aby nie przekroczyć tej granicy? b) Z jaką prędkością może jechać ten pociąg po torze o promieniu 1 km, aby przyspieszenie nie przekroczyło założonej wartości?

49. Diabelski młyn ma promień 15 m i wykonuje 5 obrotów na minutę wokół osi poziomej. a) Ile wynosi okres jego ruchu? Ile wynosi przyspieszenie dośrodkowe pasażera, siedzącego w odległości 15 m od osi obrotu, gdy jest on na: b) największej, c) najmniejszej wysokości nad ziemią? [ikw](#)

50. Gdy duża gwiazda staje się *supernową*, jej rdzeń może ulec tak silnej kompresji, że stanie się *gwiazdą neutronową* o promieniu ok. 20 km (czyli takim, jak rozmiar aglomeracji San Francisco). Jaka jest: a) wartość prędkości cząstek na równiku gwiazdy neutronowej, b) wartość ich przyspieszenia dośrodkowego, jeśli gwiazda wykonuje jeden obrót na minutę? c) Czy wartości otrzymane w punktach (a) i (b) zwiększą się, zmniejszą się czy pozostaną bez zmiany, gdy gwiazda będzie obracać się szybciej?

51. Po uwiązaniu kamienia na sznurku chłopiec zatacza nim w poziomie okrąg o promieniu 1,5 m na wysokości 2 m nad ziemią. Sznurek pęka, kamień odlatuje w bok i spada na ziemię, po przebyciu w poziomie odległości 10 m. Jaka była wartość jego przyspieszenia dośrodkowego, gdy poruszał się po okręgu?

52. Cząstka  $P$  porusza się z prędkością o stałej wartości po okręgu o promieniu  $r = 3 \text{ m}$  (rys. 4.36), wykonując pełen obieg toru w czasie 20 s. W chwili  $t = 0$  cząstka przechodzi przez punkt  $O$ . Znajdź wektory położenia cząstki (w stosunku do punktu  $O$ ) w chwili, gdy  $t$  równa się: a) 5 s, b) 7,5 s, c) 10 s, podając ich wartości i kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . d) Wyznacz



Rys. 4.36. Zadanie 52

przemieszczenie cząstki w przedziale czasu, od końca piątej do końca dziesiątej sekundy ruchu. e) Oblicz średnią prędkość cząstki w tym przedziale czasu oraz prędkość cząstki: f) na początku, g) na końcu tego przedziału. Wyznacz przyspieszenie cząstki: h) na początku, i) na końcu tego przedziału czasu.

#### 4.8. Ruch względny w jednym wymiarze

53. Operator na platformie furgonetki jadącej na zachód z prędkością 20 km/h filmuje geparda, biegnącego w tym samym kierunku o 30 km/h szybciej niż samochód. Nagle gepard zatrzymuje się, obraca i biegnie na wschód z prędkością 45 km/h, jak to szybko obliczył wystraszony członek ekipy filmowej stojący w pobliżu toru geparda. Zmiana prędkości zajęła zwierzęciu 2 s. Wyznacz przyspieszenie geparda z punktu widzenia: a) operatora, b) wystraszonego członka ekipy.

54. Łódź płynie w górę rzeki z prędkością 14 km/h w stosunku do wody. Woda płynie z prędkością 9 km/h względem brzegu. a) Ile wynosi prędkość łodzi względem brzegu? b) Znajdujące się na pokładzie dziecko przechodzi z dziobu na rufę łodzi z prędkością 6 km/h w stosunku do łodzi. Ile wynosi prędkość dziecka względem brzegu?

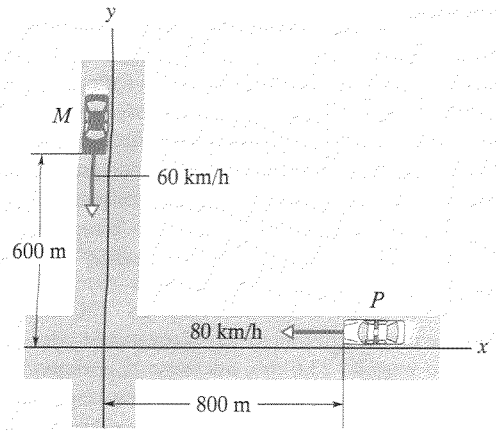
55. Schody ruchome o długości 15 m przewożą stojącą na nich osobę na piętro w czasie 60 s. Gdy schody są unieruchomione, osoba ta wchodzi po nich na górę w czasie 90 s. W jakim czasie dotrze na piętro ta osoba, wchodząc po schodach w ruchu? Czy odpowiedź zależy od długości schodów?

#### 4.9. Ruch względny w dwóch wymiarach

56. W rugby gracz może przekazać piłkę partnerowi pod warunkiem, że podanie nie odbywa się „do przodu” (tzn. prędkość piłki nie może mieć składowej wzdłuż boiska, skierowanej ku bramce drużyny przeciwnej). Załóżmy, że gracz biegnie wzdłuż boiska w kierunku bramki przeciwnika, z prędkością 4 m/s i rzuca piłkę z prędkością 6 m/s względem siebie. Pod jakim najmniejszym kątem w stosunku do kierunku biegu może on podać tę piłkę, aby nie popełnić przewinienia?

57. Śnieg pada pionowo ze stałą prędkością 8 m/s. Z punktu widzenia kierowcy samochodu jadącego po prostej, poziomej drodze z prędkością 50 km/h płatki śniegu spadają na ziemię ukośnie. Pod jakim kątem do pionu spadają płatki śniegu?

58. Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym, jak pokazano na rysunku 4.37. W pewnej chwili, dla której wykonano rysunek, samochód policyjny  $P$  jest odległy od skrzyżowania o 800 m i porusza się z prędkością 80 km/h, a pojazd  $M$  jest odległy od skrzyżowania o 600 m i porusza się z prędkością 60 km/h. a) Ile wynosi prędkość pojazdu  $M$  w stosunku do samochodu policyjnego, wyrażona za pomocą wektorów jednostkowych? b) Jaki jest kierunek prędkości, obliczonej w punkcie (a), w stosunku do linii łączącej obydwie pojazdy w tej chwili? Czy odpowiedzi na pytania (a) i (b) będą ulegać zmianie, gdy pojazdy będą się zbliżać do skrzyżowania bez zmiany swoich prędkości?



Rys. 4.37. Zadanie 58

59. Pociąg jedzie na południe z prędkością 30 km/h (względem toru) w deszczu, którego krople znosi wiatr, wiejący na południe. Nieruchomy obserwator na ziemi stwierdza, że tor każdej kropli tworzy z poziomem kąt  $70^\circ$ . Obserwator w pociągu widzi natomiast, że deszcz pada dokładnie pionowo. Wyznacz wartości prędkości kropli deszczu względem ziemi.

60. Statek  $A$  znajduje się 4 km na północ i 2,5 km na wschód od statku  $B$ . Statek  $A$  ma prędkość 22 km/h, skierowaną na południe, a statek  $B$  prędkość 40 km/h, skierowaną pod kątem  $37^\circ$  na północ od kierunku wschodniego. a) Ile wynosi prędkość  $A$  względem  $B$ ? Wyraź odpowiedź za pomocą wektorów jednostkowych  $\hat{i}$  i  $\hat{j}$ , przy czym wektor  $\hat{i}$  jest skierowany na wschód. b) Podaj wyrażenie na położenie  $A$  względem  $B$  jako funkcję czasu, wyrażoną za pomocą wektorów  $\hat{i}$  i  $\hat{j}$ , przy czym  $t = 0$  oznacza chwilę opisaną wyżej. c) W jakiej chwili odległość statków będzie najmniejsza? d) Ile wynosi ta odległość?

61. Dwa statki  $A$  i  $B$  wychodzą jednocześnie z portu. Statek  $A$  płynie na północ z prędkością 24 węzłów, a statek  $B$  płynie z prędkością 28 węzłów w kierunku  $40^\circ$  na zachód od kierunku południowego (1 węzeł jest równy 1 mili morskiej na godzinę — patrz dodatek D). a) Jaka jest wartość i kierunek prędkości statku  $A$  względem  $B$ ? b) Po jakim czasie statki będą od siebie odległe o 160 mil morskich? c) W jakim kierunku względem  $A$  będzie się wówczas znajdował statek  $B$ ? *ilw*

62. Drewniany wagon towarowy jedzie po prostym torze z prędkością  $v_1$ . Snajper oddaje w jego stronę strzał z karabinu, przy czym prędkość początkowa kuli ma wartość  $v_2$ . Kula przebija obie podłużne ściany wagonu, a otwory w tych ścianach leżą dokładnie naprzeciwko siebie (z punktu widzenia obserwatora, znajdującego się w wagonie). W jakim kierunku, w stosunku do toru, został oddany strzał? Przyjmij, że przechodząc przez ścianę wagonu kula nie zmienia kierunku lotu, lecz jej prędkość zmniejsza się o 20%. Wykonaj obliczenia dla  $v_1 = 85$  km/h i  $v_2 = 650$  m/s. Dlaczego do rozwiązania zadania nie musisz znać szerokości wagonu?



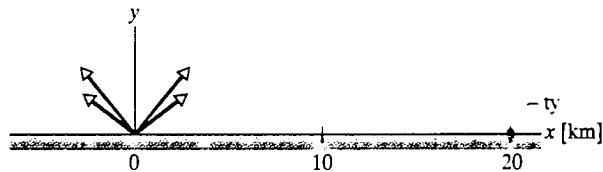
63. W rzece o szerokości 200 m woda płynie na całej szerokości z prędkością 1,1 m/s. Rzeka płynie przez dżunglę na wschód. Podróżnik zamierza opuścić małą polankę na południowym brzegu rzeki i przepłynąć się na drugi brzeg motorówką, rozwijającą stałą prędkość o wartości 4 m/s względem wody. Na północnym brzegu rzeki jest również polanka. Znajduje się ona w odległości 82 m w górę rzeki, licząc od punktu przeciwnieległego do polanki na brzegu południowym. a) W jakim kierunku powinien skierować swoją łódź podróżnik, jeśli chce przepłynąć rzekę po linii prostej i wylądować na polance na brzegu północnym? b) Jak długo będzie trwała ta przeprawa?

#### Zadanie dodatkowe

54. Śmiercionośna ściana. Duża, metaliczna planetoida uderza w Ziemię. W krótkim czasie tworzy się krater w skale, gdyż odłamki skalne są wyrzucane w górę i na boki. W tabeli niżej podano pięć par wartości prędkości, z jaką wyrzucany jest taki odłamek, oraz kąta jego wyrzutu (w stosunku do poziomu), wyznaczonych na podstawie modelu tworzenia się kraterów (oczywiście wyrzucane są także odłamki skalne o pośrednich wartościach prędkości i kąta). Wyobraź sobie, że znajdujesz się w punkcie  $x = 20$  km, gdy planetoida uderza w ziemię w punkcie  $x = 0$  w chwili  $t = 0$  (rys. 4.38). a) Jakie są współrzędne  $x$  i  $y$  w chwili

$t = 20$  s lecących w twoim kierunku odłamków skalnych o parametrach początkowych wyrzutu, odpowiadających przypadkom od A do E? b) Przedstaw te współrzędne na wykresie, a następnie narysuj łączącą je krzywą, aby uwzględnić odłamki o pośrednich wartościach prędkości i kąta ich wyrzucenia. Kształt tej krzywej umożliwi ci uzmysłowanie sobie, co widziałbyś, patrząc w kierunku nadlatujących odłamków skalnych, a więc co zapewne widziały dinozaury w czasie deszczu planetoid dawno, dawno temu.

Odłamek	Wartość prędkości [m/s]	Kąt [stopnie]
A	520	14
B	630	16
C	750	18
D	870	20
E	1000	24



Rys. 4.38. Zadanie 64

# 5 Siła i ruch I

7 kwietnia 1974 roku Belg John Massis zdołał ruszyć z miejsca dwa wagony nowojorskiej kolei na Long Island. Zacisnął on zęby na wędzidle, połączonym liną z wagonem, po czym pochylał się do tyłu, odpychając się nogami od podkładów. Wagony ważyły łącznie ok. 80 ton.

Czy Massis musiał ciągnąć wagony z nadludzką siłą, aby nadać im przyspieszenie?

Odpowiedź znajdziesz w tym odcziale.



## 5.1. Co jest przyczyną przyspieszenia?

Jeśli widzisz, że prędkość cząstki (ciała punktowego) zmienia wartość lub kierunek, to zdajesz sobie sprawę, że coś musiało spowodować tę zmianę (czyli przyspieszenie ciała). Z codziennego doświadczenia wiesz, że zmiana prędkości musi pochodzić od oddziaływania ciała z innym ciałem w jego otoczeniu. Na przykład, jeśli dostrzegasz, że ślizgający się po lodzie krążek hokejowy nagle zatrzymuje się lub gwałtownie zmienia kierunek ruchu, to podejrzewasz, że uderzył on niewielki grzbiet na powierzchni lodu.

Oddziaływanie, które może nadać ciału przyspieszenie, nazywamy siłą. Możemy poglądowo, siła jest tym, co odpycha lub przyciąga ciało — mówimy, że siła działa na ciało. Na przykład, krążek hokejowy, wpadający na grzbiet na powierzchni lodu doznaje „pchnięcia”, co powoduje jego przyspieszenie. Związek siły z wywołanym przez nią przyspieszeniem, podany po raz pierwszy przez Izaka Newtona (1642–1727), jest przedmiotem niniejszego rozdziału. Analiza tej zależności, oparta na rozważaniach Newtona, nosi nazwę *mechaniki klasycznej* (newtonowskiej). Trzy podstawowe jej prawa, które zbadamy szczegółowo, noszą nazwę zasad dynamiki Newtona.

Mechanika klasyczna nie opisuje wszystkich sytuacji spotykanych w przyrodzie. Jeśli prędkości oddziałujących ciał są bardzo duże — niewiele mniejsze od prędkości światła — to zamiast mechaniki klasycznej trzeba zastosować szczególną teorię względności Einsteina, która prawidłowo opisuje ruch z dowolną prędkością, także z prędkościami bliską prędkości światła. Jeśli oddziałujące ciała są bardzo małe — ich rozmiary są rzędu rozmiarów składników budowy atomu (mogą to być na przykład elektrony w atomie), to nie należy posługiwać się mechaniką klasyczną, lecz mechaniką kwantową. Fizycy uważają dziś mechanikę klasyczną za przypadek szczególny tych dwóch ogólnych teorii. Jest to jednak bardzo ważny przypadek szczególny, dający prawidłowy opis ruchu ciał, zarówno bardzo małych (niemal rozmiarów atomów), jak i bardzo dużych (na przykład gwiazdek i ich skupisk).

## 5.2. Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Przed sformułowaniem praw mechaniki przez Newtona uważano, że aby utrzymać ciało w ruchu o stałej prędkości coś — jakaś „siła” musi na nie działać. W tym samym duchu sądzono, że „stanem naturalnym” ciała jest jego spoczynek. Ludziom wydawało się, że aby utrzymać ciało w ruchu ze stałą prędkością, należy je jakoś napędzać, na przykład popychać lub ciągnąć. Jeśli nie będziemy tego robić, to ciało „w sposób naturalny” w końcu się zatrzyma.

Pogląd ten wyglądał rozsądnie. Krążek, wprawiony w ruch ślizgowy po drewnianej podłodze będzie zwalniał, aż w końcu się zatrzyma. Jeśli chcemy, aby poruszał się on po podłodze ze stałą prędkością, to musimy go przez cały czas popychać lub ciągnąć.

Jeśli jednak wykonamy takie samo doświadczenie na gładkiej powierzchni lodu na torze łyżwiarskim, to ruch krążka będzie trwał znacznie dłużej. Możemy sobie wyobrazić coraz bardziej śliskie powierzchnie, po których krążek

będzie się ślizgał coraz dalej. W przypadku skrajnym otrzymamy bardzo długą niezwykle śliską powierzchnię, na której krążek praktycznie nie zwalnia (bardzo dobrym laboratoryjnym przybliżeniem takiej sytuacji jest ruch krążka na poduszce powietrznej, wytworzonej na poziomym stole z wieloma otworami, przez które wydmuchiwane jest powietrze).

Z tych obserwacji możemy wyciągnąć wniosek, że jeśli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ze stałą prędkością. Otrzymujemy w ten sposób pierwszą zasadę dynamiki Newtona.

► **Pierwsza zasada dynamiki Newtona.** Jeśli na ciało nie działa żadna siła, to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

Innymi słowy, jeśli ciało spoczywa, to pozostanie w spoczynku, a jeśli się porusza, to będzie się nadal poruszać z tą samą prędkością (to znaczy z prędkością o tej samej wartości i kierunku).

### 5.3. Siła

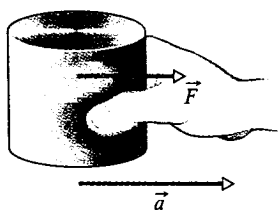
Zdefiniujemy teraz jednostkę siły. Wiemy już, że siła jest przyczyną przyspieszenia ciała. Możemy zatem określić jednostkę siły za pomocą przyspieszenia, jakie nadaje ona pewnemu ciału wzorcowemu. W charakterze ciała wzorcowego użyjemy (a właściwie wyobrazimy sobie, że używamy) wzorca kilograma z rysunku 1.4. Temu ciału przypisano — z definicji — masę równą dokładnie 1 kg.

Umieścimy ciało wzorcowe na poziomym stole bez tarcia i ciągniemy je w prawo (rys. 5.1). Metodą prób i błędów możemy doprowadzić do tego, aby przyspieszenie ciała wynosiło  $1 \text{ m/s}^2$ . Uznamy wtedy — na mocy definicji — że siła, jaką działamy na ciało, jest równa 1 niutonowi (oznaczanemu jako N).

Możemy działać na nasze ciało wzorcowe siłą 2 N, nadając mu przyspieszenie  $2 \text{ m/s}^2$ , itd. Mówiąc ogólnie, jeśli ciało wzorcowe o masie 1 kg uzyskuje przyspieszenie o wartości  $a$ , to działa na nie siła o wartości (w niutonach) równa liczbowo wartości jego przyspieszenia (w metrach na sekundę do kwadratu).

Tak więc miarą siły jest wywołane przez nią przyspieszenie. Przyspieszenie jest jednak wektorem, tzn. ma zarówno wartość, jak i kierunek. Czy zatem siła jest też wielkością wektorową? Łatwo możemy przypisać sile kierunek (niech będzie kierunek przyspieszenia), lecz to jeszcze nie wystarczy. Musimy wykazać doświadczalnie, że siła jest istotnie wielkością wektorową. Dowód taki przeprowadzono — siły są wielkościami wektorowymi, a ich składanie podlega prawom algebry wektorowej z rozdziału 3.

Oznacza to, że gdy na ciało działają dwie lub więcej sił, ich siłą wypadkową otrzymujemy, dodając wektorowo poszczególne siły składowe. Jest to siła, której działanie na ciało jest takie samo, jak łączne działanie sił składowych. Właściwość ta nosi nazwę **zasady superpozycji sił**. Świat byłby bardzo dziwnie skonstruowany, gdyby w sytuacji, gdy na przykład ty i kolega ciągniecie ciało wzorcowe w tym samym kierunku siłą 1 N każdy, siła wypadkowa wynosiła — powiedzmy — 14 N.



Rys. 5.1. Siła  $\vec{F}$ , działająca na wzorec kilograma nadaje mu przyspieszenie  $\vec{a}$

W tej książce siłę będziemy zwykle oznaczać jako  $\vec{F}$ , a siłę wypadkową jako  $\vec{F}_{\text{wyp}}$ . Podobnie, jak w przypadku innych wektorów siłę, między innymi siłę wypadkową, można rozłożyć na składowe wzdłuż osi układu współrzędnych. Gdy wszystkie siły działają wzdłuż jednej osi, można opuścić strzałki nad symbolami sił i używać znaku do oznaczania kierunku sił wzdłuż tej osi.

Możemy teraz zastąpić poprzednie sformułowanie pierwszej zasady dynamiki Newtona sformułowaniem, które jest bardziej poprawne, korzystając z pojęcia *siły wypadkowej*.

➤ **Pierwsza zasada dynamiki Newtona.** Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zero ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$ ), to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

Na ciało może działać wiele sił, ale jeśli ich wypadkowa wynosi zero, to ciało nie doznaje przyspieszenia.

### Inercjalne układy odniesienia

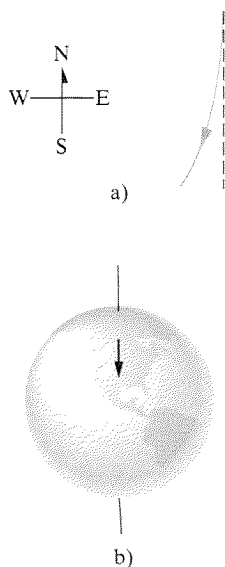
Pierwsza zasada dynamiki Newtona nie obowiązuje we wszystkich układach odniesienia, ale zawsze można znaleźć taki układ, w którym zasada ta (podobnie jak cała mechanika klasyczna) jest słuszna. Takie układy nazywamy **inercjalnymi układami odniesienia** lub po prostu **układami inercjalnymi**.

➤ **Inercjalny układ odniesienia** jest to taki układ, w którym spełnione są zasady dynamiki Newtona.

Na przykład, układ związany z Ziemią można uważać za inercjalny pod warunkiem, że zjawiska związane z astronomicznym ruchem Ziemi (jak jej ruch obrotowy) można pominąć.

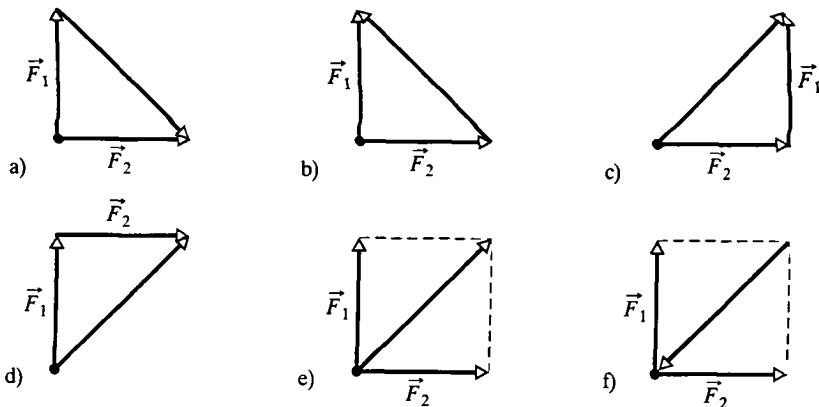
Takie założenie jest usprawiedliwione, jeśli na przykład badamy ruch ślizgowy krążka na lodzie (bez tarcia) na krótkiej drodze — obserwator na Ziemi stwierdzi wówczas, że dla tego ruchu zasady mechaniki klasycznej są spełnione. Jeśli jednak będziemy badać ruch tego krążka na drodze bardzo długiej, powędzamy od bieguna północnego do południowego, to obserwator na Ziemi stwierdzi, że poruszając się na południe, krążek doznaje niewielkiego przyspieszenia w kierunku zachodnim (rys. 5.2a). Obserwator ten nie będzie mógł jednak wykryć żadnej siły, powodującej to przyspieszenie. Układ związany z Ziemią jest w tym przypadku **układem nieinercjalnym**, gdyż dla tego ruchu krążka nie można pominąć ruchu obrotowego Ziemi. Zaskakujące dla obserwatora przyspieszenie krążka, skierowane na zachód, jest bowiem spowodowane obrotem Ziemi pod krążkiem w kierunku na wschód (rys. 5.2b).

W tej książce będziemy zwykle zakładać, że układ związany z Ziemią jest inercjalny i że to w nim dokonujemy pomiarów sił i przyspieszeń. Jeśli jednak jakie pomiary będą wykonywane w układzie nieinercjalnym, na przykład w winietce poruszającej się ruchem przyspieszonym względem Ziemi, to ich wyniki mogą być nieoczekiwane z punktu widzenia mechaniki klasycznej. Przekonamy się o tym m.in. w przykładzie 5.8.



Rys. 5.2. a) Długi tor krążka ślizgającego się bez tarcia po lodzie na południe, widziany przez obserwatora na Ziemi. b) Ziemia pod ślizgającym się na południe krążkiem przesuwa się na wschód z powodu jej obrotu wokół własnej osi

**SPRAWDZIAN 1:** Na którym z pokazanych niżej rysunków siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  są poprawnie dodane do siebie wektorowo, tak że trzeci wektor, pokazany na rysunku jest wektorem ich siły wypadkowej  $\vec{F}_{wyp}$ ?



## 5.4. Masa

Jak wiemy z codziennych obserwacji, taka sama siła nadaje różnym ciałom różne przyspieszenie. Połóż na podłodze piłkę tenisową i kulę do kręgli i kopnij je z jednakową siłą. Nawet bez wykonywania tego doświadczenia wiesz, jaki będzie wynik: piłka tenisowa dozna większego przyspieszenia niż kula do kręgli. Przyspieszenia tych ciał są różne, gdyż masa piłki tenisowej jest inna niż masa kuli do kręgli. Ale co to właściwie jest masa?

W celu wyjaśnienia, jak można zmierzyć masę ciała, wyobraźmy sobie serię doświadczeń w układzie inercjalnym. Najpierw przyłożymy siłę do ciała wzorcowego, którego masę  $m_0$  przyjęliśmy za równą 1 kg. Jeśli ciało to uzyska przyspieszenie  $1 \text{ m/s}^2$ , to stwierdzimy, że przyłożyliśmy do niego siłę 1 N.

Następnie przyłożymy taką samą siłę (będziemy potrzebować jakiegoś sposobu stwierdzenia, że jest to istotnie taka sama siła) do innego ciała, powiedzmy ciała X, którego masy nie znamy. Wyobraźmy sobie, że ciało X uzyska przyspieszenie  $0,25 \text{ m/s}^2$ . Wiemy już, że piłka tenisowa o *mniej* masie uzyskuje *większe* przyspieszenie niż kula do kręgli o *większej* masie, gdy przykładamy do nich (kopiąc je) taką samą siłę. Możemy wysunąć następującą hipotezę: jeśli do dwóch ciał przykładamy jednakową siłę, to stosunek mas tych ciał jest równy odwrotności stosunku uzyskiwanych przez nie przyspieszeń. Dla ciała wzorcowego i ciała X otrzymujemy stąd:

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X}$$

Z tego równania możemy wyznaczyć  $m_X$ :

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1 \text{ kg}) \frac{(1 \text{ m/s}^2)}{(0,25 \text{ m/s}^2)} = 4 \text{ kg}.$$

Nasza hipoteza będzie oczywiście użyteczna tylko wtedy, gdy będzie słuszna także dla innych wartości przykładanej do ciał siły. Na przykład, przykładając do ciała wzorcowego siłę 8 N, powinniśmy otrzymać przyspieszenie  $8 \text{ m/s}^2$ .

przykładając tę siłę do ciała  $X$  — przyspieszenie  $2 \text{ m/s}^2$ , gdyż wówczas na podstawie wysuniętej hipotezy otrzymamy:

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1 \text{ kg}) \frac{(8 \text{ m/s}^2)}{(2 \text{ m/s}^2)} = 4 \text{ kg},$$

godnie z wynikiem pierwszego doświadczenia. Wykonując wiele takich doświadczeń i uzyskując podobne wyniki, możemy się przekonać, że nasza hipoteza jest konsekwentną i wiarygodną metodę przypisania masy dowolnemu ciału.

Wyniki naszych pomiarów wskazują, że masa jest cechą przynależną samemu ciału, to znaczy, że każde ciało ma właściwą mu masę. Wynika z nich również, że masa jest wielkością skalarną. Niemniej jednak, nadal nie daje nam spokoju pytanie: co to właściwie jest masa?

Słowo „masa” występuje w języku potocznym, podejrzewamy zatem, że powinniśmy je rozumieć intuicyjnie. Może powinniśmy je wiązać z jakąś znaną cechą ciała, np. rozmiarem, ciężarem czy gęstością? Odpowiedź brzmi: nie, te wielkości są nieraz mylone z masą. Możemy powiedzieć tylko tyle, że masa ciała jest tą jego cechą, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie wówczas przyspieszeniem. Masy nie da się prościej zdefiniować. Możemy coś o niej powiedzieć tylko wtedy, gdy nadajemy ciału przyspieszenie, np. wtedy, gdy kopimy piłkę tenisową lub kulę do kręgli.

## 5.5. Druga zasada dynamiki Newtona

Omówione dotychczas definicje, doświadczenia i obserwacje można podsumować jednym prostym stwierdzeniem.

**Druga zasada dynamiki Newtona.** Siła wypadkowa działająca na ciało jest równa iloczynowi masy tego ciała i jego przyspieszenia.

Można to zapisać w postaci równania:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a} \quad (\text{druga zasada dynamiki Newtona}). \quad (5.1)$$

Równanie to jest proste, lecz korzystanie z niego wymaga rozważań. Po pierwsze, musimy mieć pewność, do którego ciała je stosujemy. Po drugie,  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  musi być sumą wektorową *wszystkich* sił działających na to ciało. Siły, które występują w badanej sytuacji fizycznej, lecz działają na inne ciała, nie mogą wchodzić do tej sumy. Jeśli na przykład jesteś jednym z rugbistów w młynie, to siła wypadkowa działająca na ciebie jest sumą wszystkich sił, jakimi cięgną cię i pchają inni zawodnicy. Nie zawiera ona natomiast sił, jakimi ty cięgniesz lub pchasz innych.

Podobnie jak inne równania wektorowe, równanie (5.1) jest równoważne trzem równaniom dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych  $xyz$ :

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x, \quad F_{\text{wyp},y} = ma_y, \quad \text{oraz} \quad F_{\text{wyp},z} = ma_z. \quad (5.2)$$

Każde z tych równań wiąże składową siły wzdłuż jednej z osi ze składową przyspieszenia wzdłuż tej samej osi. Na przykład pierwsze z nich oznacza, że

suma składowych wzdłuż osi  $x$  wszystkich sił działających na ciało jest źródłem składowej przyspieszenia ciała wzdłuż osi  $x$ , lecz nie wywołuje przyspieszenia w kierunkach  $y$  i  $z$ . Patrząc na to z drugiej strony, składowa przyspieszenia  $a_x$  pochodzi jedynie od sumy składowych sił wzdłuż osi  $x$ . Można to wyrazić ogólnie:

► Składowa przyspieszenia wzdłuż danej osi układu współrzędnych jest związana z sumą składowych sił wzdłuż tej osi, a nie ze składowymi siłami wzdłuż innych osi.

Z równania 5.1 wynika, że jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, to przyspieszenie ciała  $\vec{a} = 0$ . Jeśli ciało jest w spoczynku, to będzie spoczywać nadal; jeśli się porusza, to będzie nadal w ruchu ze stałą prędkością. W tym przypadku siły działające na ciało *równowazą się* wzajemnie, więc mówimy o *równowadze* zarówno sił, jak i ciała. Mówi się też potocznie, że siły wzajemnie *znoszą się*, lecz termin „znoszą się” może być mylący — *nie oznacza to* przecież, że siły przestają istnieć. Siły nadal działają na ciało.

Równanie (5.1) daje związek między jednostkami układu SI:

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (5.3)$$

(w układzie cgs jednostką masy jest gram (g), przyspieszenia —  $\text{cm/s}^2$ , a siły — dyna ( $1 \text{ dyna} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$ ); patrz także dodatek D).

Rozwiązując zadania związane z drugą zasadą dynamiki Newtona, sporządzamy zwykle rysunek, na którym przedstawiamy tylko to ciało, dla którego wykonujemy sumowanie działających na nie sił (tzw. **diagram sił**). Niektórzy wykładowcy lubią, aby rysować to ciało schematycznie, lecz my — dla oszczędności miejsca — będziemy zwykle przedstawiać je za pomocą kropki. Siły działające na ciało będziemy zaznaczać w postaci wektorów o początku w punkcie, w którym znajduje się ciało. Zwykle będziemy również rysować układ współrzędnych oraz wektor przyspieszenia ciała.

Zbiór dwóch lub większej liczby ciał nazywamy **układem ciał**, a siłę działającą na dowolne z nich, ze strony ciał nie należących do tego układu nazywamy **siłą zewnętrzną**. Jeśli ciała są ze sobą sztywno połączone, to układ można traktować jako jedno ciało złożone, na które działa siła wypadkowa  $\vec{F}_{\text{wyp}}$ , będąca sumą wektorową wszystkich sił zewnętrznych (nie zawiera ona sił wewnętrznych, tzn. sił działających między ciałami składowymi układu). Układem ciał są na przykład lokomotywa i połączony z nią wagon. Jeśli — powiedzmy — do lokomotywy przymocowana jest lina holownicza, to siła przyłożona za jej pośrednictwem działa na cały układ lokomotywa–wagon. Podobnie, jak dla pojedynczego ciała, wypadkowa siła zewnętrzna działająca na układ jest związana z jego przyspieszeniem, a związek ten to nic innego, jak druga zasada dynamiki Newtona, tzn.  $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ , przy czym  $m$  jest całkowitą masą układu ciał.

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku obok przedstawiono dwie siły działające poziomo na klocek umieszczony na parkiecie, po którym może się on poruszać bez tarcia. Załóżmy, że na klocek działa jeszcze jedna siła pozioma  $\vec{F}_3$ . Jaka musi być wartość tej siły i jej kierunek, aby klocek: a) pozostawał w spoczynku, b) poruszał się w lewą stronę ze stałą prędkością o wartości  $5 \text{ m/s}$ ?





## Przykład 5.1

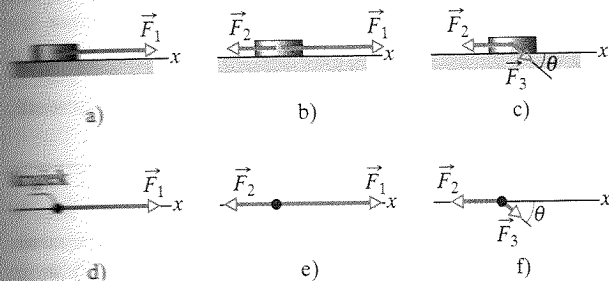
Na rysunkach 5.3a, b i c przedstawiono krążek na lodzie, po którym może się on poruszać bez tarcia wzdłuż osi  $x$  (tzn. ruch zamierzony w jednym wymiarze), oraz działające na niego siły (jedną siłę  $\vec{F}_1$  i dwie siły  $\vec{F}_2$ ). Masa krążka wynosi  $m = 0,2$  kg. Siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  skierowane są wzdłuż osi  $x$ , ich wartości wynoszą:  $F_1 = 4$  N i  $F_2 = 2$  N. Siła  $\vec{F}_3$  działa pod kątem  $\theta = 30^\circ$  do poziomu i ma wartość  $F_3 = 1$  N. Wyznacz przyspieszenie krążka w każdym z tych trzech przypadków.

### ROZWIĄZANIE:

Związek między przyspieszeniem  $\vec{a}$  krążka i działającą na niego wypadkową siłą  $\vec{F}_{wyp}$  jest dany przez drugą zasadę dynamiki Newtona:  $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ . Jednak ruch odbywa się wzdłuż osi  $x$ , dlatego możemy zapisać ją jako równanie dla składowych  $x$ :

$$F_{wyp,x} = ma_x. \quad (5.4)$$

Na rysunkach 5.3d, e i f przedstawiono diagram sił dla przypadków (a), (b) i (c), oznaczając krążek za pomocą kropki.



5.3. Przykład 5.1. a)–c) Siły działające wzdłuż osi  $x$  na krążek poruszający się po lodzie bez tarcia. d)–f) Diagramy sił dla tych trzech przypadków

W przypadku z rysunków 5.3a i d na krążek działa tylko jedna siła pozioma, zatem z równania (5.4) mamy:

$$F_1 = ma_x,$$

skąd po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{(4 \text{ N})}{(0,2 \text{ kg})} = 20 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik jest dodatni, co oznacza, że przyspieszenie krążka jest skierowane w dodatnim kierunku osi  $x$ .

W przypadku z rysunków 5.3b i e na krążek działają dwie siły poziome:  $\vec{F}_1$ , skierowana w kierunku dodatnim osi  $x$ , i  $\vec{F}_2$ , skierowana w ujemnym kierunku tej osi. Z równania (5.4) otrzymujemy więc teraz:

$$F_1 - F_2 = ma_x,$$

skąd po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{(4 \text{ N}) - (2 \text{ N})}{(0,2 \text{ kg})} = 10 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Siła wypadkowa powoduje zatem przyspieszenie krążka, skierowane w dodatnim kierunku osi  $x$ .

W przypadku z rysunków 5.3c i f siła  $\vec{F}_3$  ma kierunek inny niż przyspieszenie krążka — zgodna z przyspieszeniem krążka jest tylko jej składowa  $x$ ,  $F_{3,x}$  (siła  $\vec{F}_3$  ma dwie składowe, lecz tylko jedna z nich działa w kierunku ruchu ciała). Równanie (5.4) ma w tym przypadku postać:

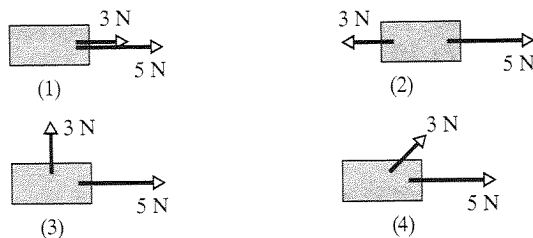
$$F_{3,x} - F_2 = ma_x$$

Z rysunku widać, że  $F_{3,x} = F_3 \cos \theta$ . Otrzymujemy zatem:

$$a_x = \frac{F_{3,x} - F_2}{m} = \frac{F_3 \cos \theta - F_2}{m} = \frac{(1 \text{ N})(\cos 30^\circ) - (2 \text{ N})}{(0,2 \text{ kg})} = -5,7 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

W tym przypadku siła wypadkowa powoduje przyspieszenie krążka skierowane w ujemnym kierunku osi  $x$ .

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono widok z góry tego samego klocka, mogącego się poruszać bez tarcia po podłożu, dla czterech przypadków, w których działają nań dwie siły. Uszereguj te przypadki według: a) wartości siły wypadkowej działającej na klocek, od największych do najmniejszych.



## Przykład 5.2

Na rysunku 5.4a przedstawiono widok (z góry) puszek z herbatnikami o masie  $2$  kg, poruszającej się bez tarcia po poziomej powierzchni, z przyspieszeniem o wartości  $3 \text{ m/s}^2$  i kierunku wyznaczonym przez wektor  $\vec{a}$ . Przyspieszenie to nadają mu trzy siły poziome, z których pokazano tylko dwie:  $\vec{F}_1$  o wartości  $10$  N i  $\vec{F}_2$  o wartości  $20$  N. Wyznacz trzecią z tych sił  $\vec{F}_3$ ; wyraż ją za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jej długość i kierunek.

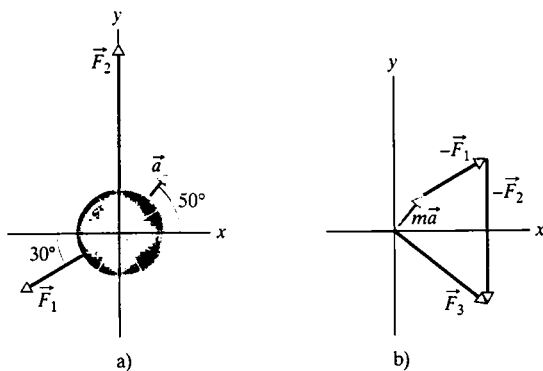
### ROZWIĄZANIE:

1. Wypadkowa  $\vec{F}_{wyp}$  sił działających na puszkę jest sumą trzech sił i związana jest z przyspieszeniem  $\vec{a}$  puszek, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ ). Zatem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a},$$

skąd otrzymujemy:

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \quad (5.5)$$



Rys. 5.4. Przykład 5.2. a) Widok z góry dwóch z trzech sił działających poziomo na puszkę z herbatnikami, pod wpływem których puszka porusza się z przyspieszeniem  $\vec{a}$ . Nie pokazano siły  $\vec{F}_3$ . b) Ustawienie wektorów  $m\vec{a}$ ,  $-\vec{F}_1$  oraz  $-\vec{F}_2$ , umożliwiające wyznaczenie siły  $\vec{F}_3$

2. Ruch odbywa się w dwóch wymiarach, a zatem z równania (5.5) nie można otrzymać  $\vec{F}_3$ , podstawiając do niego po prostu wartości bezwzględne wielkości wektorowych. Musimy dodać do siebie wektorowo  $m\vec{a}$ ,  $-\vec{F}_1$  (wektor przeciwny do  $\vec{F}_1$ ) i  $-\vec{F}_2$  (wektor przeciwny do  $\vec{F}_2$ ). Aby to zrobić, wyznaczmy składowe prawej strony równania (5.5), najpierw wzdłuż osi  $x$ , a następnie wzdłuż osi  $y$ .

Dla składowych  $x$  mamy:

$$F_{3,x} = ma_x - F_{1,x} - F_{2,x} \\ = m(a \cos 50^\circ) - F_1 \cos(-150^\circ) - F_2 \cos 90^\circ.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy:

$$F_{3,x} = (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2) \cos 50^\circ - (10 \text{ N}) \cos(-150^\circ) - (20 \text{ N}) \cos 90^\circ = 12.5 \text{ N}.$$

Analogicznie, dla składowych  $y$ :

$$F_{3,y} = ma_y - F_{1,y} - F_{2,y} \\ = m(a \sin 50^\circ) - F_1 \sin(-150^\circ) - F_2 \sin 90^\circ \\ = (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2) \sin 50^\circ - (10 \text{ N}) \sin(-150^\circ) - (20 \text{ N}) \sin 90^\circ = -10.4 \text{ N}.$$

W zapisie, dokonanym za pomocą wektorów jednostkowych otrzymujemy zatem:

$$\vec{F}_3 = F_{3,x}\hat{i} + F_{3,y}\hat{j} \\ = (12.5 \text{ N})\hat{i} - (10.4 \text{ N})\hat{j} \approx (13 \text{ N})\hat{i} - (10 \text{ N})\hat{j}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Do wyznaczenia wartości wektora  $\vec{F}_3$  i jego kierunku (w postaci kąta, utworzonego z dodatnim kierunkiem osi  $x$ ) możemy zastosować równanie (3.6), z którego dostajemy:

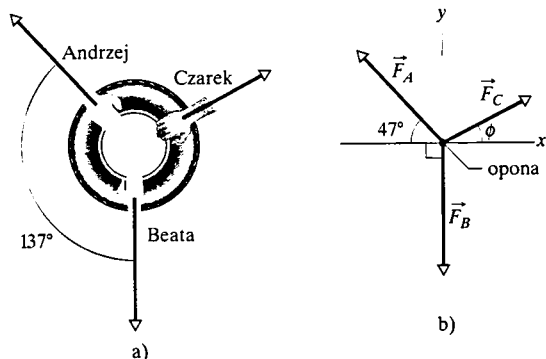
$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 16 \text{ N}$$

oraz

$$\theta = \arctg \frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} = -40^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 5.3

Andrzej, Beata i Czarek bawią się w „przeciąganie w dwóch wymiarach”, ciągnąc w poziomie oponę samochodową, w kierunkach pokazanych na rysunku 5.5, przedstawiającym widok z góry. Choć cała trójka ciągnie ją, każdy w swoją stronę, opona pozostaje nieruchoma. Andrzej ciągnie oponę siłą  $\vec{F}_A$  o wartości 220 N. Czarek — siłą  $\vec{F}_C$  o wartości 170 N. Kierunek siły  $\vec{F}_C$  nie jest znany. Jaka jest wartość siły  $\vec{F}_B$ , jaką ciągnie oponę Beata?



Rys. 5.5. Przykład 5.3. a) Widok z góry trzech osób ciągnących oponę. b) Diagram sił działających na oponę

## ROZWIĄZANIE:

Trzy siły działające na oponę nie powodują jej przyspieszenia, a zatem przyspieszenie opony wynosi  $\vec{a} = 0$  (tzn. siły te się równoważą). Przyspieszenie jest związane z działającą na oponę siłą wypadkową, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ ), którą możemy w tym przypadku zapisać w postaci

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = m(0) = 0,$$

czyli

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A - \vec{F}_C. \quad (5.6)$$

Diagram sił działających na oponę przedstawiono na rysunku 5.5b, przy czym początek układu współrzędnych umieszczono dla wygody w środku opony, a kierunek wektora  $\vec{F}_C$  określono za pomocą kąta  $\phi$ .

Mamy wyznaczyć wartość siły  $\vec{F}_B$ . Znamy wartość i kierunek wektora  $\vec{F}_A$  oraz wartość wektora  $\vec{F}_C$ , natomiast nie znamy kierunku wektora  $\vec{F}_C$ . Zapiszmy równanie (5.6) dla składowych wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Siła  $\vec{F}_B$  jest skierowana wzdłuż osi  $y$ , więc zaczniemy od składowych wzdłuż tej osi. Otrzymujemy:

$$F_{B,y} = -F_{A,y} - F_{C,y}.$$

Wyznaczając te składowe i podstawiając wartości kątów, przy czym dla  $\vec{F}_A$  bierzemy kąt  $133^\circ (= 180^\circ - 47^\circ)$ , dostajemy:

$$F_B \sin(-90^\circ) = -F_A \sin 133^\circ - F_C \sin \phi.$$

po postawieniu wartości liczbowych modułów sił daje:

$$-F_B = -(220 \text{ N})(\sin 133^\circ) - (170 \text{ N}) \sin \phi. \quad (5.7)$$

znamy jednak wartości kąta  $\phi$ .

Aby ją wyznaczyć, zapiszmy równanie (5.6) dla składowych

wzdłuż osi  $x$ :

$$F_{Bx} = -F_{Ax} - F_{Cx},$$

dostajemy:

$$F_B \cos(-90^\circ) = -F_A \cos 133^\circ - F_C \cos \phi,$$

a następnie:

$$0 = -(220 \text{ N})(\cos 133^\circ) - (170 \text{ N}) \cos \phi.$$

Z tego równania wyznaczamy  $\phi$ :

$$\phi = \arccos\left(-\frac{(220 \text{ N})(\cos 133^\circ)}{(170 \text{ N})}\right) = 28.04^\circ.$$

Wstawiając tę wartość do wzoru (5.7), otrzymujemy ostatecznie:

$$F_B = 241 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Wymiary i wektory

Wielu studentów ma trudności z odróżnieniem dodawania wektorów od dodawania ich wartości, na co zwróciliśmy uwagę w przykładzie 5.2. Niezrozumienie tej różnicy będzie sprawiać kłopoty przy lekturze całego podręcznika. Powtórzmy więc, że gdy obliczamy siłę wypadkową, możemy po prostu dodawać lub odejmować wartości bezwzględne sił składowych tylko wtedy, gdy siły działają wzdłuż tej samej prostej. Jeśli tak nie jest, siły należy dodawać wektorowo — dokonując obliczeń na składowych, jak to zrobiliśmy w przykładzie 5.2.

### Porada 2: Jak czytać zadania dotyczące sił?

W razie potrzeby przeczytaj zadanie kilka razy, aż dobrze zrozumiesz, jakiej sytuacji fizycznej ono dotyczy, jakie są dane i co należy obliczyć. Jeśli wiesz, z czym związane jest zadanie, lecz nie wiesz, co robić dalej, to przeczytaj jeszcze raz treść zadania. Jeśli nie rozumiesz dobrze drugiej zasady dynamiki Newtona, to przeczytaj jeszcze raz odpowiedni paragraf podręcznika. Przeanalizuj jeszcze raz zadania rozwiązane w książce (przykłady). Wreszcie pamiętaj, że rozwiązywanie zadań z fizyki wymaga wprawy

(podobnie, jak naprawa samochodów czy projektowanie mikroprocesorów) — nikt się nie rodzi z tą umiejętnością.

### Porada 3: Zrób dwa rysunki

Wygodnie jest sporządzić dwa rysunki. Jeden to szkic sytuacji fizycznej. Rysując siły, umieść początek każdego wektora na brzegu lub w obszarze ciała, na które ta siła działa. Drugi rysunek to diagram sił, na którym należy umieścić siły działające na jedno ciało, oznaczone kropką lub zarysem ciała. Początek wektora każdej siły umieść w tej kropce lub zarysie.

### Porada 4: Co jest badanym układem?

Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona musisz wiedzieć, dla jakiego ciała lub dla jakiego układu ciał masz ją zapisać. W przykładzie 5.1 jest nim krążek (a nie lód), w przykładzie 5.2 — puszka z herbatnikami, a w przykładzie 5.3 — opona (a nie ciągnący ją ludzie).

### Porada 5: Wybierz mądre układy współrzędnych

W przykładzie 5.3 zaoszczędziliśmy sobie wiele trudu, wybierając układ współrzędnych tak, że jedna z jego osi (oś  $y$ ) pokrywała się z kierunkiem jednej z sił (siły  $\vec{F}_B$ ).

## 5.6. Kilka ważnych sił

### Siła ciężkości

Siła ciężkości (grawitacji)  $\vec{F}_g$  jest to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. Nie będziemy tymczasem rozważać natury tej siły, a zajmiemy się sytuacją, w której tym drugim ciałem jest Ziemia. Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  będzie to więc siła skierowana do środka Ziemi — czyli pionowo w dół. Założymy też, że układ związany z Ziemią jest inercjalny.

Przyjmijmy, że ciało o masie  $m$  spada swobodnie z przyspieszeniem ziemskim o wartości  $g$ . Jeśli pominiemy opór powietrza, to jedyną siłą działającą na to ciało jest siła ciężkości  $\vec{F}_g$ . Związek między tą siłą, skierowaną w dół i przyspieszeniem ciała, także skierowanym w dół, jest więc dany przez drugą zasadę dynamiki Newtona ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ). Wybierzmy oś  $y$  układu współrzędnych wzdłuż

toru ciała, o kierunku dodatnim do góry. Dla składowych wzdłuż tej osi druga zasada dynamiki Newtona ma postać  $F_{\text{wyp},y} = ma_y$ , co w naszym przypadku pozwala na zapis:

$$-F_g = m(-g),$$

czyli

$$F_g = mg. \quad (5.8)$$

Jednym słowem, wartość siły ciężkości jest równa iloczynowi  $mg$ .

Taka sama siła ciężkości, o takiej samej wartości działa również na to ciało, gdy nie spada ono swobodnie, lecz np. leży na stole bilardowym lub się po nim porusza (aby zniknęła siła ciężkości, musiałaby zniknąć Ziemia).

Drugą zasadę dynamiki Newtona dla siły ciężkości możemy także zapisać w postaci wektorowej:

$$\vec{F}_g = -F_g \hat{j} = -mg \hat{j} = m\vec{g}, \quad (5.9)$$

przy czym  $\hat{j}$  jest wektorem jednostkowym osi  $y$ , skierowanym pionowo w górę, a  $\vec{g}$  — wektorem przyspieszenia ziemskiego, skierowanym pionowo w dół.

## Ciężar

**Ciężarem**  $W$  ciała będziemy nazywać wartość bezwzględną siły potrzebnej do zapobieżenia spadkowi ciała, mierzonej przez obserwatora na Ziemi\*. Na przykład, aby utrzymać w dłoni piłkę (w bezruchu), musisz działać na nią (stojąc na Ziemi) siłą skierowaną w górę, równoważącą siłę ciężkości, jaką działa na piłkę Ziemia. Załóżmy, że wartość tej siły ciężkości wynosi 2 N. Wobec tego wartość skierowanej w górę siły, jaką działasz na piłkę, jest równa 2 N, a zatem ciężar  $W$  piłki wynosi 2 N. Mówimy także, że piłka waży 2 N.

Do utrzymania w bezruchu piłki o ciężarze 3 N potrzebna jest siła o większej wartości, właśnie 3 N, ponieważ w tym przypadku należy zrównoważyć siłę ciężkości o większej wartości, właśnie 3 N. Mówimy, że druga piłka jest cięższa od pierwszej.

Spójrzmy na to ogólnie. Rozważmy ciało, którego przyspieszenie względem Ziemi, stanowiącej — jak zakładamy — układ inercjalny, jest równe  $\vec{a} = 0$ . Na ciało działają dwie siły: skierowana w dół siła ciężkości  $\vec{F}_g$  i równoważąca ją siła o wartości  $W$ , skierowana pionowo w górę. Zapiszmy drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi pionowej  $y$ , o kierunku dodatnim w górę:

$$F_{\text{wyp},y} = ma_y.$$

---

\* Autorzy wprowadzają tu niestandardową definicję ciężaru. W większości podręczników słowo „ciężar” rozumie się jako inną nazwę siły ciężkości. Jak zostanie wykazane niżej zdefiniowany w tej książce ciężar jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości, więc ta odmienność definicji nie powinna prowadzić do większych nieporozumień. Czytelnik powinien jednak pamiętać, że w innych podręcznikach może spotkać termin „ciężar” zdefiniowany inaczej niż w tej książce (przyp. tłumacza).

W naszym przypadku daje to:

$$W - F_g = m(0), \quad (5.10)$$

czyli

$$W = F_g = m(0) \quad (\text{ciężar w układzie inercyjnym, związanym z Ziemią}). \quad (5.11)$$

Z równania tego wynika (przy założeniu, że Ziemia stanowi układ inercyjny), że:

➤ Ciężar  $W$  ciała jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości  $F_g$  działającej na to ciało.

Podstawiając  $mg$  za  $F_g$ , zgodnie z równaniem (5.8), otrzymujemy wzór:

$$W = mg \quad (\text{ciężar}). \quad (5.12)$$

wiążący ciężar ciała z jego masą.

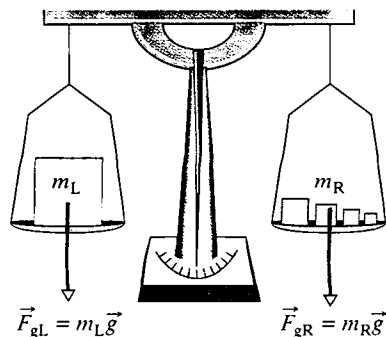
Ważenie ciała jest to wyznaczanie jego ciężaru. Można to zrobić, umieszczając ciało na jednej z szalek wagi równoramiennej (rys. 5.6) i kładąc na drugiej szalce odważniki, tzn. ciała o znanej masie, aż do uzyskania równowagi (co oznacza, że siły ciężkości działające na ciała na obydwu szalkach są sobie równe). Wynika stąd, że również masy ciał na obydwu szalkach są sobie równe, co daje masę ciała  $m$ . Znając wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu, w którym znajduje się waga, możemy wyznaczyć ciężar ciała z równania (5.12). Do ważenia ciał służy również waga sprężynowa (rys. 5.7). Ciało rozciąga sprężynę, przy czym wskazówka porusza się wzdłuż podziałki, wyskalowanej w jednostkach masy lub ciężaru (tak właśnie działają wagi łazienkowe). Jeśli waga jest wyskalowana w jednostkach masy, to jej wskazania są dokładne tylko wtedy, gdy wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  w miejscu pomiaru jest taka sama, jak w miejscu kalibracji wagi.

Pomiar ciężaru ciała musi być wykonywany wtedy, gdy ciało nie porusza się z przyspieszeniem pionowym w stosunku do Ziemi. Na przykład, możesz wyznaczyć swój ciężar za pomocą wagi, ustawionej w łazience lub w szybko jadącym pociągu. Natomiast pomiar wykonany za pomocą tej samej wagi w windzie poruszającej się ruchem przyspieszonym da inny wynik, właśnie z uwagi na przyspieszenie windy. Wynik takiego pomiaru nazywamy *ciężarem pozornym*.

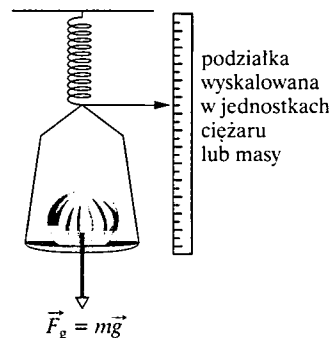
**Uwaga:** Ciężar ciała to inna wielkość fizyczna niż jego masa. Ciężar jest to wartość siły, a jego związek z masą opisany jest wzorem (5.12). Gdy przeniesiemy ciało w miejsce, w którym wartość  $g$  jest inna, masa ciała (będąca jego cechą bezwzględną) nie ulegnie zmianie, natomiast jego ciężar się zmieni. Na przykład ciężar kuli do kręgli o masie 7,2 kg wynosi 71 N na Ziemi, lecz tylko 12 N na Księżycu. Masa tej kuli jest taka sama na Ziemi i na Księżycu, lecz na Księżycu przyspieszenie spadku swobodnego wynosi jedynie 1,7 m/s<sup>2</sup>.

## Siła normalna

Gdy stoisz na materacu, Ziemia działa na ciebie siłą ciężkości skierowaną pionowo w dół, lecz mimo to pozostajesz w spoczynku. Dzieje się tak dlatego, że



Rys. 5.6. Waga równoramienna. Gdy waga jest w równowadze, siła ciężkości  $\vec{F}_{gL}$  działająca na ciało na lewej szalce (ciało ważone) jest równa sile ciężkości  $\vec{F}_{gR}$  działającej na odważniki na prawej szalce. Wobec tego masa ważonego ciała jest równa łącznej masie odważników

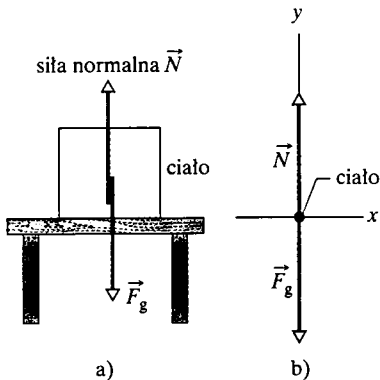


Rys. 5.7. Waga sprężynowa. Wydłużenie sprężyny jest miarą ciężaru ciała umieszczonego na szalce. Wskazówka pokazuje wartość ciężaru ciała, jeśli podziałka jest wyskalowana w jednostkach ciężaru. Jeśli natomiast jest ona wyskalowana w jednostkach masy, to wskazanie wagi jest dokładne tylko wtedy, gdy wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  w miejscu pomiaru jest taka sama, jak w miejscu kalibracji wagi

materac, który ugina się pod tobą działa na Ciebie siłą skierowaną ku górze. Gdy stoisz na podłodze, ta też ulega deformacji — ściśnięciu, wygięciu lub nawet lekkiemu spaczeniu — i działa na Ciebie siłą skierowaną ku górze. Dotyczy to także pozornie całkiem sztywnego podłoża betonowego (jeśli nie jest ono osadzone bezpośrednio na gruncie, to dostatecznie liczna grupa ludzi może je nawet załamać, gdy na nim stanie).

Siłę, którą działa na Ciebie materac czy podłoga, nazywamy **siłą normalną**, i oznaczamy ją zwykle przez  $\vec{N}$ . Nazwa ta pochodzi od terminu matematycznego *normalny*, co znaczy prostopadły. Siła działająca na Ciebie ze strony np. podłogi jest do tej podłogi prostopadła.

➤ *Gdy ciało naciska na powierzchnię, choćby pozornie bardzo sztywną, powierzchnia ta ulega deformacji i działa na ciało siłą normalną  $\vec{N}$ , prostopadłą do powierzchni.*



Rys. 5.8. a) Na ciało leżące na blacie stołu działa siła normalna  $\vec{N}$ , prostopadła do tego blatu. b) Diagram sił działających na to ciało

Przykład takiej sytuacji przedstawiono na rysunku 5.8a. Na poziomym blacie stołu leży klocek o masie  $m$ , który naciska na blat, gdyż działa na niego siła ciężkości  $\vec{F}_g$ . W wyniku tego blat ulega niewielkiej deformacji i działa na klocek siłą normalną  $\vec{N}$  skierowaną ku górze. Diagram sił działających na klocek pokazano na rysunku 5.8b. Siły  $\vec{F}_g$  i  $\vec{N}$  to jedyne siły działające na klocek, obie skierowane pionowo. Drugą zasadę dynamiki Newtona możemy więc zapisać dla składowych wzdłuż osi  $y$  ( $F_{\text{wyp},y} = ma_y$ ). Zakładając, że ta oś jest pionowa, a jej kierunek dodatni to kierunek do góry, dostajemy:

$$N - F_g = ma_y.$$

Na podstawie równania (5.8) możemy w miejsce  $\vec{F}_g$  wstawić  $mg$ , co daje:

$$N - mg = ma_y.$$

Wartość siły normalnej wynosi zatem:

$$N = mg + ma_y = m(g + a_y), \quad (5.13)$$

dla dowolnej wartości przyspieszenia  $a_y$  stołu i klocka w kierunku pionowym (gdy znajdują się np. w poruszającej się ruchem przyspieszonym windzie). Jeśli stół i klocek nie poruszają się ruchem przyspieszonym w stosunku do Ziemi, to  $a_y = 0$  i z równania (5.13) otrzymujemy:

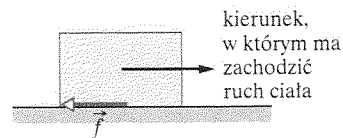
$$N = mg. \quad (5.14)$$

✔ **SPRAWDZIAN 4:** Czy siła normalna na rysunku 5.8 ma wartość większą, mniejszą czy równą  $mg$ , gdy ciało i stół znajdują się w windzie, która porusza się do góry: a) z prędkością o stałej wartości, b) z prędkością, której wartość rośnie?

## Tarcie

Gdy wprawiasz ciało w ruch ślizgowy na pewnej powierzchni — lub starasz się to zrobić — ruchowi temu przeciwdziałają oddziaływanie między ciałem a powierzchnią (zjawisko to omówimy w następnym rozdziale). Uważa się, że opory ruchu można opisać za pomocą jednej siły  $\vec{f}$ , nazywanej **siłą tarcia** lub krótko **tarciem**. Siła ta jest skierowana wzdłuż powierzchni, przeciwnie do kierunku,

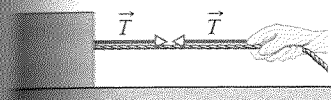
...nym ma zachodzić ruch ciała (rys. 5.9). Dla uproszczenia sytuacji fizycznej ... uważa się czasem za tak małe, że można je pominąć (mówimy wtedy o ... bez tarcia).



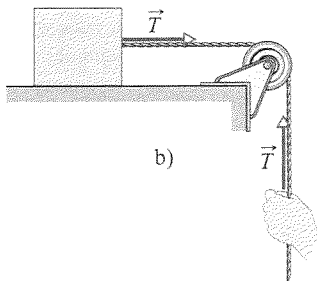
Rys. 5.9. Siła tarcia  $\vec{f}$  przeciwdziała poślizgowi ciała po podłożu

## Napężenie

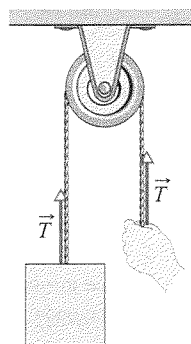
... nić (sznur, lina lub inny podobny przedmiot) jest przymocowana do ciała ... napięta tak, że jest wyprostowana, działa ona na ciało siłą  $\vec{T}$ , skierowaną ... nici (rys. 5.10a). Siłę tę nazywamy zwykle *napężeniem*, ponieważ nić jest ... napięta, tzn. naprężona. *Naprężenie nici* ma wartość  $T$ , równą wartości ... działającej na ciało. Jeśli na przykład siła działająca na ciało ma wartość  $T = 50 \text{ N}$ , to naprężenie nici ma również wartość  $50 \text{ N}$ .



a)



b)



c)

Rys. 5.10. a) Szywno napięta (naprężona) nić. b) i c) Nić o znikomo małej masie działa na ciało i rękę siłą  $\vec{T}$  o takiej samej wartości nawet wtedy, gdy jest przełożona przez obracający się bez tarcia krążek o znikomo małej masie

... Nić uważamy często za *pozbawioną masy* (co oznacza, że jej masę można ... w porównaniu z masą ciała) i nierozciągliwą. Jest ona wtedy jedynie ... między dwoma ciałami. Działa na obydwie ciała siłami o takiej samej ... nawet wtedy, gdy ciała i nić poruszają się ruchem przyspieszonym, ... wtedy, gdy nić jest przełożona przez krążek (rysunki 5.10b i c) o masie, ... można pominąć w porównaniu z masą ciał, obracający się bez tarcia. Jeśli ... się z krążkiem na długości równej połowie jego obwodu, jak na rysunku ... to siła wypadkowa działająca na krążek ze strony nici ma wartość  $2T$ .

**PRAWDZIAN 5:** Ciało, zawieszane na linie jak na rysunku 5.10c ma ciężar  $75 \text{ N}$ . ... naprężenie ma wartość  $T$  równą, większą czy mniejszą niż  $75 \text{ N}$ , gdy ciało porusza ... do góry z prędkością o wartości: a) stałej, b) rosnącej, c) malejącej?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Zadanie 6: Siła normalna

... Rozwiązanie (5.14) daje wartość działającej na ciało siły normalnej ... wtedy, gdy siła  $\vec{N}$  jest skierowana do góry, a pionowe ... przyspieszenie ciała jest równe zeru. *Nie jest* ono spełnione, gdy ... kierunek inny niż pionowy lub gdy przyspieszenie w kie- ... pionowym jest różne od zera. W takiej sytuacji z drugiej ... dynamiki Newtona wynika inne wyrażenie na  $\vec{N}$ .

Wektor  $\vec{N}$  możemy przesuwając na płaszczyźnie pod warunkiem, że zachowamy jego kierunek. Na przykład na rysunku 5.8a możemy go przesunąć w dół tak, że jego koniec znajdzie się na styku ciała ze stołem. Aby jednak uniknąć błędnej oceny sytuacji fizycznej, dobrze jest rysować wektor  $\vec{N}$  tak, aby jego początek znajdował się na brzegu ciała lub gdzieś w jego obrębie (jak na rysunku). Jeszcze lepiej jest sporządzić diagram sił, jak na rysunku 5.8b, umieszczając początek  $\vec{N}$  w punkcie, w którym znajduje się symbolizująca ciało kropka lub jego uproszczony rysunek.

## Przykład 5.4

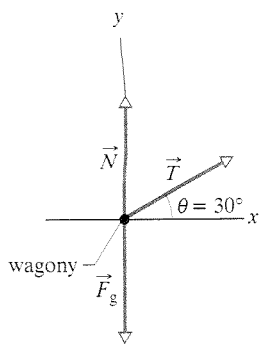
Powróćmy teraz do Johna Massisa i wagonów kolejowych. Założmy, że Massis ciągnął koniec liny (zębami) ze stałą siłą, większą 2.5 razy od swego ciężaru, pod kątem  $\theta$  równym  $30^\circ$  do poziomu. Jego masa  $m$  wynosiła 80 kg. Ciężar  $W$  wagonów był równy 700 kN, a Massis przesunął je po szynach na odległość 1 m. Przyjmijmy, że koła wagonów poruszały się po szynach bez oporu. Ile wynosiła prędkość wagonów, gdy Massis przestał je ciągnąć?

ROZWIĄZANIE:

1. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że wagony poruszały się ze stałym przyspieszeniem poziomym, gdyż Massis ciągnął je ze stałą siłą poziomą. Przyspieszenie jest stałe, a ruch zachodzi w jednym wymiarze, dlatego też do wyznaczenia prędkości  $v$  wagonów, po przebyciu przez nie drogi  $d = 1$  m, można zastosować równania z tabeli 2.1. Potrzebne jest nam równanie zawierające  $v$ . Spróbujmy zastosować równanie (2.16):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (5.15)$$

przyjmując, że oś  $x$  jest zgodna z kierunkiem ruchu, jak na przedstawiającym diagram sił rysunku 5.11. Wiemy, że prędkość początkowa  $v_0$  jest równa 0, a przemieszczenie  $x - x_0$  wynosi  $d = 1$  m. Nie znamy jednak przyspieszenia  $a$  wagonów wzdłuż osi  $x$ .



Rys. 5.11. Przykład 5.4. Diagram sił dla wagonów osobowych ciągniętych przez Massisa. Wektory nie są narysowane w skali; siła  $\vec{T}$  działająca na wagony ze strony liny jest znacznie mniejsza od siły normalnej, działającej na wagony ze strony szyn i działającej na wagony siły ciężkości  $\vec{F}_g$ .

2. Przyspieszenie  $a$  jest związane z siłą działającą na wagony ze strony liny, a związek ten jest opisany za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona. Dla składowych wzdłuż osi  $x$  równanie 5.11 ma ono postać:  $F_{\text{wyp},x} = m_w a_x$ , czyli:

$$F_{\text{wyp},x} = m_w a. \quad (5.16)$$

przy czym  $m_w$  jest masą wagonów. Jedyną siłą działającą na wagony w kierunku poziomym jest składowa pozioma  $T \cos \theta$  napięcia  $\vec{T}$  liny ciągniętej przez Massisa. Wobec tego równanie (5.16) przybiera postać:

$$T \cos \theta = m_w a. \quad (5.17)$$

Wiemy, że  $T$  jest 2.5 razy większe od ciężaru Massisa. Wynika z równania (5.12) ten ciężar jest równy  $mg$ , a zatem

$$T = 2.5mg = (2.5)(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1960 \text{ N}.$$

Jest to siła, jaką wykazuje się dobry ciężarówiec średniej wielkości, a więc bynajmniej nie jest ona nadludzkiej wielkości.

Aby wyznaczyć  $a$  z równania (5.17) musimy jeszcze wyznaczyć  $m_w$ . W tym celu skorzystamy znów z równania (5.12), podstawiając do niego tym razem ciężar  $W$  wagonów:

$$m_w = \frac{W}{g} = \frac{(7 \cdot 10^5 \text{ N})}{(9.8 \text{ m/s}^2)} = 7.143 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Przekształcając równanie (5.17) i podstawiając wartości liczone dla  $T$ ,  $m_w$  i  $\theta$  otrzymujemy:

$$a = \frac{T \cos \theta}{m_w} = \frac{(1960 \text{ N})(\cos 30^\circ)}{(7.143 \cdot 10^4 \text{ kg})} = 0.02376 \text{ m/s}^2.$$

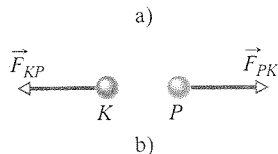
Wstawiając tę wartość — oraz inne wartości znane — do równania (5.15), dostajemy:

$$v^2 = 0 + 2(0.02376 \text{ m/s}^2)(1 \text{ m})$$

czyli

$$v = 0.22 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Massis ułatwiłby sobie zadanie, przymocowując linę do wagonów, tak aby była ona pozioma. Czy wiesz dlaczego?



Rys. 5.12. a) Książka  $K$  opiera się o pudło  $P$ . b) Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona siła  $\vec{F}_{KP}$ , jaką pudło działa na książkę, ma taką samą wartość i przeciwny kierunek jak siła  $\vec{F}_{PK}$ , jaką książka działa na pudło.

## 5.7. Trzecia zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała odpychają się lub przyciągają, tzn. gdy każde z nich działa na drugie siłą, mówimy, że *oddziałują* one ze sobą. Wyobraź sobie, że postawiłbyś książkę  $K$  na półce tak, iż opiera się ona o pudło  $P$  (rys. 5.12a). Książka i pudło oddziałują wtedy ze sobą: istnieje siła pozioma  $\vec{F}_{KP}$ , jaką pudło działa na książkę, oraz siła pozioma  $\vec{F}_{PK}$ , jaką książka działa na pudło. Te dwie siły przedstawione są na rysunku 5.12b. Trzecia zasada dynamiki Newtona mówi, że:

**Trzecia zasada dynamiki Newtona.** Gdy dwa ciała oddziałują ze sobą, siły, jakie działają one na siebie mają taką samą wartość bezwzględną i przeciwny kierunek.



Dla książki i pudła możemy tę zasadę zapisać jako równanie skalarne:

$$F_{KP} = F_{PK} \quad (\text{jednakowe wartości bezwzględne})$$

lub jako równanie wektorowe:

$$\vec{F}_{KP} = -\vec{F}_{PK} \quad (\text{jednakowe wartości bezwzględne i przeciwne kierunki}),$$

w którym znak minus oznacza, że siły mają przeciwne kierunki. Siły te nazywamy **siłami akcji i reakcji** (parą akcja–reakcja). Takie dwie siły występują zawsze, gdy dwa ciała oddziałują ze sobą i to w każdych warunkach. Książka i pudło z rysunku 5.12a są nieruchome, lecz trzecia zasada dynamiki Newtona obowiązuje także wówczas, gdy ciała są w ruchu, a nawet wtedy, gdy poruszają się ruchem przyspieszonym.

Jako kolejny przykład rozważmy melona leżącego na stole, który stoi na Ziemi (rys. 5.13a) i znajdziemy związane z melonem siły akcji i reakcji. Melon oddziałuje ze stołem, a także z Ziemią (mamy więc do czynienia z trzema ciałami, których oddziaływania musimy umieć rozróżnić).

Zajmiemy się najpierw samym melonem (rys. 5.13b). Siła  $\vec{F}_{MS}$  jest to siła normalna, jaką stół działa na melona, a siła  $\vec{F}_{MZ}$  to siła ciężkości, jaką Ziemia działa na melona. Czy jest to para akcja–reakcja? Nie, bo są to siły działające na jedno ciało — melona — a nie na dwa ciała, oddziałujące ze sobą.

Aby znaleźć parę akcja–reakcja, musimy zająć się nie melonem, lecz oddziaływaniem melona z jednym z dwóch pozostałych ciał. Rozważmy najpierw oddziaływanie melon–Ziemia (rys. 5.13c). Ziemia przyciąga melona siłą grawitacyjną  $\vec{F}_{MZ}$ , a melon przyciąga Ziemię siłą grawitacyjną  $\vec{F}_{ZM}$ . Czy jest to para akcja–reakcja? Tak, są to siły działające między dwoma oddziałującymi ze sobą ciałami, którymi każde z nich działa na drugie. Zatem na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_{MZ} = -\vec{F}_{ZM} \quad (\text{oddziaływanie melon–Ziemia}).$$

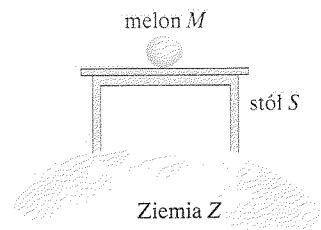
Ponadto w oddziaływaniu melon–stół stół działa na melona siłą  $\vec{F}_{MS}$ , a melon działa na stół siłą  $\vec{F}_{SM}$  (rys. 5.13d). To także jest para akcja–reakcja i analogicznie mamy:

$$\vec{F}_{MS} = -\vec{F}_{SM} \quad (\text{oddziaływanie melon–stół}).$$

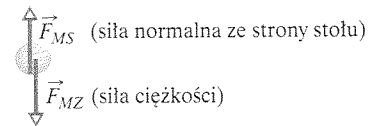
**SPRAWDZIAN 6:** Załóżmy, że melon i stół z rysunku 5.13 znajdują się w kabinie windy, która zaczyna poruszać się do góry ruchem przyspieszonym. a) Czy wartości sił  $\vec{F}_{MZ}$  i  $\vec{F}_{MS}$  rosną, maleją czy pozostają takie same? b) Czy te dwie siły mają nadal jednakowe wartości i przeciwne kierunki? c) Czy wartości sił  $\vec{F}_{MZ}$  i  $\vec{F}_{ZM}$  rosną, maleją czy pozostają takie same? d) Czy te dwie siły mają nadal jednakowe wartości i przeciwne kierunki?

## 5.8. Jak stosować zasady dynamiki Newtona?

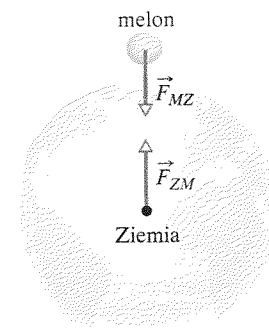
Pozostała część tego rozdziału zawiera same przykłady. Powinieneś się w nie zaangażować, aby poznać nie tylko konkretne odpowiedzi, lecz przede wszystkim metody rozwiązywania tego typu zadań. Zwłaszcza ważne jest to, aby umieć przejść od szkicu sytuacji fizycznej do diagramu sił w dobrze dobranym układzie współrzędnych, co umożliwi zastosowanie zasad dynamiki. Zaczniemy od prostego zadania, które rozwiążemy bardzo szczegółowo, korzystając ze schematu pytań i odpowiedzi.



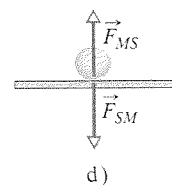
a)



b)



c)

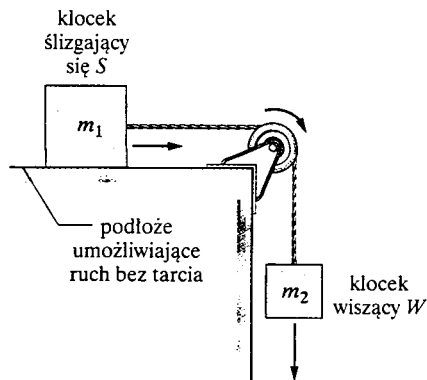


d)

Rys. 5.13. a) Melon leży na stole, który stoi na Ziemi. b) Siły działające na melona:  $\vec{F}_{MS}$  i  $\vec{F}_{MZ}$ . c) Para akcja–reakcja: oddziaływanie melon–Ziemia. d) Para akcja–reakcja: oddziaływanie melon–stół

## Przykład 5.5

Na rysunku 5.14 przedstawiono klocek  $S$  (klocek ślizgający się) o masie  $m_1 = 3,3$  kg. Klocek ten może poruszać się bez tarcia po poziomej powierzchni (np. po stole z poduszką powietrzną). Do klocka przywiązana jest lina, która jest następnie przełożona przez obracający się bez tarcia krążek i przywiązana do drugiego klocka  $W$  (klocka wiszącego) o masie  $m_2 = 2,1$  kg. Masę liny i krążka można pominąć w stosunku do masy klocków. Klocek wiszący  $W$  opada w dół, a klocek ślizgający się porusza się ruchem przyspieszonym w prawo. Wyznacz: a) przyspieszenie klocka ślizgającego się, b) przyspieszenie klocka wiszącego, c) napięcie liny.



Rys. 5.14. Przykład 5.5. Klocek  $S$  o masie  $m_1$  jest połączony z klockiem  $W$  o masie  $m_2$  za pomocą liny przełożonej przez krążek

P: *O co chodzi w tym zadaniu?*

O: Masz dwa ciała, klocek ślizgający się i klocek wiszący, a także Ziemię, która przyciąga obydwa te ciała (pod nieobecność Ziemi nic by się tu nie działo). Na klocki działa w sumie pięć sił przedstawionych na rysunku 5.15:

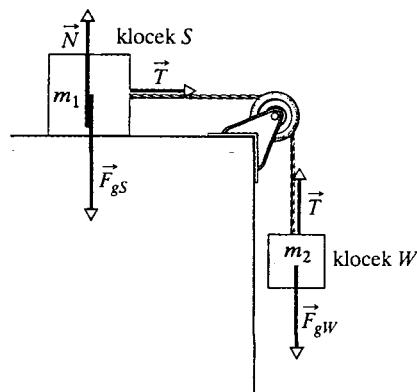
1. Lina ciągnie ślizgający się klocek w prawo siłą o wartości  $T$ .
2. Lina ciągnie do góry klocek wiszący  $W$  siłą o takiej samej wartości  $T$ . Gdyby nie było tej siły, klocek wiszący  $W$  spadałby swobodnie.
3. Ziemia przyciąga klocek ślizgający się  $S$  siłą grawitacyjną  $\vec{F}_{gS}$  o wartości równej  $m_1 g$ .
4. Ziemia przyciąga klocek wiszący  $W$  siłą grawitacyjną  $\vec{F}_{gW}$  o wartości równej  $m_2 g$ .
5. Stół działa na klocek ślizgający się  $S$  siłą normalną  $\vec{N}$ , skierowaną pionowo do góry.

Powinieneś zwrócić uwagę na jeszcze jeden fakt. Zakładamy, że lina się nie rozciąga, to znaczy, jeśli w pewnym czasie klocek  $W$  opada o 1 mm, to klocek  $S$  przesuwa się w tym czasie w prawo

również o 1 mm. Oznacza to, że klocki poruszają się razem i przyspieszenie o takiej samej wartości  $a$ .

P: *Czego dotyczy to zadanie? Czy powinno mi się ono kojarzyć z jakimś konkretnym prawem fizycznym?*

O: Tak.



Rys. 5.15. Siły działające na dwa klocki z rysunku 5.14

O: Mamy tu do czynienia z siłami, masami i przyspieszeniami, a zatem naturalnym skojarzeniem jest druga zasada dynamiki Newtona:  $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ .

P: *Jeśli mam zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona, to którego ciała mam ją zapisać?*

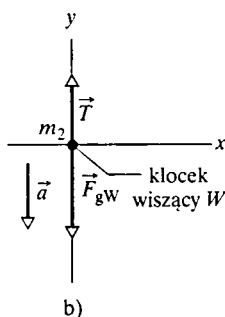
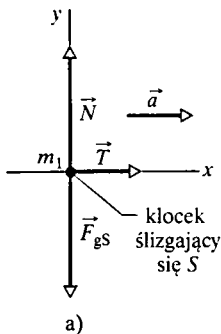
O: Zajmij się przede wszystkim dwoma ciałami, klockiem ślizgającym się i klockiem wiszącym. Choć są to ciała o skończonych rozmiarach (a nie punkty materialne), możemy każdy klocek traktować jako cząstkę, gdyż każda ich mała część (powiedzmy każdy atom) porusza się dokładnie w taki sam sposób. Drugą zasadę dynamiki Newtona możemy zastosować oddzielnie do każdego klocka.

P: *A co z krążkiem?*

O: Krążek nie może być potraktowany jako cząstka, gdyż różne jego części poruszają się w różny sposób. Krążkiem zajmijmy się szczegółowo, gdy będziemy omawiać ruch obrotowy ciał. Obecnie wyłączmy krążek z rozważań zakładając, że jego masę możemy pominąć w stosunku do mas klocków. Jego zadaniem jest jedynie zmiana kierunku liny.

P: *No dobrze, jak więc mam zastosować równanie  $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$  do ruchu ślizgającego się klocka?*

O: Potraktuj klocek  $S$  jako cząstkę o masie  $m_1$  i narysuj wszystkie działające na niego siły, jak na rysunku 5.16a. To jest diagram sił dla tego klocka. Są na nim trzy siły. Wybierz teraz układ współrzędnych. Rozsądnie jest wybrać oś  $x$ , równoległą do powierzchni stołu, zgodną z kierunkiem ruchu klocka.



czyli w ujemnym kierunku osi  $y$ ), otrzymujemy:

$$T - m_2g = -m_2a. \quad (5.20)$$

Zauważ teraz, że równania (5.19) i (5.20) tworzą układ równań z tymi samymi dwiema niewiadomymi  $T$  i  $a$ . Odejmując te równania od siebie stronami, eliminujemy zmienną  $T$ , a następnie rozwiązując otrzymane równanie, wyznaczamy  $a$ :

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (5.21)$$

Podstawienie tego wyrażenia do wzoru (5.19) daje:

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (5.22)$$

Wstawiając do powyższych równań dane liczbowe, otrzymujemy:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{(2.1 \text{ kg})}{(3.3 \text{ kg}) + (2.1 \text{ kg})}(9.8 \text{ m/s}^2) = 3.8 \text{ m/s}^2$$

(odpowiedź)

oraz

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{(3.3 \text{ kg})(2.1 \text{ kg})}{(3.3 \text{ kg}) + (2.1 \text{ kg})}(9.8 \text{ m/s}^2) = 13 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

**P:** A więc zadanie jest już rozwiązane, prawda?

**O:** To dobre pytanie. Zadanie nie jest jednak do końca rozwiązane, póki nie sprawdzimy, czy otrzymany wynik ma sens (gdybyś rozwiązywał to zadanie za pieniądze, z pewnością chciałbyś się o tym przekonać przed oddaniem pracy, prawda?).

Spójrzmy najpierw na równanie (5.21). Wymiary są w porządku, a przyspieszenie  $a$  jest zawsze mniejsze niż  $g$ . Tak właśnie musi być, bo klocek wiszący na linie nie spada swobodnie — liną ciągnie go do góry.

Przyjrzyjmy się następnie równaniu (5.22), które możemy zapisać w postaci:

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2}m_2g. \quad (5.23)$$

Teraz lepiej widać, że wymiary obydwu stron są jednakowe, bo  $T$  i  $m_2g$  mają wymiar siły. Z równania (5.23) widać także, że naprężenie liny jest zawsze mniejsze od siły ciężkości działającej na klocek wiszący (której wartość jest równa  $m_2g$ ). To rozsądny wynik, bo gdyby  $T$  było większe od  $m_2g$ , to klocek wiszący musiałby poruszać się ruchem przyspieszonym do góry.

Warto jeszcze sprawdzić, jaki wynik otrzymujemy w przypadkach szczególnych, dla których łatwo zgadnąć prawidłową odpowiedź. Przyjmijmy na przykład, że  $g = 0$ , tzn. że wykonujemy doświadczenie w przestrzeni kosmicznej. Wiemy, że w tym przypadku klocki pozostałyby w spoczynku, gdyż na końce liny nie działałyby żadne siły, a więc nie byłoby naprężeń liny. Czy otrzymane przez nas wzory prowadzą do tego wniosku? Tak. Jeśli do równań (5.21) i (5.22) podstawimy  $g = 0$ , to otrzymamy  $a = 0$  i  $T = 0$ . Dwa inne przypadki szczególne, które możesz zbadać, to przypadki, gdy  $m_1 = 0$  oraz gdy  $m_2 \rightarrow \infty$ .

**5.16.** a) Diagram sił dla klocka  $S$  z rysunku 5.14. b) Diagram klocka wiszącego  $W$  z rysunku 5.14

**Dziękuję, ale ciągle nie wiem, jak mam zastosować równanie  $\vec{F}_{wyp} = m_1\vec{a}$  do ruchu ślizgającego się klocka. Powiedzieliście mi, jak narysować diagram sił.**

**Masz rację.** Już ci mówię. **Równanie  $\vec{F}_{wyp} = m_1\vec{a}$  to równanie wektorowe, które możemy rozpisać na składowe:**

$$F_{wyp,x} = m_1a_x, \quad F_{wyp,y} = m_1a_y, \quad F_{wyp,z} = m_1a_z, \quad (5.18)$$

czyli  $F_{wyp,x}$ ,  $F_{wyp,y}$  i  $F_{wyp,z}$  są składowymi siły wypadkowej wzdłuż osi układu współrzędnych. Napiszmy teraz te równania składowe w odpowiednich kierunkach.

Klocek  $S$  nie ma przyspieszenia pionowego, więc równanie  $F_{wyp,y} = m_1a_y$  przybiera postać:

$$N - F_{gS} = 0, \quad \text{czyli} \quad N = F_{gS}.$$

W kierunku osi  $y$  wartość siły normalnej działającej na klocek  $S$  jest równa wartości siły ciężkości, działającej na ten klocek. W kierunku osi  $z$ , prostopadłej do płaszczyzny rysunku, działają żadne siły.

W kierunku osi  $x$  różna od zera jest tylko składowa siły  $T$ . Równanie  $F_{wyp,x} = m_1a_x$  ma więc postać:

$$T = m_1a. \quad (5.19)$$

Równanie zawiera dwie niewiadome,  $T$  i  $a$ , więc nie możemy go teraz rozwiązać. Zauważ jednak, że nie zajmowaliśmy się jeszcze wcale klockiem wiszącym.

**Zgoda.** A jak mam zastosować równanie  $\vec{F}_{wyp} = m_2\vec{a}$  do ruchu klocka wiszącego?

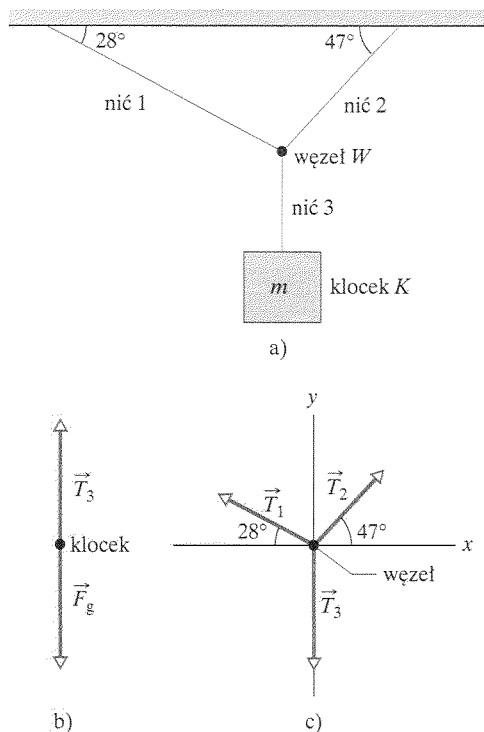
Dokładnie tak samo, jak to zrobiliśmy dla klocka  $S$ . Najpierw narysujmy diagram sił dla klocka  $W$ , jak na rysunku 5.16b. Następnie rozpiszmy równanie  $\vec{F}_{wyp} = m_2\vec{a}$  na składowe. Ten klocek przyspiesza się ruchem przyspieszonym w kierunku osi  $y$ , skorzystaj więc z drugiego z równań (5.18) —  $F_{wyp,y} = m_2a_y$  — i otrzymujemy:

$$T - F_{gW} = m_2a_y.$$

Podstawiając  $m_2g$  w miejsce  $F_{gW}$  oraz  $-a$  w miejsce  $a_y$  (ze znakiem minus, bo przyspieszenie klocka  $W$  jest skierowane w dół,

## Przykład 5.6

Na rysunku 5.17a klocek  $K$  o masie  $m = 15 \text{ kg}$  wisi na nici, prowadzącej do węzła  $W$  o masie  $m_W$ , z którego biegną do sufitu dwie inne nici. Masę nici można pominąć, a wielkość siły ciężkości, działającej na węzeł jest do pominięcia w stosunku do siły ciężkości, działającej na klocek. Wyznacz naprężenia wszystkich trzech nici.



Rys. 5.17. Przykład 5.6. a) Klocek o masie  $m$  jest zawieszony na trzech niciach, połączonych węzłem. b) Diagram sił działających na klocek. c) Diagram sił działających na węzeł

### ROZWIĄZANIE:

Zacznijmy od klocka, gdyż do niego dołączona jest tylko jedna nić. Na diagramie sił, przedstawionym na rysunku 5.17b zaznaczono siły działające na klocek: siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  (o wartości  $mg$ ) oraz siłę  $\vec{T}_3$ , działającą na klocek ze strony nici.

1. Związek między tymi siłami a przyspieszeniem klocka możemy zapisać za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ ). Obie siły działają w pionie, dlatego też zastosujemy równanie dla składowych pionowych ( $F_{wyp,y} = ma_y$ ), które w naszym przypadku ma postać:

$$T_3 - F_g = ma_y.$$

Podstawiając  $mg$  w miejsce  $F_g$  i  $0$  w miejsce przyspieszenia klocka  $a_y$ , otrzymujemy:

$$T_3 - mg = m(0) = 0.$$

Oznacza to, że dwie siły działające na klocek się równoważą. Podstawiając do powyższego równania wartości liczbowe ( $m = 15 \text{ kg}$ ) i  $g$  oraz wyznaczając z niego  $T_3$ , otrzymujemy:

$$T_3 = 147 \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Następnie zajmiemy się węzłem, dla którego diagram sił przedstawiono na rysunku 5.17c, przy czym — zgodnie z warunkami zadania — pominięto siłę ciężkości działającą na węzeł.

2. Związek sił, działających na węzeł z przyspieszeniem węzła zapiszemy za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ ), w postaci:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = m_W \vec{a}_W.$$

Przyspieszenie  $\vec{a}_W$  węzła jest równe zero, więc otrzymujemy:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0, \quad (5.24)$$

co oznacza, że trzy siły działające na węzeł równoważą się wzajemnie. Znamy wartość i kierunek wektora  $\vec{T}_3$ , a nie znamy wartości wektorów  $\vec{T}_1$  i  $\vec{T}_2$  — znamy tylko ich kierunki (kąty, utworzone z poziomem).

Rozłożmy równanie (5.24) na składowe wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Dla składowych  $x$  mamy:

$$T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0,$$

co po podstawieniu wartości liczbowych daje:

$$-T_1 \cos 28^\circ + T_2 \cos 47^\circ + 0 = 0 \quad (5.25)$$

(pierwszy wyraz po lewej stronie równania można zapisać równoważnie jako  $T_1 \cos 152^\circ$ , gdzie kąt  $152^\circ$  to kąt, utworzony przez wektor  $\vec{T}_1$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ ).

Analogicznie możemy zapisać równanie (5.24) dla składowych  $y$  jako:

$$T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} = 0,$$

czyli

$$T_1 \sin 28^\circ + T_2 \sin 47^\circ - T_3 = 0.$$

Podstawiając do tego równania wyznaczoną wcześniej wartość  $T_3$  otrzymujemy:

$$T_1 \sin 28^\circ + T_2 \sin 47^\circ - 147 \text{ N} = 0. \quad (5.26)$$

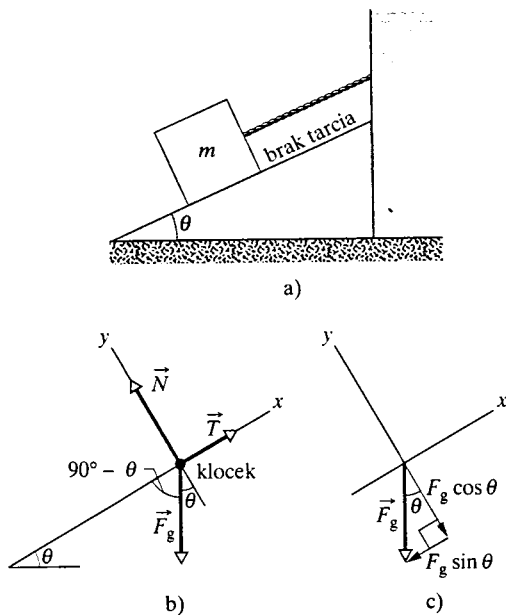
Nie możemy rozwiązać równań (5.25) i (5.26) osobno, bo każda z nich zawiera dwie niewiadome, ale możemy je rozwiązać łącznie jako układ równań, ponieważ zawierają te same niewiadome. Aby to zrobić, możemy użyć metody podstawienia, odjąć lub dodać te równania stronami albo też skorzystać z komputera. W wyniku otrzymamy:

$$T_1 = 104 \text{ N} \quad \text{oraz} \quad T_2 = 134 \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Naprężenia nici wynoszą zatem: 104 N dla nici 1, 134 N dla nici 2 i 147 N dla nici 3.

## Przykład 5.7

Na rysunku 5.18a liną utrzymuje w spoczynku klocek o masie  $m = 15 \text{ kg}$  na pozbawionej tarcia równi pochyłej o kącie nachylenia  $\theta = 27^\circ$ .



rys. 5.18. Przykład 5.7. a) Klocek o masie  $m$  jest utrzymywany w spoczynku za pomocą liny. b) Diagram sił działających na klocek. c) Składowe  $x$  i  $y$  siły  $\vec{F}_g$

Jaka jest wartość siły  $\vec{T}$ , działającej na klocek ze strony liny oraz siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na klocek ze strony równi?

### ROZWIĄZANIE:

Dość szukane siły oraz siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  klocka przedstawiono w diagramie sił działających na klocek, na rysunku 5.18b. Inne siły nie działają na klocek. Siły działające na klocek związane są z jego przyspieszeniem, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ ), która przyjmuje w naszym przypadku postać:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g = m\vec{a}.$$

Przyspieszenie  $\vec{a}$  klocka jest równe zeru, więc otrzymujemy:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g = 0. \quad (5.27)$$

oznacza, że te trzy siły równoważą się wzajemnie.

.. Aby rozwiązać równanie (5.27), w którym nie znamy dwóch składników, rozpiszemy je na składowe. Wprowadźmy układ współrzędnych o osi  $x$ , równoległej do równi, jak na rysunku 5.18b. W tym układzie szukane siły ( $\vec{N}$  i  $\vec{T}$ ) skierowane są wzdłuż jego osi, co ułatwia wyznaczenie ich składowych. Aby znaleźć składowe siły ciężkości  $\vec{F}_g$  zauważmy przede wszystkim, że kąt na-

chylenia równi  $\theta$  jest to także kąt między kierunkiem siły  $\vec{F}_g$  a osią  $y$  (patrz rysunek 5.18c). Składowa  $F_{gx}$  jest zatem równa  $-F_g \sin \theta$ , czyli  $-mg \sin \theta$ , a składowa  $F_{gy}$  jest równa  $-F_g \cos \theta$ , czyli  $-mg \cos \theta$ .

Zapisując równanie (5.27) dla składowych  $x$ , otrzymujemy:

$$T + 0 - mg \sin \theta = 0.$$

skąd

$$T = mg \sin \theta = (15 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) = 67 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Analogicznie, dla składowych  $y$  równanie (5.27) daje:

$$0 + N - mg \cos \theta = 0.$$

a stąd:

$$N = mg \cos \theta = (15 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\cos 27^\circ) = 131 \text{ N} \approx 130 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

b) A teraz przecinamy linę. Czy klocek, ześlizgując się po równi, porusza się ruchem przyspieszonym? Jeśli tak, to ile wynosi jego przyspieszenie?

### ROZWIĄZANIE:

Przecięcie liny sprawia, że na klocek przestaje działać siła  $\vec{T}$ . W kierunku osi  $y$  siła normalna i składowa  $F_{gy}$  nadal się równoważą. Natomiast w kierunku osi  $x$  na klocek działa teraz tylko składowa  $F_{gx}$ . Jest ona skierowana wzdłuż równi (wzdłuż osi  $x$ ), wprawia zatem klocek w ruch przyspieszony w tym kierunku.

Składową  $F_{gx}$  możemy powiązać z przyspieszeniem  $a$  za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisanej dla składowych  $x$  ( $F_{\text{wyp},x} = ma_x$ ). Otrzymujemy:

$$F_{gx} = ma.$$

czyli

$$-mg \sin \theta = ma.$$

skąd dostajemy:

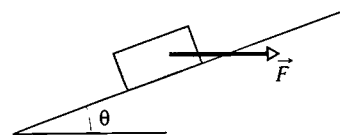
$$a = -g \sin \theta. \quad (5.28)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a = -(9.8 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) = -4.4 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wartość otrzymanego przyspieszenia  $a$  jest mniejsza od wartości przyspieszenia ziemskiego (równiej  $9.8 \text{ m/s}^2$ ), gdyż przyspieszenie  $a$  pochodzi tylko od jednej składowej siły ciężkości  $\vec{F}_g$  (składowej skierowanej wzdłuż równi).

**SPRAWDZIAN 7:** Jak pokazano na rysunku, do klocka na równi przyłożono skierowaną poziomo siłę  $\vec{F}$ . a) Czy składowa siły  $\vec{F}$ , prostopadła do równi, wynosi  $F \cos \theta$  czy  $F \sin \theta$ ? b) Czy istnienie siły  $\vec{F}$  powoduje zwiększenie czy zmniejszenie wartości siły normalnej, działającej na klocek ze strony równi?



## Przykład 5.8

Na rysunku 5.19a przedstawiono pasażera o masie  $m = 72.2$  kg. stojącego na wadze w kabinie windy. Interesują nas wskazania wagi, gdy winda pozostaje w bezruchu oraz gdy porusza się do góry lub w dół.

a) Znajdź wyrażenie ogólne na wskazanie wagi, słuszne dla każdego rodzaju ruchu windy.

ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Wskazanie wagi jest równe wielkości siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na pasażera ze strony wagi. Z diagramu sił działających na pasażera, pokazanego na rysunku 5.19a wynika, że poza tą siłą na pasażera działa jedynie siła ciężkości  $\vec{F}_g$ .

➔ 2. Siły działające na pasażera można powiązać z jego przyspieszeniem  $\vec{a}$  za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ ). Przypomnijmy jednak, że zasada ta obowiązuje jedynie w układzie inercyjnym. Kabina windy poruszającej się ruchem przyspieszonym *nie jest* układem inercyjnym. Wybierzmy wobec tego układ odniesienia związany z ziemią — który jest układem inercyjnym — i wyrażajmy przyspieszenie pasażera w tym układzie.

Obydwie siły działające na pasażera są skierowane pionowo, czyli wzdłuż osi  $y$  na rysunku 5.19b, dlatego też zastosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowych  $y$  ( $F_{\text{wyp},x} = ma_x$ ), skąd mamy:

$$N - F_g = ma,$$

czyli

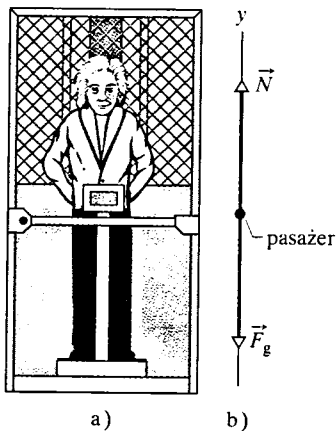
$$N = F_g + ma. \quad (5.29)$$

Z tego równania wynika, że wskazanie wagi równe  $N$  zależy od pionowego przyspieszenia  $a$  windy. Podstawiając  $mg$  w miejsce  $F_g$ , otrzymujemy, że:

$$N = m(g + a) \quad (\text{odpowiedź}) \quad (5.30)$$

dla dowolnej wartości przyspieszenia  $a$ .

b) Jakie jest wskazanie wagi, gdy winda jest nieruchoma lub porusza się do góry ze stałą prędkością  $0.5$  m/s?



Rys. 5.19. Przykład 5.8.  
a) Pasażer stoi na wadze, która wskazuje jego ciężar lub ciężar pozorny.  
b) Diagram sił działających na pasażera, zawierający siłę normalną, działającą na niego ze strony wagi, oraz siłę ciężkości  $\vec{F}_g$

ROZWIĄZANIE:

➔ Dla dowolnej prędkości stałej (równej zero lub nie) przyspieszenie  $a$  pasażera windy jest równe zero. Korzystając z tego warunku i podstawiając do wzoru (5.30) wartości liczbowe danych otrzymujemy:

$$N = (72.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 + 0) = 708 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to ciężar pasażera windy, równy wartości działającej na niego siły ciężkości.

c) Jakie jest wskazanie wagi, gdy winda porusza się do góry z przyspieszeniem  $3.2$  m/s<sup>2</sup> oraz gdy porusza się w dół z przyspieszeniem  $3.2$  m/s<sup>2</sup>?

ROZWIĄZANIE:

Z równania (5.30) otrzymujemy dla  $a = 3.2$  m/s<sup>2</sup>:

$$N = (72.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 + 3.2 \text{ m/s}^2) = 939 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

a dla  $a = -3.2$  m/s<sup>2</sup>:

$$N = (72.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2 - 3.2 \text{ m/s}^2) = 477 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc, gdy przyspieszenie jest skierowane do góry (niezależnie od tego, czy prędkość ciała jest skierowana do góry, a jej wartość rośnie, czy też jest skierowana w dół, a jej wartość maleje), wskazanie wagi jest większe od ciężaru pasażera. Waga wskazuje wówczas ciężar pozorny pasażera, gdyż pomiar jest wykonywany w układzie nieinercyjnym. Podobnie, gdy przyspieszenie jest skierowane w dół (niezależnie od tego, czy prędkość ciała jest skierowana do góry, a jej wartość maleje, czy też jest skierowana w dół, a jej wartość rośnie), wskazanie wagi jest mniejsze od ciężaru pasażera.

d) Jaka jest wartość siły wypadkowej  $F_{\text{wyp}}$  działającej na pasażera oraz wartość jego przyspieszenia  $a_{\text{p,kab}}$  w układzie odniesienia związanym z windą, gdy winda porusza się z przyspieszeniem skierowanym do góry, jak w punkcie (c)? Czy  $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}_{\text{p,kab}}$ ?

ROZWIĄZANIE:

➔ Wartość siły ciężkości  $F_g$ , działającej na pasażera, nie zależy od ruchu ani pasażera, ani windy, a zatem, jak obliczyliśmy w punkcie (b),  $F_g$  wynosi  $708$  N. W punkcie (c) stwierdziliśmy, że wartość siły normalnej  $N$ , działającej na pasażera w czasie ruchu windy z przyspieszeniem skierowanym do góry, równa wskazaniu wagi, wynosi  $939$  N. Wobec tego siła wypadkowa działająca wówczas na pasażera jest równa:

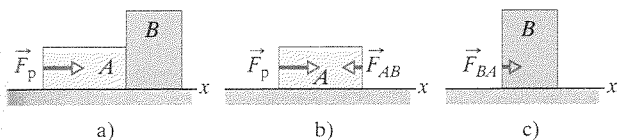
$$F_{\text{wyp}} = N - F_g = (939 \text{ N}) - (708 \text{ N}) = 231 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przyspieszenie pasażera  $a_{\text{p,kab}}$  w układzie odniesienia związanym z windą, jest jednak równe zero. Wobec tego w układzie nieinercyjnym, jakim jest winda poruszająca się ruchem przyspieszonym,  $F_{\text{wyp}}$  nie jest równe  $m\vec{a}_{\text{p,kab}}$ , a zatem druga zasada dynamiki Newtona nie jest spełniona.

✓ **SPRAWDZIAN 8:** Jakie będzie wskazanie wagi z powyższego przykładu, gdy lina windy zerwie się i kabina będzie spadała swobodnie, czyli — innymi słowy — jaki jest pozorny ciężar pasażera w warunkach swobodnego spadku?

## Przykład 5.9

Na rysunku 5.20a przedstawiono dwa stykające się ze sobą kločki: A o masie  $m_A = 4 \text{ kg}$  i B o masie  $m_B = 6 \text{ kg}$ . Po przyłożeniu do kločka A stałej siły poziomej  $\vec{F}_p$  o wartości 20 N kločki ślizgają się bez tarcia po podłożu wzdłuż osi  $x$ .



Rys. 5.20. Przykład 5.9. a) Do kločka A, stykającego się z kločkiem B, przyłożono poziomo stałą siłę  $\vec{F}_p$ . b) Na kloček A działają w poziomie dwie siły: siła zewnętrzna  $\vec{F}_p$  oraz siła  $\vec{F}_{AB}$  ze strony kločka B. c) Na kloček B działa w poziomie tylko jedna siła: siła  $\vec{F}_{BA}$  ze strony kločka A

a) Ile wynosi przyspieszenie kločków?

### ROZWIĄZANIE:

Podamy kolejno: rozumowanie zawierające poważny błąd, rozumowanie prowadzące w ślepią uliczkę i wreszcie rozumowanie, umożliwiające rozwiązanie zadania.

**Rozumowanie błędne.** Siła zewnętrzna  $\vec{F}_p$  jest przyłożona do kločka A, dlatego też skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona, aby powiązać tę siłę z przyspieszeniem  $\vec{a}$  kločka A. Wzrost odbywa się wzdłuż osi  $x$ , korzystamy zatem z tej zasady dla składowych  $x$  ( $F_{\text{wyp},x} = ma_x$ ), co w naszym przypadku daje:

$$F_p = m_A a.$$

Rozumowanie to jest jednak błędne, gdyż na kloček A działa nie tylko siła  $\vec{F}_p$ , lecz także siła  $\vec{F}_{AB}$  ze strony kločka B (jak pokazano na rysunku 5.20b).

**Rozumowanie nieskuteczne.** Zgodnie z powyższym, dodajmy do siły  $\vec{F}_p$  siłę  $\vec{F}_{AB}$ . Dla składowych  $x$  dostajemy:

$$F_p - F_{AB} = m_A a$$

(znak minus wynika z kierunku siły  $\vec{F}_{AB}$ ). Równanie to jest poprawne, lecz ponieważ nie znamy  $F_{AB}$ , nie możemy z niego wyznaczyć szukanego przyspieszenia  $a$ .

**Prawidłowe rozwiązanie.** Ze względu na kierunek działania siły  $\vec{F}_p$  obydwa kločki stanowią układ ciał sztywno ze sobą związanych. Wobec tego druga zasada dynamiki Newtona umożliwia powiązanie siły wypadkowej działającej na ten układ z przyspieszeniem tego układu. Dla składowych  $x$  otrzymujemy:

$$F_p = (m_A + m_B) a.$$

Równanie to w sposób poprawny wiąże siłę  $\vec{F}_p$  działającą na układ ciał z jego całkowitą masą  $m_A + m_B$ . Rozwiązując to równanie względem  $a$  i podstawiając wartości liczbowe danych, znajdujemy:

$$a = \frac{F_p}{m_A + m_B} = \frac{(20 \text{ N})}{(4 \text{ kg}) + (6 \text{ kg})} = 2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowieź})$$

Przyspieszenie układu, a zatem i każdego kločka ma więc kierunek dodatni osi  $x$  i wartość  $2 \text{ m/s}^2$ .

b) Jaką siłą  $\vec{F}_{BA}$  działa kloček A na kloček B (rys. 5.20c)?

### ROZWIĄZANIE:

Siła wypadkowa działająca na kloček B jest związana z przyspieszeniem tego kločka, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona. Zapisując znów tę zasadę dla składowych  $x$  otrzymujemy:

$$F_{BA} = m_B a,$$

co po podstawieniu wartości liczbowych danych daje:

$$F_{BA} = (6 \text{ kg})(2 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ N}. \quad (\text{odpowieź})$$

Siła  $\vec{F}_{BA}$  ma zatem dodatni kierunek osi  $x$  i wartość 12 N.

## Podsumowanie

**Mechanika klasyczna** Prędkość cząstki, jak też ciała, które możemy potraktować jak cząstkę, można zmienić (czyli nadać cząstce przyspieszenie) jedynie działając na nie siłą (lub siłami) ze strony innych ciał. **Mechanika klasyczna** (newtonowska) wiąże ze sobą przyspieszenia i siły.

**Siła** Siła jest wielkością wektorową. Jej wartość jest wyznaczona przez przyspieszenie, jakie nadaje ona ciału wzorcowemu o masie 1 kg. Siła, która nadaje ciału wzorcowemu przyspieszenie  $1 \text{ m/s}^2$ , ma z definicji wartość równą 1 N. Kierunek siły jest zgodny z kierunkiem wywołanego przez nią przyspieszenia. Siły dodajemy do siebie zgodnie z regułami algebry wektorów. Działająca na ciało **siła wypadkowa** jest sumą wektorową wszystkich sił działających na to ciało.

**Masa** Masa ciała jest cechą decydującą o tym, jakie przyspieszenie nadaje temu ciału dana siła (lub siła wypadkowa). Masa jest wielkością skalarną.

**Pierwsza zasada dynamiki Newtona** Jeśli działająca na ciało siła wypadkowa jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku, o ile spoczywało w chwili początkowej lub porusza się po linii prostej z prędkością o stałej wartości, o ile w chwili początkowej znajdowało się w ruchu.

**Inercjalny układ odniesienia** Układy odniesienia, w których spełnione są zasady dynamiki Newtona nazywamy **inercjalnymi układami odniesienia** lub krótko **układami inercjalnymi**. Układ związany z Ziemią można uważać za układ inercjalny, gdy można

pominąć ruch Ziemi. Układy odniesienia, w których zasady dynamiki Newtona nie są spełnione nazywamy *nieinercyjnymi układami odniesienia* lub krótko *układami nieinercyjnymi*. Układem nieinercyjnym jest na przykład winda poruszająca się względem Ziemi ruchem przyspieszonym.

**Druga zasada dynamiki Newtona** Siła wypadkowa  $\vec{F}_{wyp}$ , działająca na ciało o masie  $m$  jest związana z przyspieszeniem  $\vec{a}$  tego ciała, a związek ten opisuje równanie:

$$\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}, \quad (5.1)$$

które można także zapisać dla składowych, w postaci:

$$F_{wyp,x} = ma_x, \quad F_{wyp,y} = ma_y \quad \text{oraz} \quad F_{wyp,z} = ma_z. \quad (5.2)$$

Wynika stąd związek między jednostkami układu SI:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2. \quad (5.3)$$

Rozwiązując zadania, dotyczące drugiej zasady dynamiki Newtona, wygodnie jest korzystać z tzw. diagramu sił czyli rysunku sił działających na *jedno ciało*. Ciało to należy narysować schematycznie lub zaznaczyć symbolicznie kropką. Rysujemy wszystkie siły działające na to ciało, a następnie dobieramy układ współrzędnych tak, aby rozwiązanie zagadnienia miało w nim prostą postać.

**Kilka ważnych sił.** **Siła ciężkości (gravitacji)**  $\vec{F}_g$  jest to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. W tym podręczniku będziemy na ogół omawiać sytuacje, w których tym drugim ciałem jest Ziemia lub inne ciało niebieskie. Siła ciężkości będzie więc zwykle skierowana do środka Ziemi, czyli pionowo w dół. Zakładając też będziemy, że układ związany z Ziemią jest inercyjny. Przy tych założeniach wartość siły ciężkości wynosi:

$$\vec{F}_g = mg, \quad (5.8)$$

przy czym  $m$  jest to masa ciała, a  $g$  — to wartość przyspieszenia ziemskiego.

**Ciężar**  $W$  jest to wartość siły skierowanej do góry, potrzebnej do zrównoważenia siły ciężkości ciała, pochodzącej z Ziemi (lub innego ciała niebieskiego). Jest on związany z masą ciała, a związek ten przedstawiamy za pomocą równania:

$$W = mg. \quad (5.9)$$

**Siła normalna**  $N$  jest to siła jaką działa na ciało podłożem, które to ciało wywiera nacisk. Siła normalna jest zawsze prostopadła do podłoża.

**Siła tarcia**  $\vec{f}$  jest to siła, która działa na ciało, gdy ślizga ono po powierzchni lub gdy staramy się wprawić je w taki ruch. Siła ta jest zawsze równoległa do powierzchni, a jej kierunek jest przeciwny do kierunku ruchu ciała. Gdy tarcie można pominąć, mówimy o ruchu *bez tarcia*.

Gdy nić jest **naprężona**, działa siłą na ciała znajdujące się na obydwu jej końcach. Siła ta jest skierowana wzdłuż nici, w kierunku od ciała do nici. Gdy nić jest **pozbawiona masy** (co oznacza, że jej masę można pominąć), działa ona na ciała znajdujące się na jej końcach siłami o takich samych wartościach  $T$  nawet wtedy, gdy nić jest przelożona przez krążek o **znikomej masie**, obracając się *bez tarcia*.

**Trzecia zasada dynamiki Newtona** Gdy ciało  $C$  działa na ciało  $B$  siłą  $\vec{F}_{BC}$ , ciało  $B$  działa na ciało  $C$  siłą  $\vec{F}_{CB}$ . Siły te są sobie równe co do wartości bezwzględnej i mają przeciwne kierunki.

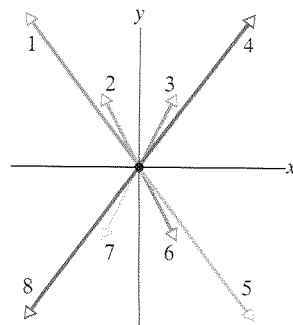
$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}.$$

## Pytania

1. Banan jest ciągnięty bez tarcia po ladzie barowej przez dwie siły poziome:

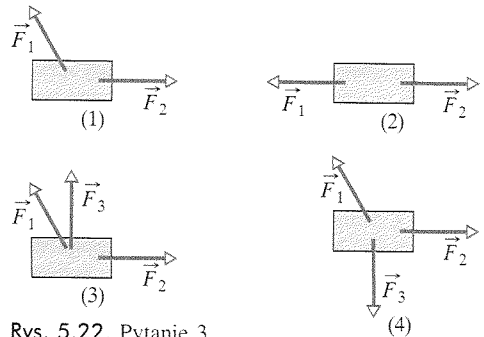
$$\vec{F}_1 = (3 \text{ N})\hat{i} - (4 \text{ N})\hat{j} \quad \text{oraz} \quad \vec{F}_2 = -(1 \text{ N})\hat{i} - (2 \text{ N})\hat{j}.$$

Nie używając kalkulatora określ, które z wektorów z diagramu sił przedstawionego na rysunku 5.21 najlepiej przedstawiają siły: a)  $\vec{F}_1$ , b)  $\vec{F}_2$ . Jaka jest składowa siły wypadkowej wzdłuż: c) osi  $x$ , d) osi  $y$ ? W kierunku której ćwiartki układu współrzędnych skierowany jest wektor: e) siły wypadkowej, f) przyspieszenia tego banana?



Rys. 5.21. Pytanie 1

2. W chwili  $t = 0$  na odcinek skalny poruszający się dalej w kosmosie wzdłuż osi  $x$ , zaczyna działać siła  $\vec{F}$  o stałej wartości, po czym odcinek nadal porusza się wzdłuż osi  $x$ . Która z podanych funkcji: 1)  $x = 4t - 3$ , 2)  $x = -4t^2 + 6t - 3$ , 3)  $x = 4t^2 + 6t - 3$ , może opisywać położenie odcinka?



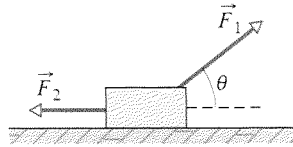
Rys. 5.22. Pytanie 3



funkcję czasu  $x(t)$  dla  $t > 0$ ? Dla której z tych funkcji siła  $\vec{F}$  jest skierowana przeciwnie do początkowego kierunku ruchu przedmiotka?

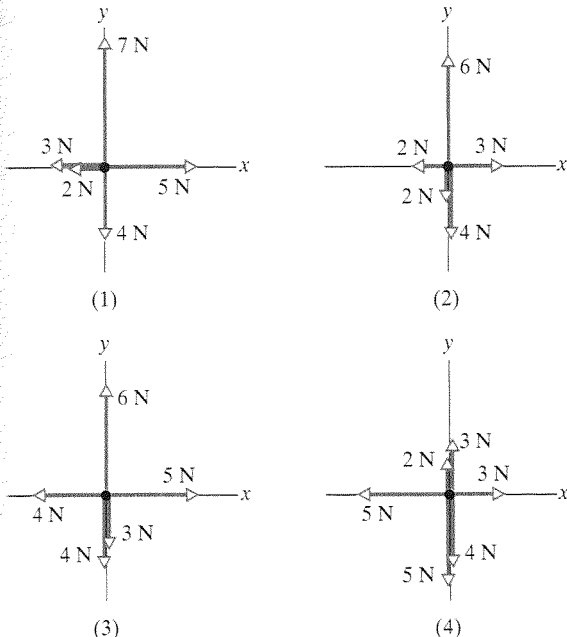
3. Na rysunku 5.22 przedstawiono widok z góry klocek leżącego na podłożu, po którym może się on poruszać bez tarcia oraz siły działające na ten klocek w czterech różnych przypadkach. Długości narysowanych wektorów są proporcjonalne do wartości sił. W którym z tych przypadków klocek może: a) znajdować się w spoczynku, b) poruszać się ze stałą prędkością?

4. Na rysunku 5.23 przedstawiono pudełko na kanapki, ślizgające się bez tarcia ze stałą prędkością po podłożu pokoiu mieszkaniowego oraz dwie siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  działające na to pudełko. Chcemy zmienić kąt  $\theta$  utworzony z poziomem przez siłę  $\vec{F}_1$ , bez zmiany wartości tej siły. Czy powinniśmy jednocześnie zwiększyć, zmniejszyć czy pozostawić bez zmiany wartość siły  $\vec{F}_2$  jeśli chcemy, aby pudełko nadal poruszało się ze stałą prędkością?



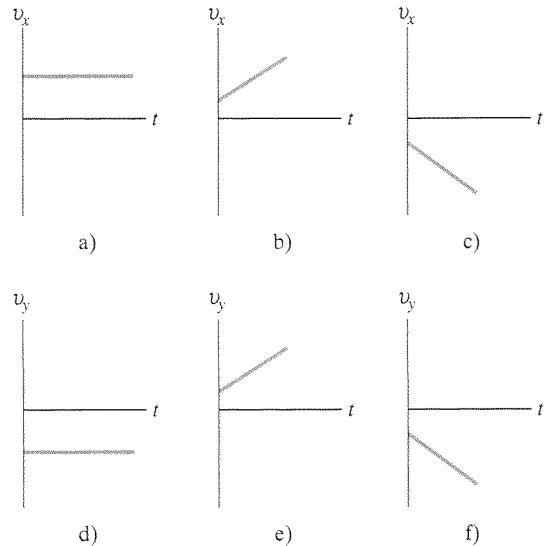
Rys. 5.23. Pytanie 4

5. Na rysunku 5.24 pokazano diagram sił działających na przedmiot leżący na podłożu, po którym może się on poruszać bez tarcia (widok z góry) w czterech różnych przypadkach. W którym z tych przypadków przyspieszenie  $\vec{a}$  przedmiotu ma różną od zera: a) składową  $x$ , b) składową  $y$ ? c) W każdym z przypadków wskaż kierunek wektora  $\vec{a}$ , podając albo ćwiartkę układu współrzędnych, albo kierunek jednej z osi tego układu. Wykonaj obliczenia w pamięci.



Rys. 5.24. Pytanie 5

6. Na rysunku 5.25 przedstawiono trzy wykresy zależności składowej prędkości  $v_x$  od czasu oraz trzy analogiczne wykresy dla składowej  $v_y$ . Wykresy nie są wykonane w jednakowej skali. Dobrać pary wykresów  $v_x(t)$  i  $v_y(t)$ , które najlepiej pasują do każdego z przypadków pytania 5 i rysunku 5.24.

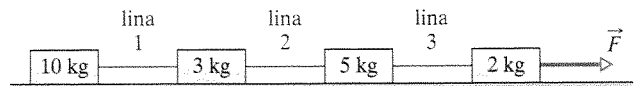


Rys. 5.25. Pytanie 6

7. Ciężar ciała zawieszono na linie, jak na rysunku 5.10c, wynosi 75 N. Czy wartość siły  $T$  jest większa, mniejsza czy równa 75 N, gdy ciało porusza się w dół, a wartość jego prędkości: a) rośnie, b) maleje?

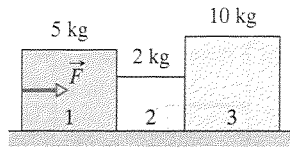
8. Do klocka o masie  $m$  leżącego na podłożu przyłożono siłę pionową  $\vec{F}$ . Czy i jak będzie się zmieniać wartość siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na klocek ze strony podłogi przy zwiększaniu wartości  $F$  — począwszy od zera — gdy siła  $\vec{F}$  jest skierowana: a) w dół, b) w górę?

9. Na rysunku 5.26 przedstawiono cztery klocki, połączone ze sobą liniami, ciągnięte bez tarcia po podłożu siłą  $\vec{F}$ . Jaka całkowita masa jest przyspieszana w prawo przez: a) siłę  $\vec{F}$ , b) linę 3, c) linę 1? d) U szereguj klocki według ich przyspieszenia, od największego do najmniejszego. e) U szereguj liny według ich naprężenia, od największego do najmniejszego (pytanie to jest rozgrzewką przed zadaniami 34 i 36).



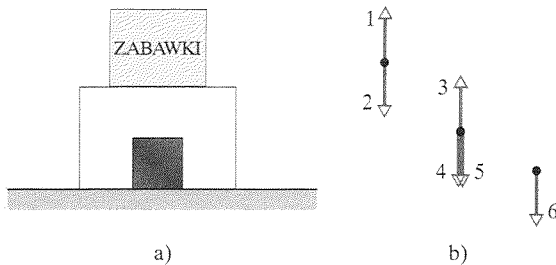
Rys. 5.26. Pytanie 9

10. Na rysunku 5.27 przedstawiono trzy stykające się ze sobą klocki, pchane bez tarcia po podłodze siłą poziomą  $\vec{F}$ . Jaka całkowita masa jest przyspieszana w prawo przez: a) siłę  $\vec{F}$ , b) siłę  $\vec{F}_{21}$  działającą na klocek 2 ze strony klocka 1, c) siłę  $\vec{F}_{32}$ , działającą na klocek 3 ze strony klocka 2? d) Uszereguj klocki według wartości ich przyspieszenia, od największej do najmniejszej. e) Uszereguj siły  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_{21}$  i  $\vec{F}_{32}$  według ich wartości, od największej do najmniejszej (pytanie to jest rozgrzewką przed zadaniem 31).



Rys. 5.27. Pytanie 10

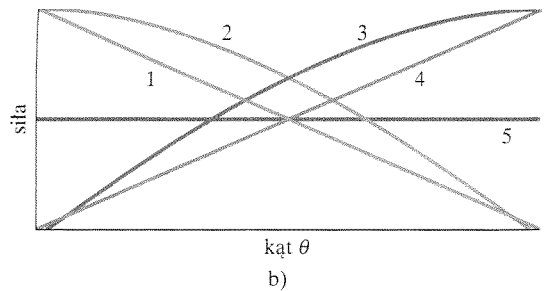
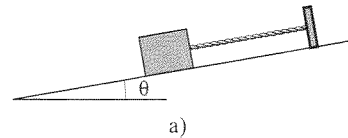
11. Na rysunku 5.28a przedstawiono pudło na zabawki stojące na psiej budzie (cięższe od pudła), która stoi na drewnianej podłodze. Na rysunku 5.28b ciała te przedstawiono za pomocą kropek, umieszczonych na odpowiedniej wysokości oraz narysowano (nie w skali) sześć pionowych wektorów. Który z tych wektorów najlepiej ilustruje: a) siłę ciężkości działającą na budę, b) siłę



Rys. 5.28. Pytanie 11

ciężkości działającą na pudło, c) siłę działającą na pudło ze strony budy, d) siłę działającą na budę ze strony pudła, e) siłę działającą na budę ze strony podłogi, f) siłę działającą na podłogę ze strony budy? g) Które z tych sił mają jednakowe wartości? Które z nich mają wartość: h) największą, i) najmniejszą?

12. Na rysunku 5.29a przedstawiono klocek połączony liną z prętem, który z kolei jest sztywno połączony z równią pochyłą. Które z podanych niżej wielkości rosną, maleją lub pozostają bez zmiany (co do wartości bezwzględnej), gdy kąt nachylenia równi  $\theta$  rośnie od zera: a) równoległa do równi składowa działająca na klocek siły ciężkości  $\vec{F}_g$ , b) napięcie liny, c) prostopadła do równi składowa siły  $\vec{F}_g$ , d) siła normalna, działająca na klocek ze strony równi. Która z krzywych na rysunku 5.29b odpowiada każdej wielkości z punktów a–d?



Rys. 5.29. Pytanie 12

## Zadania

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

### 5.5. Druga zasada dynamiki Newtona

- Ciało wzorcowe o masie 1 kg doznaje przyspieszenia o wartości  $2 \text{ m/s}^2$ , skierowanego pod kątem  $20^\circ$  względem dodatniego kierunku osi  $x$ . Wyznacz: a) składową  $x$ , b) składową  $y$  siły wypadkowej działającej na to ciało. c) Zapisz tę siłę wypadkową, stosując wektory jednostkowe.
- Pniak rzeźniczy o masie 2 kg może ślizgać się bez tarcia po blacie kuchennym, leżącym w płaszczyźnie  $xy$ . Na pniak działają dwie siły poziome. Jedna z nich wynosi:  $\vec{F}_1 = (3 \text{ N})\hat{i} + (4 \text{ N})\hat{j}$ .

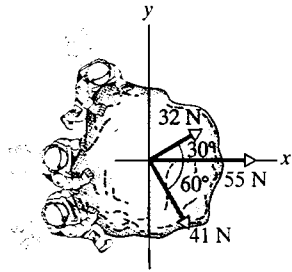
Wyznacz przyspieszenie pniaka i zapisz je za pomocą wektorów jednostkowych, gdy druga siła jest równa: a)  $\vec{F}_2 = (-3 \text{ N})\hat{i} + (-4 \text{ N})\hat{j}$ , b)  $\vec{F}_2 = (-3 \text{ N})\hat{i} + (4 \text{ N})\hat{j}$ , c)  $\vec{F}_2 = (3 \text{ N})\hat{i} + (-4 \text{ N})\hat{j}$ .

3. Na ciało o masie 3 kg działają tylko dwie siły poziome. Jedną z nich ma wartość 9 N i jest skierowana na wschód, a druga ma wartość 8 N i działa pod kątem  $62^\circ$  na północ od kierunku zachodniego. Wyznacz wartość przyspieszenia tego ciała.

4. Cząstka, na którą działają dwie siły porusza się ze stałą prędkością:  $\vec{v} = (3 \text{ m/s})\hat{i} - (4 \text{ m/s})\hat{j}$ . Jedną z tych sił jest równa  $\vec{F}_1 = (2 \text{ N})\hat{i} + (-6 \text{ N})\hat{j}$ . Wyznacz drugą siłę.

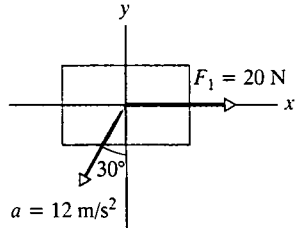
5. Cząstka, na którą działają trzy siły porusza się ze stałą prędkością:  $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} - (7 \text{ m/s})\hat{j}$ . Dwie z tych sił są równe:  $\vec{F}_1 = (2 \text{ N})\hat{i} + (3 \text{ N})\hat{j} + (-2 \text{ N})\hat{k}$  oraz  $\vec{F}_2 = (-5 \text{ N})\hat{i} + (8 \text{ N})\hat{j} + (-2 \text{ N})\hat{k}$ . Wyznacz trzecią siłę.

6. Trzej astronauta ci zaopatrzeni w plecaki z silnikami odrzutowymi popychają planetoidę o masie 120 kg tak, aby skierować ją do luku statku, działając na nią siłami pokazanymi na rysunku 5.30. Wyznacz przyspieszenie planetoidy; podaj je: a) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych oraz w postaci jęgo; b) wartości, c) kierunku.



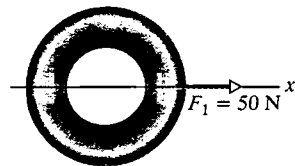
Rys. 5.30. Zadanie 6

7. Na pudło o masie 2 kg, którego widok z góry przedstawiono na rysunku 5.31, działają dwie siły, z których tylko jedną pokazano na rysunku. Pokazano natomiast wektor przyspieszenia pudła. Wyznacz drugą siłę; przedstaw ją: a) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych oraz jako jęj; b) wartość, c) kierunek.



Rys. 5.31. Zadanie 7

8. Na rysunku 5.32 pokazano oponę o masie 12 kg, która ma być ciągnięta za pomocą trzech lin. Jedna z przyłożonych do opony sił ( $\vec{F}_1$  o wartości 50 N) jest zaznaczona na rysunku. Dobierz kierunki dwóch pozostałych sił  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  tak, aby wartość wypadkowego przyspieszenia opony była jak najmniejsza i wyznacz jej wartość, gdy: a)  $F_2 = 30$  N,  $F_3 = 20$  N; b)  $F_2 = 30$  N,  $F_3 = 10$  N; c)  $F_2 = F_3 = 30$  N.

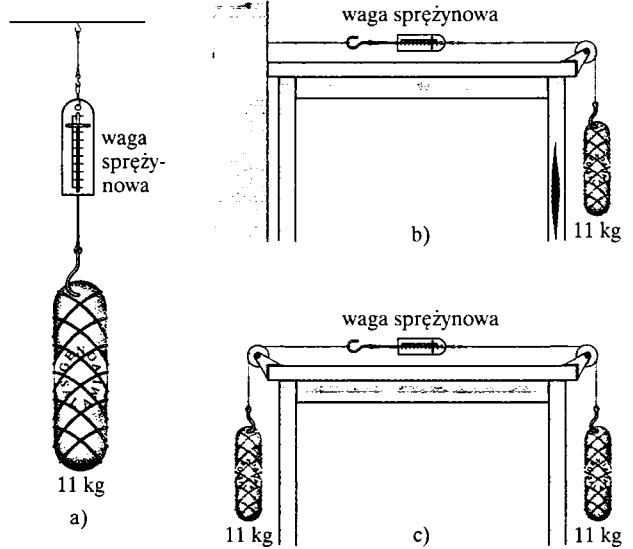


Rys. 5.32. Zadanie 8

## 5.6. Kilka ważnych sił

9. a) Salami o masie 11 kg wisi na lince połączonej z zaczepem wagi sprężynowej, która z kolei wisi na innej lince, przymocowanej do sufitu (rysunek 5.33a). Jakie jest wskazanie wagi skalowanej w jednostkach ciężaru? b) Na rysunku 5.33b linka łącząca salami z wagą jest przełożona przez krążek, a drugi koniec wagi jest przymocowany do ściany za pomocą innej linki. Jakie jest teraz wskazanie wagi? c) Na rysunku 5.33c zamiast ściany mamy drugie salami o masie 11 kg. Układ znajduje się w spoczynku. Jakie jest wskazanie wagi w tym przypadku? www

10. Klocek, którego ciężar wynosi 3 N, spoczywa na poziomym podłożu. Za pomocą pionowej sprężyny przyłożona jest do niego siła o wartości 1 N, skierowana pionowo do góry. Wyznacz wartość i kierunek siły, jaką klocek działa na podłoże.



Rys. 5.33. Zadanie 9

11. Pewna cząstka ma ciężar 22 N w miejscu, gdzie  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Wyznacz jej: a) ciężar, b) masę w miejscu, gdzie  $g = 9,9 \text{ m/s}^2$  oraz jej: c) ciężar, d) masę w przestrzeni kosmicznej, gdzie  $g = 0$ .

12. Oblicz ciężar zwiadowcy kosmicznego o masie 75 kg: a) na Ziemi, b) na Marsie, gdzie przyspieszenie spadku swobodnego wynosi  $g = 3,8 \text{ m/s}^2$ , c) w przestrzeni międzyplanetarnej, gdzie  $g = 0$ . d) Ile wynosi masa zwiadowcy w każdym z tych miejsc?

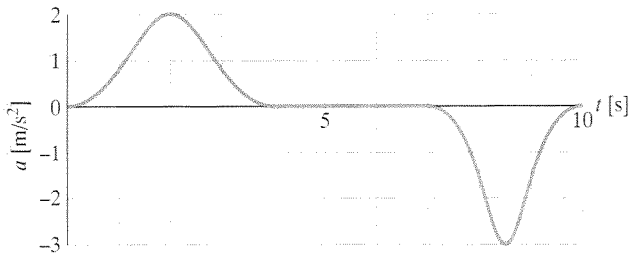
## 5.8. Jak stosować zasady dynamiki Newtona?

13. Gdy jądro wychwytuje rozproszony neutron, musi go zatrzymać na drodze równej średnicy jądra. Siła, jaką działa ono wówczas na neutron, a która „skleja ze sobą” cząstki w jądrze (oddziaływanie silne), jest poza nim praktycznie równa zeru. Załóż, że jądro o średnicy  $d = 1 \cdot 10^{-14}$  m może wychwycić neutron o początkowej wartości prędkości nie większej niż  $1,4 \cdot 10^7$  m/s. Wyznacz wartość siły, zakładając, że jest ona stała w obszarze jądra. Masa neutronu wynosi  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg.

14. Dziecko o masie 29 kg, z plecakiem o masie 4,5 kg, najpierw stoi na chodniku, a potem skacze w górę. Wyznacz wielkość i kierunek siły, jaką dziecko działa na chodnik, gdy: a) stoi ono na chodniku, b) znajduje się w powietrzu. Następnie wyznacz wartość i kierunek siły wypadkowej, działającej na ziemię ze strony dziecka, gdy: c) dziecko stoi na chodniku, d) znajduje się ono w powietrzu.

15. Spójrz na rysunek 5.18. Niech masa klocka wynosi 8,5 kg, a kąt  $\theta$  będzie równy  $30^\circ$ . Wyznacz: a) naprężenie liny, b) siłę normalną, działającą na klocek. c) Oblicz wartość przyspieszenia klocka po przecięciu liny.

16. Winda, w której znajduje się pasażer o masie 50 kg, rusza z parteru, na którym stała nieruchomo w chwili  $t = 0$  i wznosi się na najwyższe piętro w ciągu 10 s. Na rysunku 5.34 przedstawiono zależność przyspieszenia windy od czasu, przy czym wartość dodatnia przyspieszenia oznacza, że jest ono skierowane do góry. Wyznacz wartość i kierunek następujących sił: a) maksymalnej siły działającej na pasażera ze strony podłogi windy, b) minimalnej siły działającej na pasażera ze strony podłogi, c) maksymalnej siły działającej na podłogę windy ze strony pasażera.



Rys. 5.34. Zadanie 16

17. Napęd słoneczny. „Jacht słoneczny” to pojazd kosmiczny o wielkim żaglu, popychany przez światło słoneczne. Choć ciśnienie światła jest bardzo małe z punktu widzenia naszych codziennych doświadczeń, to może być wystarczająco duże, aby statek oddalił się od Słońca — podróż taka byłaby bardzo powolna, ale nie pociągałaby za sobą żadnych kosztów. Załóż, że statek kosmiczny ma masę 900 kg, a siła ze strony światła wynosi 20 N. a) Jaka jest wartość przyspieszenia statku? Jeśli pojazd startuje ze stanu spoczynku, to: b) jak daleko od Słońca dotrze w ciągu jednego dnia, c) jak szybko będzie się poruszać po tym czasie?

18. Naprężenie żyłki wędkarskiej, przy jakim się ona urywa nazywamy potocznie „siłą” żyłki. Jaką minimalną „siłę” musi mieć żyłka, aby móc za jej pomocą zatrzymać łososia o ciężarze 85 N na drodze 11 m, jeśli ryba płynie początkowo z prędkością 2,8 m/s? Załóż, że opóźnienie ruchu łososia jest stałe.

19. Doświadczalne sanie raketowe mogą być jednostajnie przyspieszone do prędkości 1600 km/h w ciągu 1,8 s. Jaka siła wypadkowa jest do tego potrzebna, jeśli masa sani wynosi 500 kg?

20. Samochód o ciężarze  $1,3 \cdot 10^4$  N poruszający się początkowo z prędkością 40 km/h zostaje zahamowany i zatrzymuje się po przebyciu drogi 15 m. Załóż, że siła hamująca samochód jest stała i wyznacz: a) wartość tej siły, b) czas potrzebny do zatrzymania samochodu. Ile razy zwiększy się: c) przebyta droga, d) czas hamowania, jeśli prędkość początkowa samochodu będzie dwukrotnie większa, a siła hamująca nie ulegnie zmianie (odpowiedź powinna cię przekonać o tym, że jazda z dużą prędkością jest bardzo niebezpieczna)?

21. Elektron poruszający się poziomo z prędkością  $1,2 \cdot 10^7$  m/s wchodzi w obszar, w którym działa na niego stała siła pionowa

o wartości  $4,5 \cdot 10^{-16}$  N. Masa elektronu wynosi 9,11  $\cdot 10^{-31}$  kg. O ile zmieni się w pionie położenie elektronu w czasie przebędzie on w poziomie drogę 30 mm?

22. Samochód jadący z prędkością 53 km/h uderza we wzniesienie mostu. Pasażer przemieszcza się do przodu o 65 cm (względem drogi), zanim zostanie unieruchomiony przez poduszkę powietrzną. Jaka siła działa w tym czasie na górną część ciała pasażera, której masa wynosi 41 kg? Załóż, że siła ta jest stała.

23. Tarzan, którego ciężar wynosi 820 N zeskakuje z urwiska, chwytając koniec liany, zwisającej z gałęzi wysokiego drzewa. Liana ma długość 20 m i tworzy początkowo z poziomem kąt  $30^\circ$ . W chwili, gdy Tarzan odrywa stopy od urwiska, naprężenie liany wynosi 760 N. Wybierz układ współrzędnych o osi  $x$ , biegnącej poziomo od krawędzi urwiska i osi  $y$ , skierowanej pionowo do góry. a) Podaj siłę działającą na Tarzana ze strony liany, w czasie  $t = 0$  z zastosowaniem wektorów jednostkowych. b) Podaj w tym samym zapisie siłę wypadkową działającą na Tarzana. c) Podaj wartość i kierunek siły wypadkowej, działającej na Tarzana w chwili, gdy liana jest pionowa. d) Podaj wartość i kierunek przyspieszenia Tarzana.

24. Narciarz o masie 50 kg wciągany jest bez tarcia w górę stoku, tworzącego z poziomem kąt  $8^\circ$ , trzymając się liny wyciągu poruszającej się równoległe do stoku. Wyznacz wartość siły działającej na narciarza ze strony liny w chwili, gdy: a) lina przemieszcza się ze stałą prędkością równą 2 m/s; b) lina porusza się z prędkością początkowo równą 2 m/s, a potem zwiększającą się w tempie  $0,1$  m/s<sup>2</sup>.

25. Dziewczynka o masie 40 kg i sanki o masie 8,4 kg zjeżdżają się na tafli zamrożonego jeziora, po której mogą się poruszać bez tarcia. Dziewczynka trzyma przywiązaną do sanek linkę o długości 15 m, która ma znikomo małą masę. W pewnej chwili dziewczynka zaczyna ciągnąć linkę siłą 5,2 N. Wyznacz: a) przyspieszenie sanek, b) przyspieszenie dziewczynki, c) W jakiej odległości od swego początkowego położenia dziewczynka zetknie się z sankami?

26. Ciągniesz niską lodówkę po nasmarowanej tłuszczem podłodze (bez tarcia), działając na nią stałą siłą  $F$  skierowaną poziomo (przypadek 1) albo skierowaną ku górze pod kątem  $\theta$  do poziomu (przypadek 2). a) Wyznacz stosunek wartości prędkości w przypadkach 2 i 1 po czasie  $t$  od początku działania siły. b) Ile wynosi ten stosunek po przebyciu przez lodówkę drogi  $d$ ?

27. Strażak o ciężarze 712 N ześlizguje się po pionowym słupie z przyspieszeniem  $3$  m/s<sup>2</sup>, skierowanym w dół. Wyznacz wartość i kierunek siły pionowej, działającej: a) na strażaka ze strony słupa, b) na słup ze strony strażaka.

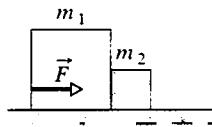
28. Borsuk o masie 12 kg wbiega dla rozrywki z prędkością początkową 5 m/s skierowaną w dodatnim kierunku osi  $x$ , na dany zamrożony staw, po którym ślizga się bez tarcia. Wybierz punkt

którym borsuk wbiega na lód, jako początek układu współrzędnych. Zwierzę ślizga się po lodzie, przy czym jest popychane siłą 17 N przez wiatr wiejący w dodatnim kierunku osi  $y$ . Wyznacz: a) wektor prędkości borsuka, b) wektor położenia borsuka w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych, po 3 s od początku jego ruchu po lodzie.

29. Kula o masie  $3 \cdot 10^{-4}$  kg jest zawieszona na sznurze. Na kulę działa wiejący poziomo ze stałą prędkością wiatr, w wyniku czego sznur odchyła się od pionu, tworząc z nim stały kąt  $37^\circ$ . Wyznacz: a) wartość siły, jaką działa wiatr na kulę, b) napięcie sznura. *ilw www*

30. Narciarz o masie 40 kg zjeżdża bez tarcia prosto w dół stoku nachylnego pod kątem  $10^\circ$  do poziomu, w czasie silnego wiatru wiejącego równoległe do stoku. Wyznacz wartość i kierunek siły, jaką wiatr działa na narciarza, jeśli: a) prędkość narciarza ma stałą wartość, b) wartość prędkości narciarza zwiększa się w tempie  $1 \text{ m/s}^2$ , c) wartość prędkości narciarza zwiększa się w tempie  $2 \text{ m/s}^2$ .

31. Dwa stykające się ze sobą klocki leżą na stole, po którym mogą się poruszać bez tarcia. Do większego klocka przykładamy siłę poziomą, jak pokazano na rysunku 5.35. a) Wyznacz wartość siły, jaką działają na siebie klocki, jeśli  $m_1 = 2.3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , a  $F = 3.2 \text{ N}$ . b) Wykaż, że jeśli siłę o takiej samej wartości  $F$ , lecz przeciwnym kierunku przyłożymy do mniejszego klocka, to siła, jaką działają na siebie klocki będzie miała wartość 2.1 N, różną od otrzymanej w punkcie (a). c) Wyjaśnij, dlaczego te wyniki są różne. *ilw*

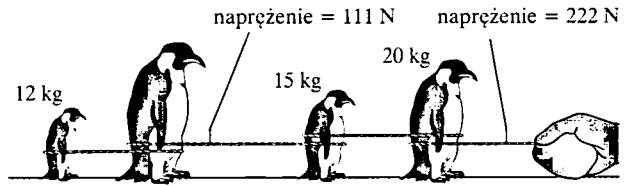


Rys. 5.35. Zadanie 31

32. Silnik o masie 1400 kg jest połączony z kadłubem pasażerskiego samolotu odrzutowego tylko za pomocą trzech wkrętów (taka jest powszechna praktyka). Przyjmij, że każdy wkręt utrzymuje jedną trzecią ciężaru silnika. a) Oblicz siłę działającą na każdy z wkrętów, gdy samolot czeka na zezwolenie na start. b) W czasie lotu samolot wpada w obszar turbulencji, które nagle nadają mu przyspieszenie o wartości  $2.6 \text{ m/s}^2$ , skierowane pionowo do góry. Wyznacz siłę działającą wówczas na każdy wkręt.

33. Kabina windy i jej zawartość mają łącznie masę 1600 kg. Wyznacz napięcie liny dźwigu, gdy kabina poruszająca się pierwotnie w dół z prędkością 12 m/s zostaje zatrzymana na drodze 42 m, przy czym jej przyspieszenie jest stałe.

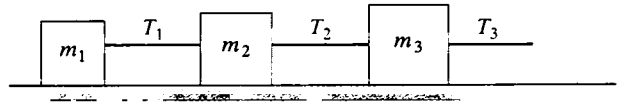
34. Na rysunku 5.36 przedstawiono cztery pingwiny, które w ramach zabawy ciągnięte są bez tarcia po lodzie przez ich opiekuna. Na rysunku podano masy trzech pingwinów oraz napięcia dwóch odcinków liny. Wyznacz masę czwartego pingwina (tego, którego masy nie podano).



Rys. 5.36. Zadanie 34

35. Osoba o masie 80 kg wykonuje skok ze spadochronem i porusza się ze skierowanym w dół przyspieszeniem pionowym równym  $2.5 \text{ m/s}^2$ . Masa spadochronu wynosi 5 kg. a) Wyznacz skierowaną do góry siłę, jaką powietrze działa na otwarty spadochron, b) Jaką siłą skierowaną pionowo w dół działa skoczek na spadochron?

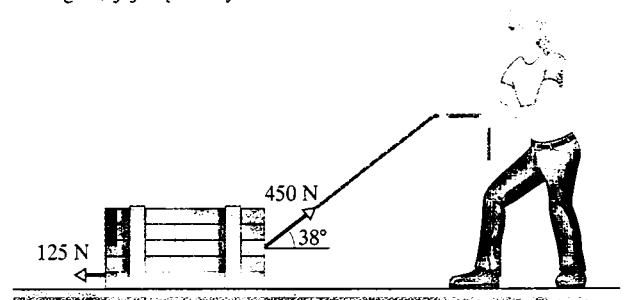
36. Na rysunku 5.37 przedstawiono trzy klocki połączone liniami i ciągnięte w prawą stronę siłą o wartości  $T_3 = 65 \text{ N}$ . Klocki poruszają się po stole bez tarcia. Wyznacz: a) przyspieszenie układu klocków oraz napięcie linek łączących klocki: b)  $T_1$  i c)  $T_2$ .



Rys. 5.37. Zadanie 36

37. Wyobraź sobie ładownik, zbliżający się do powierzchni Kallisto, jednego z księżyców Jowisza. Jeśli silnik wytwarza siłę skierowaną do góry (ciąg) o wartości 3260 N, to pojazd obniża się ze stałą prędkością; jeśli siła ta wynosi tylko 2200 N, to pojazd spada z przyspieszeniem skierowanym w dół, o wartości  $0.39 \text{ m/s}^2$ . a) Ile wynosi ciężar ładownika w pobliżu powierzchni Kallisto? b) Ile wynosi masa pojazdu? c) Jaka jest wartość przyspieszenia swobodnego spadku w pobliżu powierzchni Kallisto?

38. Robotnik przesuwą skrzynię po podłodze hali fabrycznej, ciągnąc linę przywiązaną do skrzyni (rys. 5.38). Przykłada on do liny nachylonej pod kątem  $38^\circ$  do poziomu siłę o wartości 450 N, a ze strony podłogi działa na skrzynię siła pozioma o wartości 125 N, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu skrzyni. Oblicz wartość przyspieszenia skrzyni, jeśli: a) jej masa jest równa 310 kg, b) jej ciężar wynosi 310 N.

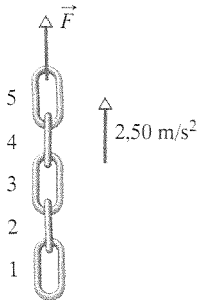


Rys. 5.38. Zadanie 38

39. Motocyklista o masie 60 kg jedzie swym pojazdem pod górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem  $10^\circ$ , z przyspieszeniem  $3 \text{ m/s}^2$ . a) Jaka jest wartość siły wypadkowej, działającej na motocyklistę? b) Jaka jest wartość siły, działającej na motocyklistę ze strony pojazdu?

40. Człowiek o masie 85 kg opuszcza się na ziemię z wysokości 10 m, trzymając się liny przełożonej przez obracający się bez tarcia krążek i obciążonej na drugim końcu workiem z piaskiem o masie 65 kg. Z jaką prędkością uderzy człowiek w ziemię, jeśli w chwili początkowej się nie poruszał?

41. Jak pokazano na rysunku 5.39, łańcuch złożony z pięciu ogniw, każde o masie 0,1 kg, jest podnoszony pionowo ze stałym przyspieszeniem, równym  $2,5 \text{ m/s}^2$ . Wyznacz wartość siły działającej: a) na ogniwo 1 ze strony ogniwa 2, b) na ogniwo 2 ze strony ogniwa 3, c) na ogniwo 3 ze strony ogniwa 4, d) na ogniwo 4 ze strony ogniwa 5. Następnie oblicz: e) siłę  $\vec{F}$  działającą na górne ogniwo, ze strony osoby podnoszącej łańcuch, f) siłę wypadkową powodującą przyspieszenie każdego ogniwa.



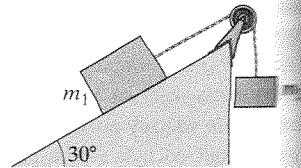
Rys. 5.39. Zadanie 41

42. Odrzutowiec sił morskich (rys. 5.40) o ciężarze 231 kN musi osiągnąć prędkość 85 m/s, aby mógł wznieść się w powietrze. Silnik samolotu umożliwia uzyskanie siły do 107 kN, lecz nie wystarcza to do osiągnięcia przez samolot prędkości, potrzebnej do startu na pasie o długości 90 m, jaki jest na lotniskowcu. Jaka minimalna siła (z założenia stała) musi działać na odrzutowiec wyrzutnia, stosowana w celu ułatwienia samolotom startu? Załóż, że zarówno wyrzutnia, jak i silnik samolotu działają na samolot stałą siłą przez cały czas jego rozpędzania się na 90-metrowym pasie startowym.



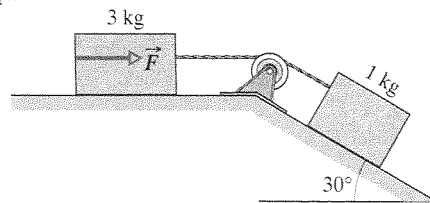
Rys. 5.40. Zadanie 42

43. Klocek o masie  $m_1 = 3,7 \text{ kg}$  znajdujący się na równi pochyłej o kącie nachylenia  $30^\circ$ , po której może się poruszać bez tarcia jest połączony liną, przełożoną przez krążek się obracający bez tarcia krążek o znikomo małej masie z wiszącym pionowo drugim klokiem o masie  $m_2 = 2,3 \text{ kg}$  (rys. 5.41). Wyznacz: a) wartość przyspieszenia każdego klocka, b) kierunek przyspieszenia klocka wiszącego, c) napięcie liny. [ilw.waw.pl](http://ilw.waw.pl)



Rys. 5.41. Zadanie 43

44. Na rys. 5.42 przedstawiono pudełko z ołówkami o masie 1 kg, znajdujące się na równi pochyłej o kącie nachylenia  $30^\circ$ , po której może się poruszać bez tarcia. Połączone jest ono linką z długopisami o masie 3 kg, znajdującym się na powierzchni poziomej, po której może się poruszać bez tarcia. Krążek może obracać się bez tarcia i ma znikomo małą masę. a) Ile wynosi napięcie linki, jeśli na pudełko z długopisami działa siła  $\vec{F}$  o wartości 2,3 N? b) Wyznacz największą wartość siły  $\vec{F}$ , dla której linka jest jeszcze napięta.



Rys. 5.42. Zadanie 44

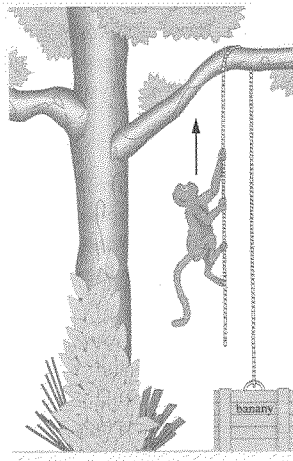
45. Klocek został pchnięty w górę, wzdłuż równi pochyłej, po której może się poruszać bez tarcia, z prędkością początkową  $v_0 = 3,5 \text{ m/s}$ . Równia jest nachylona do poziomu pod kątem  $\theta = 32^\circ$ . a) Jak daleko wznieś się klocek wzdłuż równi? b) Ile czasu zajmie mu dotarcie do punktu największego wznieśnięcia? c) Jaka prędkość będzie miał klocek w momencie powrotu do podłoża równi?

46. Statek międzygwiazdny o masie  $1,2 \cdot 10^6 \text{ kg}$  znajduje się w spoczynku względem pewnej gwiazdy. a) Jakie stałe przyspieszenie jest potrzebne, aby osiągnął on w ciągu 3 dni prędkość 0,1c (gdzie c jest prędkością światła, równą  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) względem tej gwiazdy? b) Ile wynosi to przyspieszenie w jednostkach g? c) Jaka siła jest niezbędna, aby nadać statkowi to przyspieszenie? d) Ile czasu zajmie temu statkowi (licząc od początku jego ruchu) podróż na odległość 5 miesięcy świetlnych, czyli na odległość, jaką światło przebywa w ciągu 5 miesięcy, jeśli po osiągnięciu przez statek prędkości 0,1c silniki zostaną wyłączone (tzn. statek zacznie się poruszać ze stałą prędkością o tej wartości)?

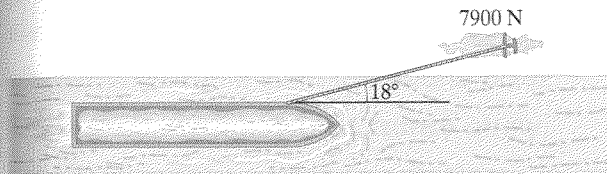
47. Małpa o masie 10 kg wspina się po linie przerzuconej przez gałąź drzewa i przymocowanej do stojącej na ziemi skrzynki o masie 15 kg (rys. 5.43). Lina ma znikomo małą masę i może się ślizgać po gałęzi bez tarcia. a) Wyznacz mini-

mała wartość przyspieszenia i jakim musi się wspinać małpa, aby skrzynka została się z ziemi. Jeżeli go uniesieniu skrzynki w powietrze małpa przestaje się wspinać i będzie tylko trzymać się liny, jakie będą: b) wartość, c) kierunek przyspieszenia małpy, d) naprężenie liny?

48. W dawnych czasach barki były ciągnięte wzdłuż kanałów przez konie, w sposób przedstawiony na rysunku 5.44. Załóżmy, że koń ciągnie linę siłą o wartości 7900 N skierowaną pod kątem 18° w stosunku do kierunku ruchu barki, który odbywa się wzdłuż kanału. Masa barki wynosi 9500 kg, a jej przyspieszenie jest równe 0,12 m/s<sup>2</sup>. Wyznacz: a) wartość, b) kierunek siły działającej na barkę ze strony wody.

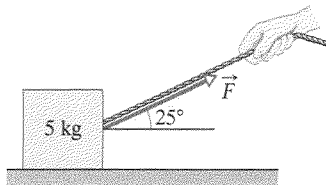


Rys. 5.43. Zadanie 47



Rys. 5.44. Zadanie 48

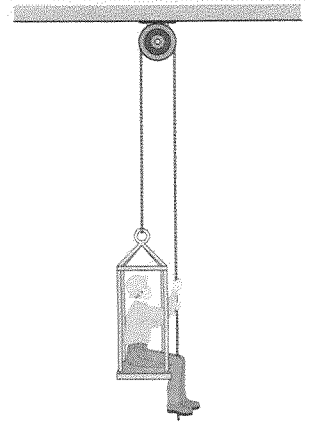
49. Jak pokazano na rysunku 5.45, klocek o masie 5 kg jest ciągnięty bez tarcia po poziomej podłodze za pomocą liny, która działa na klocek siłą o wartości  $F = 12$  N pod kątem  $\theta = 25^\circ$  w górę od kierunku poziomego. a) Jaka jest wartość przyspieszenia klocka? b) Wyobraź sobie, że powoli zwiększamy wartość siły  $F$ . Jaka jest wartość tej siły w chwili, gdy klocek zostaje całkowicie oderwany od podłogi? c) Jaka jest w tej chwili wartość przyspieszenia klocka?



Rys. 5.45. Zadanie 49

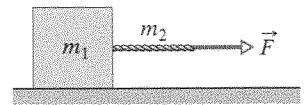
50. Na rysunku 5.46 przedstawiono człowieka siedzącego na ławeczce bosmańskiej zawieszanej na linie, która jest przełożona przez krążek. a) Jaka jest wartość siły, jaką człowiek musi ciągnąć linę, aby wznosił się on: a) ze stałą prędkością, b) ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości 1,3 m/s<sup>2</sup> (wskazówka: skorzystaj z diagramu sił).

Założ następnie, że drugi koniec liny opada aż do ziemi, gdzie ciągnie go inna osoba. Wyznacz wartość siły, jaką musi ciągnąć linę ta druga osoba, aby człowiek na ławeczce wznosił się: c) ze stałą prędkością, d) ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości 1,3 m/s<sup>2</sup>. Jaka jest wartość siły wywieranej na sufit ze strony krążka: e) w przypadku (a), f) w przypadku (b), g) w przypadku (c), h) w przypadku (d)?



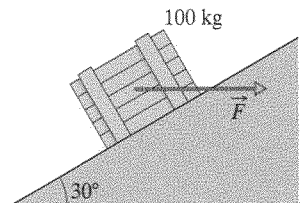
Rys. 5.46. Zadanie 50

51. Klocek o masie  $m_1$  jest ciągnięty po poziomej powierzchni, po której może się poruszać bez tarcia, za pomocą liny o masie  $m_2$ , jak pokazano na rysunku 5.47. Do końca liny jest przyłożona poziomo siła  $\vec{F}$ . a) Wykaż, że lina musi zwisać, choćby w minimalnym stopniu. Załóżwszy następnie, że zwis liny jest znikomo mały, oblicz: b) przyspieszenie liny i klocka, c) siłę, działającą na klocek ze strony liny, d) naprężenie liny w jej środku.



Rys. 5.47. Zadanie 51

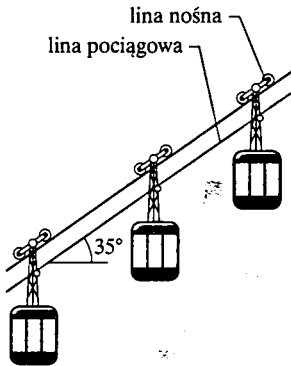
52. Jak pokazano na rysunku 5.48 skrzynia o masie 100 kg jest wciągana w górę po równi pochyłej o nachyleniu 30°, po której może się poruszać bez tarcia, za pomocą działającej poziomo siły  $\vec{F}$ . Wyznacz wartość: a) siły  $\vec{F}$ , b) siły działającej na skrzynię ze strony równi.



Rys. 5.48. Zadanie 52

53. Balon na ogrzane powietrze o masie  $m_1$  opada pionowo ze skierowanym w dół przyspieszeniem o wartości  $a$ . Wyznacz masę balastu, który trzeba wyrzucić z gondoli balonu, aby nadać mu przyspieszenie o wartości  $a$ , skierowane do góry (tzn. przyspieszenie o takiej samej wartości, lecz przeciwnym kierunku niż poprzednio). Przyjmij, że skierowana do góry siła działająca na balon ze strony powietrza (siła nośna) nie zmienia się przy zmniejszeniu masy balonu. [ilw.waw.pl](http://ilw.waw.pl)

54. Na rysunku 5.49 przedstawiono fragment toru linowej kolejki górskiej. Maksymalna dopuszczalna masa każdego wagonika wraz z pasażerami wynosi 2800 kg. Wagoniki jadą po linie nośnej i są poruszane za pomocą liny pociągowej; liny są rozwieszane mię-



Rys. 5.49. Zadanie 54

dzy słupami. Załóż, że odcinki lin między słupami są fragmentem prostych. Ile wynosi różnica naprężenia kolejnych odcinków liny pociągowej, jeśli wagoniki mają maksymalną dopuszczalną masę i poruszają się z przyspieszeniem  $0.81 \text{ m/s}^2$  w górę stoku o nachyleniu  $35^\circ$ ?

55. Winda o ciężarze  $27,8 \text{ kN}$  porusza się w górę ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości  $1,22 \text{ m/s}^2$ . a) Oblicz naprężenie liny tej windy. b) Wyznacz naprężenie liny, gdy winda porusza się do góry, lecz jej prędkość maleje w tempie  $1,22 \text{ m/s}^2$ .

56. Lampa wisi pionowo na linie w windzie, która jedzie w dół, a jej prędkość maleje w tempie  $2,4 \text{ m/s}^2$ . a) Ile wynosi masa lampy, jeśli naprężenie liny jest równe  $89 \text{ N}$ ? b) Ile wynosi naprężenie liny, gdy winda będzie wznosić się ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości  $2,4 \text{ m/s}^2$ ?

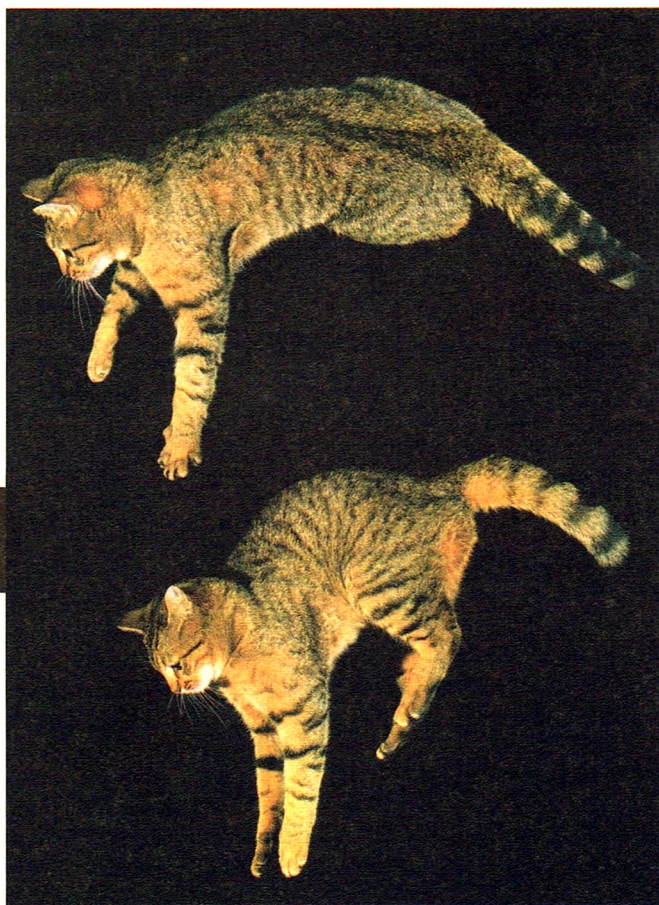


## 6 Siła i ruch II

Koty, hodowane często przez lokatorów wielopiętrowych bloków mieszkalnych, bardzo lubią drzemać na parapetach okiennych. Jeśli kot przypadkowo spadnie z parapetu na chodnik uliczny, to doznane przez niego uszkodzenie ciała (określone przez liczbę złamanych kości lub szansę utraty życia) *zmniejsza się* wraz ze wzrostem wysokości aż do siódmego lub ósmego piętra (rekordem jest tu wyczyn pewnego kota, który wypadł z 32 piętra i doznał jedynie nieznacznego uszkodzenia tułowia oraz stracił jeden ząb).

**Jak to możliwe, że upadek z większej wysokości jest mniej niebezpieczny?**

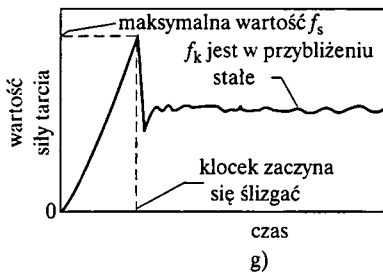
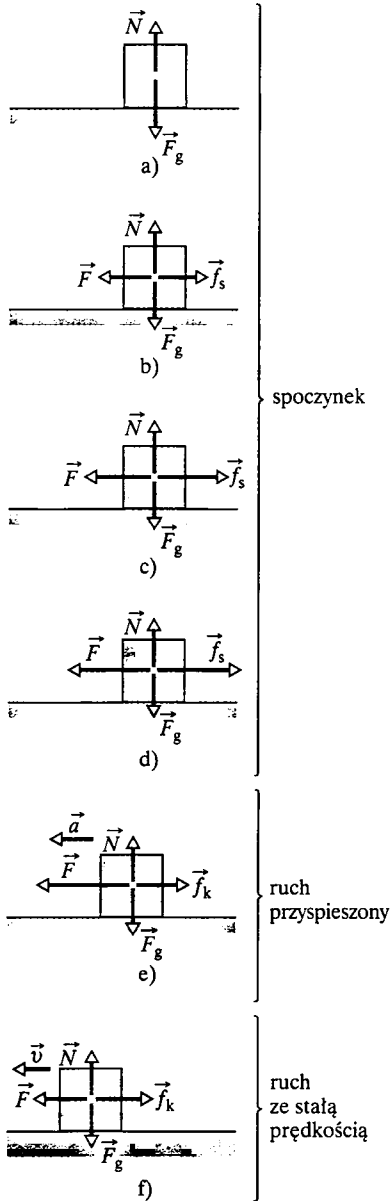
Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 6.1. Tarcie

Siły tarcia są nieodłącznym elementem naszej codzienności. Gdybyśmy nie potrafili im przeciwdziałać, zatrzymałyby każde poruszające się ciało i nie pozwoliłyby obracać się żadnemu wirnikowi. Samochód zużywa aż ok. 20% paliwa na pokonanie sił tarcia w silniku i układzie przeniesienia napędu. Z drugiej jednak strony, gdyby tarcia zupełnie nie było, samochodem nigdzie byśmy nie dojechali, nie moglibyśmy chodzić, ani jeździć rowerem. Nie dałoby się utrzymać pióra w ręku, a nawet gdyby to było możliwe, to i tak nie dałoby się pisać. Gwoździe i wkręty byłyby bezużyteczne, tkaniny rozpadłyby się, a węzły by się rozwiązały.

Zajmiemy się teraz siłami tarcia działającymi między suchymi powierzchniami stałymi, pozostającymi względem siebie w spoczynku albo poruszającymi się z niewielką prędkością jedna względem drugiej. Rozważmy trzy proste doświadczenia myślowe.



1. Pchnij książkę, aby wprawić ją w ruch ślizgowy po stole. Zgodnie z oczekiwaniem książka będzie zwalniać i w końcu się zatrzyma. Oznacza to, że poruszała się ona z przyspieszeniem, równoległym do powierzchni stołu i skierowanym przeciwnie do kierunku prędkości książki. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, na książkę musiała więc działać siła równoległa do powierzchni stołu, o kierunku przeciwnym do kierunku prędkości. To jest właśnie siła tarcia.
2. Pchaj poziomo książkę po stole tak, aby poruszała się ze stałą prędkością. Czy wywierana przez ciebie siła jest jedyną siłą działającą na książkę? Nie, bo gdyby tak było, książka poruszałaby się ruchem przyspieszonym. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że musi istnieć jeszcze inna siła, skierowana przeciwnie do tej, którą ty działasz, ale o takiej samej wartości, tak że te dwie siły się równoważą. Ta druga siła to siła tarcia, równoległa do powierzchni stołu.
3. Pchnij poziomo ciężką skrzynię. Skrzynia ani drgnie. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona na skrzynię działa jeszcze inna siła, przeciwdziałająca sile przykładanej przez ciebie. Co więcej, musi być ona skierowana przeciwnie do twojej siły i być jej równa co do wartości, tak aby te siły się równoważyły. Ta druga siła to siła tarcia. Pchnij skrzynię mocniej. Skrzynia nadal pozostaje w miejscu. Jak widać, siła tarcia może zmieniać wartość, aby równoważyć różne siły. Wreszcie pchnij skrzynię z całej siły. Skrzynia zaczyna się ślizgać. Stwierdzamy zatem, że istnieje wartość maksymalna siły tarcia, po przekroczeniu której ciało zaczyna się ślizgać.

Rys. 6.1. a) Siły działające na klocek w spoczynku. b)–d) Przyłożona do klocka siła zewnętrzna  $\vec{F}$  jest równoważona przez siłę tarcia statycznego  $\vec{f}_s$ . Gdy  $F$  rośnie,  $f_s$  także wzrasta, aż do osiągnięcia pewnej wartości maksymalnej. e) Klocek zaczyna się ślizgać po stole, poruszając się ruchem przyspieszonym w kierunku siły  $\vec{F}$ . f) Jeśli klocek ma się poruszać ze stałą prędkością, to siłę  $F$  trzeba zmniejszyć w stosunku do wartości maksymalnej, która była potrzebna do wprawięcia klocka w ruch. g) Wyniki doświadczenia, wykonanego zgodnie ze schematem a)–f)

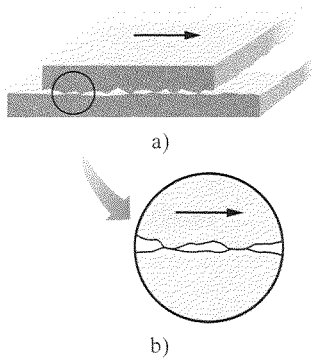
To ostatnie doświadczenie przedstawiono szczegółowo na rysunku 6.1. Na rysunku 6.1a klocek spoczywa na stole, a działająca na niego siła ciężkości  $\vec{F}_g$  jest równoważona przez siłę normalną  $\vec{N}$ . Rysunek 6.1b odpowiada sytuacji, w której działasz na klocek siłą  $\vec{F}$ , starając się popchnąć go w lewą stronę. W odpowiedzi pojawia się siła tarcia  $\vec{f}_s$ , skierowana w prawo, która dokładnie równoważy siłę przyłożoną przez ciebie. Siłę  $\vec{f}_s$  nazywamy siłą tarcia statycznego. Klocek pozostaje w spoczynku.

Na rysunkach 6.1c i d pokazano, że gdy zwiększasz wartość przykładanej do klocka siły, wartość siły tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  także wzrasta i klocek nadal się nie porusza. Gdy jednak siła przyłożona do klocka osiąga pewną wartość graniczną, klocek zaczyna się ślizgać po stole i porusza się ruchem przyspieszonym w lewo (rys. 6.1.e). Siłę tarcia, która przeciwdziała wówczas ruchowi ciała nazywamy siłą tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$ .

Wartość siły tarcia kinetycznego, działającej na ciało w ruchu jest zwykle mniejsza od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego działającej, gdy ciało spoczywa. Jeśli zatem chcesz, aby klocek poruszał się po podłożu ze stałą prędkością, to po ruszeniu klocka z miejsca musisz zwykle zmniejszyć wartość przykładanej siły, jak na rysunku 6.1f. Na rysunku 6.1g pokazano jako przykład wyniki doświadczenia, w którym zwiększano stopniowo siłę przykładaną do klocka, aż do wprawienia go w ruch. Zauważ, że gdy klocek ruszono już z miejsca, do utrzymania go w ruchu ze stałą prędkością potrzebna była siła mniejsza od tej, przy której klocek zaczął się ślizgać.

Siła tarcia jest w istocie rzeczą sumą wektorową wielu sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała. Gdy dwie bardzo starannie wypolerowane i bardzo czyste powierzchnie metaliczne zetkniemy ze sobą w wysokiej próżni (aby zachować ich czystość), wówczas nie można uzyskać ich poślizgu względem siebie. Powierzchnie są bardzo gładkie, więc wiele atomów jednej i drugiej powierzchni znajduje się bardzo blisko siebie i obydwa kawałki metalu zostają ze sobą „zespawane na zimno”, tworząc jeden kawałek metalu. Gdy zetkniemy ze sobą w powietrzu specjalnie wypolerowane klocki wzorcowe stosowane w warsztatach mechanicznych, w bezpośredniej bliskości znajduje się mniejsza liczba atomów obydwu powierzchni, niemniej jednak klocki trzymają się bardzo mocno i do oderwania ich od siebie potrzebne jest zwykle ich obrócenie, jak np. przy odkręcaniu nakrętki. Zwykle jednak zbliżyć się do siebie może bardzo niewiele atomów dwóch powierzchni. Nawet bardzo dobrze wypolerowane powierzchnie metaliczne nie są płaskie w skali atomów. Ponadto powierzchnie przedmiotów codziennego użytku są pokryte warstwą tlenków i innych zanieczyszczeń, które utrudniają zespawanie się ze sobą na zimno tych powierzchni.

Gdy stykamy ze sobą dwie zwykłe powierzchnie, tylko najwyższe punkty powierzchni są bliskie sobie (to tak, jak gdyby Alpy Szwajcarskie obrócić do góry nogami i postawić na Alpach Austriackich). Powierzchnia rzeczywistego kontaktu *mikroskopowego* obydwu powierzchni jest znacznie mniejsza od powierzchni pozornego kontaktu *makroskopowego*, nawet i 10 000 razy. Niemniej jednak w wielu punktach styku powierzchni zachodzi ich spawanie na zimno. Właśnie to punktowe połączenie ze sobą powierzchni jest źródłem tarcia statycznego, gdy staramy się przesunąć jedną powierzchnię względem drugiej.



Rys. 6.2. Mechanizm tarcia poślizgowego. a) Powierzchnia górna ślizga się po dolnej w prawą stronę. b) Powiększony widok fragmentu obydwu powierzchni, pokazujący dwa miejsca, w których nastąpiło ich zespawanie na zimno. Aby rozerwać połączenia powierzchni i utrzymać ich ruch względem siebie, potrzebna jest pewna siła

Jeśli przyłożona siła jest dostatecznie duża, aby przesunąć powierzchnie względem siebie, to najpierw występuje zerwanie połączeń powierzchni (gdy zaczynają się one poruszać względem siebie), a potem ciągłe tworzenie się i rozrywanie połączeń, gdy powierzchnie ślizgają się po sobie i różne punkty powierzchni stykają się ze sobą (rys. 6.2). Siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$ , utrudniająca ruch powierzchni względem siebie, jest sumą wektorową sił występujących w poszczególnych punktach styku.

Jeśli powierzchnie zostaną ściśnięte silniej, to zespawanie na zimno nastąpi w znacznie większej liczbie punktów. Uzyskanie poślizgu powierzchni względem siebie wymagać więc będzie większej siły, tzn. wartość maksymalna siły tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  będzie większa. Gdy powierzchnie zaczną się po sobie ślizgać, chwilowe spawanie na zimno będzie także występować w większej liczbie punktów, a zatem i siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$  będzie miała większą wartość.

Ruch ślizgowy jednej powierzchni po drugiej ma często charakter skokowy, ponieważ powierzchnie na przemian lepiej i gorzej stykają się ze sobą. Takim powtarzającym się skokom mogą towarzyszyć efekty akustyczne (np. piszczenie lub skrzypienie), jak przy ostrym hamowaniu samochodu na suchej jezdni, zadrapaniu tablicy szkolnej paznokciem, czy ruchu zardzewiałych zawiasów. Nie zawsze muszą to być dźwięki niemiłe — przy umiejętnym pociągnięciu smyczkiem struny skrzypiec uzyskuje się bardzo piękne dźwięki.

## 6.2. Właściwości tarcia

Z doświadczenia wynika, że gdy suche ciało naciska na suchą powierzchnię pod nieobecność smaru, a siła zewnętrzna  $\vec{F}$  stara się nadać ciału ruch ślizgowy po powierzchni, występuje siła tarcia, która ma następujące właściwości:

**Właściwość 1.** Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  oraz składowa siły  $\vec{F}$  równoległa do powierzchni, się równoważą. Siły te mają jednakową wartość, a siła  $\vec{f}_s$  jest skierowana przeciwnie do składowej równoległej siły  $\vec{F}$ .

**Właściwość 2.** Maksymalna wartość siły  $\vec{f}_s$ , którą oznaczmy  $f_{s,max}$ , dana jest wzorem:

$$f_{s,max} = \mu_s N, \quad (6.1)$$

przy czym  $\mu_s$  jest **współczynnikiem tarcia statycznego**, a  $N$  jest wartością siły normalnej, działającej na ciało ze strony powierzchni. Jeśli wartość składowej siły  $\vec{F}$ , która jest równoległa do powierzchni, przekracza wartość  $f_{s,max}$ , to ciało zaczyna się ślizgać po tej powierzchni.

**Właściwość 3.** Jeśli ciało zaczyna się ślizgać po powierzchni, to wartość siły tarcia gwałtownie maleje do wartości  $f_k$  równej:

$$f_k = \mu_k N, \quad (6.2)$$

przy czym  $\mu_k$  jest **współczynnikiem tarcia kinetycznego**. Później, gdy ciało już się ślizga, jego ruchowi przeciwdziała siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$  o wartości danej równaniem (6.2).

Wartość siły normalnej  $N$ , o której mowa we właściwościach 2 i 3, jest miarą nacisku ciała na powierzchnię. Jeśli nacisk ten jest większy, to — na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona —  $N$  jest większe. W punktach 1 i 2 mowa jest o jednej sile zewnętrznej  $\vec{F}$ , lecz zawarte w nich stwierdzenia są słuszne także dla wypadkowej wielu sił działających na ciało. Równania (6.1) i (6.2) nie są równaniami wektorowymi: kierunki sił  $\vec{f}_s$  i  $\vec{f}_k$  są zawsze równoległe do powierzchni i przeciwne do kierunku, w którym ma się ślizgać ciało, a siła normalna  $\vec{N}$  jest prostopadła do powierzchni.

Współczynniki  $\mu_s$  i  $\mu_k$  są bezwymiarowe, a ich wartości wyznaczamy doświadczalnie. Zależą one od właściwości zarówno ciała, jak i powierzchni, wobec czego podając ich wartości używamy zwykle słowa „między”, jak w zdaniu: „wartość  $\mu_s$  między jajkiem a patelnią, pokrytą teflonem, wynosi 0,04, lecz między butami do wspinaczki a skałą może być równa nawet 1,2”. Będziemy zakładać, że wartość  $\mu_k$  nie zależy od prędkości, z jaką ślizga się ciało po powierzchni.

**SPRAWDZIAN 1:** Klocek leży na podłodze. a) Jaka jest wartość siły tarcia działającej na klocek ze strony podłogi? b) Jaka jest wartość tej siły po przyłożeniu do klocka siły poziomej o wartości 5 N, przy czym klocek się nie porusza? c) Wartość maksymalna siły tarcia statycznego  $f_{s, \max}$  wynosi 10 N. Czy klocek zostanie wprowadzony w ruch siłą poziomą o wartości 8 N? d) Czy klocek z punktu (c) wprawi w ruch siła pozioma o wartości 12 N? e) Jaka jest wartość siły tarcia w przypadku (c)?

## Przykład 6.1

Jeśli podczas hamowania awaryjnego koła samochodu zostają zablokowane (tzn. nie obracają się), to pojazd ślizga się po szosie. Z oderwanych od opony kawałków gumy i małych stopionych elementów nawierzchni powstają ślady hamowania na jezdni, świadczące o tym, że podczas poślizgu zachodzi spawanie na zimno. Rekordowej długości ślady hamowania na drodze publicznej zamontowano w 1960 roku, gdy samochód marki Jaguar pozostawił na autostradzie M1 w Anglii ślady o długości 290 m (rys. 6.3a)! Wyznacz prędkość tego samochodu w chwili zablokowania kół, zakładając, że jego przyspieszenie w czasie hamowania było stałe, a  $\mu_k = 0.6$ .

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Przyspieszenie pojazdu było stałe, dlatego też w celu znalezienia prędkości początkowej  $v_0$  możemy skorzystać z równań z tabeli 2.1, na przykład z równania (2.16):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (6.3)$$

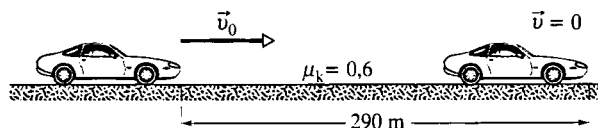
przy czym przyjęliśmy, że samochód poruszał się w dodatnim kierunku osi  $x$ . Wiemy, że przemieszczenie  $x - x_0$  wyniosło 290 m, a prędkość końcowa  $v$  była równa zeru. Chcemy wyznaczyć wartość  $v_0$ . Nie znamy jednak przyspieszenia  $a$  pojazdu.

Aby znaleźć  $a$  zauważmy, że:

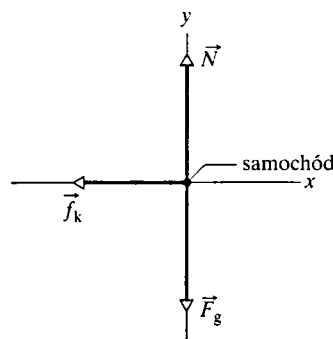
➔ 2. Jeśli pominiemy opór powietrza, to jedyną siłą powodującą przyspieszenie  $a$  będzie siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$ , działająca na samochód ze strony jezdni, skierowana przeciwnie do

kierunku ruchu pojazdu (rys. 6.3b). Związek tej siły z przyspieszeniem znajdziemy z drugiej zasady dynamiki Newtona dla składowych  $x$  ( $F_{wyp,x} = ma_x$ ), mianowicie:

$$-f_k = ma, \quad (6.4)$$



a)



b)

Rys. 6.3. Przykład 6.1. a) Samochód jadący w prawo wpada w poślizg i zatrzymuje się po przebyciu drogi 290 m. b) Diagram sił dla tego samochodu

przy czym  $m$  jest masą samochodu. Znak minus wskazuje kierunek siły tarcia kinetycznego.

Z równania (6.2) wiemy, że siła tarcia ma wartość  $f_k = \mu_k N$ , gdzie  $N$  jest wartością siły normalnej, działającej na samochód ze strony drogi. Samochód nie ma składowej pionowej przyspieszenia, a z rysunku 6.3b i z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że wartość siły  $\vec{N}$  jest równa wartości działającej na samochód siły ciężkości  $\vec{F}_g$ , czyli  $mg$ . Mamy więc  $N = mg$ .

Wyznaczając  $a$  z równania (6.4) i podstawiając  $f_k = \mu_k N = \mu_k mg$  w miejsce  $f_k$ , otrzymujemy:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g.$$

## Przykład 6.2

Na rysunku 6.4a przedstawiono kobietę ciągnącą po poziomej powierzchni i ze stałą prędkością sanie z ładunkiem o łącznej masie  $m = 75$  kg. Współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$  między płozami sań a śniegiem wynosi 0,1, a kąt  $\phi$  jest równy  $42^\circ$ .

a) Wyznacz wartość siły  $\vec{T}$  działającej na sanie ze strony liny.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że

➤ 1. Prędkość sań jest stała, dlatego też ich przyspieszenie jest równe zero, mimo że kobieta ciągnie je przez cały czas.

➤ 2. Sanie nie przyspieszają, bo działa na nie ze strony śniegu siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$ .

➤ 3. Siły działające na sanie, w tym szukana siła  $\vec{T}$ , są związane z ich przyspieszeniem (równym zero), a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ ).

Siły działające na sanie, w tym siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  oraz siłę normalną  $\vec{N}$ , działającą na sanie ze strony powierzchni śniegu przedstawiono na rysunku 6.4b. Siły te wiąże ze sobą druga zasada dynamiki Newtona, w której  $\vec{a} = 0$ , mianowicie:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g + \vec{f}_k = 0. \quad (6.5)$$

Aby wyznaczyć wektor  $\vec{T}$  zapiszemy to równanie dla składowych wzdłuż osi  $x$  i  $y$  z rysunku 6.4b. Dla osi  $x$  otrzymujemy:

$$T_x + 0 + 0 - f_k = 0, \quad (6.6)$$

czyli

$$T \cos \phi - \mu_k N = 0,$$

przy czym skorzystaliśmy z równania (6.2), aby podstawić  $\mu_k N$  w miejsce  $f_k$ . Dla osi  $y$ :

$$T_y + N - F_g + 0 = 0,$$

czyli

$$T \sin \phi + N - mg = 0, \quad (6.7)$$

przy czym podstawiliśmy  $mg$  w miejsce  $F_g$ .

przy czym znak minus wskazuje, że przyspieszenie ma ujemny kierunek osi  $x$ , przeciwny do kierunku prędkości samochodu. Następnie podstawiamy wyrażenie na  $a$  oraz  $v = 0$  do równania (6.3), z którego możemy teraz wyznaczyć  $v_0$ . Daje to:

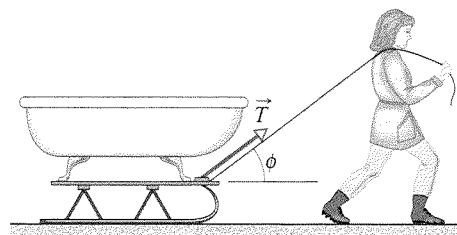
$$v_0 = \sqrt{2\mu_k g(x - x_0)} = \sqrt{(2)(0,6)(9,8 \text{ m/s}^2)(290 \text{ m})} = 58 \text{ m/s} = 210 \text{ km/h.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Założyliśmy, że koniec śladów hamowania to miejsce, w którym  $v = 0$ , tzn. samochód się zatrzymał. W rzeczywistości ślady skończyły się tylko dlatego, że po 290 m Jaguar wypadł z drogi. Jego prędkość początkowa  $v_0$  wynosiła zatem co najmniej 210 km/h, a być może znacznie więcej.

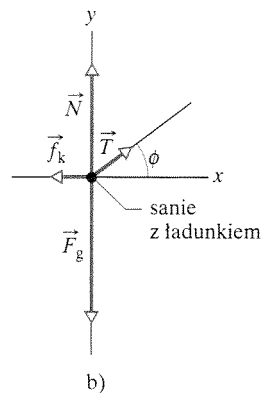
Równania (6.6) i (6.7) tworzą układ równań z niewiadomymi  $T$  i  $N$ . Wyznaczając  $N$  z równania (6.6), podstawiając otrzymane wyrażenie do równania (6.7) i rozwiązując je względem  $T$ , mamy:

$$T = \frac{\mu_k mg}{\cos \phi + \mu_k \sin \phi} = \frac{(0,1)(75 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{(\cos 42^\circ) + (0,1)(\sin 42^\circ)} = 91 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź})$$

(oczywiście do rozwiązania tego układu równań można skorzystać z komputera).



a)



b)

Rys. 6.4. Przykład 6.2. a) Kobieta ciągnie obciążone sanie z stałą prędkością, działając na nie siłą  $\vec{T}$  za pośrednictwem liny. b) Diagram sił dla sań z ładunkiem

b) Wyobraźmy sobie, że kobieta zwiększy siłę, jaką ciągnie linę. Jakże  $T$  stanie się większe niż 91 N. Czy wartość siły tarcia  $f_k$  wzrośnie, zmaleje czy pozostanie taka sama, jak w przypadku (a)?

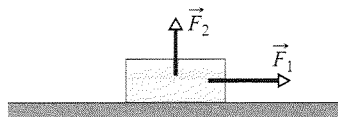
**ROZWIĄZANIE:**

Jak wynika z równania (6.2), wartość  $f_k$  jest wprost proporcjonalna do wartości siły normalnej  $N$ . Zatem odpowiedź na zadane pytanie otrzymamy ze związku między  $N$  i  $T$ . Takim związkiem jest równanie (6.7). Zapisując je w postaci:

$$N = mg - T \sin \phi, \quad (6.8)$$

stwierdzamy, że gdy  $T$  wzrośnie, to  $N$  zmaleje (znaczenie fizyczne tego stwierdzenia jest następujące: skierowana do góry składowa siła naciągu liny rośnie, więc siła działająca na sanie ze strony śniegu maleje). Ponieważ  $f_k = \mu_k N$ , więc widzimy, że  $f_k$  będzie mniejsze niż poprzednio.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono pudełko leżące na podłodze, na które działa siła pozioma  $\vec{F}_1$  o wartości 10 N. Pudełko się nie porusza. Do pudełka przykładamy teraz siłę pionową  $\vec{F}_2$  o wartości wzrastającej stopniowo od zera. Czy dla wartości siły  $\vec{F}_2$ , dla których pudełko nadal pozostaje nieruchome: a) wartość siły tarcia działającej na pudełko; b) wartość siły normalnej działającej na pudełko ze strony podłogi; c) wartość maksymalna działającej na pudełko siły tarcia statycznego  $f_{s,max}$  rosną, maleją czy pozostają niezmienione, gdy siła  $F_2$  wzrasta?



### Przykład 6.3

Na rysunku 6.5a przedstawiono monetę o masie  $m$ , pozostającą w spoczynku na okładce książki, nachylonej do poziomu pod kątem  $\theta$ . Stwierdziłeś doświadczalnie, że gdy  $\theta$  osiąga wartość  $13^\circ$ , moneta jest na granicy ześlizgnięcia się z książki co oznacza, że minimalne zwiększenie kąta nachylenia ponad  $13^\circ$  powoduje ześlizgnięcie się monety. Wyznacz współczynnik tarcia statycznego  $\mu_s$  między monetą a książką.

**ROZWIĄZANIE:**

Gdyby nie było tarcia między monetą a książką, moneta ześlizgnęłaby się po książce pod wpływem siły ciężkości dla każdego różnego od zera kąta nachylenia książki. Zauważ, że:

1. Ruchowi monety zapobiega siła tarcia  $\vec{f}_s$ .
2. Ponieważ moneta jest na granicy rozpoczęcia ruchu po książce w dół, to siła tarcia ma wartość maksymalną  $f_{s,max}$  i jest skierowana wzdłuż książki do góry. Z równania (6.1) wiemy, że  $f_{s,max} = \mu_s N$ , gdzie  $N$  jest wartością siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na monetę ze strony książki. Mamy więc:

$$f_s = f_{s,max} = \mu_s N, \quad (6.9)$$

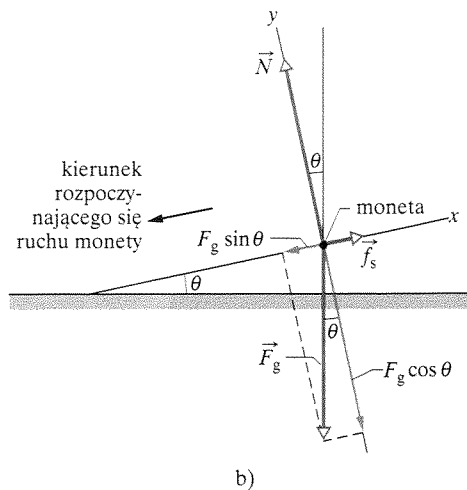
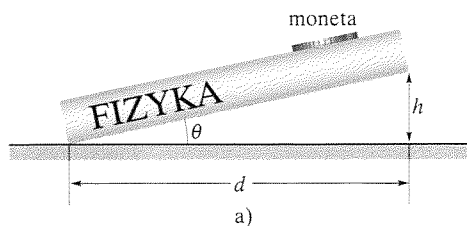
skąd otrzymujemy:

$$\mu_s = \frac{f_s}{N}. \quad (6.9)$$

Aby z tego równania wyznaczyć  $\mu_s$ , musimy znaleźć wartości sił  $f_s$  i  $N$ . Zauważ, że:

3. Moneta jest bliska ześlizgnięcia się po książce, lecz wciąż pozostaje w spoczynku, to znaczy jej przyspieszenie  $\vec{a}$  jest równe zeru. Związek tego przyspieszenia z działającymi na monetę siłami jest treścią drugiej zasady dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ ). Jak wynika z diagramu sił działających na monetę, przedstawionego na rysunku 6.5b, siłami tymi są: 1) siła tarcia  $\vec{f}_s$ , 2) siła normalna  $\vec{N}$ , 3) działająca na monetę siła ciężkości  $\vec{F}_g$  o wartości równej  $mg$ . Druga zasada dynamiki Newtona dla  $\vec{a} = 0$  daje więc:

$$\vec{f}_s + \vec{N} + \vec{F}_g = 0. \quad (6.10)$$



Rys. 6.5. Przykład 6.3. a) Moneta na granicy ześlizgnięcia się po książce. b) Diagram sił, pokazujący (w skali) trzy siły działające na monetę. Siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  rozłożono na składowe wzdłuż osi  $x$  i  $y$ , których kierunki wybrano tak, aby zagadnienie było najprostsze. Składowa  $F_g \sin \theta$  dąży do wprowadzenia monety w ruch ślizgowy po książce. Składowa  $F_g \cos \theta$  przyciska monetę do książki

Aby znaleźć  $f_s$  i  $N$ , zapiszmy równanie (6.10) dla składowych wzdłuż osi  $x$  i  $y$  układu współrzędnych z rysunku 6.5b, tzn. o osi  $x$  równoległej do powierzchni książki. Dla składowych  $x$  mamy, podstawiając  $mg$  w miejsce  $F_g$ :

$$f_s + 0 - mg \sin \theta = 0,$$

czyli

$$f_s = mg \sin \theta = 0. \quad (6.11)$$

Analogicznie dla składowych  $y$  otrzymujemy:

$$0 + N - mg \cos \theta = 0,$$

czyli

$$N = mg \cos \theta. \quad (6.12)$$

Podstawiając wyrażenia (6.11) i (6.12) do równania (6.9), mamy

$$\mu_s = \frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \tan \theta, \quad (6.13)$$

co w naszym przypadku daje:

$$\mu_s = \tan 13^\circ = 0.23. \quad (\text{odpowiedź})$$

W istocie rzeczy do wyznaczenia współczynnika  $\mu_s$  nie jest konieczne obliczanie kąta  $\theta$ . Wystarczy zmierzyć długości dwóch odcinków, pokazanych na rysunku 6.5a i podstawić  $h/d$  w miejsce  $\tan \theta$  we wzorze (6.13).

### 6.3. Siła oporu i prędkość graniczna

**Płynem** nazywamy ośrodek zdolny do przepływu, czyli gaz lub ciecz. Jeśli zachodzi ruch względny płynu i ciała (tzn. albo ciało porusza się w płynie, albo płyn opływa ciało), to na ciało działa **siła oporu**  $\vec{D}$  (aerodynamicznego w gazie lub hydrodynamicznego w cieczy), utrudniająca ten ruch względny i skierowana w kierunku przepływu płynu względem ciała.

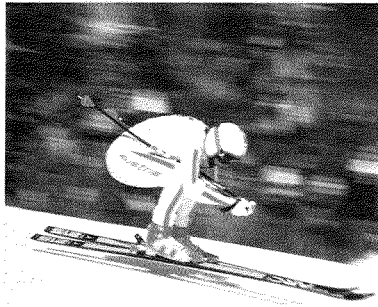
Omówimy tu jedynie przypadki, gdy płynem jest powietrze, ciało ma kształt „obły” (jak piłka baseballowa), a nie wysmukły (jak oszczep), a ruch względny jest dostatecznie szybki na to, aby przepływ był turbulentny, tzn. aby powietrze tworzyło za ciałem wiry. W tych warunkach zależność wartości siły oporu  $\vec{D}$  od prędkości względnej  $v$  jest dana wzorem:

$$D = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \quad (6.14)$$

przy czym  $C$  jest wyznaczonym doświadczalnie **współczynnikiem oporu aerodynamicznego**,  $\rho$  — gęstością (czyli masą jednostki objętości) powietrza, a  $S$  — **polem przekroju poprzecznego** ciała (tzn. polem przekroju prostokątnego do kierunku wektora prędkości  $\vec{v}$ ). Współczynnik oporu  $C$  (którego wartość jest zwykle zawarta w granicach od 0,4 do 1) jest tylko w przybliżeniu stały dla danego ciała, ponieważ dla bardzo dużej zmiany  $v$ ,  $C$  też może ulec zmianie. Pominiemy tu jednak tę zmienność  $C$ .

Narciarze uprawiający zjazdy dobrze wiedzą o tym, że siła oporu zależy od  $S$  i  $v^2$ . Aby osiągnąć dużą prędkość, narciarz musi — jak się tylko da — zmniejszyć  $D$ , na przykład zmniejszając  $S$  przez przyjęcie pozycji o kształcie podobnym do jajka (rys. 6.6).

Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu z prędkością początkową równą zeru, siła oporu  $\vec{D}$  jest skierowana do góry. Jej wartość wzrasta stopniowo od zera, w miarę jak ciało nabiera prędkości. Ta skierowana do góry siła  $\vec{D}$  jest przeciwna do skierowanej w dół siły ciężkości  $\vec{F}_g$ . Związek tych sił z przyspieszeniem ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona dla składowych



Rys. 6.6. Narciarz przyjmuje pozycję o kształcie podobnym do jajka, aby jak najbardziej zmniejszyć swoje pole przekroju poprzecznego, a więc i działającą na niego siłę oporu aerodynamicznego



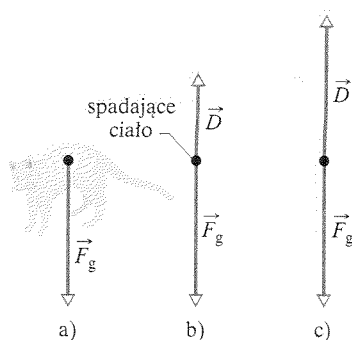


Tabela 6.1. Prędkości graniczne niektórych ciał w powietrzu

Ciało	Prędkość graniczna [m/s]	„Droga 95%” [m] <sup>1</sup>
kula (do pchnięcia kulą)	145	2500
skoczek (przed otwarciem spadochronu)	60	430
piłka baseballowa	42	210
piłka tenisowa	31	115
piłka do koszykówki	20	47
piłeczka pingpongowa	9	10
kropla deszczu (o promieniu 1,5 mm)	7	6
skoczek (po otwarciu spadochronu)	5	3

<sup>1</sup> Droga, po przebyciu której ciało spadające z prędkością początkową równą zeru osiąga prędkość o wartości wynoszącej 95% prędkości granicznej.

Źródło: Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon and Schuster, New York 1984.

rys. 6.7. Siły działające na ciało spadające w powietrzu: a) gdy ciało zaczyna spadać. b) nieco później, gdy występuje już siła oporu c) jeszcze później, gdy siła oporu wzrosła tak, że równoważy siłę ciężkości ciała. Od tej chwili ciało spada ze stałą prędkością graniczną

wzdłuż pionowej osi  $y$  ( $F_{wyp,y} = ma_y$ ), tzn.:

$$D - F_g = ma, \quad (6.15)$$

gdzie  $m$  jest masą ciała. Jak zasugerowano na rysunku 6.7, jeśli ciało spada dostatecznie długo, to w pewnej chwili siły  $D$  i  $F_g$  się równoważą. Jak wynika z równania (6.15), oznacza to, że  $a = 0$ , czyli od tej chwili prędkość ciała nie wzrasta. Ciało spada dalej ze stałą prędkością, noszącą nazwę **prędkości granicznej**  $v_t$ .

Aby znaleźć  $v_t$ , wstawmy  $a = 0$  do równania (6.15) i podstawmy tam wyrażenie na  $D$  z równania (6.14). Otrzymamy:

$$\frac{1}{2} C \rho S v_t^2 - F_g = 0,$$

skąd

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}. \quad (6.16)$$

W tabeli 6.1 podano wartości  $v_t$  dla kilku ciał.

Zgodnie z obliczeniami wykonanymi na podstawie równania (6.14)\*, kot osiąga prędkość graniczną po spadku z wysokości około sześciu pięter. Dopóki to nie nastąpi,  $F_g > D$  i kot porusza się ruchem przyspieszonym z przyspieszeniem skierowanym w dół, gdyż działająca na niego siła wypadkowa skierowana jest w tę stronę. Przypomnij sobie z rozdziału 2, że twoje ciało jest „przyspieszoniomierzem”, a nie szybkościomierzem. Kot jest również czuły na przyspieszenie, więc jest przestraszony, łapy ma podwinięte, łeb skulony, a grzbiet wygięty w górę. W tej pozycji  $S$  jest małe, a więc  $v_t$  duże, zatem urazy przy lądowaniu mogą być znaczne.

\*W. O. Whitney, C. J. Mehlhoff, High-Rise Syndrome in Cats, *The Journal of the American Veterinary Medical Association* (1987), **191**, 1399.



Rys. 6.8. Skoczek wykonujący skok z opóźnionym otwarciem spadochronu przyjmuje pozycję orła w locie, aby siła oporu powietrza była jak największa

Gdy jednak kot osiąga prędkość graniczną, przyspieszenie zanika i kot nie się uspokaja, przy czym rozpościera łapy i szyję poziomo oraz prostuje grzbiet (przypomina wtedy wiewiórkę w czasie skoku). Dzięki temu pole  $S$  wzrasta, a zatem zwiększa się — zgodnie z równaniem (6.14) — siła oporu  $D$ . Kot zwalnia, ponieważ teraz  $D > F_g$  (siła wypadkowa jest skierowana w górę), aż do osiągnięcia nowej — mniejszej — wartości prędkości granicznej. Mniejsza prędkość oznacza mniejsze prawdopodobieństwo poważnych urazów przy lądowaniu. Tuż przed końcem lotu, gdy kot widzi, że zbliża się do ziemi, wyciąga łapy w dół, aby przygotować się do lądowania.

Ludzie często wykonują skoki z dużej wysokości z opóźnionym otwarciem spadochronu, dla czystej przyjemności swobodnego spadania. W kwietniu 1977 roku, w czasie takiego skoku, skoczek Gregory Robertson zauważył, że jego warzyszka Debbie Williams straciła przytomność, zderzając się z jeszcze innym skoczkiem i nie jest w stanie otworzyć spadochronu. Robertson znajdował się w tym momencie znacznie wyżej w powietrzu niż Williams i nie otworzył jeszcze swego spadochronu przed ostatnim, 4-kilometrowym odcinkiem lotu. Szybko ustawił się głową w dół, aby zmniejszyć  $S$  i zwiększyć swoją prędkość spadania. Osiągnął w ten sposób prędkość graniczną, szacowaną na 320 km/h, dopędził Williams, pochwycił ją, po czym przyjął pozycję orła w locie (jak na rysunku 6.8), aby zwiększyć  $D$ . Otworzył najpierw jej spadochron, a potem — wypuścił ją — swój, zaledwie na 10 s przed lądowaniem na ziemi. Williams doznała poważnych urazów wewnętrznych na skutek niewłaściwego ustawienia ciała przy lądowaniu, ale przeżyła upadek.

## Przykład 6.4

Kot osiąga w pozycji skurczonej prędkość graniczną 97 km/h. Następnie prostuje się i rozpościera łapy, dzięki czemu zwiększa  $S$  dwukrotnie. Ile wynosi wówczas jego nowa prędkość graniczna?

ROZWIĄZANIE:

➔ Prędkość graniczna kota zależy (między innymi) od pola jego przekroju poprzecznego  $S$ , zgodnie z równaniem (6.16). Mo-

żemy zatem skorzystać z tego równania w celu wyznaczenia stosunku prędkości granicznych. Oznaczmy przez  $v_{11}$  i  $v_{12}$  pierwotną i końcową prędkość graniczną, a przez  $S_1$  i  $S_2$  — pierwotne i końcowe pole przekroju. Z równania (6.16) otrzymujemy:

$$\frac{v_{12}}{v_{11}} = \frac{\sqrt{2F_g/C\rho S_2}}{\sqrt{2F_g/C\rho S_1}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_1}{2S_1}} = \sqrt{0,5} \approx 0,7,$$

co oznacza, że  $v_{12} \approx 0,7v_{11}$ , czyli około 68 km/h.

## Przykład 6.5

Kropla deszczu o promieniu  $R = 1,5$  mm spada z chmury znajdującej się na wysokości  $h = 1200$  m nad ziemią. Współczynnik oporu aerodynamicznego  $C$  dla tej kropli wynosi 0,6. Zakładamy, że kropla ma kształt kuli przez cały czas lotu. Gęstość wody  $\rho_w$  jest równa  $1000$  kg/m<sup>3</sup>, a gęstość powietrza  $\rho_p$  wynosi  $1,2$  kg/m<sup>3</sup>.

a) Ile wynosi prędkość graniczna kropli?

ROZWIĄZANIE:

➔ Kropla osiąga prędkość graniczną  $v_1$ , gdy siła ciężkości jest równoważona przez siłę oporu powietrza, tak że przyspieszenie kropli jest równe zero. Aby wyznaczyć  $v_1$ , możemy skorzystać

z drugiej zasady dynamiki Newtona oraz ze wzoru na siłę oporu, lecz już to przedtem zrobiliśmy, wyprowadzając wzór (6.16).

Aby skorzystać ze wzoru (6.16), musimy znać pole przekroju poprzecznego  $S$  oraz wartość siły ciężkości  $F_g$ . Kropla jest kulą, więc  $S$  jest polem koła o takim samym promieniu jak kropla (tzn.  $\pi R^2$ ). Aby znaleźć  $F_g$ , weźmiemy pod uwagę trzy fakty: 1)  $F_g = mg$ , gdzie  $m$  jest masą kropli; 2) objętość kropli, która jest kulą wynosi  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ; 3) gęstość wody w kropli jest równa gęstości wody, czyli  $\rho_w = m/V$ . Mamy zatem:

$$F_g = V\rho_w g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w g.$$

Możemy teraz podstawić do równania (6.16) powyższe wyrażenie na  $F_g$  oraz wyrażenie na  $S$  oraz wartości liczbowe danych. Uważaj, aby nie pomylić gęstości powietrza  $\rho_p$  z gęstością wody  $\rho_w$ . Otrzymujemy

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_p S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho_w g}{3C\rho_p \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_w g}{3C\rho_p}}$$

$$= \sqrt{\frac{(8)(1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m})(1000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)}{(3)(0.6)(1.2 \text{ kg/m}^3)}}$$

$$= 7.4 \text{ m/s} \approx 27 \text{ km/h.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć uwagę, że wysokość chmury nie ma wpływu na wynik. Jak wynika z tabeli 6.1 kropla deszczu osiąga prędkość graniczną po zaledwie kilku metrach spadku.

Co by się stało, gdyby nie było siły oporu powietrza? Czy krople spadłyby z większą prędkością?

#### ROZWIĄZANIE:

Gdyby nie było siły oporu powietrza, zmniejszającej prędkość spadku kropli, kropla spadałaby ze stałym przyspieszeniem

równym przyspieszeniu ziemskiemu  $g$ . Możemy więc skorzystać z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem z tabeli 2.1. Wiemy, że przyspieszenie jest równe  $g$ , prędkość początkowa  $v_0$  wynosi 0, a przemieszczenie  $x - x_0$  jest równe  $h$ , więc do wyznaczenia  $v$  możemy zastosować równanie (2.16), co daje:

$$v = \sqrt{2hg} = \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(1200 \text{ m})}$$

$$= 153 \text{ m/s} \approx 550 \text{ km/h.} \quad (\text{odpowiedź})$$

O kropli spadającej z taką prędkością Szekspir raczej nie powiedziałby, że „spływa jak łagodny deszcz z nieba na ziemię”.

**SPRAWDZIAN 3:** Czy w pobliżu ziemi prędkości dużych kropli deszczu są większe, mniejsze czy takie same jak prędkości kropli małych? Przyjmij, że wszystkie krople są kulkami i mają takie same współczynniki oporu aerodynamicznego.

\* Przekład Romana Brandstaettera (*Kupiec wenecki*, PIW, Warszawa 1953).

## 6.4. Ruch jednostajny po okręgu

Pamiętamy z paragrafu 4.7 ruch ciała po okręgu (lub łuku okręgu) z prędkością o stałej wartości  $v$  nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu. Pamiętamy, że ciało ma wówczas przyspieszenie dośrodkowe (skierowane do środka tego okręgu) o stałej wartości, danej wyrażeniem:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{przyspieszenie dośrodkowe}), \quad (6.17)$$

gdzie  $R$  jest promieniem okręgu.

Omówimy dwa przykłady ruchu jednostajnego po okręgu.

**1. Jazda samochodem po łuku.** Siedzisz pośrodku tylnej kanapy w samochodzie jadącym ze stałą prędkością po płaskiej drodze. Gdy kierowca gwałtownie skręca w lewo, pokonując zakręt po kołowym łuku, zostajesz zepchnięty na prawy skraj kanapy, a potem przyciśnięty do ściany samochodu aż do końca zakrętu. Co się dzieje?

Gdy samochód jedzie po kołowym łuku, porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, tzn. doznaje przyspieszenia skierowanego do środka łuku. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona źródłem przyspieszenia jest siła, która musi być skierowana tak jak przyspieszenie, tzn. do środka łuku. Jest to siła dośrodkowa, której nazwa związana jest z jej kierunkiem. W naszym przypadku jest to siła tarcia, jaką droga działa na opony kół samochodu — to dzięki niej możliwe jest pokonanie zakrętu.

Jeśli poruszasz się wraz z samochodem ruchem jednostajnym po okręgu, to siła dośrodkowa działa także na ciebie. Jak jednak widać, siła tarcia działająca na ciebie ze strony kanapy nie jest dostatecznie duża, abyś poruszał się

po okręgu wraz z pojazdem. Ześlizgujesz się więc po kanapie na ścianie samochodu. Dopiero ta ściana działa na ciebie siłą dośrodkową o dostatecznie dużej wartości, abyś poruszał się wraz z samochodem ruchem jednostajnym po okręgu.

2. *Ruch na orbicie wokół Ziemi.* Tym razem jesteś pasażerem wahadłowca kosmicznego Atlantis. Gdy wraz z nim jesteś na orbicie okołoziemskiej „pływasz” swobodnie w kabinie statku. Co się dzieje?

Zarówno ty, jak i wahadłowiec poruszacie się ruchem jednostajnym po okręgu, a więc macie przyspieszenie skierowane do środka okręgu. Jak to jest przednio, z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że przyspieszenie jest wynikiem działania siły dośrodkowej. Tym razem siłą dośrodkową jest siła ciężkości działająca na ciebie i wahadłowiec ze strony Ziemi, skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka, tzn. w kierunku środka Ziemi.

I w samochodzie, i na pokładzie wahadłowca poruszasz się ruchem jednostajnym po okręgu, jesteś zatem pod działaniem siły dośrodkowej. Niemniej jednak czujesz się w tych dwóch sytuacjach całkiem odmiennie. W samochodzie jesteś zepchnięty na ścianę pojazdu i wyraźnie czujesz, że jesteś do niej przyciśnięty. Natomiast w statku orbitalnym „pływasz” swobodnie w kabinie, nie odczuwasz działania żadnej siły. Skąd ta różnica?

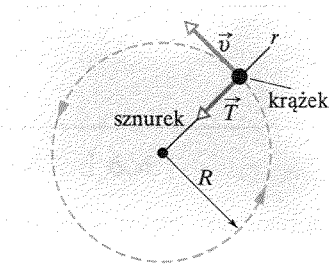
Otóż wynika ona z różnej natury dwóch działających na ciebie sił dośrodkowych. W samochodzie siłą dośrodkową jest nacisk ściany pojazdu na tę część twojego ciała, która styka się ze ścianą. Czujesz więc, że ta część twojego ciała jest ściskana. Na pokładzie wahadłowca siłą dośrodkową jest siła ciężkości, jaką Ziemia działa na każdy atom twojego ciała. Z tego względu żadna część twojego ciała nie jest ściskana, a zatem nie masz poczucia, że działa na ciebie jakaś siła (mówi się, że jesteś wówczas „w stanie nieważkości”; termin ten jest jednak mylący, gdyż przyciąganie ziemskie nadal działa na ciebie i w rzeczywistości jest tylko nieznacznie mniejsze od tego, jakie działa na ciebie na powierzchni Ziemi).

Inny przykład siły dośrodkowej przedstawiono na rysunku 6.9. Krążek hokejowy jest przywiązany do sznurka zakończonego na drugim końcu pętli złożoną na kolek i porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości  $v$ . W tym przypadku siłą dośrodkową jest siła działająca na krążek ze strony sznurka, skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka. Gdyby tej siły nie było, krążek nie poruszałby się po okręgu, lecz ślizgałby się po lodzie wzdłuż linii prostej.

Podkreślmy jeszcze raz, że siła dośrodkowa nie jest żadnym nowym rodzajem siły. Termin ten związany jest tylko z kierunkiem siły. Może nią być zarówno siła tarcia, jak i siła grawitacji, siła działająca ze strony ściany samochodu ze strony sznurka, czy jakkolwiek inna siła. W każdym z tych przypadków

► Siła dośrodkowa nadaje ciału przyspieszenie, zmieniając kierunek prędkości ciała bez zmiany wartości tej prędkości.

Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona i równania (6.17) ( $a = v^2/R$ ) możemy zapisać wartość siły dośrodkowej  $F$  (lub wypadkowej siły dośrodkowej) jako:



Rys. 6.9. Widok z góry na krążek hokejowy o masie  $m$  poruszający się bez tarcia po powierzchni poziomej i obiegający okrąg o promieniu  $R$  z prędkością o stałej wartości  $v$ . Siłą dośrodkową jest w tym przypadku siła  $\vec{T}$ , działająca na krążek ze strony sznurka. Jest ona skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka, tzn. wzdłuż osi  $r$ , przechodzącej przez środek okręgu i punkt, w którym znajduje się krążek

$$F = m \frac{v^2}{R} \quad (\text{wartość siły dośrodkowej}). \quad (6.18)$$

Wartość prędkości  $v$  jest tu stała, dlatego też stałe są również wartości przyspieszenia i siły.

Kierunek przyspieszenia dośrodkowego i siły dośrodkowej nie jest jednak stały: zmienia się w sposób ciągły, tak że zawsze wskazuje na środek okręgu. Z tego względu wektory siły i przyspieszenia dośrodkowego rysujemy czasem wzdłuż osi radialnej  $r$ , która obraca się wraz z ciałem, tak że zawsze jest skierowana od środka okręgu do ciała, jak na rysunku 6.9. Kierunek dodatni tej osi prowadzi na zewnątrz okręgu, lecz wektory przyspieszenia i siły są skierowane do środka okręgu.

## Przykład 6.6

Igor jest inżynierem astronautą na pokładzie Międzynarodowej Stacji Kosmicznej krążącej wokół Ziemi z prędkością o stałej wartości  $v$ , równej 7,6 km/s. po orbicie kołowej, na wysokości  $h = 520$  km nad Ziemią. Masa  $m$  Igora wynosi 79 kg.

a) Ile wynosi jego przyspieszenie?

ROZWIĄZANIE:

Igor porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, a więc potrzebuje przyspieszenia dośrodkowego o wartości danej równaniem (6.17) ( $a = v^2/R$ ). Promień  $R$  okręgu, po jakim porusza się Igor, jest równy  $R_Z + h$ , przy czym  $R_Z$  jest to promień Ziemi ( $6,37 \cdot 10^6$  m, patrz dodatek C). Tak więc:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R_Z + h} = \frac{(7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m}) + (0,52 \cdot 10^6 \text{ m})} = 8,38 \text{ m/s}^2 \approx 8,4 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

jest to wartość przyspieszenia ziemskiego na wysokości, na jakiej znajduje się Igor. Gdyby został on wyniesiony na tę wysokość i wypuszczony swobodnie, nie poruszałby się po orbicie okołoziemskiej, lecz spadałby w kierunku środka Ziemi z tą właśnie

początkową wartością przyspieszenia. Te dwie sytuacje różnią się tym, że w ruchu po orbicie ma on zawsze składową prędkość skierowaną „w bok”, tak że spadając porusza się równocześnie w bok i w rezultacie zatacza okrąg wokół Ziemi.

b) Jaką siłą działa Ziemia na Igora?

ROZWIĄZANIE:

Należy zauważyć, że:

1. Skoro Igor porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to musi na niego działać siła dośrodkowa.

2. Siłą tą jest siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , jaką działa na niego Ziemia, skierowana do środka okręgu (czyli do środka Ziemi). Z drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisanej dla składowych wzdłuż osi radialnej  $r$ , otrzymujemy wartość tej siły:

$$F_g = ma = (79 \text{ kg})(8,38 \text{ m/s}^2) = 662 \text{ N} \approx 660 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

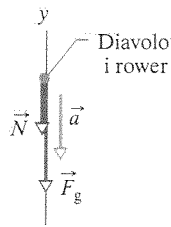
Gdyby Igor stanął na wadze umieszczonej na szczycie wieży o wysokości  $h = 520$  km, waga wskazałaby 660 N. Waga na pokładzie statku orbitalnego wskazałaby (gdyby Igorowi udało się na niej stanąć) zero, ponieważ Igor i waga spadają razem swobodnie, a więc jego stopy nie wywierają żadnego nacisku na wagę.

## Przykład 6.7

W 1901 roku Allo Diavolo zwany „Szaleńcem” wykonał po raz pierwszy numer cyrkowy, polegający na jeździe na rowerze po torze w kształcie pionowej pętli. Ile powinna wynosić minimalna wartość prędkości śmiałka na szczycie toru, aby rower nie oderwał się od podłoża, jeśli pętla ma kształt okręgu, którego promień  $R = 2,7$  m?

ROZWIĄZANIE:

Należy założyć, że Diavolo i jego rower pokonują pętlę jako jedno ciało poruszające się ruchem jednostajnym po okręgu. W punkcie szczytowym toru ciało to ma zatem przyspieszenie  $\vec{a}$  o wartości  $a = v^2/R$ , danej równaniem (6.17), skierowane pionowo w dół w kierunku środka kołowej pętli. Diagram sił działających na to ciało na wierzchołku pętli jest przedstawiony




Rys. 6.10. Diagram sił działających na rowerzystę na wierzchołku pętli

na rysunku 6.10. Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  jest skierowana pionowo w dół, wzdłuż osi  $y$ . Siła normalna  $\vec{N}$ , działająca na to ciało ze strony toru jest również skierowana pionowo w dół. Wobec tego druga zasada dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi  $y$  ( $F_{\text{wyp},y} = ma_y$ ) daje:

$$-N - F_g = m(-a).$$

Otrzymujemy stąd:


$$-N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \quad (6.19)$$

Zauważ, że:  ciało ma *minimalną prędkość*  $v$ , potrzebną do utrzymania kontaktu z torem, gdy jest na granicy utraty tego kon-

taktu (tzn. oderwania się od podłoża i spadku), co oznacza, że  $N = 0$ . Podstawiając tę wartość  $N$  do równania (6.19), wyznaczając z niego  $v$  i podstawiając wartości liczbowe danych, otrzymujemy więc:

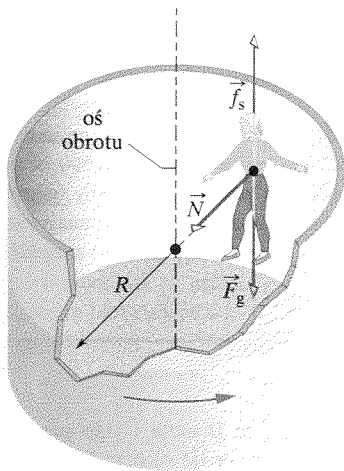
$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(2.7 \text{ m})} = 5.1 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Diavolo zadbał o to, aby jego prędkość u szczytu pętli była większa niż 5,1 m/s, tak aby nie stracił kontaktu z torem i nie spadł z arenę. Zauważ, że otrzymana minimalna wartość prędkości jest niezależna od masy roweru i rowerzysty. Gdyby zatem Diavolo najadł się przed występek — dajmy na to — pierogów, to nadal musiałby osiągnąć tylko prędkość 5,1 m/s.

 **SPRAWDZIAN 4:** Wyobraź sobie, że jedziesz na diabelskim młynie z prędkością o stałej wartości. Jaki jest kierunek twojego przyspieszenia  $\vec{a}$  i siły normalnej  $\vec{N}$  działającej na ciebie (ze strony siedzenia, które cały czas pozostaje poziome), gdy znajdujesz się: a) w najwyższym punkcie, b) w najniższym punkcie toru.

## Przykład 6.8

Nawet najbardziej doświadczeni amatorzy przejażdżek kolejką górską w wesołym miasteczku bledną na myśl o wejściu do tzw. Rotora. Jest to pomieszczenie w kształcie dużego walca, obracające się wokół swej osi (rys. 6.11). Wchodzi się do niego przez drzwi w ścianie i staje na podłodze. Ściana jest obita tkaniną. Drzwi zostają zamknięte, walec zaczyna się obracać, przy-



Rys. 6.11. Przykład 6.8. Rotor w wesołym miasteczku oraz siły, działające w nim na pasażera. Siłą dośrodkową jest w tym przypadku siła normalna, jaką działa na pasażera ściana walca


czym pasażer, podłoga i ściana kręcą się razem. Gdy prędkość pasażera osiągnie odpowiednią wartość, ku jego przerażeniu podłoga gwałtownie opada. Pasażer nie spada jednak wraz z nią, lecz pozostaje przyciśnięty do ściany obracającego się walca, jak gdyby jakaś niewidoczna (i chyba niezbyt przyjazna) osoba dociskała jego ciało do ściany. Po pewnym czasie podłoga wraca do poziomu stóp pasażera, walec zwalnia, a pasażer opada kilka centymetrów, aby znów stanąć na podłodze (są tacy, dla których przejażdżka Rotorem jest przyjemnością).

Założmy, że współczynnik tarcia statycznego  $\mu$ , między ubraniem pasażera a obiciem ściany wynosi 0,4, a promień  $R$  walca jest równy 2,1 m.

a) Jaka jest najmniejsza wartość prędkości  $v$  walca i pasażera, przy której pasażer nie spada, gdy podłoga jest opuszczona?

### ROZWIĄZANIE:

Zacznijmy od pytania: jaka siła uniemożliwia spadek pasażera i jak można ją powiązać z wartością prędkości jego i walca? Aby na nie odpowiedzieć, skorzystamy z trzech spostrzeżeń:

 1. Pod wpływem działającej na niego siły ciężkości  $\vec{F}_g$  pasażer ma tendencję do ześlizgiwania się wzdłuż ściany, lecz mimo to pozostaje w spoczynku, gdyż w przeciwnym kierunku (do góry) działa na niego siła tarcia o ścianę walca (rys. 6.11).

→ 2. Skoro pasażer ma być na granicy ześlizgnięcia się, to siła skierowana do góry musi być siłą tarcia *statycznego*  $\vec{f}_s$ , o swojej wartości maksymalnej  $\mu_s N$ , gdzie  $N$  jest wartością siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na pasażera ze strony ściany walca (rys. 6.11).

→ 3. Siła normalna skierowana poziomo ku osi walca, jest siłą dośrodkową, dzięki której pasażer porusza się po okręgu, przy czym przyspieszenie dośrodkowe ma wartość  $a = v^2/R$ .

Szukamy wartości prędkości  $v$ , występującej w ostatnim wzorze, odpowiadającej przypadkowi, gdy pasażer jest na granicy ześlizgnięcia się wzdłuż ściany.

Wybermy oś pionową  $y$ , przechodzącą przez pasażera, o kierunku dodatnim w górę. Zgodnie ze spostrzeżeniem 1 możemy skorzystać z drugiej zasady dynamiki Newtona, stosując ją do pasażera, dla składowych  $y$  ( $F_{\text{wyp},y} = ma_y$ ), co daje:

$$f_s - mg = m(0),$$

przy czym  $m$  jest masą pasażera, a  $mg$  — wartością siły  $\vec{F}_g$ . Korzystając ze spostrzeżenia 2, w miejsce  $f_s$  w tym równaniu podstawiamy wartość maksymalną  $\mu_s N$  i dostajemy:

$$\mu_s N - mg = 0.$$

czyli

$$N = \frac{mg}{\mu_s}. \quad (6.20)$$

Następnie wybierzmy oś radialną  $r$  przechodzącą przez pasażera, o kierunku dodatnim na zewnątrz. Zgodnie ze spostrzeżeniem 3 zapiszmy drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż tej osi. Daje to:

$$-N = m \left( -\frac{v^2}{R} \right). \quad (6.21)$$

Podstawiając do tego równania  $N$  ze wzoru (6.20) i rozwiązując je względem  $v$ , otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \sqrt{\frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(2.1 \text{ m})}{0.4}} = 7.17 \text{ m/s} \approx 7.2 \text{ m/s}.$$

(odpowiedź)

Zauważ, że wynik nie zależy od masy pasażera; otrzymana wartość prędkości jest taka sama zarówno dla dziecka, jak i dla zapalnika sumo, a więc przed wejściem do Rotora nie trzeba sprawdzać swej wagi.

b) Jaka jest wartość siły dośrodkowej działającej na pasażera o masie równej 49 kg?

ROZWIĄZANIE:

Zgodnie z równaniem (6.21):

$$N = m \frac{v^2}{R} = (49 \text{ kg}) \frac{(7.17 \text{ m/s})^2}{(2.1 \text{ m})} \approx 1200 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Choć siła ta jest skierowana do osi walca, pasażer ma nieodparte wrażenie, że ponieważ jest przyciskany do ściany walca, to znajduje się pod wpływem siły działającej radialnie, ale od osi na zewnątrz. To wrażenie ma swe źródło w tym, że pasażer znajduje się w układzie nieinercyjnym (gdyż pasażer i układ poruszają się ruchem przyspieszonym). W takich układach pomiary sił mogą być iluzoryczne. Właśnie taka iluzja jest jedną z atrakcji Rotora.

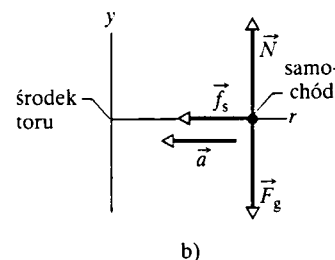
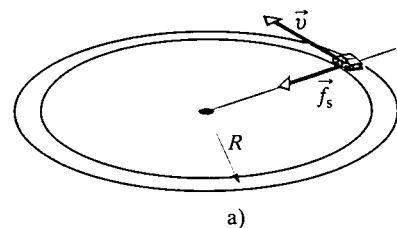
✓ **SPRAWDZIAN 5:** Wyobraź sobie, że Rotor porusza się początkowo z minimalną prędkością potrzebną po to, aby pasażer nie oderwał się od ściany, a potem ta prędkość stopniowo wzrasta. Czy wówczas: a) wartość siły  $\vec{f}_s$ , b) wartość siły  $\vec{N}$ , c) wartość  $f_{s,\text{max}}$  rośnie, maleje czy pozostaje bez zmiany?

## Przykład 6.9

Na rysunku 6.12a przedstawiono samochód o masie  $m = 1600 \text{ kg}$ , poruszający się w czasie jazdy próbnej z prędkością o stałej wartości  $v = 20 \text{ m/s}$  po płaskim torze kołowym o promieniu  $R = 190 \text{ m}$ . Dla jakiej wartości współczynnika tarcia  $\mu_s$  między powierzchnią toru a oponami samochodu pojazd znajdzie się na skraju wypadnięcia z toru?

ROZWIĄZANIE:

Musimy powiązać wartość  $\mu_s$  z parametrami ruchu samochodu po okręgu. W tym celu skorzystamy z czterech spostrzeżeń, związanych z tą samą siłą działającą na samochód.



Rys. 6.12. Przykład 6.9. a) Samochód porusza się po płaskim torze kołowym z prędkością o stałej wartości  $v$ . Niezbędną do tego siłą dośrodkową działającą wzdłuż osi radialnej  $r$  jest siła tarcia  $\vec{f}_s$ . b) Diagram sił dla tego samochodu (nie w skali) w płaszczyźnie pionowej, zawierającej oś  $r$

➔ 1. Samochód porusza się po torze kołowym, a więc musi na niego działać siła dośrodkowa: musi być ona pozioma i skierowana do środka toru.

➔ 2. Jedyną, działającą na samochód siłą poziomą jest siła tarcia, działająca na jego opony ze strony drogi. Siłą dośrodkową jest zatem siła tarcia.

➔ 3. Samochód nie ślizga się, więc jest to siła tarcia *statycznej*, zaznaczona na rysunku 6.12a jako  $\vec{f}_s$ .

➔ 4. Jeśli samochód jest na skraju ześlizgnięcia się z toru, to wartość siły tarcia  $f_s$  jest równa wartości maksymalnej:  $f_{s,\max} = \mu_s N$ , przy czym  $N$  jest wartością siły normalnej, działającej na samochód ze strony toru.

Aby wyznaczyć współczynnik  $\mu_s$ , rozważymy najpierw siłę dośrodkową działającą na samochód. Na rysunku 6.12b przedstawiono diagram sił działających na samochód, narysowany w płaszczyźnie zawierającej oś radialną  $r$ , która rozciąga się od środka okręgu na zewnątrz i zawsze przechodzi przez samochód, a więc obraca się, gdy samochód krąży po torze. Siła dośrodkowa  $\vec{f}_s$  jest skierowana wzdłuż tej osi do środka okręgu, a więc w ujemnym kierunku osi  $r$ . Tak samo skierowany jest wektor przyspieszenia dośrodkowego  $\vec{a}$  samochodu (o wartości  $v^2/R$ ). Siłę tę wiąże z przyspieszeniem druga zasada dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi  $r$  ( $F_{\text{wyp},r} = ma_r$ ):

$$-f_s = m \left( -\frac{v^2}{R} \right). \quad (6.22)$$

Podstawiając  $f_{s,\max} = \mu_s N$  w miejsce  $f_s$  i rozwiązując równanie względem  $\mu_s$ , otrzymujemy:

$$\mu_s = \frac{mv^2}{NR}. \quad (6.23)$$

Samochód nie ma składowej pionowej przyspieszenia, więc dwie działające na niego siły pionowe (patrz rysunek 6.12b) muszą się

równoważyć. Wartość siły normalnej  $N$  musi być zatem równa wartości siły ciężkości  $mg$ . Podstawiając do równania (6.23)  $N = mg$ , otrzymujemy:

$$\mu_s = \frac{mv^2}{mgR} = \frac{v^2}{gR}. \quad (6.24)$$

a stąd:

$$\mu_s = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{(9.8 \text{ m/s}^2)(190 \text{ m})} = 0,21. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten oznacza, że gdy  $\mu_s = 0,21$ , samochód jest na skraju ześlizgnięcia się z toru; gdy  $\mu_s > 0,21$ , samochodowi nie grozi wypadnięcie z toru, a gdy  $\mu_s < 0,21$ , samochód na pewno ześlizgnie się z toru.

Z równania (6.24) wynikają dwie ważne informacje dla budowniczych dróg: 1) wartość  $\mu_s$  potrzebna do zapewnienia braku poślizgu pojazdu zależy od *kwadratu*  $v$ . Zatem dla większych prędkości trzeba zapewnić znacznie większe tarcie. Być może zauważyłeś to zjawisko, gdy pokonywałeś płaski zakręt zbyt szybko i nagle poczułeś, że koła zaczynają się ślizgać; 2) przy wyprowadzaniu równania (6.24) masa  $m$  uległa skróceniu. Tak więc równanie (6.24) jest słuszne dla pojazdu o dowolnej masie, od samochodu zabawki, przez rower, do wielkiej ciężarówki.

✓ **SPRAWDZIAN 6:** Załóżmy, że samochód z rysunku 6.12 jest na skraju ześlizgnięcia się z toru o promieniu  $R_1$ . a) Ile wynosi najmniejszy promień toru, po którym może poruszać się bez poślizgu ten samochód, gdy jego prędkość zwiększymy dwukrotnie? b) Ile wynosi najmniejszy promień toru, po którym może poruszać się bez poślizgu ten samochód, gdy ponadto zwiększymy dwukrotnie jego masę (na przykład obciążając go workami z piaskiem)?

## Podsumowanie

**Tarcie** Gdy siła  $\vec{F}$  dąży do wprowadzenia ciała w ruch po powierzchni, na ciało działa ze strony powierzchni **siła tarcia**. Siła tarcia jest równoległa do powierzchni i skierowana tak, aby przeciwdziałać ruchowi ciała. Jej przyczyną jest wiązanie cząsteczek ciała i powierzchni.

Jeśli ciało się nie ślizga, to występuje **siła tarcia statycznego**  $\vec{f}_s$ . Jeśli ciało się ślizga, to występuje **siła tarcia kinetycznego**  $\vec{f}_k$ .

### Trzy właściwości tarcia

1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  i składowa siły  $\vec{F}$  równoległa do powierzchni mają jednakową wartość, a siła  $\vec{f}_s$  jest skierowana przeciwnie do tej składowej

wej siły  $\vec{F}$ . Gdy ta składowa rośnie, rośnie również wartość siły  $f_s$ .

2. Siła  $\vec{f}_s$  ma wartość maksymalną  $f_{s,\max}$  daną wzorem:

$$f_{s,\max} = \mu_s N, \quad (6.1)$$

przy czym  $\mu_s$  jest **współczynnikiem tarcia statycznego**, a  $N$  — wartością siły normalnej. Jeśli wartość składowej siły  $\vec{F}$  równoległej do powierzchni przekracza  $f_{s,\max}$ , to ciało zaczyna się ślizgać po tej powierzchni.

3. Jeśli ciało zaczyna się ślizgać po powierzchni, to wartość siły tarcia gwałtownie maleje do wartości stałej  $f_k$ , równej:

$$f_k = \mu_k N, \quad (6.2)$$

przy czym  $\mu_k$  jest **współczynnikiem tarcia kinetycznego**.



**Siła oporu** Gdy zachodzi ruch względny powietrza (lub innego płynu) i ciała, na ciało działa siła oporu  $\vec{D}$ , która przeciwdziała ruchowi względnemu i ma kierunek zgodny z kierunkiem przepływu płynu względem ciała. Wartość siły  $\vec{D}$  jest związana z wartością prędkości względnej zależnością:

$$D = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \quad (6.14)$$

przy czym  $C$  jest wyznaczonym doświadczalnie współczynnikiem oporu.  $\rho$  — gęstością (czyli masą jednostki objętości) płynu, a  $S$  — polem przekroju poprzecznego ciała (tzn. polem przekroju prostopadłego do wektora prędkości względnej  $\vec{v}$ ).

**Prędkość graniczna** Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu dostatecznie długo, wartości siły oporu  $\vec{D}$  i siły ciężkości  $\vec{F}_g$  działających na to ciało stają się sobie równe. Ciało spada wówczas ze stałą prędkością graniczną, o wartości  $v_l$  danej

wzorem:

$$v_l = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}. \quad (6.16)$$

**Ruch jednostajny po okręgu** Jeśli cząstka porusza się po okręgu lub łuku okręgu o promieniu  $R$  z prędkością o stałej wartości  $v$ , to mówimy, że porusza się ona ruchem jednostajnym po okręgu. Ma ona wówczas przyspieszenie dośrodkowe  $\vec{a}$ , którego wartość jest dana wzorem:

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (6.17)$$

Źródłem tego przyspieszenia jest wypadkowa siła dośrodkowa, działająca na ciało, której wartość wynosi:

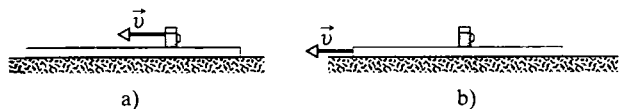
$$F = \frac{mv^2}{R}, \quad (6.18)$$

gdzie  $m$  jest masą ciała. Wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{F}$  są skierowane do środka krzywizny toru ciała.

## Pytania

1. W trzech kolejnych doświadczeniach do tego samego klocka, leżącego na tym samym blacie, przyłożono poziomo trzy różne siły. Ich wartości były równe:  $F_1 = 12$  N,  $F_2 = 8$  N i  $F_3 = 4$  N. We wszystkich doświadczeniach klocek nie ruszył się z miejsca. Mimo działania na niego siły. Uszereguj te siły według: a) wartości siły tarcia statycznego  $f_s$  działającej na klocek ze strony blatu, b) wartości maksymalnej siły  $f_{s,max}$ , od największej do najmniejszej wartości.

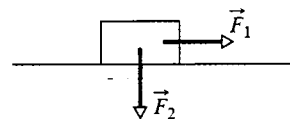
2. Jak pokazano na rysunku 6.13a, termos wprawiono w ruch ślizgowy w lewą stronę wzdłuż długiej plastikowej tacy. Jaki jest kierunek siły tarcia kinetycznego, działającej: a) na termos ze strony tacy, b) na tacę ze strony termosu? c) Czy siła z punktu (a) zwiększa, czy zmniejsza prędkość termosu względem stołu, na którym stoi taca? Na rysunku 6.13b przedstawiono sytuację, w której w ruch ślizgowy w lewą stronę wprawiono tacę. Jaki jest teraz kierunek siły tarcia kinetycznego, działającej: d) na termos ze strony tacy, e) na tacę ze strony termosu? f) Czy siła z punktu (d) zwiększa, czy zmniejsza prędkość termosu względem stołu? g) Czy siły tarcia kinetycznego zawsze powodują zmniejszenie prędkości ciała?



Rys. 6.13. Pytanie 2

3. Jak pokazano na rysunku 6.14, do klocka leżącego na podłodze przyłożono poziomo siłę  $\vec{F}_1$  o wartości 10 N, przy czym klocek pozostał w bezruchu. Do klocka przyłożono następnie pionowo

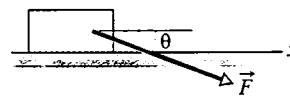
siłę  $\vec{F}_2$  o wartości stopniowo rosnącej od zera. Czy przy tym dane niżej wielkości rosną, maleją, czy pozostają bez zmiany: a) wartość działającej na klocek siły tarcia  $\vec{f}_s$ , b) wartość siły normalnej  $\vec{N}$  działającej na klocek ze strony podłogi, c) wartość maksymalna działającej na klocek siły tarcia statycznego,  $f_{s,max}$ ? d) Czy klocek zacznie się w końcu ślizgać?



Rys. 6.14. Pytanie 3

4. Wyobraź sobie, że przyciskasz do ściany skrzynkę na jabłka tak silnie, że skrzynka nie ześlizguje się po ścianie. Jaki jest kierunek: a) siły tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  działającej na skrzynkę ze strony ściany, b) siły normalnej  $\vec{N}$ , jaką ściana działa na skrzynkę? Czy i jak zmieniają się wartości: c)  $f_s$ , d)  $N$ , e)  $f_{s,max}$ , gdy zwiększasz siłę nacisku na skrzynkę?

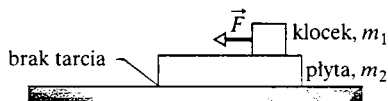
5. Klocek przedstawiony na rysunku 6.15 pozostaje nieruchomy. Czy wartości: a)  $F_x$ , b)  $f_s$ , c)  $N$ , d)  $f_{s,max}$  rosną, maleją, czy pozostają bez zmiany, gdy zwiększa się kąt  $\theta$ , jaki tworzy z poziomem siła  $\vec{F}$ ? e) Czy w sytuacji, gdy klocek ślizga się i zwiększamy kąt  $\theta$  wartość działającej na klocek siły tarcia rośnie, maleje, czy pozostaje bez zmiany?



Rys. 6.15. Pytanie 5

6. Odpowiedz na pytanie 5, gdy siła  $\vec{F}$  jest skierowana ukośnie w górę, a nie w dół.

7. Na rysunku 6.16 przedstawiono klocek o masie  $m_1$ , leżący na metalowej płycie o masie  $m_2$ . Do klocka przyłożona jest poziomo siła  $\vec{F}$ , pod wpływem której klocek ślizga się po płycie. Między klockiem a płytą występuje tarcie, natomiast płyta może się poruszać po podłożu bez tarcia. a) Jaka masa wyznacza wartość siły tarcia między klockiem a płytą? b) Czy wartość siły tarcia działającej na klocek ze strony płyty, jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak siła tarcia działająca na płytę ze strony klocka? c) Jaki jest kierunek każdej z tych dwóch sił tarcia? d) Jeśli chcemy zapisać drugą zasadę dynamiki Newtona dla płyty, to przez jaką masę powinniśmy pomnożyć przyspieszenie płyty (jest to rozgrzewka przed zadaniem 27)?

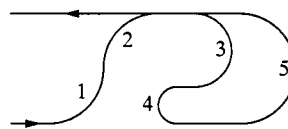


Rys. 6.16. Pytanie 7

8. *Uzupełnienie do zadania 25.* Załóżmy, że większy z dwóch klocków z rysunku 6.33 jest przymocowany do powierzchni, na której się znajduje. Jak w zadaniu 25 mamy zapobiec zeslizgnięciu się mniejszego klocka po ścianie dużego klocka: a) Czy wartość siły tarcia między klockami musi być większa, mniejsza, czy taka

sama, jak w zadaniu 25? Czy minimalna wartość siły poziomej  $\vec{F}$ , potrzebnej do zapobieżenia poślizgowi mniejszego klocka musi być większa, mniejsza, czy taka sama, jak w zadaniu 25?

9. Na rysunku 6.17 przedstawiono trasę przejazdu po parku zawierającą pięć kołowych łuków o promieniu  $R_0$ ,  $2R_0$  i  $3R_0$ . Uszereguj te łuki pod względem wartości siły dośrodkowej działającej na pojazd poruszający się z prędkością o stałej wartości od największej do najmniejszej.



Rys. 6.17. Pytanie 9

10. Rozważ trzy położenia pasażera jadącego na obracającym się równomiernie diabelskim młynie: 1) na górze, 2) na dole, 3) w połowie wysokości toru. Uszereguj te położenia pod względem wartości: a) przyspieszenia dośrodkowego pasażera, b) wypadkowej siły dośrodkowej działającej na pasażera, c) działającej na pasażera siły normalnej, od największych do najmniejszych.

## Zadania

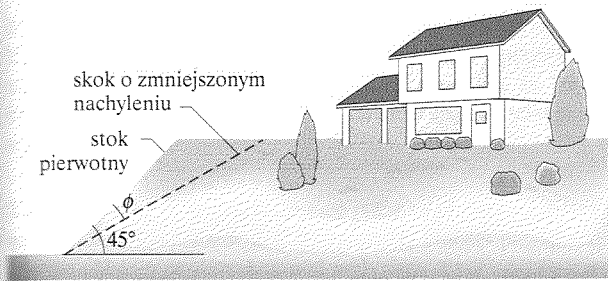
- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

### 6.2. Właściwości tarcia

1. Na podłodze w sypialni stoi komoda, której masa — wraz z szufladami i ubraniami — wynosi 45 kg. a) Jaką minimalną siłę należy przyłożyć poziomo do tej komody, aby ruszyć ją z miejsca, jeśli współczynnik tarcia statycznego między komodą a podłogą jest równy 0,45? b) Jaka będzie wartość siły minimalnej, jeśli z komody wyjmie się szuflady i ubrania o łącznej masie 17 kg?
2. Współczynnik tarcia statycznego między teflonem a jajecznicą wynosi około 0,04. Pod jakim najmniejszym kątem do poziomu trzeba ustawić pokrytą teflonem patelnię, aby jajecznica zjechała z niej na talerz?
3. Baseballista o masie  $m = 79$  kg ślizga się do drugiej bazy, przy czym jego ruch jest opóźniany przez siłę tarcia o wartości 470 N. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$  między graczem a boiskiem?
4. *Tajemnicze wędrowne kamienie.* W Dolinie Śmierci w Kalifornii, na nieuczęszczanej równinie o nazwie Racetrack Playa (co

można przetłumaczyć jako Plac Wyścigowy), obserwuje się czasami wyraźne wyżłobienia w pustynnym gruncie, jak gdyby poruszających się po nim kamieniach. Przez lata ludzie zastanawiali się nad przyczynami tych tajemniczych wędrowek kamieni. Jedną z hipotez na ten temat mówi, że kamienie popychane są powierzchni pustyni przez silne wiatry w czasie burz, gdy ziemia jest zmięczona przez wodę deszczową. Gdy pustynia wysycha powstają ślady ruchu kamieni zamieniają się w twarde wyżłobienia. Jak wynika z pomiarów, współczynnik tarcia kinetycznego między kamieniem a mokrą powierzchnią pustyni wynosi około 0,8. Jaka siła pozioma potrzebna jest do utrzymania w ruchu kamienia o masie 20 kg po tym, jak gwałtowny podmuch wiatru ruszy go z miejsca (dalszy ciąg opowieści w zadaniu 32)?

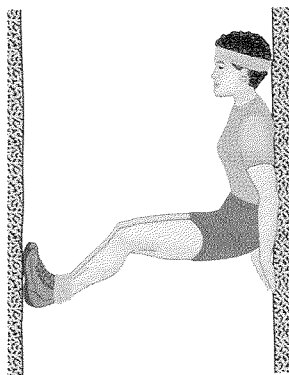
5. Pewna osoba pcha poziomo skrzynię o masie 55 kg działającą siłą 220 N, aby przesunąć ją po poziomej podłodze. Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,35. a) Jaka jest wartość siły tarcia? b) Jaka jest wartość przyspieszenia skrzyni? ilw
6. Na wzgórzu, którego stok ma nachylenie bliskie  $45^\circ$  zbudowano dom (rys. 6.18). Analiza inżynierska wykazała, że nachylenie stoku należy zmniejszyć, aby górne warstwy gruntu nie zeslizgnęły się po niższych. Wyznacz najmniejszy kąt  $\phi$ , o jaki należy zmniejszyć nachylenie stoku, aby grunt się nie obsuwał, jeśli współczynnik tarcia statycznego między warstwami gruntu wynosi 0,5.



Rys. 6.18. Zadanie 6

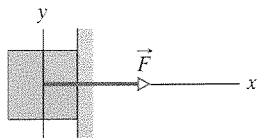
7. Wprawiony w ruch ślizgowy po lodzie krążek hokejowy o masie 110 g zatrzymał się pod wpływem siły tarcia, działającej na niego ze strony lodu, po przebyciu 15 m. a) Jaka była wartość siły tarcia, jeśli prędkość początkowa krążka wynosiła 6 m/s? b) Ile wynosi współczynnik tarcia między krążkiem a lodem?

8. Na rysunku 6.19 przedstawiono alpinistkę o masie 49 kg, podciągając „komin” między dwiema płytami skalnymi. Współczynnik tarcia statycznego między podszewkami butów alpinistki a skałą wynosi 1,2, a między jej plecami a skałą 0,8. Alpinistka zmniejszyła nacisk na skałę, tak że znalazła się na skraju ześlizgnięcia. a) Narysuj diagram sił, działających na alpinistkę. b) Jaka siła alpinistka działa na skałę? c) Jaka część ciężaru alpinistki jest równoważona przez siłę tarcia, działającą na jej buty?



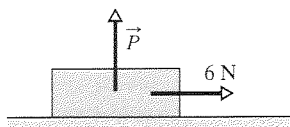
Rys. 6.19. Zadanie 8

9. Siła pozioma  $\vec{F}$  o wartości 12 N przyciska klocek o ciężarze 5 N do pionowej ściany (rys. 6.20). Współczynnik tarcia statycznego między ścianą a klokiem wynosi 0,6, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,4. W chwili początkowej klocek się nie porusza. a) Czy klocek nadal pozostanie w spoczynku? b) Podaj równanie siły, działającej na klocek ze strony ściany, zapisując ją za pomocą wektorów jednostkowych. www



Rys. 6.20. Zadanie 9

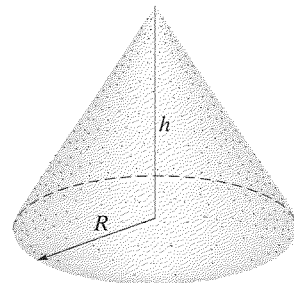
10. Klocek o masie 2,5 kg znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni. W pewnej chwili zostaje do niego przyłożona siła pozioma o wartości 6 N i siła pionowa  $\vec{P}$ , jak pokazano na rysunku 6.21. Współczynniki tarcia między



Rys. 6.21. Zadanie 10

dzi klockiem a powierzchnią wynoszą  $\mu_s = 0,4$  i  $\mu_k = 0,25$ . Wyznacz wartość i kierunek siły tarcia działającej na klocek, jeśli wartość siły  $\vec{P}$  jest równa: a) 8 N, b) 10 N, c) 12 N.

11. Robotnik chce usypać na podwórku stożkową górę z piasku. Promień koła, które ma stanowić podstawę stożka, wynosi  $R$  i piasek nie może rozsypać się poza ten obszar (rys. 6.22). Współczynnik tarcia statycznego między warstwami piasku, które mogłyby się po sobie ześlizgnąć wzdłuż powierzchni bocznej stożka jest równy  $\mu_s$ . Wykaż, że największa objętość piasku, który można w ten sposób zgromadzić, wynosi  $\pi\mu_s R^3/3$  (objętość stożka jest równa  $Sh/3$ , gdzie  $S$  jest polem podstawy, a  $h$  wysokością stożka).

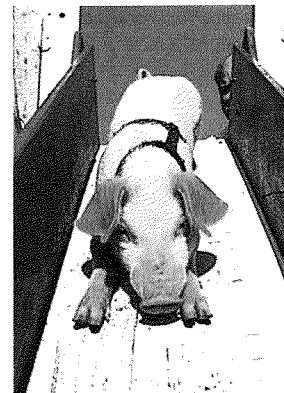


Rys. 6.22. Zadanie 11

12. Robotnik pcha poziomo skrzynię o masie 35 kg, działającą siłą o wartości 110 N. Współczynnik tarcia statycznego między skrzynią a podłogą wynosi 0,37. a) Ile wynosi siła tarcia, działająca na skrzynię ze strony podłogi? b) Ile wynosi w tych warunkach maksymalna wartość siły tarcia statycznego  $f_{s,max}$ ? c) Czy skrzynia się porusza? d) Wyobraź sobie, że robotnik wzywa do pomocy kolegę, który ciągnie skrzynię pionowo do góry. Jaką najmniejszą siłą musi on ciągnąć skrzynię do góry, aby przykładowa przez robotnika siła pozioma o wartości 110 N umożliwiła ruszenie skrzyni z miejsca? e) Jaką najmniejszą siłą musiałby przyłożyć do skrzyni drugi robotnik, aby skrzynia została wprawiona w ruch, jeśli zamiast ciągnąć skrzynię do góry ciągnąłby ją siłą poziomą?

13. Skrzynia o masie 68 kg jest ciągnięta po podłodze za pomocą liny przywiązanej do skrzyni i tworzącej z poziomem kąt  $15^\circ$ . a) Jaką minimalną siłą trzeba ciągnąć linę, aby wprawić skrzynię w ruch, jeśli współczynnik tarcia statycznego wynosi 0,5? b) Ile wynosi początkowa wartość przyspieszenia skrzyni, jeśli  $\mu_k = 0,35$ ?

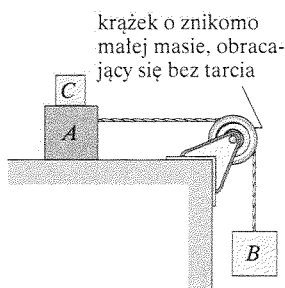
14. Lubiące się ślizgać prosię zjeżdża po pewnej równi pochyłej o nachyleniu  $35^\circ$  (rys. 6.23) w czasie dwukrotnie dłuższym od czasu zjazdu bez tarcia po równi o takim samym nachyleniu. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między prosięciem a powierzchnią równi?



Rys. 6.23. Zadanie 14

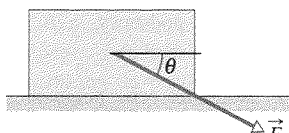
15. Klocki A i B z rysunku 6.24 mają ciężary odpowiednio: 44 N i 22 N. a) Wyznacz najmniejszy

ciężar klocek  $C$ , dla którego klocek  $A$  nie ślizga się po stole, jeśli  $\mu_s$  między klockiem  $A$  i stołem wynosi 0,2. b) Klocek  $C$  zdejmujemy nagle z klocka  $A$ . Z jakim przyspieszeniem porusza się klocek  $A$ , jeśli  $\mu_k$  między klockiem  $A$  i stołem wynosi 0,15?



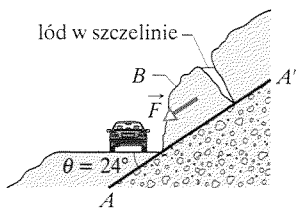
Rys. 6.24. Zadanie 15

16. Klocek o masie 3,5 kg jest pchany po poziomym podłożu siłą  $\vec{F}$  o wartości 15 N, tworzącą z poziomem kąt  $\theta = 40^\circ$  (rys. 6.25). Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a podłożem wynosi 0,25. Wyznacz wartość: a) siły tarcia działającej na klocek ze strony podłoża, b) przyspieszenia klocka.



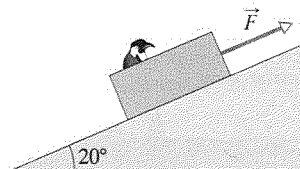
Rys. 6.25. Zadanie 16

17. Na rysunku 6.26 pokazano przekrój drogi wyciętej w zboczu górskim. Linia ciągła  $AA'$  ilustruje granicę luźnego podłoża, po której możliwy jest poślizg bloków skalnych. Blok  $B$  znajdujący się wprost nad drogą jest oddzielony od skały nad nim głębokim pęknięciem, tak że jego zeslizgnięciu się na drogę zapobiega jedynie siła tarcia między tym blokiem a podłożem. Masa bloku wynosi  $1,8 \cdot 10^7$  kg, kąt nachylenia podłoża skalnego  $\theta$  jest równy  $24^\circ$ , a współczynnik tarcia statycznego między blokiem a podłożem wynosi 0,63. a) Wykaż, że blok nie zeslizgnie się wzdłuż podłoża. b) Woda wpadająca do szczeliny nad blokiem zamraża w zimie, przy czym rozszerzając się, działa na blok siłą  $F$ , równoległą do linii  $AA'$ . Przy jakiej minimalnej wartości siły  $F$  blok się zeslizgnie?



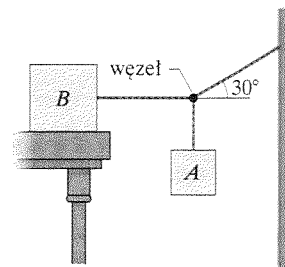
Rys. 6.26. Zadanie 17

18. Korytko z pingwinem o łącznym ciężarze 80 N znajduje się na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem  $20^\circ$  (rys. 6.27). Współczynnik tarcia statycznego między korytkiem a równią wynosi 0,25, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,15. a) Jaka jest wartość minimalnej siły  $\vec{F}$  równoległej do równi, która powstrzyma korytko od zjechania po równi w dół? b) Jaka jest minimalna wartość siły  $F$ , dla której korytko zacznie poruszać się po równi pod górę? c) Dla jakiej wartości siły  $F$  korytko będzie się poruszać pod górę ze stałą prędkością?



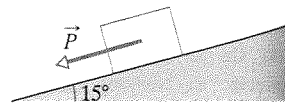
Rys. 6.27. Zadanie 18

19. Klocek  $B$  z rysunku 6.28 ma ciężar 711 N. Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a stołem wynosi 0,25. Linka między klockiem  $B$  a węzłem jest pozioma. Węzeł jest poziomy. Wyznacz maksymalny ciężar klocka  $A$ , dla którego układ pozostaje w spoczynku.



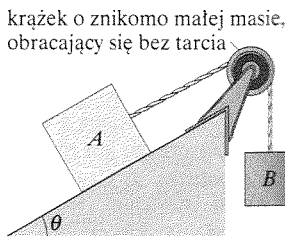
Rys. 6.28. Zadanie 19

20. Siła  $\vec{P}$  równoległa do równi nachylonej do poziomu pod kątem  $15^\circ$  działa na klocek o ciężarze 45 N, jak pokazano na rysunku 6.29. Współczynniki tarcia między klockiem a powierzchnią równi wynoszą  $\mu_s = 0,5$  i  $\mu_k = 0,34$ . Wyznacz wartość i kierunek działającej na klocek siły tarcia, dla wartości  $\vec{P}$  równych: a) 5 N, b) 8 N, c) 15 N, przy założeniu, że klocek początkowo znajduje się w spoczynku.



Rys. 6.29. Zadanie 20

21. Ciało  $A$  z rysunku 6.30 ma ciężar 102 N, a ciało  $B$  — ciężar 32 N. Współczynniki tarcia między ciałem  $A$  a równią wynoszą  $\mu_s = 0,56$  i  $\mu_k = 0,25$ . Kąt  $\theta$  jest równy  $40^\circ$ . Wyznacz przyspieszenie ciała  $A$ , jeśli: a) ciało  $A$  jest początkowo w spoczynku, b) ciało  $A$  porusza się początkowo w górę po równi, c) ciało  $A$  porusza się początkowo w dół po równi.



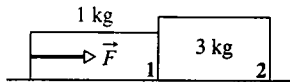
Rys. 6.30. Zadania 21 i 22

22. Na rysunku 6.30 przedstawiono dwa klocki, połączone linką przełożoną przez krążek. Masa klocka  $A$  wynosi 10 kg, a współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem  $A$  i równią jest równy 0,2. Kąt nachylenia równi  $\theta$  wynosi  $30^\circ$ . Klocek  $A$  zeslizguje się po równi w dół z prędkością o stałej wartości. Ile wynosi masa klocka  $B$ ?

23. Dwa klocki o ciężarach 3,6 N i 7,2 N są połączone sprężyną o znikom małej masie i zeslizgują się w dół, po równi o nachyleniu  $30^\circ$ . Współczynnik tarcia kinetycznego między lżejszym

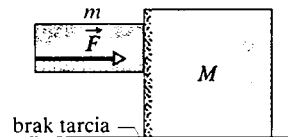
klockiem a powierzchnią równi wynosi 0,1, a między cięższym klockiem a równią wynosi 0,2. Wyznacz: a) wartość przyspieszenia klocków, b) naprężenie sprężyny przy założeniu, że lżejszy klocek zjeżdża pierwszy. b) Opisz ruch klocków, gdy jako pierwszy zjeżdża klocek cięższy.

24. Na rysunku 6.31 przedstawiono pudełko płatków śniadaniowych 1 i pudełko płatków 2, poruszające się ruchem przyspieszonym po płaskiej powierzchni, pod wpływem siły  $\vec{F}$ , przyłożonej poziomo do pudełka 1. Wartość siły tarcia działającej na pudełko 1 wynosi 2 N, a wartość siły tarcia działającej na pudełko 2 jest równa 4 N. Jaka jest wartość siły działającej na pudełko 2, ze strony pudełka 1, jeśli wartość siły  $\vec{F}$  wynosi 12 N?



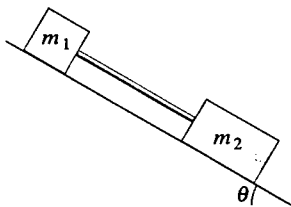
Rys. 6.31. Zadanie 24

25. Dwa klocki (o masach  $m = 16$  kg i  $M = 88$  kg), pokazane na rysunku 6.32, nie są ze sobą połączone. Współczynnik tarcia statycznego między klockami wynosi  $\mu_s = 0,38$ , a większy klocek może poruszać się po podłożu bez tarcia. Jaka jest minimalna wartość siły poziomej  $\vec{F}$  potrzebnej do tego, aby mniejszy klocek nie ześlizgnął się w dół po większym (uzupełnijcie tego zadania jest pytanie 8)? ilw



Rys. 6.32. Zadanie 25

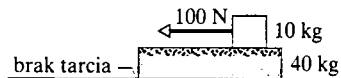
26. Jak pokazano na rysunku 6.33, po równi pochyłej ześlizguje się pudełko z małymi mrówkami (o całkowitej masie  $m_1 = 1,65$  kg) i pudełko z dużymi mrówkami (o całkowitej masie  $m_2 = 3,3$  kg), połączone ze sobą równoległym do powierzchni równi prętem, którego masę możemy pominąć. Kąt nachylenia równi wynosi  $\theta = 30^\circ$ . Współczynnik tarcia kinetycznego między pudełkiem z małymi mrówkami a równią wynosi  $\mu_1 = 0,226$ , a między pudełkiem z dużymi mrówkami a równią —  $\mu_2 = 0,113$ . Wyznacz: a) naprężenie pręta, b) wspólne przyspieszenie obydwu pudełek, c) Jak zmieniłyby się odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdyby pudełko z małymi mrówkami znajdowało się na przednim końcu pręta, a pudełko z dużymi mrówkami — na tylnym?



Rys. 6.33. Zadanie 26

27. Płyta o masie 40 kg leży na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia, a na płycie spoczywa klocek o masie 10 kg (rys. 6.34). Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a płytą  $\mu$ , wynosi 0,6, a współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$

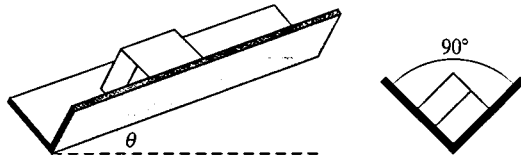
jest równy 0,4. Kłosek zaczynamy ciągnąć poziomo siłą o wartości 100 N. Z jakim przyspieszeniem będzie się poruszać: a) klocek, b) płyta? www



Rys. 6.34. Zadanie 27

28. Lokomotywa ciągnie po poziomym torze pociąg o 25 wagonach, wprawiając go w ruch przyspieszony. Na każdy wagon o masie  $5 \cdot 10^4$  kg działa siła tarcia  $f = 250v$ , gdzie  $v$  jest wartością prędkości w metrach na sekundę, a  $f$  jest wartością siły w niutonach. W chwili, gdy prędkość pociągu ma wartość 30 km/h, wartość przyspieszenia wynosi  $0,2$  m/s<sup>2</sup>. a) Ile wynosi naprężenie połączenia pierwszego wagonu z lokomotywą? b) Ile wynosi największe nachylenie toru, po którym lokomotywa mogłaby ciągnąć ten pociąg pod górę, z prędkością 30 km/h, gdyby naprężenie z punktu (a) było równe największej sile, jaką lokomotywa może działać na pociąg?

29. Na rysunku 6.35 przedstawiono skrzynię, ześlizgującą się wzdłuż nachylonej do poziomu rynną złożonej z dwóch prostopadłych do siebie ścianek. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a rynną jest równy  $\mu_k$ . Wyznacz przyspieszenie skrzyni jako funkcję  $\mu_k$ ,  $\theta$  i  $g$ .



Rys. 6.35. Zadanie 29

30. Pozostające początkowo w spoczynku pudło z piaskiem ma być przeciągnięte po podłożu za pomocą liny, której naprężenie nie może przekroczyć 1100 N. Współczynnik tarcia statycznego między pudłem a podłożem wynosi 0,35. a) Ile powinien wynosić kąt między liną a poziomem, aby do pudła można było bezpiecznie wyspać możliwie największą ilość piasku? b) Ile wynosiłby wówczas ciężar pudła z piaskiem?

31. Łódź o masie 1000 kg płynęła z prędkością 90 km/h, gdy jej silnik nagle zgasł. Wartość siły tarcia  $f_k$  działającej między łodzią a wodą jest proporcjonalna do prędkości łodzi  $v$ :  $f_k = 70v$ , przy czym  $v$  jest wyrażone w metrach na sekundę, a  $f_k$  — w niutonach. Wyznacz czas, po jakim łódź zwolni do prędkości 45 km/h.

### 6.3. Siła oporu i prędkość graniczna

32. Ciąg dalszy zadania 4. Najpierw przeczytaj jeszcze raz, jak wiatr może przesuwać kamienie po pustynnej równinie. Następnie załóż, że wartość siły oporu aerodynamicznego działającego na kamień o masie 20 kg można wyznaczyć ze wzoru (6.14), przy czym pole pionowego przekroju kamienia wynosi  $0,04$  m<sup>2</sup>.

a współczynnik oporu  $C$  jest równy 0.8. Przyjmij ponadto, że gęstość powietrza wynosi  $1,21 \text{ kg/m}^3$ , a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0.8. a) Ile musi wynosić prędkość wiatru przy gruncie  $V$ , w kilometrach na godzinę, umożliwiającą utrzymanie kamienia w ruchu? Przy samej ziemi wiatr jest spowalniany przez sąsiedztwo gruntu, dlatego prędkość silnych wiatrów mierzy się zwykle na wysokości 10 m nad ziemią. Przyjmij, że przy gruncie wiatr jest dwa razy wolniejszy. b) Znają odpowiedź na pytanie (a), wyznacz prędkość wiatru, podawaną przez meteorologów i zastanów się, czy jest prawdopodobne, aby burzy towarzyszył wiatr o takiej prędkości (dalszy ciąg opowieści w zadaniu 48).

33. Wyznacz siłę oporu aerodynamicznego działającą na pocisk o średnicy 53 cm, poruszający się z prędkością 250 m/s na małej wysokości, gdzie gęstość powietrza wynosi  $1,2 \text{ kg/m}^3$ . Przyjmij, że  $C = 0,75$ .

34. Prędkość graniczna skoczka (przed otwarciem spadochronu) wynosi 160 km/h, gdy przyjmuje on pozycję orła w locie, a jest równa 310 km/h, gdy spada on głową w dół. Zakładając, że współczynnik oporu aerodynamicznego  $C$  nie zależy od pozycji skoczka, wyznacz stosunek pól przekroju poprzecznego  $S$  skoczka w pozycji wolnego i szybkiego lotu.

35. Oblicz stosunek sił oporu, działających na odrzutowiec pasażerski lecący z prędkością 1000 km/h na wysokości 10 km oraz na śmigłowy samolot transportowy, lecący z dwukrotnie mniejszą prędkością i na dwukrotnie mniejszej wysokości niż odrzutowiec. Na wysokości 10 km gęstość powietrza wynosi  $0,38 \text{ kg/m}^3$ , a na wysokości 5 km jest ona równa  $0,67 \text{ kg/m}^3$ . Załóż, że obydwa samoloty mają takie samo pole przekroju poprzecznego oraz takie same współczynniki oporu aerodynamicznego  $C$ .

## 6.4. Ruch jednostajny po okręgu

36. Na olimpijskich zawodach bobslejowych zespół z Jamajki pokonał łuk o promieniu 7.6 m z prędkością o wartości 96.6 km/h. Ile wynosiło przyspieszenie bobsleja w jednostkach  $g$ ?

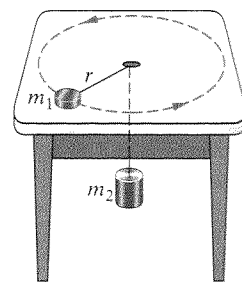
37. Załóż, że współczynnik tarcia statycznego między torem a oponami samochodu Formuły 1 w czasie wyścigu Grand Prix wynosi 0.6. Przy jakiej wartości prędkości samochód znajdzie się na granicy poślizgu, pokonując płaski zakręt o promieniu krzywizny 30.5 m?

38. Pełen pasażerów wagonik kolejki górskiej w wesołym miasteczku ma masę 1200 kg. Gdy wagonik przejeżdża przez kulisty szczyt wzgórza o promieniu 18 m, wartość jego prędkości się nie zmienia. Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na wagonik ze strony toru, gdy wagonik jest na szczycie wzgórza, a jego prędkość ma wartość: a) 11 m/s, b) 14 m/s?

39. Ile wynosi najmniejszy promień krzywizny zakrętu na płaskim torze, który może pokonać rowerzystka z prędkością o wartości 29 km/h, jeśli współczynnik tarcia statycznego między oponami roweru a torem wynosi 0.32? ilw

40. Jedną z atrakcji w wesołym miasteczku jest jazda samochodem, przymocowanym do końca pręta o znikomo małej masie i zataczającym okręgi w płaszczyźnie pionowej. Ciężar samochodu z pasażerami wynosi 5 kN, a promień toru jest równy 10 m. Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na pojazd ze strony pręta w najwyższym punkcie toru, jeśli prędkość samochodu ma w tym punkcie wartość: a) 5 m/s, b) 12 m/s?

41. Krążek o masie  $m_1$ , połączony z obciążnikiem o masie  $m_2$  nieważką linką, przechodzącą przez otwór w blacie stołu, ślizga się po stole bez tarcia, jak pokazano na rysunku 6.36. Przy jakiej wartości prędkości krążka obciążnik pozostaje w spoczynku?



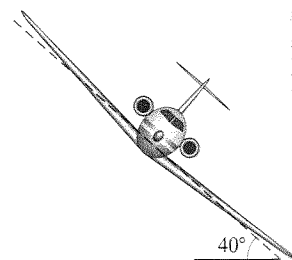
Rys. 6.36. Zadanie 41

42. Rowerzysta jedzie po kołowym torze o promieniu 25 m, z prędkością o stałej wartości 9 m/s. Łączna masa roweru i rowerzysty wynosi 85 kg. Oblicz wartość: a) siły tarcia działającej na rower ze strony drogi, b) siły wypadkowej działającej na rower ze strony drogi.

43. Student o ciężarze 667 N jedzie na jednostajnie obracającym się diabelskim młynie, siedząc w pozycji wyprostowanej. W najwyższym punkcie toru wartość siły normalnej  $\vec{N}$ , działającej na studenta ze strony siedzenia wynosi 556 N. a) Czy student ma wówczas wrażenie, że jest lżejszy, czy cięższy niż zwykle? b) Jaka jest wartość siły normalnej  $\vec{N}$  w najniższym punkcie toru? c) Jaka będzie wartość siły normalnej  $\vec{N}$ , gdy koło będzie się obracać dwa razy szybciej? ilw

44. Staroświecki tramwaj pokonuje płaski zakręt o promieniu krzywizny 9.1 m z prędkością o wartości 16 km/h. Jaki kąt z pionem tworzą luźno zwisające uchwyty dla pasażerów stojących?

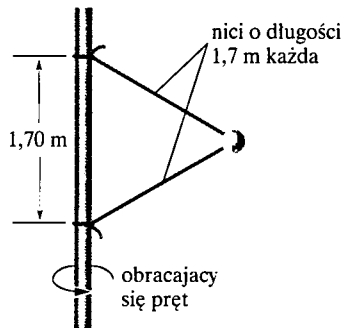
45. Samolot leci po poziomym łuku kołowym z prędkością o wartości 480 km/h. Ile wynosi promień tego łuku, jeśli skrzydła samolotu są nachylone do poziomu pod kątem  $40^\circ$  (patrz rysunek 6.37)? Przyjmij, że nachylenie samolotu jest wyznaczone przez kierunek aerodynamicznej siły nośnej, działającej prostopadle do powierzchni skrzydeł.



Rys. 6.37. Zadanie 45

46. Wagon szybkiej kolei jedzie po płaskim łuku o promieniu 470 m z prędkością o stałej wartości. Wartość składowej poziomej i pionowej siły, jaką wagon działa na pasażera o masie 51 kg, wynosi odpowiednio 210 N i 500 N. a) Jaka jest wartość wypadkowej *wszystkich* sił działających na pasażera? b) Ile wynosi wartość prędkości wagonu?

47. Jak pokazano na rysunku 6.38, kula o masie 1,34 kg jest połączona z pionowym, obracającym się prętem za pomocą dwóch nici o znikomą masę. Nici są przywiązane do pręta i napięte. Naprężenie górnej nici wynosi 35 N. a) Narysuj diagram sił działających na kulę. Ile wynosi: b) naprężenie dolnej nici, c) siła wypadkowa działająca na kulę, d) wartość prędkości kuli? ilw



Rys. 6.38. Zadanie 47

## Zadanie dodatkowe

48. *Ciąg dalszy zadań 4 i 32.* Inne wyjaśnienie ruchu kamieni zakłada, że poruszają się one tylko wtedy, gdy w czasie burzy woda na pustynnej równinie zamarza i tworzy dużą, płaską tafelę lodu. Kamienie są wówczas uwięzione w tej tafli. Gdy wiatr wieje w poprzek tafli, siła oporu aerodynamicznego działająca na tafelę i kamienie przemieszcza je, przy czym kamienie żłobią ślady w podłożu. Wartość siły oporu działającej na taki poziomy „żagiel lodowy” wynosi:  $D_{\text{lodu}} = 4C_{\text{lodu}}\rho S_{\text{lodu}}v^2$ , przy czym  $C_{\text{lodu}}$  jest współczynnikiem oporu aerodynamicznego (równym około  $2 \cdot 10^{-3}$ ),  $\rho$  — gęstością powietrza ( $1.21 \text{ kg/m}^3$ ),  $S_{\text{lodu}}$  — polem powierzchni poziomej lodu, a  $v$  — prędkością wiatru wzdłuż tafli lodu.

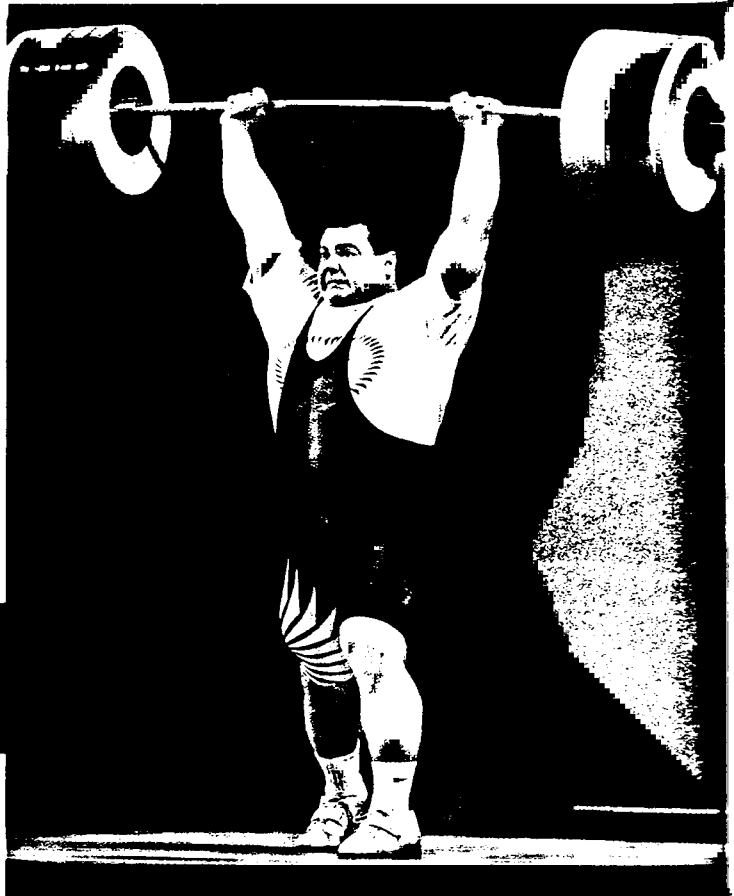
Załóż, że tafelę ma rozmiar 400 m na 500 m i grubość 4 mm oraz gęstość równą  $917 \text{ kg/m}^3$ , a współczynnik tarcia kinetycznego między tafelą a podłożem wynosi 0,1. Przyjmij ponadto, że w tafli uwięzionych jest 100 kamieni, takich jak w zadaniu 4. Jaka musi być prędkość wiatru: a) przy tafli, b) na wysokości 10 m, aby utrzymać tafelę w ruchu? c) Czy jest prawdopodobne, aby w czasie burzy wiał wiatr o takiej prędkości?

# 7 Energia kinetyczna i praca

Podczas turnieju w podnoszeniu ciężarów na Igrzyskach Olimpijskich w 1996 roku Andriej Czemerkin podniósł rekordowy ciężar o masie 260 kg, z pomostu nad głowę (czyli na wysokość około 2 m). W 1957 roku Paul Anderson, schyliwszy się, wszedł pod wzmocniony podest drewniany, oparł ręce na niskim stołku, a następnie naparł plecami na podest, podnosząc go wraz z ładunkiem o około centymetr. Na podeście umieszczone były części samochodowe i kasa pancerna wypełniona ołowiem. Całkowity ciężar ładunku wynosił 27 900 N (co odpowiada masie blisko 3000 kg)!

**Kto wykonał większą pracę, podnosząc swój ciężar — Czemerkin czy Anderson?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





## 7.1. Energia

Zasady dynamiki Newtona umożliwiają analizowanie wielu rodzajów ruchu. Może to być jednak bardzo skomplikowane i wymagać znajomości szczegółowych parametrów ruchu, których często po prostu nie znamy. Oto przykład: krążek ześlizguje się bez tarcia po pochyłym torze, na którym jest wiele wzniesień i spadków (wzgórz i dolin) o różnym kształcie. Wartość prędkości początkowej krążka wynosi 4 m/s, a wysokość punktu początkowego jest równa 0,46 m. Czy możesz obliczyć prędkość krążka na końcu toru, gdzie jego wysokość jest równa zero, korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona? W zasadzie tak, ale musisz dokładnie wiedzieć, jak zmienia się nachylenie toru wzdłuż całej drogi krążka, a obliczenia mogłyby być przy tym bardzo złożone.

Już dawno temu naukowcy i inżynierowie doszli do wniosku, że ruch można badać — często z doskonałym skutkiem — również w inny sposób. Metoda ta mogłaby być także użyteczna — i taką się okazała — w innych zastosowaniach, nie związanych bezpośrednio z ruchem, jak badanie reakcji chemicznych, procesów geologicznych i funkcji biologicznych. W metodzie tej korzystamy z pojęcia **energii**, która może mieć wiele *postaci* (rodzajów). Termin *energia* ma w rzeczywistości tak szerokie znaczenie, że trudno jest podać jego klarowną definicję. Technicznie rzecz biorąc, jest to wielkość skalarna, charakteryzująca stan (czyli warunki), w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. Ta definicja jest jednak tak ogólna, że nie na wiele nam się teraz przyda.

Zacznijmy zatem od nieco mniej precyzyjnej definicji, zgodnie z którą energia jest to liczba, którą przypisujemy stanowi jednego lub wielu ciał. Jeśli siła zmienia stan jednego z ciał, na przykład wprawiając je w ruch, to liczba ta się zmienia. Po przeprowadzeniu niezliczonych doświadczeń naukowcy i inżynierowie stwierdzili, że jeżeli wartość energii będziemy przypisywać stanom ciała w sposób dobrze przemyślany, to będziemy ją mogli zastosować do przewidywania wyników doświadczeń (na przykład dość łatwo jest wyznaczyć prędkość końcową krążka z podanego wyżej zadania). Jednakże sposób, w jaki należy powiązać wartość energii ze stanem ciała nie jest ani prosty, ani oczywisty. W niniejszym rozdziale zajmiemy się zatem tylko jedną z postaci energii — energią kinetyczną. Z innymi rodzajami energii spotkasz się w dalszych częściach tej książki oraz podczas pracy w dziedzinie nauki lub techniki.

**Energia kinetyczna**  $E_k$  jest to energia związana ze *stanem ruchu* ciała. Im szybciej ciało się porusza, tym większa jest jego energia kinetyczna. Gdy ciało pozostaje w spoczynku, jego energia kinetyczna jest równa zero.

Energię kinetyczną ciała o masie  $m$ , poruszającego się z prędkością o wartości  $v$ , znacznie mniejszej od prędkości światła, definiujemy jako:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{energia kinetyczna}). \quad (7.1)$$

Na przykład kaczką o masie 3 kg, przelatującą obok nas z prędkością 2 m/s, ma energię kinetyczną  $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ , co oznacza, że taką właśnie liczbę przypisujemy stanowi ruchu kaczki.

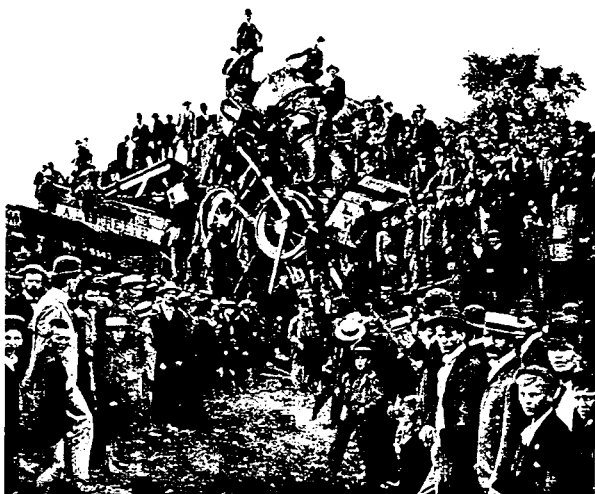
Jednostką energii kinetycznej (i każdego innego rodzaju energii) w układzie SI jest **dżul (J)**. Nazwa ta pochodzi od nazwiska XIX-wiecznego uczonego angielskiego, Jamesa Prescottta Joule'a. Związek jednostki energii z jednostkami masy i prędkości wynika natychmiast z równania (7.1):

$$1 \text{ dżul} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \quad (7.2)$$

Nasza kaczka ma zatem energię kinetyczną równą 6 J.

## Przykład 7.1

W 1896 roku w Waco, w Teksasie William Crush z linii kolejowej „Katy” na oczach 30 000 widzów ustawił dwie lokomotywy naprzeciwko siebie, na końcach toru o długości 6,4 km, uruchomił je, zablokował dźwignie w położeniu pełnego gazu i pozwolił rozpędzonym lokomotywowi zderzyć się ze sobą czołowo (rys. 7.1). Odłamki pojazdów zraniły setki osób, a kilka nawet zabiły. Wyznacz łączną energię kinetyczną lokomotyw tuż przed zderzeniem zakładając, że każda z nich miała ciężar równy  $1.2 \cdot 10^6 \text{ N}$ , a przy-



Rys. 7.1. Przykład 7.1. Widok zniszczeń po zderzeniu dwóch lokomotyw w 1896 roku

spieszenia obydwu lokomotyw wzdłuż toru były stałe i wynosiły  $0.26 \text{ m/s}^2$ .

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Energię kinetyczną każdej lokomotywy możemy wyznaczyć z równania (7.1), ale musimy znać jej prędkość tuż przed zderzeniem oraz jej masę.

➔ 2. Przyspieszenie każdej z lokomotyw było stałe, więc do obliczenia jej prędkości  $v$  tuż przed zderzeniem możemy zastosować wzory z tabeli 2.1. Wybieramy równanie (2.16), gdyż znamy wartości wszystkich występujących w nim zmiennych poza  $v$ . Mamy więc:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Ponieważ  $v_0 = 0$ , a  $x - x_0 = 3.2 \cdot 10^3 \text{ m}$  (jest to połowa początkowej odległości lokomotywy), więc mamy stąd:

$$v^2 = 0 + 2(0.26 \text{ m/s}^2)(3.2 \cdot 10^3 \text{ m}),$$

czyli

$$v = 40.8 \text{ m/s}$$

(tzn. około 150 km/h).

➔ 3. Masę każdej z lokomotyw można wyznaczyć, dzieląc jej ciężar przez  $g$ :

$$m = \frac{(1.2 \cdot 10^6 \text{ N})}{(9.8 \text{ m/s}^2)} = 1.22 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Teraz możemy już obliczyć z równania (7.1) łączną energię kinetyczną obydwu lokomotyw tuż przed zderzeniem. Otrzymujemy:

$$E_k = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (1.22 \cdot 10^5 \text{ kg})(40.8 \text{ m/s})^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przebywanie blisko tego zderzenia było równie bezpieczne, jak przebywanie w pobliżu wybuchającej bomby.

## 7.2. Praca

Gdy zwiększamy prędkość ciała działając na nie siłą, zwiększamy jego energię kinetyczną  $E_k$  ( $= \frac{1}{2}mv^2$ ). Podobnie, gdy działając na ciało siłą zmniejszamy jego prędkość, zmniejszamy też jego energię kinetyczną. Te zmiany energii kinetycznej ciała, na które działamy siłą rozumiemy jako przekazanie mu energii lub odebranie jej od niego.

W rozważanym tu przypadku, gdy przekazanie energii odbywa się dzięki przyłożeniu do ciała siły mówimy, że siła wykonuje nad ciałem pracę  $W$ . Ścisłej, pracę definiujemy następująco:

➤ Praca  $W$  jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna.

„Praca” jest więc równa zmianie energii; „wykonanie pracy” jest aktem przekazania energii. Praca jest wielkością skalarną, a jej jednostki są takie same, jak jednostki energii.

Termin „przekazanie” może być mylący. Nie oznacza on, że jakaś materia dopłynęła lub odpłynęła od ciała; to nie to samo, co przepływ wody. Dobrym porównaniem może być elektroniczne przekazanie pieniędzy między dwoma rachunkami bankowymi. Saldo jednego rachunku się zwiększa, a drugiego zmniejsza, lecz fizycznie nic między tymi rachunkami nie przepływa.

Zwróćmy też uwagę, że słowa „praca” nie używamy tu w sensie potocznym, gdzie dowolny wysiłek fizyczny lub umysłowy kojarzymy z pracą. Gdy na przykład naciskasz mocno na ścianę męczysz się, bo musisz ciągle naprężyć mięśnie, a więc w sensie potocznym pracujesz. Takiemu wysiłkowi nie towarzyszy jednak przekazanie energii do, ani od ściany, a więc w sensie powyższej definicji nie jest wykonywana żadna praca.

Dla uniknięcia nieporozumień, symbolem  $W$  będziemy w tym rozdziale zawsze oznaczać pracę, a ciężar będziemy zapisywać jako  $mg$ .

## 7.3. Praca i energia kinetyczna

### Wzór na pracę

Aby wyprowadzić wzór na pracę, rozważmy koralik, który może ślizgać się bez tarcia po żyłce rozciągniętej wzdłuż poziomej osi  $x$  (rys. 7.2). Stała siła  $\vec{F}$ , skierowana pod kątem  $\phi$  do żyłki powoduje ruch przyspieszony koralika wzdłuż żyłki. Związek między siłą a przyspieszeniem opisuje druga zasada dynamiki Newtona, zapisana w tym przypadku dla składowych wzdłuż osi  $x$ :

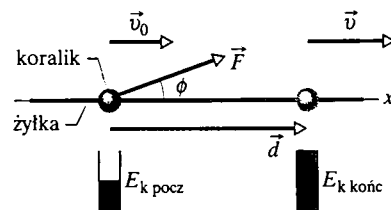
$$F_x = ma_x, \quad (3.7)$$

przy czym  $m$  jest masą koralika. Gdy koralik przemieszcza się o wektor  $\vec{d}$ , jego prędkość zmienia się w wyniku działania siły z  $v_0$  na  $v$ . Siła jest stała, więc — jak wiemy — stałe jest także przyspieszenie. Możemy zatem skorzystać ze wzoru (2.16) (jednego z podstawowych wzorów dla ruchu ze stałym przyspieszeniem, poznanych w rozdziale 2) i dla składowych wzdłuż osi  $x$  napisać:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \quad (7.4)$$

Wyznaczając  $a_x$  z tego równania, podstawiając wynik do wzoru (7.3) i dokonując kilku przekształceń, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \quad (7.5)$$



Rys. 7.2. Stała siła  $\vec{F}$  skierowana pod kątem  $\phi$  do przemieszczenia  $\vec{d}$  koralika po żyłce powoduje ruch przyspieszony koralika wzdłuż żyłki, podczas którego prędkość koralika zmienia się z  $\vec{v}_0$  na  $\vec{v}$ . Narysowany na dole „wskaźnik energii kinetycznej” pokazuje, że energia kinetyczna koralika wzrasta od wartości  $E_{k \text{ pocz}}$  do  $E_{k \text{ koniec}}$

Lewa strona powyższego równania jest to różnica energii kinetycznej  $E_{k\text{ kon}}$  koralika po przebyciu drogi  $d$  i jego energii kinetycznej  $E_{k\text{ pocz}}$  na początku tej drogi. Z równania (7.5) wynika więc, że zmiana energii kinetycznej w wyniku działania siły jest równa  $F_x d$ . Wobec tego praca  $W$ , wykonana przez tę siłę nad koralikiem (czyli energia przekazana mu w wyniku działania siły) wynosi:

$$W = F_x d. \quad (7.6)$$

Jeśli znamy wartości  $F_x$  i  $d$ , to z równania tego możemy wyznaczyć pracę  $W$  wykonaną przez tę siłę nad koralikiem.

► Do obliczenia pracy wykonanej przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczenia potrzebna jest tylko składowa siły w kierunku przemieszczenia ciała. Składowa siły prostopadła do przemieszczenia nie wykonuje pracy.

Jak widać z rysunku 7.2, składową  $F_x$  możemy zapisać jako  $F \cos \phi$ , gdzie  $\phi$  jest kątem między kierunkami wektorów przemieszczenia  $\vec{d}$  i siły  $\vec{F}$ . Równanie (7.6) możemy zatem zapisać w bardziej ogólnej postaci jako:

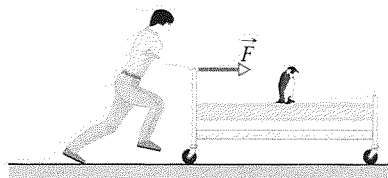
$$W = Fd \cos \phi \quad (\text{praca wykonana przez siłę stałą}). \quad (7.7)$$

Równanie to jest przydatne, gdy chcemy obliczyć pracę, znając wartości  $F$ ,  $d$  i  $\phi$ . Jego prawa strona jest równa iloczynowi skalarnemu  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ , więc możemy je również przedstawić w postaci:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (\text{praca wykonana przez siłę stałą}) \quad (7.8)$$

(być może warto, abyś w tym miejscu przypomniał sobie iloczyn skalarny, omówiony w paragrafie 3.7). Równanie (7.8) może być przydatne zwłaszcza wtedy, gdy trzeba obliczyć pracę, mając dane  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$ , zapisane za pomocą wektorów jednostkowych.

*Uwaga:* Możliwość zastosowania wzorów od (7.6) do (7.8) do obliczenia pracy wykonanej nad ciałem przez siłę podlega dwóm ograniczeniom. Po pierwsze, siła musi być *stała*, to znaczy, że w czasie ruchu ciała nie może ulegać zmianie ani jej wartość, ani kierunek (przypadkiem siły *zmiennnej*, której wartość nie jest stała zajmiemy się nieco później). Po drugie, ciało musi zachowywać się jak cząstka, to znaczy być *sztwywnie*, tak że wszystkie jego części poruszają się razem w tym samym kierunku. W tym rozdziale rozważać będziemy tylko ciała tego rodzaju. Ich przykładem może być łóżko z rysunku 7.3, wraz z jego pasażerem.



**Rys. 7.3.** Uczestnik wyścigu łóżek szpitalnych. Aby obliczyć pracę wykonaną nad łóżkiem i jego pasażerem przez siłę, jaką działa na nie pchający je student, możemy założyć, że łóżko wraz z pasażerem zachowują się jak cząstka

*Znak pracy.* Praca wykonana przez siłę nad ciałem może być dodatnia lub ujemna. Jeśli na przykład kąt  $\phi$  w równaniu (7.7) jest mniejszy od  $90^\circ$ , to wartość  $\cos \phi$  jest dodatnia, a więc praca jest również dodatnia. Jeśli natomiast kąt  $\phi$  jest większy od  $90^\circ$  (lecz nie większy od  $180^\circ$ ), to wartość  $\cos \phi$  jest ujemna, a więc praca jest także ujemna (czy zauważyłeś, że praca jest równa zero, gdy  $\phi = 90^\circ$ ?). Z tych stwierdzeń wynika prosta reguła. Aby określić znak pracy wykonanej przez siłę, należy znaleźć składową wektorową siły w kierunku przemieszczenia ciała.

Praca wykonana przez siłę jest dodatnia, gdy składowa wektorowa siły w kierunku przemieszczenia jest skierowana zgodnie z wektorem przemieszczenia, jest zaś ujemna, gdy ta składowa jest skierowana przeciwnie do wektora przemieszczenia. Praca jest równa zero, gdy siła nie ma składowej w kierunku przemieszczenia.

**Jednostki pracy.** Jednostką pracy w układzie SI, tak samo jak energii kinetycznej, jest dżul. Jak widać z równań (7.6) i (7.7) jednostkę tę można również wyrazić jako iloczyn niutona i metra ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ). Równanie (7.2) możemy zatem wzbogacić o dodatkową zależność:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (7.9)$$

**Całkowita praca wykonana przez wiele sił.** Jeśli na ciało działają dwie siły lub większa ich liczba, to **całkowita praca** wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły. Tę łączną pracę możemy obliczyć na dwa sposoby: 1) możemy wyznaczyć prace wykonane przez poszczególne siły i dodać je; 2) możemy najpierw wyznaczyć wypadkową  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  tych sił, a następnie pracę, wykonaną przez tę siłę. W drugim przypadku możemy skorzystać z równania (7.7), w którym w miejsce  $F$  podstawimy  $F_{\text{wyp}}$ , a w miejsce  $\phi$  — kąt utworzony przez kierunki  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  i przemieszczenia ciała lub skorzystać z równania (7.8), w którym w miejsce  $\vec{F}$  podstawimy  $\vec{F}_{\text{wyp}}$ .

### Praca jako zmiana energii kinetycznej

Równanie (7.5) wiąże zmianę energii kinetycznej koralika (z wartości początkowej  $E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2}mv_0^2$  na końcową  $E_{k \text{ końc}} = \frac{1}{2}mv^2$ ) z pracą  $W$ , wykonaną nad koralikiem ( $= F_x d$ ). Dla ciał o właściwościach cząstek równanie to można uogólnić. Niech  $\Delta E_k$  będzie zmianą energii kinetycznej ciała, a  $W$  — całkowitą pracą, wykonaną nad tym ciałem. Mamy zatem związek:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W, \quad (7.10)$$

który oznacza, że:

$$\left( \begin{array}{c} \text{zmiana energii} \\ \text{kinetycznej cząstki} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{całkowita praca} \\ \text{wykonana nad cząstką} \end{array} \right).$$

Związek ten można również zapisać w postaci:

$$E_{k \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}} + W, \quad (7.11)$$

która oznacza, że:

$$\left( \begin{array}{c} \text{energia kinetyczna} \\ \text{po wykonaniu pracy} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{energia kinetyczna} \\ \text{przed wykonaniem pracy} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{całkowita praca} \\ \text{wykonana nad cząstką} \end{array} \right).$$

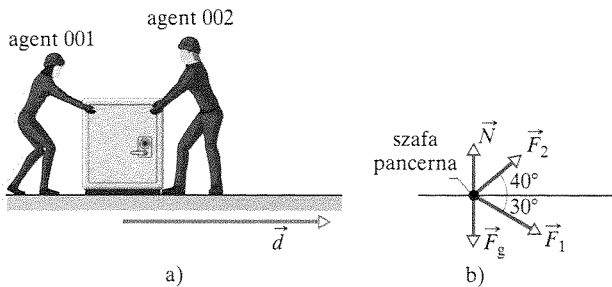
Stwierdzenia te są słuszne zarówno dla pracy dodatniej, jak i ujemnej. Jeśli całkowita praca wykonana nad cząstką jest dodatnia, to energia kinetyczna cząstki wzrasta o wartość tej pracy. Jeśli natomiast całkowita praca wykonana nad cząstką jest ujemna, to energia kinetyczna cząstki maleje o wartość tej pracy.

Jeśli na przykład energia kinetyczna cząstki wynosi początkowo 5 J, a w wyniku działania siły cząstka zyskuje 2 J (całkowita praca jest dodatnia), to końcowa energia kinetyczna cząstki wynosi 7 J. Jeśli natomiast w wyniku działania siły cząstka traci 2 J (całkowita praca jest ujemna), to końcowa energia kinetyczna cząstki wynosi 3 J.

**SPRAWDZIAN 1:** Cząstka porusza się wzdłuż osi  $x$ . Czy energia kinetyczna cząstki wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, gdy prędkość cząstki zmieni się: a) z  $-3$  m/s na  $-2$  m/s, b) z  $-2$  m/s na  $2$  m/s? c) Czy praca, wykonana nad cząstką, w każdym z tych przypadków jest dodatnia, ujemna, czy równa zero?

## Przykład 7.2

Na rysunku 7.4a przedstawiono dwóch szpiegów przemysłowych, przesuających szafę pancerną prosto do swej ciężarówki. Szafa ma masę 225 kg i była początkowo w spoczynku, a jej przemieszczenie  $d$  do ciężarówki ma wartość 8,5 m. Agent 001 pcha szafę siłą  $\vec{F}_1$  o wartości 12 N, skierowaną pod kątem  $30^\circ$  w dół od poziomu, a agent 002 ciągnie ją siłą  $\vec{F}_2$  o wartości 10 N, skierowaną pod kątem  $40^\circ$  w górę od poziomu. Szafa porusza się po podłodze bez tarcia, a wartości i kierunki sił, jakimi działają na nią obaj agenci nie zmieniają się podczas ruchu szafy.



Rys. 7.4. Przykład 7.2. a) Dwaj szpiegowie przesuują szafę pancerną, przemieszczając ją o wektor  $\vec{d}$ . b) Diagram sił działających na tę szafę

a) Jaką całkowitą pracę nad szafą wykonają siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  podczas jej przemieszczania o wektor  $\vec{d}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że:

1. Całkowita praca wykonana nad szafą przez dwie siły jest równa sumie prac wykonanych przez każdą z nich.

2. Szafę możemy potraktować jak cząstkę, a siły są stałe co do wartości i kierunku, dlatego też do obliczenia tych prac możemy zastosować wzór (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ) lub wzór (7.8) ( $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ). Wybieramy wzór (7.7), gdyż dane są wartości i kierunki sił. Praca wykonana przez siłę  $\vec{F}_1$  wynosi:

$$W_1 = F_1 d \cos \phi_1 = (12 \text{ N})(8,5 \text{ m})(\cos 30^\circ) = 88,33 \text{ J},$$

a praca wykonana przez siłę  $\vec{F}_2$  jest równa:

$$W_2 = F_2 d \cos \phi_2 = (10 \text{ N})(8,5 \text{ m})(\cos 40^\circ) = 65,11 \text{ J}.$$

Całkowita praca  $W$  wynosi zatem:

$$W = W_1 + W_2 = (88,33 \text{ J}) + (65,11 \text{ J}) = 153,4 \text{ J} \approx 153 \text{ J} \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc w trakcie przemieszczania szafy pancernej o 8,5 m szpiegowie zwiększyli jej energię kinetyczną o 153 J.

b) Wyznacz pracę  $W_g$  wykonaną nad szafą podczas jej przesuwania przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  oraz pracę  $W_N$ , wykonaną przez siłę normalną  $\vec{N}$ , działającą na szafę ze strony podłogi.

### ROZWIĄZANIE:

Obie te siły są stałe co do wartości i kierunku, więc pracę wykonaną przez nie można obliczyć ze wzoru (7.7). Wartość siły ciężkości wynosi  $mg$ , otrzymujemy więc:

$$W_g = mgd \cos 90^\circ = mgd(0) = 0 \quad (\text{odpowiedź})$$

i podobnie:

$$W_N = Nd \cos 90^\circ = Nd(0) = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

Takiego wyniku należało się spodziewać. Te dwie siły są prostopadłe do wektora przemieszczenia szafy, a więc wykonują nad nią zerową pracę, czyli nie dostarczają szafie ani nie odbierają od niej żadnej energii.

c) Szafa jest początkowo w spoczynku. Jaka jest wartość jej prędkości  $v_{\text{końc}}$  po przemieszczeniu jej o 8,5 m?

### ROZWIĄZANIE:

Prędkość szafy pancernej ulega zmianie, gdyż w wyniku przekazania jej energii przez siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  zmienia się jej energia kinetyczna. Aby otrzymać związek prędkości z pracą, zastosujemy równania (7.10) i (7.1), co daje:

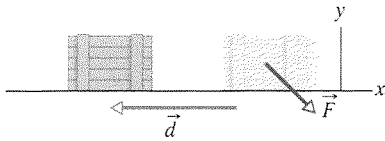
$$W = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2} m v_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{pocz}}^2$$

Prędkość początkowa  $v_{\text{pocz}}$  jest równa zero, a — jak już wiemy — wykonana została praca, równa 153,4 J. Wyznaczając z powyższego równania  $v_{\text{końc}}$  i podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy:

$$v_{\text{końc}} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153,4 \text{ J})}{(225 \text{ kg})}} = 1,17 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 7.3

Podczas burzy skrzynia ślizga się po gładkiej, pokrytej olejem powierzchni parkingu, doznając przemieszczenia  $\vec{d} = (-3 \text{ m})\hat{i}$ . Przez cały czas towarzyszący burzy wiatr działa na skrzynię siłą:  $\vec{F} = (2 \text{ N})\hat{i} + (-6 \text{ N})\hat{j}$ . Omawianą sytuację oraz układ współrzędnych przedstawiono na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Przykład 7.3. Stała siła  $\vec{F}$  spowalnia ruch skrzyni do przyciąjącej przemieszczenia  $\vec{d}$

a) Ile wynosi praca wykonana przez siłę wiatru nad skrzynią podczas jej przemieszczania?

### ROZWIĄZANIE:

Ruch skrzyni można opisać jako ruch cząstki, a siła wiatru jest w czasie ruchu skrzyni stała co do wartości i kierunku, dlatego też do obliczenia pracy możemy zastosować wzór (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ) lub wzór (7.8) ( $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ). Wybieramy wzór (7.8), gdyż wektory  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  zapisane są przy użyciu wektorów jednostkowych. Otrzymujemy:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = [(2 \text{ N})\hat{i} + (-6 \text{ N})\hat{j}] \cdot [(-3 \text{ m})\hat{i}]$$

Tylko następujące iloczyny skalarne wektorów jednostkowych są różne od zera:  $\hat{i} \cdot \hat{i}$ ,  $\hat{j} \cdot \hat{j}$  oraz  $\hat{k} \cdot \hat{k}$  (patrz dodatek E). Wobec tego mamy:

$$W = (2 \text{ N})(-3 \text{ m})\hat{i} \cdot \hat{i} + (-6 \text{ N})(-3 \text{ m})\hat{j} \cdot \hat{i} \\ = (-6 \text{ J})(1) + 0 = -6 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc siła wiatru wykonała nad skrzynią pracę ujemną o wartości 6 J, czyli zmniejszyła energię kinetyczną skrzyni o 6 J.

b) Ile wynosiła energia kinetyczna skrzyni po przemieszczeniu jej o  $\vec{d}$ , jeśli na początku ruchu była ona równa 10 J?

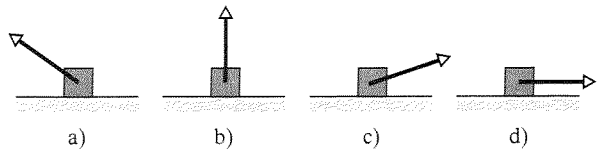
### ROZWIĄZANIE:

Siła wiatru wykonała nad skrzynią pracę ujemną, a zatem zmniejszyła jej energię kinetyczną. Korzystając ze związku pracy ze zmianą energii kinetycznej w postaci wzoru (7.11), mamy:

$$E_{k \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}} + W = (10 \text{ J}) + (-6 \text{ J}) = 4 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Energia kinetyczna skrzyni zmniejszyła się do wartości 4 J, a zatem ruch skrzyni został spowolniony.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono cztery przypadki, w których na pudełko ślizgające się bez tarcia po podłożu w prawą stronę na odległość  $d$  działają różne siły. Wartości tych sił są jednakowe, a ich kierunki pokazano na rysunku. Uszereguj te przypadki według pracy wykonanej nad pudełkiem podczas tego przemieszczenia, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).

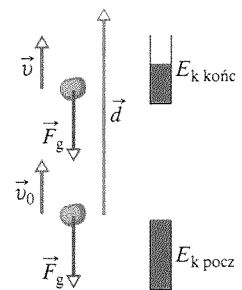


## 7.4. Praca wykonana przez siłę ciężkości

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy praca jest wykonana nad ciałem przez szczególny rodzaj siły, mianowicie przez działającą na nie siłę ciężkości. Na rysunku 7.6 przedstawiono pomidora o masie  $m$ , rzuconego w górę z prędkością początkową  $v_0$ , a więc mającego początkowo energię kinetyczną  $E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Gdy pomidor wznosi się, jego ruch jest spowalniany przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$ , tzn. jego energia kinetyczna maleje, gdyż siła ciężkości wykonuje nad nim pracę.

Załóżmy, że możemy potraktować pomidora jako cząstkę i do wyznaczenia pracy wykonanej podczas przemieszczenia  $\vec{d}$  skorzystajmy z równania (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ). W miejsce wartości siły  $F$  podstawiamy wartość siły  $\vec{F}_g$ , tzn.  $mg$ . Zatem praca  $W_g$  wykonana przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  wynosi:

$$W_g = mgd \cos \phi \quad (\text{praca wykonana przez siłę ciężkości}). \quad (7.12)$$



Rys. 7.6. Pomidor o masie  $m$ , rzucony w górę z prędkością początkową  $v_0$  zwalnia do prędkości  $v$ , doznając przemieszczenia  $d$ , ponieważ działa na niego siła ciężkości  $\vec{F}_g$ . Wskaźnik energii kinetycznej pokazuje zmianę energii kinetycznej ciała od wartości  $E_{k \text{ pocz}} (= \frac{1}{2}mv_0^2)$  do  $E_{k \text{ końc}} (= \frac{1}{2}mv^2)$

Gdy ciało się wznosi, siła  $\vec{F}_g$  jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia  $\vec{d}$  ciała, co widać na rysunku 7.6. Zatem w tym przypadku  $\phi = 180^\circ$  i:

$$W_g = mgd \cos 180^\circ = mgd(-1) = -mgd. \quad (7.13)$$

Znak minus oznacza, że podczas wznoszenia się ciała działająca na nie siła ciężkości zmniejsza jego energię kinetyczną o  $mgd$ . Jest to zgodne z obserwacją, gdyż w czasie ruchu w górę ciało zwalnia.

Po wzniesieniu się na największą wysokość ciało zaczyna spadać. Kąt między kierunkami  $\vec{F}_g$  i  $\vec{d}$  jest wówczas równy zero. Zatem:

$$W_g = mgd \cos 0^\circ = mgd(+1) = +mgd. \quad (7.14)$$

Znak plus oznacza, że teraz siła ciężkości zwiększa energię kinetyczną ciała o  $mgd$ . Jest to zgodne z obserwacją, gdyż podczas spadku ciało przyspiesza. (Jak przekonamy się w rozdziale 8, przekazanie energii przy wznoszeniu i spadku ciała w rzeczywistości nie dotyczy jedynie ciała, lecz układu ciało–Ziemia. Termin „wznoszenie się” ma oczywiście sens tylko wtedy, gdy rozważamy ruch względem Ziemi).

### Praca wykonana przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała

Załóżmy teraz, że podnosimy ciało, przykładając do niego pionowo siłę  $\vec{F}$ . Podczas przemieszczania ciała w górę siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę dodatnią  $W_{zewn}$ , a siła ciężkości wykonuje nad nim pracę ujemną  $W_g$ . Siła zewnętrzna zwiększa zatem energię kinetyczną ciała, a siła ciężkości ją zmniejsza. Zgodnie z równaniem (7.10), zmiana energii kinetycznej ciała, znajdującego się pod działaniem tych dwóch sił wynosi:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_{zewn} + W_g, \quad (7.15)$$

przy czym  $E_{k \text{ końc}}$  jest energią kinetyczną na końcu przemieszczenia ciała, a  $E_{k \text{ pocz}}$  — energią kinetyczną na początku. Równanie to jest słuszne także w przypadku opuszczania ciała, z tym, że wtedy siła ciężkości zwiększa energię kinetyczną ciała, a siła zewnętrzna ją zmniejsza.

Często spotykany przypadek szczególny to sytuacja, w której ciało spoczywa przed i po jego podniesieniu — na przykład, gdy podnosisz książkę z podłogi na półkę. Wtedy zarówno  $E_{k \text{ końc}}$ , jak i  $E_{k \text{ pocz}}$  wynoszą zero i równanie (7.15) upraszcza się do postaci:

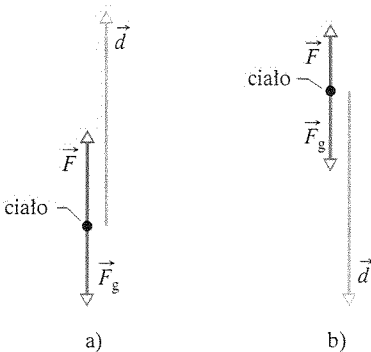
$$W_{zewn} + W_g = 0,$$

czyli

$$W_{zewn} = -W_g. \quad (7.16)$$

Zauważ, że taki sam wynik otrzymalibyśmy zakładając, iż wartości  $E_{k \text{ końc}}$  i  $E_{k \text{ pocz}}$  są różne od zera, lecz nadal równe sobie. W obydwu przypadkach praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej przez siłę ciężkości. Innymi słowy, siła zewnętrzna dostarcza ciału tyle energii, ile siła ciężkości od niego odbiera. Korzystając ze wzoru (7.12), możemy zapisać równanie (7.16) w postaci:

$$W_{zewn} = -mgd \cos \phi \quad (\text{praca przy podniesieniu i opuszczeniu; } E_{k \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}}) \quad (7.17)$$



Rys. 7.7. a) Podnosimy ciało działając siłą zewnętrzną  $\vec{F}$ . Przeszczenie  $\vec{d}$  ciała tworzy z działającą na ciało siłą ciężkości  $\vec{F}_g$  kąt  $\phi = 180^\circ$ . Siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę dodatnią. b) Opuszczamy ciało działając siłą zewnętrzną  $\vec{F}$ . Przeszczenie  $\vec{d}$  ciała tworzy z siłą ciężkości  $\vec{F}_g$  kąt  $\phi = 0^\circ$ . Siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę ujemną



przy czym  $\phi$  jest kątem między wektorami  $\vec{F}_g$  i  $\vec{d}$ . Jeśli przemieszczenie ciała jest skierowane pionowo w górę (rys. 7.7a), to  $\phi = 180^\circ$  i praca wykonana przez siłę zewnętrzną wynosi  $mgd$ . Jeśli natomiast przemieszczenie ciała jest skierowane pionowo w dół (rys. 7.7b), to  $\phi = 0^\circ$  i praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest równa  $-mgd$ .

Równania (7.16) i (7.17) opisują każdy przypadek podnoszenia lub opuszczania ciała, w którym ciało spoczywa przed i po zmianie wysokości. Nie występuje w nich wartość stosowanej siły. Na przykład, gdy Czemerkin podnosił rekordowy ciężar, siła przykładana przez niego do tego ciężaru znacznie się zmieniała w czasie ruchu ciała w górę. Niemniej jednak, ciężar pozostawał w spoczynku na początku i na końcu ruchu, zatem wykonana przez zawodnika praca jest dana wzorami (7.16) i (7.17), przy czym w ostatnim z nich  $mg$  jest ciężarem podnoszonego ciała, a  $d$  — wysokością, na jaką zostało ono podniesione.

## Przykład 7.4

W tym przykładzie powrócimy do wyczynów Andrieja Czemerkina i Paula Andersona.

a) Czemerkin ustanowił rekord w podnoszeniu ciężarów, podnosząc sztywno ze sobą połączone ciała (sztangę i walcowe obciążniki) o łącznej masie  $m = 260$  kg; podniósł je na wysokość 2 m. Jaką pracę wykonała nad tymi ciałami działająca na nie siła ciężkości podczas ich ruchu w górę?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Ciała, które są ze sobą sztywno połączone możemy traktować jako pojedynczą cząstkę i wyznaczyć pracę  $W_g$  wykonaną nad nimi przez  $\vec{F}_g$  ze wzoru (7.12) ( $W_g = mgd \cos \phi$ ). Całkowity ciężar  $mg$  był równy 2548 N, wartość przemieszczenia  $d$  wynosiła 2 m, a kąt  $\phi$  między kierunkami działającej w dół siły ciężkości i skierowanego w górę przemieszczenia był równy  $180^\circ$ . Wobec tego mamy:

$$W_g = mgd \cos \phi = (2548 \text{ N})(2 \text{ m})(\cos 180^\circ) = -5100 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaką pracę wykonała nad podnoszonymi ciałami, podczas ich ruchu w górę, siła przyłożona przez Czemerkina?

### ROZWIĄZANIE:

Nie znamy wyrażenia na siłę, jaką Czemerkin działał na sztangę, lecz nawet gdybyśmy ją znali, z pewnością nie byłaby ona stała.

➡ 1. Wobec tego nie możemy wyznaczyć pracy wykonanej przez Czemerkina, podstawiając po prostu do wzoru (7.7) jego

siłę. Wiemy jednak, że podnoszone ciało było w spoczynku na początku i na końcu ruchu.

➡ 2. Zatem praca  $W_{AC}$  wykonana przez Czemerkina była przeciwna do pracy  $W_g$ , wykonanej przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$ . Związek ten jest zawarty w równaniu (7.16), z którego otrzymujemy:

$$W_{AC} = -W_g = +5100 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaką pracę wykonywał nad sztangą Czemerkin, gdy trzymał ją nieruchomo nad głową?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Podtrzymywane przez Czemerkina ciała pozostawały w spoczynku. Wobec tego ich przemieszczenie  $d$  było równe zeru, a zatem — jak wynika z równania (7.7) — wykonywana nad nimi praca również była równa zeru (choć oczywiście trzymanie ich nad głową było dla Czemerkina bardzo męczące).

d) Jaką pracę wykonała siła, którą Paul Anderson działał na podnoszone przez siebie przedmioty o całkowitym ciężarze 27 900 N, podnosząc je na wysokość 1 cm?

### ROZWIĄZANIE:

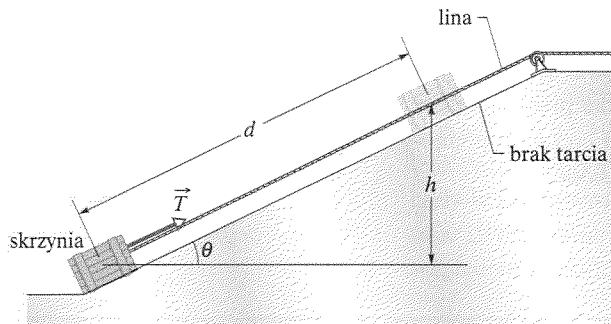
Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w punktach (a) i (b), dla  $mg = 27\,900$  N i  $d = 1$  cm otrzymujemy:

$$W_{PA} = -W_g = -mgd \cos \phi = -mgd \cos 180^\circ \\ = (-27\,900 \text{ N})(0.01 \text{ m})(-1) = 280 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

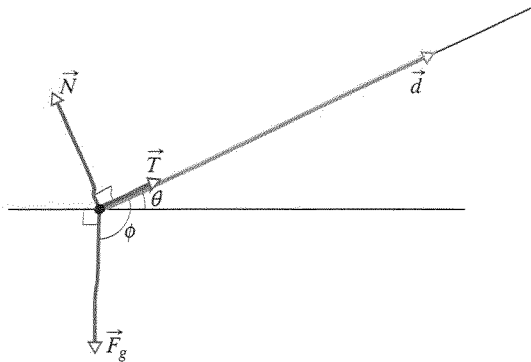
Wyczyn Andersona wymagał użycia olbrzymiej siły, skierowanej w górę, lecz towarzyszyło jej przekazanie niewielkiej energii — 280 J — gdyż przemieszczenie ciał było bardzo małe.

## Przykład 7.5

Skrzynia zawierająca kążki sera o masie 15 kg, pozostająca początkowo w spoczynku, została wciągnięta za pomocą liny po równi pochyłej, po której poruszała się bez tarcia na wysokość  $h$  równą 2,5 m, po czym zatrzymała się; przebyła przy tym drogę  $d = 5,7$  m (rys. 7.8a).



a)



b)

Rys. 7.8. Przykład 7.5. a) Skrzynia jest wciągana bez tarcia po równi pochyłej siłą  $\vec{T}$  równoległą do równi. b) Wektor przemieszczenia  $\vec{d}$  oraz diagram sił działających na skrzynię

a) Jaka praca  $W_g$  została wykonana nad skrzynią przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$ ?

ROZWIĄZANIE:

Możemy potraktować skrzynię jako cząstkę i do obliczenia pracy  $W_g$  wykonanej przez  $\vec{F}_g$  skorzystać z równania (7.12) ( $W_g = mgd \cos \phi$ ). Nie znamy jednak kąta  $\phi$  między kierunkami siły  $\vec{F}_g$  i przemieszczenia  $\vec{d}$ . Z diagramu sił, działających na skrzynię, przedstawionego na rysunku 7.8b widzimy, że  $\phi$  równa się  $\theta + 90^\circ$ , przy czym  $\theta$  jest kątem nachylenia równi (także nieznanym).

Z równania (7.12) otrzymujemy:

$$W_g = mgd \cos(\theta + 90^\circ) = -mgd \sin \theta, \quad (7.18)$$

przy czym w celu uproszczenia wyniku skorzystaliśmy ze wzoru redukcyjnego. Wyrażenie to nadal wygląda na nieużyteczne, gdyż nie znamy wartości  $\theta$ . Jak prawdziwi fizycy nie zrażamy się tym jednak i dostrzegamy na rysunku 7.8a, że  $d \sin \theta = h$ , a  $h$  jest wielkością znaną (2,5 m). Podstawienie tego związku do równania (7.18) daje:

$$\begin{aligned} W_g &= -mgh & (7.19) \\ &= -(15 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m}) \\ &= -368 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że z równania (7.19) wynika, iż praca  $W_g$ , wykonana przez siłę ciężkości, zależy od przemieszczenia ciała w pionie, lecz — co nas trochę zaskakuje — nie zależy od jego przemieszczenia w poziomie (wróćmy do tej sprawy w rozdziale 8).

b) Jaka praca  $W_T$  została wykonana nad skrzynią przez siłę  $\vec{T}$  działającą na skrzynię ze strony liny?

ROZWIĄZANIE:

Nie możemy po prostu podstawić wartości siły  $T$  w miejsce  $F$  we wzorze (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ), gdyż nie znamy wartości  $T$ . Ruszmy jednak z miejsca zauważając, że możemy potraktować skrzynię jako cząstkę i skorzystać z równości pracy i zmiany energii kinetycznej ( $\Delta E_k = W$ ). Skrzynia spoczywa na początku i na końcu ruchu, a więc zmiana jej energii kinetycznej  $\Delta E_k$  jest równa zero. Całkowita praca wykonana nad skrzynią jest równa sumie prac wykonanych przez wszystkie trzy działające na nią siły. Z punktu (a) wiemy, że praca  $W_g$ , wykonana przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  wynosi  $-368$  J. Praca  $W_N$  wykonana przez siłę normalną  $\vec{N}$  jest równa zero, ponieważ siła  $\vec{N}$  jest prostopadła do kierunku przemieszczenia skrzyni. Pracę  $W_T$  wykonaną przez siłę  $\vec{T}$  chcemy właśnie wyznaczyć. Równość pracy i zmiany energii kinetycznej daje:

$$\Delta E_k = W_T + W_g + W_N,$$

czyli

$$0 = W_T - 368 \text{ J} + 0,$$

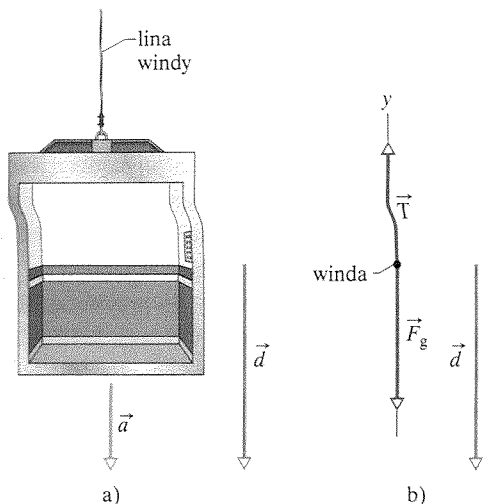
a zatem:

$$W_T = 368 \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 3:** Załóżmy, że do podniesienia skrzyni na tę samą wysokość  $h$  użyjemy dłuższej (czyli mniej stromej) równi. a) Czy praca, wykonana przez siłę  $\vec{T}$  będzie wówczas większa, mniejsza, czy taka sama, jak poprzednio? b) Czy wartość siły  $\vec{T}$ , potrzebnej do wciągnięcia skrzyni będzie większa, mniejsza, czy taka sama, jak poprzednio?

## Przykład 7.6

Winda o masie  $m = 500$  kg jedzie w dół z prędkością  $v_{\text{pocz}} = 4$  m/s, gdy nagle podtrzymująca ją lina zaczyna ześlizgiwać się z kabłąka, w wyniku czego winda zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem  $\vec{a} = \vec{g}/5$  (rys. 7.9a).



rys. 7.9. Przykład 7.6. Winda jadąca w dół z prędkością  $v_{\text{pocz}}$  zaczyna nagle przyspieszać. a) Poruszając się ze stałym przyspieszeniem  $\vec{a} = \vec{g}/5$  doznaje ona przemieszczenia  $\vec{d}$ . b) Wektor przemieszczenia windy oraz diagram działających na nią sił

a) Jaka praca  $W_g$  została wykonana nad windą przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  podczas spadku windy na drodze  $d = 12$  m?

ROZWIĄZANIE:

Możemy potraktować windę jako cząstkę i do obliczenia pracy  $W_g$  wykonanej nad nią przez siłę  $\vec{F}_g$  zastosować równanie (7.12) ( $W_g = mgd \cos \phi$ ). Jak pokazano na rysunku 7.9b (ilustrujemy przemieszczenie windy oraz diagram działających na nią sił), kąt między kierunkami siły  $\vec{F}_g$  i przemieszczenia  $\vec{d}$  windy wynosi  $0^\circ$ . Z równania (7.12) otrzymujemy zatem:

$$W_g = mgd \cos 0^\circ = (500 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})(1) = 5,88 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 59 \text{ kJ.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi praca  $W_T$  wykonana nad windą podczas jej spadku na drodze 12 m, przez siłę  $\vec{T}$ , jaką lina windy ciągnie windę w górę?

ROZWIĄZANIE:

1. Pracę  $W_T$  wyznaczymy ze wzoru (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ), ile uda nam się przedtem znaleźć wyrażenie na wartość  $T$  siły, jaką lina ciągnie windę.

2. Wyrażenie to możemy otrzymać z drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisanej dla składowych wzdłuż osi  $y$  z rysunku 7.9b ( $F_{\text{wyp},y} = ma_y$ ). Dostajemy:

$$T - F_g = ma.$$

Wyznaczając z tego równania  $T$ , podstawiając  $mg$  w miejsce  $F_g$  i wstawiając wynik do równania (7.7), otrzymujemy:

$$W_T = Td \cos \phi = m(a + g)d \cos \phi.$$

Następnie w miejsce  $a$  podstawiamy  $-g/5$  (przyspieszenie jest skierowane w dół), a w miejsce  $\phi$  — kąta między kierunkami sił  $\vec{T}$  i  $m\vec{g}$  —  $180^\circ$ . Daje to:

$$\begin{aligned} W_T &= m \left( -\frac{g}{5} + g \right) d \cos \phi = \frac{4}{5} mgd \cos \phi \\ &= \frac{4}{5} (500 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m}) \cos 180^\circ \\ &= -4,7 \cdot 10^4 \text{ J} \approx -47 \text{ kJ.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Zauważ, że wartość  $W_T$  nie jest tak po prostu przeciwna do wartości  $W_g$ , którą otrzymaliśmy w punkcie (a). Dzieje się tak dlatego, że winda spada ruchem przyspieszonym, a zatem zmienia się jej prędkość, czyli jej energia kinetyczna też ulega zmianie. Równanie (7.16) odnoszące się do przypadku, gdy wartość energii kinetycznej na początku i na końcu ruchu jest taka sama, *nie ma* więc tutaj zastosowania.

c) Ile wynosi całkowita praca wykonana nad windą podczas jej spadku?

ROZWIĄZANIE:

Praca całkowita jest sumą prac wykonanych przez wszystkie siły działające na windę, czyli:

$$\begin{aligned} W &= W_g + W_T = (5,88 \cdot 10^4 \text{ J}) - (4,70 \cdot 10^4 \text{ J}) \\ &= 1,18 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 12 \text{ kJ.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

d) Ile wynosi energia kinetyczna windy pod koniec jej spadku z wysokości 12 m?

ROZWIĄZANIE:

Energia kinetyczna windy zmienia się *dlatego*, że sumarycznie nad windą wykonywana jest praca, co wynika z równania (7.11) ( $E_{k \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}} + W$ ). Energia kinetyczna windy na początku spadku wynosi — na podstawie równania (7.1) —  $E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2} m v_{\text{pocz}}^2$ . Równanie (7.11) daje zatem:

$$\begin{aligned} E_{k \text{ końc}} &= E_{k \text{ pocz}} + W = \frac{1}{2} m v_{\text{pocz}}^2 + W \\ &= \frac{1}{2} (500 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + (1,18 \cdot 10^4 \text{ J}) \\ &= 1,58 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 16 \text{ kJ.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

## 7.5. Praca wykonana przez siłę sprężystości

W tym paragrafie zajmiemy się pracą wykonaną nad ciałem o właściwościach cząstki, przez pewną szczególną *siłę zmienną*, mianowicie przez **siłę sprężystości**, jaką działa na ciało sprężyna. Wiele sił występujących w przyrodzie można opisać matematycznie tak samo, jak siłę sprężystości. Wobec tego analiza tej jednej siły umożliwi nam zrozumienie właściwości wielu innych.

### Siła sprężystości

Na rysunku 7.10a przedstawiono sprężynę w *stanie nieodkształconym*, co oznacza, że nie jest ona ani ściśnięta, ani rozciągnięta. Jeden jej koniec jest zamocowany, a do drugiego, swobodnego końca przymocowane jest ciało o właściwościach cząstki, powiedzmy klocek. Jeśli rozciągniemy sprężynę, pociągając klocek w prawo, jak na rysunku 7.10b, to sprężyna będzie działać na klocek siłą, skierowaną w lewo (ponieważ siła sprężystości dąży do przywrócenia stanu nieodkształconego sprężyny, nazywa się ją czasem *siłą zwrotną*). Jeśli ściśniemy sprężynę, pchając klocek w lewo, jak na rysunku 7.10c, to sprężyna będzie działać na klocek siłą skierowaną w prawo.

Dla wielu sprężyn można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że siła  $\vec{F}$ , jaką działa sprężyna jest proporcjonalna do przemieszczenia  $\vec{d}$  swobodnego końca sprężyny, od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej. *Siła sprężystości jest zatem dana zależnością:*

$$\vec{F} = -k\vec{d} \quad (\text{prawo Hooke'a}), \quad (7.20)$$

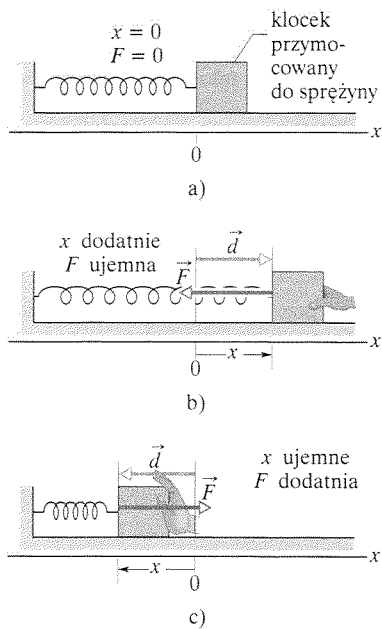
znaną jako **prawo Hooke'a**, biorące swoją nazwę od nazwiska Roberta Hooke'a, uczonego angielskiego z końca XVII wieku. Znak minus w równaniu (7.20) wskazuje na to, że siła sprężystości jest zawsze skierowana przeciwnie do przemieszczenia swobodnego końca sprężyny. Stała  $k$ , nazywana **stałą sprężystości** (lub **stałą siłową**), jest miarą sztywności sprężyny. Im większa jest wartość  $k$ , tym sprężyna jest sztywniejsza, tzn. tym większą działa siłą przy takim samym przemieszczeniu jej końca. Jednostką stałej sprężystości  $k$  w układzie SI jest niuton na metr.

Na rysunku 7.10 wybrano oś  $x$  równoległą do długości sprężyny, a jako jej początek ( $x = 0$ ) przyjęto położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej. W takiej standardowej sytuacji równanie (7.20) przybiera postać:

$$F = -kx \quad (\text{prawo Hooke'a}), \quad (7.21)$$

Jeśli współrzędna  $x$  jest dodatnia (tzn. sprężyna jest rozciągnięta wzdłuż osi  $x$  w prawo), to  $F$  jest ujemna (tzn. siła sprężystości działa w lewo). Jeśli natomiast współrzędna  $x$  jest ujemna (tzn. sprężyna jest ściśnięta w lewo), to  $F$  jest dodatnia (tzn. siła sprężystości działa w prawo).

Zauważ, że siła sprężystości jest *siłą zmienną*, gdyż jej wielkość i kierunek zależą od położenia  $x$  swobodnego końca sprężyny;  $F$  powinniśmy właściwie zapisać jako  $F(x)$ . Zwróć także uwagę na to, że prawo Hooke'a daje zależność *liniową*  $F$  od  $x$ .



Rys. 7.10. a) Sprężyna nieodkształcona. Jako początek osi  $x$  wybieramy położenie tego końca sprężyny, do którego przymocowany jest klocek. b) Przemieszczamy klocek o  $d$ , przy czym sprężyna zostaje rozciągnięta o  $x$  (dodatnie). Zwróć uwagę na siłę zwrotną  $\vec{F}$ , jaką sprężyna działa na klocek. c) Sprężyna zostaje ściśnięta o  $x$  (ujemne). Zwróć uwagę na siłę zwrotną

## Praca wykonana przez siłę sprężystości

Aby znaleźć wyrażenie na pracę wykonaną przez siłę sprężystości podczas ruchu klocka z rysunku 7.10a, poczynimy dwa założenia upraszczające, dotyczące sprężyny. 1) Założymy, że sprężyna ma znikomą małą masę w stosunku do masy klocka. 2) Przyjmijemy, że jest to *sprężyna doskonała*, to znaczy prawo Hooke'a jest dla niej spełnione dokładnie. Założymy ponadto, że klocek porusza się po podłożu bez tarcia a ponadto, że może on być traktowany jak cząstka.

Pchnijmy gwałtownie klocek w prawo, aby wprawić go w ruch i usuńmy działającą na niego siłę zewnętrzną. Gdy klocek porusza się w prawo, siła sprężystości  $\vec{F}$  wykonuje nad nim pracę i zmniejsza jego energię kinetyczną, a więc spowalnia jego ruch. Do obliczenia tej pracy *nie możemy* jednak zastosować równania (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ), ponieważ jest ono spełnione tylko dla siły stałej, a siła sprężystości jest siłą zmienną.

Do wyznaczenia pracy, wykonanej przez sprężynę musimy użyć rachunku całkowego. Oznaczmy położenie początkowe klocka przez  $x_{\text{pocz}}$ , a jego położenie końcowe przez  $x_{\text{końc}}$ . Podzielmy teraz odcinek między tymi położeniami na wiele małych odcinków, każdy o długości  $\Delta x$ . Oznaczmy te odcinki, licząc od  $x_{\text{pocz}}$ , jako odcinek 1, 2, itd. Gdy klocek przebywa taki mały odcinek, siła sprężystości jest prawie stała, gdyż odcinek jest tak krótki, że  $x$  prawie się nie zmienia. Możemy więc przyjąć w przybliżeniu, że wartość siły jest stała na takim małym odcinku. Oznaczmy te wartości jako  $F_1$  na odcinku 1,  $F_2$  na odcinku 2, itd.

Na każdym małym odcinku siła jest stała, dlatego też na każdym z nich możemy obliczyć pracę ze wzoru (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ). W rozważanym przypadku  $\phi = 0$ , a zatem  $\cos \phi = 1$ . Tak więc praca wykonana na odcinku 1, jest równa  $F_1 \Delta x$ , na odcinku 2 —  $F_2 \Delta x$ , itd. Całkowita praca  $W_s$  wykonana przez sprężynę na odcinku od  $x_{\text{pocz}}$  do  $x_{\text{końc}}$  jest sumą tych prac:

$$W_s = \sum F_j \Delta x, \quad (7.22)$$

przy czym wskaźnik  $j$  numeruje małe odcinki. W granicy, przy  $\Delta x$  dążącym do zera, równanie (7.22) przechodzi w:

$$W_s = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F dx. \quad (7.23)$$

Podstawiając do tego równania wyrażenie na  $F$  ze wzoru (7.21), otrzymujemy:

$$W_s = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} (-kx) dx = -k \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} x dx = \left(-\frac{1}{2}k\right) [x^2]_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} = \left(-\frac{1}{2}k\right) (x_{\text{końc}}^2 - x_{\text{pocz}}^2). \quad (7.24)$$

Po wykonaniu mnożenia dostajemy:

$$W_s = \frac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2 \quad (\text{praca wykonana przez siłę sprężystości}). \quad (7.25)$$

Praca  $W_s$ , wykonana przez siłę sprężystości może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, czy przy ruchu klocka z  $x_{\text{pocz}}$  do  $x_{\text{końc}}$  energia zostaje *sumarycznie* przekazana klockowi, czy też od niego odebrana. *Uwaga:* położenie końcowe

$x_{\text{końc}}$  występuje w *drugim* wyrażeniu po prawej stronie równania (7.25). Wniosek z tego jest następujący:

- Praca  $W_s$  jest dodatnia, gdy położenie końcowe klocka jest bliższe końca sprężyny nieodkształconej ( $x = 0$ ) niż jego położenie początkowe. Gdy położenie końcowe klocka jest dalsze punktu  $x = 0$ , to jest ona ujemna. Praca ta jest równa zeru, gdy położenia końcowe i początkowe klocka są jednakowo odległe od punktu  $x = 0$ .

Jeśli  $x_{\text{pocz}} = 0$ , a położenie końcowe oznaczymy przez  $x$ , to równanie (7.25) przybiera postać:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{praca wykonana przez siłę sprężystości}). \quad (7.26)$$

### Praca wykonana przez siłę zewnętrzną

Załóżmy obecnie, że przemieszczamy klocek wzdłuż osi  $x$ , działając na niego przez cały czas siłą  $\vec{F}_{\text{zewn}}$ . Podczas ruchu klocka siła ta wykonuje nad klockiem pracę  $W_{\text{zewn}}$ , a siła sprężystości — pracę  $W_s$ . Zgodnie z równaniem (7.10) zmiana energii kinetycznej klocka pochodząca od tych dwóch prac wynosi:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_{\text{zewn}} + W_s, \quad (7.27)$$

przy czym  $E_{k \text{ końc}}$  jest energią kinetyczną na końcu przemieszczenia klocka, a  $E_{k \text{ pocz}}$  — na jego początku. Jeśli na początku i na końcu przemieszczenia zarówno  $E_{k \text{ końc}}$ , jak i  $E_{k \text{ pocz}}$  są równe zeru, to równanie (7.27) upraszcza się do postaci:

$$W_{\text{zewn}} = -W_s. \quad (7.28)$$

- Jeśli klocek przymocowany do sprężyny jest w spoczynku na początku i na końcu przemieszczenia, to praca wykonana nad klockiem podczas jego ruchu przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy, wykonanej nad nim przez siłę sprężystości.

*Uwaga:* Jeśli klocek nie spoczywa na początku lub na końcu przemieszczenia, to stwierdzenie powyższe *nie jest* prawdziwe.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** W trzech przypadkach położenia początkowe i końcowe klocka z rysunku 7.10 wzdłuż osi  $x$ , wynoszą: a)  $-3$  cm i  $2$  cm, b)  $2$  cm i  $3$  cm, c)  $-2$  cm i  $2$  cm. Czy w poszczególnych przypadkach praca wykonana nad klockiem przez siłę sprężystości jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru?

### Przykład 7.7

Paczka aromatycznych czekoladek leży na podłożu, po którym może się poruszać bez tarcia i jest przymocowana do swobodnego końca sprężyny, jak na rysunku 7.10a. Aby utrzymać tę paczkę w spoczynku w punkcie  $x_1 = 12$  mm, trzeba na nią działać siłą zewnętrzną o wartości  $F_{\text{zewn}} = 4,9$  N.

a) Jaką pracę wykona nad paczką siła sprężystości, jeśli przesu niemy paczkę w prawo, z punktu  $x_0 = 0$  do punktu  $x_2 = 17$  mm?

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Paczka przemieszcza się z jednego miejsca na drugie, więc siła sprężystości wykonuje nad tą paczką pracę, daną wzorem (7.25) lub (7.26). Wiemy, że położenie początkowe paczki  $x_{\text{pocz}}$  jest równe zeru, a położenie końcowe  $x_{\text{końc}}$  wynosi  $17$  mm. **nie** znamy jednak stałej sprężystości  $k$ .

Aby wyznaczyć  $k$  z równania (7.21) (tzn. z prawa Hooke'a), musimy zastosować następujące stwierdzenie.

➡ 2. Skoro paczka pozostaje w spoczynku w punkcie o współrzędnej  $x_1 = 12$  mm, to siła sprężystości jest wtedy równoważona przez siłę zewnętrzną (zgodnie z drugą zasadą dynamiki). Zatem siła sprężystości  $F$  jest wtedy równa  $-4.9$  N (tzn. jest skierowana w lewo na rysunku 7.10b), wobec czego z równania (7.21)  $F = -kx$  wynika, że:

$$k = -\frac{F}{x_1} = -\frac{(-4.9 \text{ N})}{(12 \cdot 10^{-3} \text{ m})} = 408 \text{ N/m.}$$

Dla paczki znajdującej się w punkcie  $x_2 = 17$  mm z równania (7.26) otrzymujemy:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx_2^2 = -\frac{1}{2}(408 \text{ N/m})(17 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = -0.059 \text{ J.}$$

(odpowiedź)

b) Paczkę przemieszczamy następnie w lewo, do punktu  $x_3 = -12$  mm. Jaką pracę wykonuje przy tym nad paczką siła sprężystości? Wyjaśnij znaczenie znaku tej pracy.

ROZWIĄZANIE:

➡ Skorzystamy z tego samego stwierdzenia, co na początku punktu (a). Obecnie mamy  $x_{\text{pocz}} = +17$  mm i  $x_{\text{końc}} = -12$  mm, a zatem z równania (7.25) wynika, że:

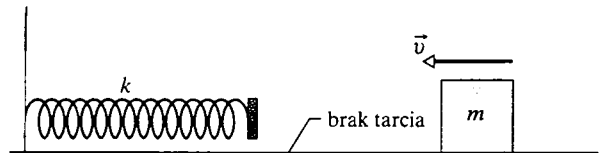
$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2 = \frac{1}{2}k(x_{\text{pocz}}^2 - x_{\text{końc}}^2) \\ &= \frac{1}{2}(408 \text{ N/m})[(17 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 - (-12 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2] \\ &= 0.03 \text{ J} = 30 \text{ mJ.} \end{aligned}$$

(odpowiedź)

Praca wykonana nad paczką przez siłę sprężystości jest dodatnia, ponieważ praca dodatnia, wykonana przy ruchu paczki z punktu  $x_{\text{pocz}} = +17$  mm do punktu  $x = 0$  (odpowiadającego sprężynie nieodkształconej) jest większa (co do wartości bezwzględnej) od pracy ujemnej, wykonanej przez tę siłę przy ruchu paczki z  $x = 0$  do  $x_{\text{końc}} = -12$  mm.

## Przykład 7.8

Na rysunku 7.11 przedstawiono puszkę kminku o masie  $0.4$  kg, ślizgającą się bez tarcia po poziomej ładzie z prędkością  $v = 0.5$  m/s. W pewnej chwili wpada ona na swobodny koniec sprężyny o stałej sprężystości  $k = 750$  N/m, w wyniku czego sprężyna jest ściskana. O jaki odcinek  $d$  będzie skrócona sprężyna w chwili, gdy puszka zwolni do prędkości równej zero?



Rys. 7.11. Przykład 7.8. Puszka o masie  $m$  porusza się z prędkością  $\vec{v}$  w kierunku sprężyny o stałej sprężystości  $k$

ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z trzech spostrzeżeń:

➡ 1. Praca  $W_s$  wykonana nad puszką przez siłę sprężystości jest związana z szukaną odległością  $d$  równaniem (7.26) ( $W_s = -\frac{1}{2}kx^2$ ), w którym w miejsce  $x$  trzeba podstawić  $d$ .

➡ 2. Z drugiej strony, praca  $W_k$  jest związana z energią kinetyczną puszki równaniem (7.10) ( $E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W$ ).

➡ 3. Energia kinetyczna puszki jest równa początkowo  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , a w chwili, gdy puszka ma prędkość równą zero, wynosi ona zero.

Łącząc ze sobą dwa pierwsze stwierdzenia, otrzymujemy dla puszki związek zmiany energii kinetycznej z pracą:

$$E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = -\frac{1}{2}kd^2.$$

Korzystając z trzeciego stwierdzenia, zapisujemy powyższe równanie w postaci:

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kd^2.$$

Upraszczając to równanie, wyznaczając z niego  $d$  i podstawiając wartości liczbowe danych, otrzymujemy ostatecznie:

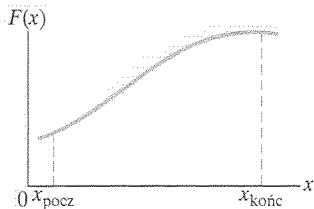
$$\begin{aligned} d &= v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0.5 \text{ m/s})\sqrt{\frac{(0.4 \text{ kg})}{(750 \text{ N/m})}} \\ &= 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1.2 \text{ cm.} \end{aligned}$$

(odpowiedź)

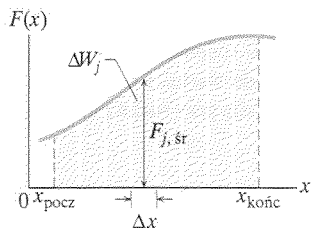
## 7.6. Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną

### Analiza w jednym wymiarze

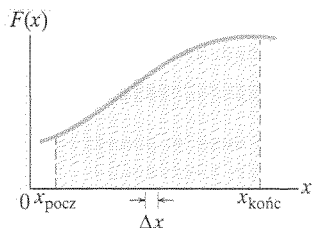
Powróćmy do sytuacji z rysunku 7.2, lecz rozważmy teraz siłę skierowaną wzdłuż osi  $x$ , której wartość zmienia się wraz ze zmianą położenia  $x$ . Zatem w trakcie ruchu koralika (cząstki), przy przechodzeniu od punktu do punktu zmienia się wartość siły wykonującej pracę. Zmienia się jednak tylko wartość, a nie kierunek tej siły. Wartość siły w każdym punkcie jest stała w czasie.



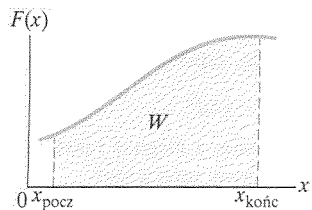
a)



b)



c)



d)

Rys. 7.12. a) Wykres siły jednowymiarowej  $\vec{F}$ , jako funkcji położenia  $x$  cząstki, na którą działa ta siła. Cząstka porusza się z punktu  $x_{\text{pocz}}$  do punktu  $x_{\text{końc}}$ . b) Wykres jak na rysunku a, lecz z obszarem pod krzywą podzielonym na wąskie paski. c) Wykres, jak na rysunku b, lecz z podziałem obszaru pod krzywą na jeszcze węższe paski. d) Przypadek graniczny. Praca, wykonana przez siłę jest dana równaniem (7.32) i jest równa polu powierzchni zacięniowanego obszaru pod krzywą między punktami  $x_{\text{pocz}}$  i  $x_{\text{końc}}$

Na rysunku 7.12a przedstawiono wykres  $F(x)$  dla takiej jednowymiarowej siły zmiennej. Chcemy znaleźć wyrażenie na pracę, wykonaną przez tę siłę, w czasie ruchu cząstki z punktu początkowego  $x_{\text{pocz}}$  do punktu końcowego  $x_{\text{końc}}$ . Nie możemy jednak skorzystać ze wzoru (7.7), gdyż jest on słuszny tylko dla stałej siły  $\vec{F}$ . Zastosujemy więc znów rachunek całkowy. Podzielmy obszar pod krzywą z rysunku 7.12a na wiele wąskich pasków o szerokości  $\Delta x$  (rys. 7.12b). Wybierzmy wartość  $\Delta x$  tak małą, żeby z dobrym przybliżeniem można było przyjąć, że siła  $F(x)$  jest w tym przedziale stała. Wartość średnią  $F(x)$  w  $j$ -ym takim przedziale oznaczmy przez  $F_{j, \text{sr}}$ . Jest ona równa wysokości  $j$ -ego paska na rysunku 7.12b.

Wartość  $F_{j, \text{sr}}$  uważamy za stałą, dlatego też praca  $\Delta W_j$  wykonana przez siłę w  $j$ -ym przedziale (przyczynek do pracy całkowitej pochodzący od tego przedziału) jest dana w przybliżeniu wzorem (7.7) i jest równa:

$$\Delta W_j = F_{j, \text{sr}} \Delta x. \quad (7.29)$$

Wartość  $\Delta W_j$  jest równa polu  $j$ -ego zacięniowanego prostokąta na rysunku 7.12b.

Aby obliczyć przybliżoną wartość całkowitej pracy  $W$  wykonanej przez siłę nad cząstką podczas jej ruchu z  $x_{\text{pocz}}$  do  $x_{\text{końc}}$ , dodajemy pola powierzchni wszystkich pasków z rysunku 7.12b między  $x_{\text{pocz}}$  a  $x_{\text{końc}}$ . Daje to:

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j, \text{sr}} \Delta x. \quad (7.30)$$

Równanie (7.30) jest przybliżone, gdyż „schodki” tworzone przez górne boki prostokątnych pasków z rysunku 7.12b są jedynie przybliżeniem rzeczywistej krzywej  $F(x)$ .

Przybliżenie to jest tym lepsze, im mniejsza jest szerokość pasków  $\Delta x$ , a więc im pasków jest więcej (rysunek 7.12c). W granicy, dla szerokości pasków dążącej do zera, a zatem dla liczby pasków dążącej do nieskończoności otrzymujemy wynik ścisły:

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F_{j, \text{sr}} \Delta x. \quad (7.31)$$

Granica po prawej stronie tego równania jest niczym innym, jak całką oznaczoną funkcji  $F(x)$  w granicach od  $x_{\text{pocz}}$  do  $x_{\text{końc}}$ . Równanie (7.31) możemy zatem zapisać w postaci:

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx \quad (\text{praca wykonana przez siłę zmienną}). \quad (7.32)$$

Jeśli znamy funkcję  $F(x)$ , to możemy podstawić ją do równania (7.32), wybrać właściwe granice całkowania, obliczyć całkę i znaleźć w ten sposób wartość pracy (wartości najczęściej spotykanych całek podane są w dodatku E). W obrazie geometrycznym praca jest równa polu powierzchni obszaru między krzywą  $F(x)$  a osią  $x$ , w zakresie od  $x_{\text{pocz}}$  do  $x_{\text{końc}}$  (czyli obszaru zacięniowanego na rysunku 7.12d).

## Analiza w trzech wymiarach

Rozważmy obecnie cząstkę, na którą działa siła trójwymiarowa:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}, \quad (7.33)$$



czy składowe  $F_x$ ,  $F_y$  i  $F_z$  mogą zależeć od położenia cząstki, tzn. mogą być funkcjami tego położenia. Poczynimy jednak trzy założenia upraszczające:  $F_x$  może zależeć od  $x$ , ale nie od  $y$  ani  $z$ ;  $F_y$  może zależeć od  $y$ , ale nie od  $x$  ani  $z$ ;  $F_z$  może zależeć od  $z$ , ale nie od  $x$  ani  $y$ . Wyobraź sobie teraz, że cząstka wykonuje niewielkiego przemieszczenia:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}. \quad (7.34)$$

Praca  $dW$  wykonana przez siłę  $\vec{F}$  nad cząstką podczas jej przemieszczenia o  $d\vec{r}$  wynosi zgodnie z równaniem (7.8):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7.35)$$

Praca  $W$  wykonana przez siłę  $\vec{F}$  podczas ruchu cząstki z punktu początkowego o współrzędnych  $(x_{\text{pocz}}, y_{\text{pocz}}, z_{\text{pocz}})$ , do punktu końcowego  $r_{\text{końc}}$  o współrzędnych  $(x_{\text{końc}}, y_{\text{końc}}, z_{\text{końc}})$  jest zatem równa:

$$W = \int_{r_{\text{pocz}}}^{r_{\text{końc}}} dW = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F_x dx + \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} F_y dy + \int_{z_{\text{pocz}}}^{z_{\text{końc}}} F_z dz. \quad (7.36)$$

Jeśli siła  $\vec{F}$  ma tylko składową  $x$ , wyrazy z  $y$  i  $z$  w równaniu (7.36) są równe zero i równanie to sprowadza się do równania (7.32).

### Praca jako zmiana energii kinetycznej: siła zmienna

Równanie (7.32) daje pracę wykonaną nad cząstką przez siłę zmienną w przypadku jednowymiarowym. Sprawdźmy, czy praca wyznaczona z równania (7.32) jest istotnie równa zmianie energii kinetycznej cząstki, jak być powinno.

Rozważmy cząstkę o masie  $m$ , poruszającą się wzdłuż osi  $x$ . Niech na tę cząstkę działa siła wypadkowa  $F(x)$ , skierowana wzdłuż tej osi. Praca wykonana przez tę siłę, nad cząstką przemieszczającą się z punktu początkowego  $x_{\text{pocz}}$  do punktu końcowego  $x_{\text{końc}}$  jest dana równaniem (7.32) jako:

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} madx, \quad (7.37)$$

przy czym skorzystaliśmy z drugiej zasady dynamiki, aby w miejsce  $F(x)$  podstawić  $ma$ . Wielkość  $madx$  występującą w równaniu (7.37) możemy zapisać w następujący sposób:

$$madx = m \frac{dv}{dt} dx. \quad (7.38)$$

Korzystając z właściwości różniczek i pochodnych, wykonujemy przekształcenia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v, \quad (7.39)$$

które umożliwiają zapisanie równania (7.38) w postaci:

$$madx = m \frac{dv}{dx} v dx = mv dv. \quad (7.40)$$

Podstawienie tego wyrażenia do równania (7.37) daje:

$$W = \int_{v_{\text{pocz}}}^{v_{\text{końc}}} m v dv = m \int_{v_{\text{pocz}}}^{v_{\text{końc}}} v dv = \frac{1}{2} m v_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{pocz}}^2. \quad (7.41)$$

Zauważ, że zamiana zmiennych z  $x$  na  $v$  pociąga za sobą konieczność zmiany granic całkowania na odpowiednie wartości nowej zmiennej. Zauważ też, że masę  $m$  mogliśmy wyciągnąć przed znak całki, gdyż jest ona stała.

W wyrażeniach po prawej stronie równania (7.41) rozpoznajemy wyrażenia na energię kinetyczną, co umożliwi zapisanie tego równania w postaci:

$$W = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \Delta E_k,$$

przedstawiającej równość pracy i zmiany energii kinetycznej.

### Przykład 7.9

Na cząstkę działa siła:  $\vec{F} = (3x^2 \text{ N})\hat{i} + (4 \text{ N})\hat{j}$ , gdzie  $x$  jest wyrażone w metrach, w wyniku czego zmienia się jedynie energia kinetyczna cząstki. Jaką pracę wykonuje ta siła nad cząstką, gdy cząstka przemieszcza się z punktu o współrzędnych (2 m, 3 m) do punktu o współrzędnych (3 m, 0 m)? Czy wartość prędkości cząstki rośnie przy tym, maleje, czy pozostaje bez zmiany?

#### ROZWIĄZANIE:

☛ Siła, występująca w zadaniu jest zmienna, gdyż jej składowa  $x$  zależy od wartości  $x$ . Do wyznaczenia pracy nie możemy

zatem zastosować wzorów (7.7) i (7.8). Musimy więc skorzystać z równania (7.36) i scałkować siłę:

$$\begin{aligned} W &= \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^0 4 dy = 3 \int_2^3 x^2 dx + 4 \int_3^0 dy = 3 \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_2^3 + 4 [y]_3^0 \\ &= [3^3 - 2^3] + 4[0 - 3] = 7 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana praca jest dodatnia, co oznacza, że w wyniku działania siły  $\vec{F}$  cząstka zyskała energię. Wobec tego wzrosła energia kinetyczna cząstki, a zatem i wartość jej prędkości.

## 7.7. Moc

Przedsiębiorca budowlany chce przetransportować ładunek cegieł z chodnika na szczyt budynku za pomocą kołowrotu. Umiesz już obliczyć pracę, jaką musi wykonać w tym celu nad ładunkiem siła przyłożona do liny kołowrotu. Przedsiębiorcę interesuje jednak przede wszystkim to, *jak szybko* można tę pracę wykonać: czy zajmie to 5 minut (co jest dla niego do przyjęcia), czy tydzień (co absolutnie nie jest do przyjęcia).

Szybkość, z jaką siła wykonuje pracę, czyli pracę wykonywaną w jednostce czasu nazywamy **mocą**. Jeśli siła wykonuje pracę  $W$  w przedziale czasu  $\Delta t$ , to **moc średnia** w tym przedziale czasu wynosi:

$$P_{\text{sr}} = \frac{W}{\Delta t} \quad (\text{moc średnia}). \quad (7.42)$$

**Moc chwilowa**  $P$  jest to szybkość wykonywania pracy w danej chwili. Można ją zapisać jako:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (\text{moc chwilowa}). \quad (7.43)$$

Załóżmy, że znamy pracę  $W(t)$  wykonywaną przez pewną siłę, jako funkcję czasu. Jeśli chcemy wyznaczyć moc chwilową  $P$  w chwili — powiedzmy —  $t = 3$  s w czasie działania tej siły, to najpierw znajdujemy pochodną funkcji  $W(t)$  względem czasu, a następnie obliczamy jej wartość dla  $t = 3$  s.

Jednostką mocy w układzie SI jest dżul na sekundę. Jednostka ta jest tak często używana, że nadano jej własną nazwę: wat (W), od nazwiska Jamesa Watta, którego wynalazki przyczyniły się do zwiększenia szybkości, z jaką mogą wykonywać pracę silniki parowe. Czasem używa się także jednostki o nazwie kon mechaniczny (KM). Oto związki między tymi jednostkami:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} \quad (7.44)$$

$$1 \text{ KM} = 746 \text{ W}. \quad (7.45)$$

Widać z równania (7.42), pracę można wyrazić jako iloczyn mocy i czasu, jak często spotykanej jednostce o nazwie kilowatogodzina (kWh). Jest ona równa:

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}. \quad (7.46)$$

Kilowatogodziny są najczęściej stosowane jako jednostki handlowe energii elektrycznej (występują one na rachunkach z elektrowni), dlatego też kojarzy się je, jak i waty, z jednostkami elektrycznymi. Mogą one być również stosowane przy innych rodzajach mocy, czy pracy i energii. Jeśli zatem, na przykład podnosisz książkę z podłogi i kładziesz ją na półce, to wykonaną przy tym pracę możesz wyrazić jako  $4 \cdot 10^{-6}$  kWh (a może nawet wygodniej jako 4 mWh).

Szybkość, z jaką siła wykonuje pracę nad cząstką (lub ciałem o właściwościach cząstki) możemy również wyrazić przez tę siłę i prędkość cząstki. Dla cząstki poruszającej się po linii prostej (powiedzmy wzdłuż osi  $x$ ), na którą działa siła  $\vec{F}$ , skierowana pod pewnym kątem  $\phi$  do tej linii, równanie (7.43) daje:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \phi dx}{dt} = F \cos \phi \left( \frac{dx}{dt} \right),$$



Rys. 7.13. Moc jest szybkością, z jaką siła działająca na przyczepę ze strony ciężarówki wykonuje pracę nad przyczepą

czyli

$$P = Fv \cos \phi. \quad (7.47)$$

Zapisując prawą stronę równania (7.47) jako iloczyn skalarny  $\vec{F} \cdot \vec{v}$ , możemy tę zależność przedstawić w postaci:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{moc chwilowa}). \quad (7.48)$$

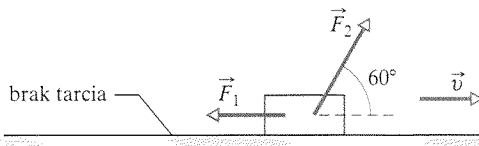
Na przykład ciężarówka z rysunku 7.13 działa siłą  $\vec{F}$  na ciężką przyczepę, mającą w pewnej chwili prędkość  $\vec{v}$ . Moc chwilowa jest to szybkość, z jaką siła  $\vec{F}$  wykonuje pracę nad przyczepą w tej właśnie chwili; jest ona dana wzorami (7.47) i (7.48). Mówienie o tej mocy jako o „mocy ciężarówki” jest zwykle do przyjęcia, lecz należy pamiętać, co to znaczy: moc jest to szybkość, z jaką wykonuje pracę siła zewnętrzna.



**SPRAWDZIAN 5:** Klocek porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, ponieważ jest przywiązany do linki, której drugi koniec jest umocowany w pewnym punkcie. Czy moc związana z siłą działającą na klocek ze strony linki jest dodatnia ujemna, czy równa zeru?

### Przykład 7.10

Na rysunku 7.14 przedstawiono pudełko, na które działają dwie stałe siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , przy czym pudełko ślizga się bez tarcia po podłodze w prawo. Siła  $\vec{F}_1$  jest skierowana poziomo i ma wartość 2 N; siła  $\vec{F}_2$  o wartości 4 N skierowana jest w górę, pod kątem  $60^\circ$  do podłogi. Prędkość pudełka ma w pewnej chwili wartość  $v$ , równą 3 m/s.



**Rys. 7.14.** Przykład 7.10. Na pudełko, ślizgające się bez tarcia po podłodze w prawo działają dwie siły:  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Prędkość pudełka wynosi  $\vec{v}$

a) Ile wynosi w tej chwili moc pochodząca od każdej z sił oraz moc całkowita? Czy moc całkowita zmienia się w tej chwili?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ 1. Mamy wyznaczyć moc chwilową, a nie moc średnią w pewnym przedziale czasu. Znamy prędkość cząstki (a nie wykonaną nad nią pracę). Możemy zatem dla każdej siły skorzystać z równania (7.47). Siła  $\vec{F}_1$  tworzy z prędkością  $\vec{v}$  kąt  $\phi_1 = 180^\circ$ , wobec czego:

$$P_1 = F_1 v \cos \phi_1 = (2 \text{ N})(3 \text{ m/s}) \cos 180^\circ = -6 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten oznacza, że siła  $\vec{F}_1$  odbiera energię od pudełka z szybkością 6 J/s.

Siła  $\vec{F}_2$  tworzy z prędkością  $\vec{v}$  kąt  $\phi_2 = 60^\circ$ , zatem:

$$P_2 = F_2 v \cos \phi_2 = (4 \text{ N})(3 \text{ m/s}) \cos 60^\circ = 6 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ten wynik oznacza, że siła  $\vec{F}_2$  dostarcza energię pudełku z szybkością 6 J/s.

➔ 2. Całkowita moc jest sumą mocy pochodzących od poszczególnych sił:

$$P_{\text{całk}} = P_1 + P_2 = (-6 \text{ W}) + (6 \text{ W}) = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

co oznacza, że sumarycznie żadna energia nie jest ani dostarczana pudełku, ani odbierana od niego. Energia kinetyczna pudełka ( $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ) nie ulega zatem zmianie, a więc nie zmienia się także prędkość pudełka. Jak widać z równania (7.48), jeśli siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , a także prędkość  $\vec{v}$  pozostają stałe, to stałe są moce  $P_1$  i  $P_2$ , a zatem i moc całkowita  $P_{\text{całk}}$ .

b) Ile wynosiłaby moc wypadkowa i czy zmieniłaby się gdyby siła  $\vec{F}_2$  wynosiła 6 N?

**ROZWIĄZANIE:**

Postępując analogicznie, jak w punkcie (a), otrzymujemy:

$$P_2 = F_2 v \cos \phi_2 = (6 \text{ N})(3 \text{ m/s}) \cos 60^\circ = 9 \text{ W}.$$

Moc, związana z działaniem siły  $\vec{F}_1$ , nadal wynosi  $P_1 = -6 \text{ W}$ , a zatem moc całkowita jest teraz równa:

$$P_{\text{całk}} = P_1 + P_2 = (-6 \text{ W}) + (9 \text{ W}) = 3 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

co oznacza, że sumarycznie pudełko zyskuje energię. Wobec tego energia kinetyczna pudełka wzrasta, a zatem wzrasta i wartość jego prędkości. Skoro rośnie prędkość, to — jak widać z równaniem (7.48) — zmieniają się wartości  $P_1$  i  $P_2$ , a zatem również wartość  $P_{\text{całk}}$ . Tak więc, otrzymana przez nas wartość mocy całkowitej, 3 W, odnosi się jedynie do tej chwili, w której prędkość pudełka ma wartość 3 m/s.

## Podsumowanie

**Energia kinetyczna** Energia kinetyczna  $E_k$ , związana z ruchem cząstki o masie  $m$  i wartości prędkości  $v$ , przy czym  $v$  jest znacznie mniejsze od prędkości światła, wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{energia kinetyczna}). \quad (7.1)$$

**Praca** Praca  $W$  jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana za pomocą działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest odebrana od ciała, praca jest ujemna.

**Praca wykonana przez siłę stałą** Praca wykonana nad cząstką przez siłę stałą  $\vec{F}$ , podczas gdy cząstka doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , jest równa:

$$W = Fd \cos \phi = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (\text{praca wykonana przez siłę stałą}). \quad (7.7, 7.8)$$

przy czym  $\phi$  jest stałym kątem między kierunkami wektorów  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$ . Pracę nad ciałem wykonuje jedynie składowa siły  $\vec{F}$ , skierowana wzdłuż kierunku przemieszczenia  $\vec{d}$ . Gdy na ciało działa więcej niż jedna siła, całkowita praca wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły. Jest ona także równa pracy wykonanej nad ciałem przez wypadkową  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  tych sił.

**Praca a energia kinetyczna** Zmiana energii kinetycznej  $\Delta E_k$  ciała jest związana z całkowitą pracą wykonaną nad tym ciałem, następującą zależnością:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W. \quad (7.10)$$

przy czym  $E_{k \text{ pocz}}$  jest początkową energią kinetyczną ciała, a  $E_{k \text{ końc}}$  — energią kinetyczną ciała po wykonaniu nad nim pracy. Równanie (7.10) można również zapisać w postaci:

$$E_{k \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}} + W. \quad (7.11)$$

**Praca wykonana przez siłę ciężkości** Praca  $W_g$  wykonana nad ciałem o masie  $m$  przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  w czasie, gdy cząstka doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , wynosi:

$$W_g = mgd \cos \phi. \quad (7.12)$$

przy czym  $\phi$  jest kątem między  $\vec{F}_g$  i  $\vec{d}$ .

**Praca wykonana przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała** Praca  $W_{\text{zewn}}$  wykonana przez siłę zewnętrzną przy podnoszeniu lub opuszczaniu ciała o właściwościach cząstki jest związana z pracą  $W_g$ , wykonaną przez siłę ciężkości oraz zmianą energii kinetycznej  $\Delta E_k$  ciała, zależnością:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_{\text{zewn}} + W_g. \quad (7.15)$$

Jeśli energia kinetyczna ciała na początku jego przemieszczenia jest równa energii kinetycznej na końcu przemieszczenia, to równanie (7.15) upraszcza się do postaci:

$$W_{\text{zewn}} = -W_g. \quad (7.16)$$

z której widać, że energia dostarczana wówczas ciału przez siłę zewnętrzną jest równa energii odbieranej od ciała przez siłę ciężkości.

**Siła sprężystości** Siła  $\vec{F}$  wywierana przez sprężynę wynosi:

$$\vec{F} = -k\vec{d} \quad (\text{prawo Hooke'a}). \quad (7.20)$$

przy czym  $\vec{d}$  jest przemieszczeniem swobodnego końca sprężyny, od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej (to znaczy takiej, która nie jest ani ściśnięta, ani rozciągnięta), a  $k$  — stałą sprężystości (będącą miarą sztywności sprężyny). Jeśli wybierzemy oś  $x$  równoległą do długości sprężyny, a jako jej początek przyjmiemy położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej, to równanie (7.20) przybiera postać:

$$F = -kx \quad (\text{prawo Hooke'a}). \quad (7.21)$$

Siła sprężystości jest zatem siłą zmienną, gdyż zależy od położenia swobodnego końca sprężyny.

**Praca wykonana przez siłę sprężystości** Praca  $W_s$  wykonana przez siłę sprężystości nad ciałem przymocowanym do swobodnego końca sprężyny, przy przemieszczeniu ciała z położenia początkowego  $x_{\text{pocz}}$  do położenia końcowego  $x_{\text{końc}}$ , wynosi:

$$W_s = \frac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2. \quad (7.25)$$

Jeśli  $x_{\text{pocz}} = 0$ , a  $x_{\text{końc}} = x$ , to równanie (7.25) przybiera postać:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2. \quad (7.26)$$

**Praca wykonana przez siłę zmienną** Gdy siła  $\vec{F}$  działająca na ciało o właściwościach cząstki zależy od położenia ciała, praca wykonana przez tę siłę nad ciałem w czasie jego ruchu z punktu początkowego  $r_{\text{pocz}}$  o współrzędnych  $(x_{\text{pocz}}, y_{\text{pocz}}, z_{\text{pocz}})$  do punktu końcowego  $r_{\text{końc}}$  o współrzędnych  $(x_{\text{końc}}, y_{\text{końc}}, z_{\text{końc}})$  musi być wyznaczona przez całkowanie siły. Jeśli założymy, że składowa  $F_x$  może zależeć od  $x$ , ale nie od  $y$  ani  $z$ ; składowa  $F_y$  może zależeć od  $y$ , ale nie od  $x$  ani  $z$ ; a składowa  $F_z$  może zależeć od  $z$ , ale nie od  $x$  ani  $y$ , to praca jest równa:

$$W = \int_{r_{\text{pocz}}}^{r_{\text{końc}}} dW = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F_x dx + \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} F_y dy + \int_{z_{\text{pocz}}}^{z_{\text{końc}}} F_z dz. \quad (7.36)$$

Gdy siła  $\vec{F}$  ma tylko składową  $x$ , równanie (7.36) sprowadza się do:

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx. \quad (7.32)$$

**Moc** Moc związana z działaniem siły, jest to *szybkość*, z jaką siła wykonuje pracę nad ciałem. Jeśli siła wykonuje pracę  $W$  w przedziale czasu  $\Delta t$ , to *moc średnia* w tym przedziale czasu jest równa:

$$P_{sr} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7.42)$$

Moc chwilowa jest to szybkość wykonywania pracy w danej

chwili:

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (7.43)$$

Jeśli siła  $\vec{F}$  tworzy kąt  $\phi$  z kierunkiem ruchu ciała, to moc chwilowa wynosi:

$$P = Fv \cos \phi = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (7.47, 7.48)$$

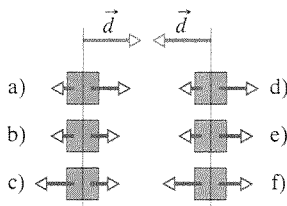
przy czym  $\vec{v}$  jest prędkością chwilową ciała.

## Pytania

1. Uszereguj dane niżej prędkości w zależności od energii kinetycznej ciała, poruszającego się z tą prędkością, od największej do najmniejszej: a)  $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ , b)  $\vec{v} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$ , c)  $\vec{v} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$ , d)  $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ , e)  $\vec{v} = 5\hat{i}$ , f)  $v = 5$  m/s, skierowaną pod kątem  $30^\circ$  do poziomu.

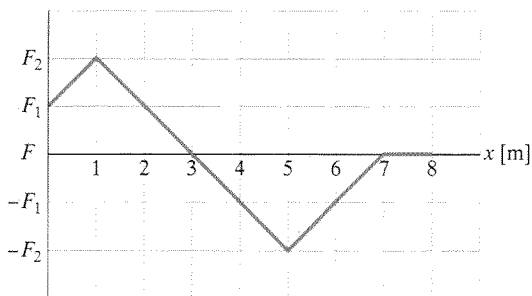
2. Cząstka, na którą działa stała siła  $\vec{F}$  doznaje prostoliniowego przemieszczenia  $\vec{d}$ . Czy praca, wykonana przez tę siłę nad cząstką, jest dodatnia, czy ujemna, jeśli: a) kąt między  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  wynosi  $30^\circ$ , b) ten kąt wynosi  $100^\circ$ , c)  $\vec{F} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ,  $\vec{d} = -4\hat{i}$ ?

3. Na rysunku 7.15 przedstawiono sześć przypadków, w których na pudełko ślizgające się bez tarcia po powierzchni w lewo lub w prawo działają jednocześnie dwie siły. Wartości sił, zaznaczone na rysunku jako długości wektorów, wynoszą 1 N lub 2 N. W którym z przypadków praca wykonana nad pudełkiem przez siłę wypadkową podczas jego przemieszczenia  $\vec{d}$  jest dodatnia, ujemna, równa zero?



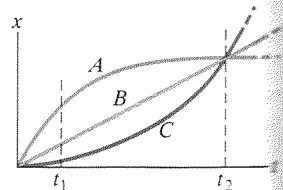
Rys. 7.15. Pytanie 3

4. Na rysunku 7.16 pokazano, jak wartość działającej na cząstkę siły  $\vec{F}$ , skierowanej wzdłuż osi  $x$  zależy od współrzędnej  $x$ . Jakie jest położenie cząstki, spoczywającej początkowo w punkcie  $x = 0$ , gdy: a) ma ona największą energię kinetyczną, b) jej prędkość ma największą wartość, c) jej prędkość jest równa zero? d) Jaki jest kierunek ruchu cząstki w punkcie  $x = 6$  m?



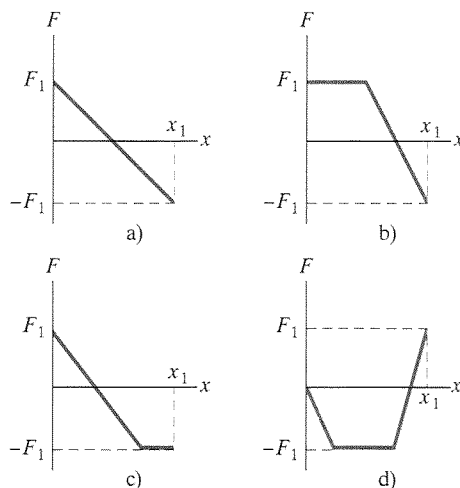
Rys. 7.16. Pytanie 4

5. Na rysunku 7.17 przedstawiono — w trzech przypadkach — zależność położenia od czasu dla pudła z przemycałym towarem, ciągniętego bez tarcia wzdłuż osi  $x$ , za pomocą pewnych sił zewnętrznych. Linia  $B$  jest prostą, pozostałe są zakrzywione. Uszereguj te przypadki według wartości energii kinetycznej pudła: a) w chwili  $t_1$ , b) w chwili  $t_2$ , od największej do najmniejszej. c) Uszereguj te przypadki według całkowitej pracy wykonanej nad pudłem przez siły zewnętrzne, w czasie od  $t_1$  do  $t_2$  od największej do najmniejszej. d) Które z danych niżej stwierdzeń opisuje skutek pracy wykonanej przez siły zewnętrzne, w czasie od  $t_1$  do  $t_2$  dla każdego z przypadków: 1) energia została dostarczona do pudła, 2) energia została odebrana od pudła, 3) całkowita praca jest równa zero?



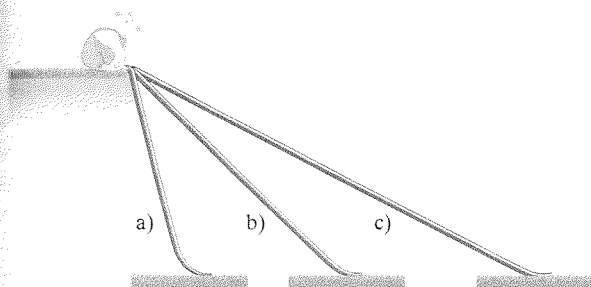
Rys. 7.17. Pytanie 5

6. Na rysunku 7.18 przedstawiono (w tej samej skali) wykresy zależności składowej  $x$  siły zmiennej  $\vec{F}$  (skierowanej wzdłuż osi  $x$ ) od położenia  $x$  cząstki, na którą ta siła działa. Uszereguj te wykresy według pracy wykonanej przez siłę  $\vec{F}$  nad cząstką od  $x = 0$  do  $x_1$ , od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).



Rys. 7.18. Pytanie 6

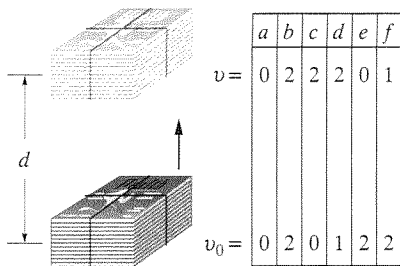
7. Na rysunku 7.19 przedstawiono natłuszczone prosię, które może zjechać bez tarcia na dolny poziom po jednej z trzech zjeżdżalni. Uszereguj te zjeżdżalnie według pracy, jaką wykona siła ciężkości nad prosięciem w czasie jego zjazdu, od największej do najmniejszej wartości.



Rys. 7.19. Pytanie 7

8. Podnosisz wypchanego borsuka z podłogi na półkę. Czy praca, jaką przy tym wykonasz zależy: a) od masy borsuka, b) od jego ciężaru, c) od wysokości, na jakiej znajduje się półka, d) od czasu, jaki ci to zajmie, e) od tego, czy podnosisz borsuka do góry prosto, czy ukośnie?

9. Paczka czasopism przedstawiona na rysunku 7.20 jest podnoszona za sznurek na wysokość  $d$ . W tabelce na tym rysunku podano wartości prędkości początkowej  $v_0$  i końcowej  $v$  paczki (w metrach na sekundę), odpowiadające początkowi i końcowi przemieszczenia paczki o  $d$  dla sześciu przypadków. Uszereguj te przypadki według pracy wykonanej nad paczką na drodze  $d$  przez siłę, działającą na nią ze strony sznurka, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).

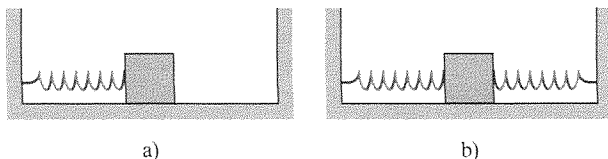


Rys. 7.20. Pytanie 9

10. Sprężyna A jest sztywniejsza od sprężyny B, tzn.  $k_A > k_B$ . Sprężyny te ściskamy: a) o taki sam odcinek, b) taką samą siłą zewnętrzną. Siła sprężystości której ze sprężyn może wykonać większą pracę w każdym z tych przypadków?

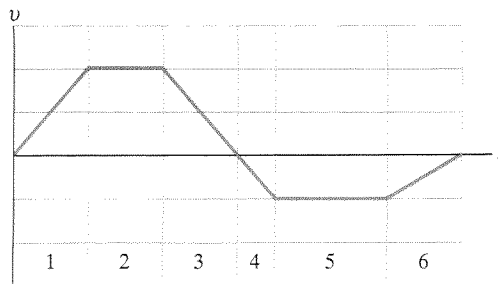
11. Do swobodnego końca nieodkształconej sprężyny przymocowano klocek, jak na rysunku 7.21a. Po pewnym przemieszczeniu  $\bar{d}$  klocka w prawo działająca na klocek siła sprężystości sprężyny ma wartość  $F_1$ , a praca, wykonana przez nią nad klockiem jest równa  $W_1$ . Następnie z drugiej strony przymocowano do klocka taką samą sprężynę jak pierwsza — rysunek 7.21b; rysunek ten odpowiada sytuacji, w której obie sprężyny są nieodkształcone.

Ponownie przemieszczamy klocek o  $\bar{d}$ . a) Jaka jest wartość siły wypadkowej, działającej na klocek ze strony obydwu sprężyn? b) Jaka praca została przy tym wykonana nad klockiem przez siły sprężystości sprężyn?



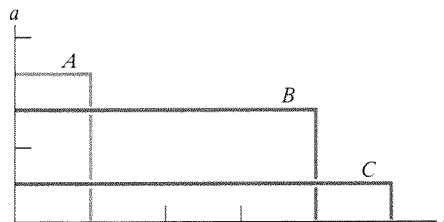
Rys. 7.21. Pytanie 11

12. Na rysunku 7.22 przedstawiono wykres prędkości samochodu jako funkcji czasu. Samochodzik porusza się wzdłuż osi  $x$  dzięki działaniu zmiennej siły zewnętrznej. Wzdłuż osi czasu zaznaczono sześć przedziałów o szerokości  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_6 = 2\Delta t_4 = \frac{2}{3}\Delta t_5$ . a) W którym z tych przedziałów czasu energia jest odbierana od samochodzika przez siłę zewnętrzną? b) Uszereguj te przedziały według pracy wykonanej w nich nad samochodzikiem przez siłę zewnętrzną, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej). c) Uszereguj przedziały według szybkości, z jaką przekazywana jest energia, od największej dostarczanej samochodzikowi do największej odbieranej od niego.



Rys. 7.22. Pytanie 12

13. Pozostające początkowo w spoczynku pudełko kredek zostaje wprowadzone w ruch bez tarcia po podłodze przez siłę zewnętrzną. Na rysunku 7.23 przedstawiono wykresy przyspieszenia pudełka jako funkcji czasu, w trzech przypadkach, różniących się wartością siły zewnętrznej. Uszereguj te przypadki według pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną w czasie ruchu przyspieszonego pudełka, od największej do najmniejszej.



Rys. 7.23. Pytanie 13

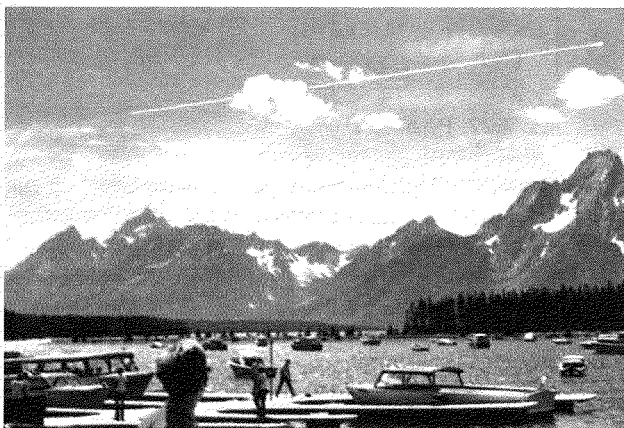
www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

## 7.1. Energia

1. Elektron w kawałku miedzi, znajdującym się w bardzo niskiej temperaturze, ma energię kinetyczną  $6,7 \cdot 10^{-19}$  J. Jaka jest prędkość tego elektronu (masa elektronu  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg)?

2. 10 sierpnia 1972 roku duży meteoroid „odbil” się od atmosfery nad zachodnimi Stanami Zjednoczonymi i Kanadą, bardzo podobnie do kamienia, odbijającego się od powierzchni wody, gdy „puszczamy kaczki”. Towarzysząca temu kula ognista była tak jasna, że było ją widać w dzień (rys. 7.24). Masa meteoroidu wynosiła około  $4 \cdot 10^6$  kg, a jego prędkość — około 15 km/s. Gdyby wszedł on w atmosferę pionowo, uderzyłby w powierzchnię Ziemi z mniej więcej taką samą prędkością. a) Oblicz stratę energii kinetycznej meteoroidu (w dżulach) przy pionowym uderzeniu w powierzchnię Ziemi. b) Wyraż tę energię jako wielokrotność energii wydzielonej przy eksplozji 1 megatony materiału wybuchowego TNT, równej  $4,2 \cdot 10^{15}$  J. c) Energia, wydzielona przy wybuchu bomby atomowej nad Hiroszimą była równoważna energii wybuchu 13 kiloton TNT. Ilu takim bombom równoważny byłby spadek tego meteoroidu na Ziemię?



Rys. 7.24. Zadanie 2. Duży meteoroid „odbijający się” od atmosfery, widoczny na niebie nad górami (w prawym górnym rogu zdjęcia)

3. Oblicz energię kinetyczną: a) piłkarza o masie 110 kg, biegnącego z prędkością 8,1 m/s, b) pocisku o masie 4,2 g, lecącego z prędkością 950 m/s, c) lotniskowca *Nimitz* o masie 91 400 t, płynącego z prędkością 32 węzłów.

4. Ojciec, goniący syna, ma energię kinetyczną dwa razy mniejszą niż syn, który ma masę dwukrotnie mniejszą niż ojciec. Ojciec zwiększa prędkość o 1 m/s, po czym ma taką samą energię kinetyczną jak syn. Wyznacz pierwotną prędkość: a) ojca, b) syna.

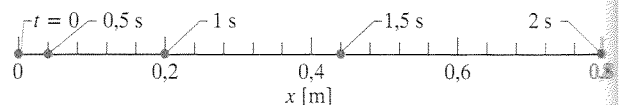
5. Proton (o masie  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg) porusza się w akceleratorze po linii prostej, z przyspieszeniem  $3,6 \cdot 10^{15}$  m/s<sup>2</sup>. W chwili początkowej ma on prędkość  $2,4 \cdot 10^7$  m/s. Oblicz: a) prędkość, b) wzrost energii kinetycznej protonu po przebyciu przez niego drogi 3,5 cm.

## 7.3. Praca i energia kinetyczna

6. Blok kry lodowej doznaje przemieszczenia  $\vec{d} = (15 \text{ m})\hat{i} - (12 \text{ m})\hat{j}$  wzdłuż prostego nabrzeża, popychany przez prąd wody, która działa na niego siłą  $\vec{F} = (210 \text{ N})\hat{i} - (150 \text{ N})\hat{j}$ . Jaką pracę wykonuje ta siła nad blokiem podczas tego przemieszczenia?

7. Robotnik przykłada siłę o wartości 210 N skierowaną ku górze, pod kątem  $20^\circ$  do poziomu, aby pociągnąć po poziomej podłodze skrzynię o masie 50 kg, mogącą poruszać się po tej podłodze bez tarcia. Jaką pracę wykona nad skrzynią w czasie jej przemieszczenia o 3 m: a) siła przyłożona przez robotnika, b) działająca na skrzynię siła ciężkości, c) działająca na skrzynię ze strony podłogi siła normalna? d) Jaka będzie całkowita praca wykonana na tej drodze nad skrzynią?

8. Ciało wzorcowe o masie 1 kg pozostaje w spoczynku na poziomym torze, po którym może się poruszać bez tarcia na poduszce powietrznej. W pewnej chwili do ciała zostaje przyłożona poziomo siła  $\vec{F}$  działająca w dodatnim kierunku osi  $x$ . Na rysunku 7.25 przedstawiono położenia ciała podczas jego ruchu w prawo. Siłę  $\vec{F}$  przyłożono do ciała w chwili  $t = 0$ , a na rysunku pokazano położenia ciała co 0,5 s. Jaką pracę wykonała nad ciałem siła  $\vec{F}$  w czasie od  $t = 0$  do  $t = 2$  s?



Rys. 7.25. Zadanie 8

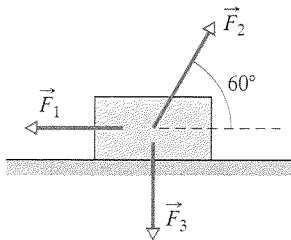
9. Sanki, których masa wraz z saneczkarzem wynosi 85 kg, zjeżdżają z toru zjazdowego na poziomy odcinek końcowy toru z prędkością 37 m/s, po czym — aby się zatrzymać — są hamowane ze stałym przyspieszeniem  $2 \text{ m/s}^2$ . a) Jaka jest wartość siły  $F$  hamującej sanki? b) Jaką drogę  $d$  przebędą sanki do zatrzymania? c) Jaką pracę  $W$  wykona nad nimi siła hamująca? Wyznacz: d)  $F$ , e)  $d$ , f)  $W$  dla przyspieszenia hamującego o wartości  $4 \text{ m/s}^2$ . ilw

10. Siła działa na ciało o masie 3 kg, tak że położenie ciała zależy od czasu, zgodnie z równaniem:  $x = 3t - 4t^2 + t^3$ , gdzie



... jest wyrażone w metrach, a  $t$  — w sekundach. Oblicz pracę wykonaną nad ciałem przez tę siłę, w przedziale czasu od  $t = 0$  do  $t = 4$  s. Wskazówka: wyznacz prędkość ciała w chwili początkowej i końcowej.

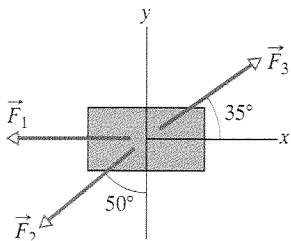
11. Na rysunku 7.26 przedstawiono trzy siły przyłożone do kufra, poruszającego się po podłodze bez tarcia. Wartości tych sił wynoszą:  $F_1 = 3$  N,  $F_2 = 9$  N,  $F_3 = 3$  N. a) Wyznacz całkowitą pracę, wykonaną przez te trzy siły nad kufrem, w czasie jego przemieszczenia w lewo o 3 m. b) Czy energia kinetyczna kufra wzrasta przy tym, czy maleje?



Rys. 7.26. Zadanie 11

12. Jedyna siła działająca na poruszający się w płaszczyźnie  $xy$  pojemnik o masie 2 kg ma wartość 5 N. W chwili początkowej pojemnik ma prędkość o wartości 4 m/s, skierowaną w dodatnim kierunku osi  $x$ , a w pewnej chwili późniejszej jego prędkość ma wartość 6 m/s i jest skierowana w dodatnim kierunku osi  $y$ . Jaką pracę wykonała nad pojemnikiem przyłożona do niego siła między tymi dwiema chwilami?

13. Na rysunku 7.27 przedstawiono widok z góry kontenera, na który działają trzy siły poziome. Wartości tych sił wynoszą:  $F_1 = 3$  N,  $F_2 = 4$  N,  $F_3 = 10$  N. Kontener był początkowo w spoczynku, a teraz porusza się po podłożu bez tarcia. Wyznacz całkowitą pracę wykonaną nad kontenerem przez te trzy siły w czasie, w którym oddalił się on od położenia początkowego o 4 m.



Rys. 7.27. Zadanie 13

#### 7.4. Praca wykonana przez siłę ciężkości

14. a) W 1975 roku dach welodromu w Montrealu, o ciężarze 360 kN podniesiono o 10 cm, aby poprawić jego ustawienie. Jaką pracę wykonały nad dachem siły, którymi go podniesiono? b) W 1960 roku niejaka pani Rogers z Tampa na Florydzie uniosła podobno jeden koniec samochodu, który przygniótł jej syna, gdy złamał się podnośnik. Jaką pracę wykonała nad samochodem przyłożona przez nią siła, jeśli istotnie udało się jej podnieść ciężar około 4000 N ( $\frac{1}{4}$  ciężaru samochodu) o 5 cm?

15. Jak pokazano na rysunku 7.28, lina jest przełożona przez dwa krążki obracające się bez tarcia, których masy można pominąć. Na jednym krążku wisi pojemnik o masie  $m = 20$  kg, a na swobodny koniec liny działasz siłą  $\vec{F}$ . a) Jaka musi być wartość siły  $\vec{F}$ , aby pojemnik wznosił się ze stałą prędkością? b) O ile musisz przesunąć

swobodny koniec liny, aby podnieść pojemnik o 2 cm? c) Jaka praca zostanie wykonana nad pojemnikiem podczas jego przemieszczania przez ciebie (za pośrednictwem liny), e) działająca na pojemnik siłę ciężkości? Wskazówka: gdy lina jest przełożona przez krążki, jak na rysunku, działa ona na krążek siłą wypadkową dwa razy większą od naprężenia liny.



Rys. 7.28. Zadanie 15

16. Blok lodu o masie 45 kg ześlizguje się bez tarcia po pochylni o długości 1,5 m i wysokości 0,91 m. Robotnik pcha blok w górę, równoległe do pochylni, dzięki czemu blok ześlizguje się ze stałą prędkością. a) Wyznacz wartość siły przykładanej przez robotnika. Jaką pracę wykonuje nad blokiem: b) siła przyłożona przez robotnika, c) działająca na blok siła ciężkości, d) siła normalna działająca na blok ze strony pochylni, e) siła wypadkowa działająca na blok?

17. Śmigłowiec wyląduje z oceanu astronautkę o masie 72 kg, wciągając ją za pomocą liny na wysokość 15 m. Astronautka porusza się przy tym z przyspieszeniem  $g/10$ . Jaką pracę wykona nad astronautką: a) siła przyłożona ze śmigłowca, b) działająca na nią siła ciężkości? Jaka będzie w chwili dotarcia astronautki do śmigłowca jej: c) energia kinetyczna, d) prędkość?

18. Zespół ratownictwa jaskiniowego wydobywa z jaskini przez pionowy szyb rannego speleologa, za pomocą liny nawijanej na bęben przy użyciu silnika. Operacja składa się z trzech faz, w czasie których ranny przebywa drogę 10 m podczas każdej z faz: a) najpierw nieruchomy speleolog zostaje przyspieszony do prędkości 5 m/s; b) potem wznosi się on ze stałą prędkością 5 m/s; c) na koniec jego ruch zostaje spowolniony, aż do prędkości równej zero. Jaką pracę wykonuje nad rannym o masie 80 kg podnosząca go siła w każdej z tych faz?

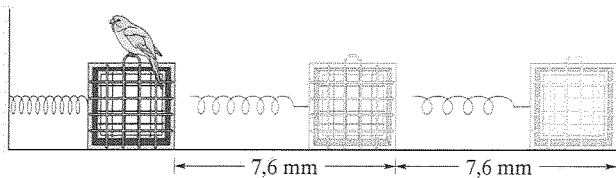
19. Klocek o masie  $m$  znajdujący się początkowo w spoczynku, jest opuszczany pionowo na linie ze stałym, skierowanym w dół przyspieszeniem o wartości  $g/4$ . Przeanalizuj chwilę, w której klocek oddalił się od punktu wyjściowego na odległość  $d$  i oblicz odpowiadające tej chwili: a) pracę wykonaną nad klockiem przez siłę działającą na niego ze strony liny, b) pracę wykonaną nad klockiem przez siłę ciężkości, c) energię kinetyczną klocka, d) prędkość klocka.

#### 7.5. Praca wykonana przez siłę sprężystości

20. W semestrze letnim studenci MIT, mieszkający w sąsiednich akademikach kampusu wschodniego, toczą ze sobą walkę,

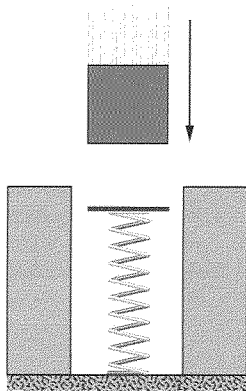
używając wielkich wyrzutni, wykonanych z gumowych rur chirurgicznych przymocowanych do ramy okiennej. W dołączonym do rurki uchwycie umieszcza się balon wypełniony zabarwioną wodą, po czym rurkę rozciąga się na całą długość pokoju. Jaką pracę wykonuje siła działająca ze strony rurki na balon, od jej pełnego rozciągnięcia do powrotu do położenia, gdy jest ona nieodkształcona? Załóż, że przy rozciąganiu rurki spełnione jest prawo Hooke'a, oraz że stała sprężystości rurki wynosi 100 N/m, a długość pokoju jest równa 5 m.

21. Do końca sprężyny o stałej sprężystości 15 N/cm przymocowano klatkę dla ptaków (rys. 7.29). a) Jaką pracę wykonana nad klatką siła sprężystości, gdy sprężyna zostanie rozciągnięta o 7,6 mm od położenia, gdy nie jest odkształcona? b) Jaką pracę wykona siła sprężystości, gdy sprężyna zostanie rozciągnięta o dalsze 7,6 mm? *ilw www*



Rys. 7.29. Zadanie 21

22. Klocek o masie 250 g spada na nieodkształconą sprężynę pionową o stałej sprężystości  $k = 2,5 \text{ N/m}$  (rys. 7.30). Po zetknięciu ze sprężyną klocek ściska ją o 12 cm, do osiągnięcia przez niego prędkości równej zero. Jaka praca zostaje wykonana nad klokiem w czasie ściskania sprężyny przez: a) działającą na niego siłę ciężkości, b) siłę sprężystości sprężyny? c) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego dotarcia do sprężyny (pomiń tarcie)? d) Ile wynosiłoby maksymalne ściśnięcie sprężyny, gdyby prędkość klocka w chwili dotarcia do sprężyny była dwukrotnie większa?



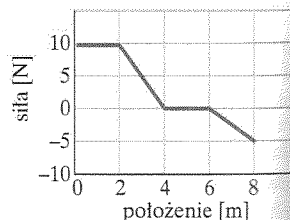
Rys. 7.30. Zadanie 22

23. Jedyna siła działająca na ciało o masie 2 kg poruszające się w dodatnim kierunku osi  $x$  ma składową  $x$  równą  $F_x = -6x \text{ N}$ , gdzie  $x$  jest wyrażone w metrach. Prędkość ciała w punkcie  $x = 3 \text{ m}$  wynosi 8 m/s. a) Jaka jest prędkość ciała w punkcie  $x = 4 \text{ m}$ ? b) Ile wynosi dodatnie położenie  $x$ , w którym ciało ma prędkość 5 m/s?

## 7.6. Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną

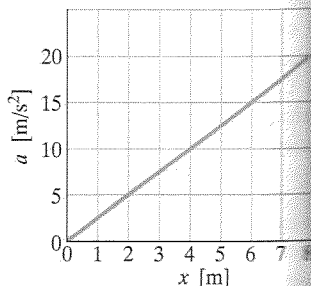
24. Klocek o masie 5 kg porusza się bez tarcia po poziomej powierzchni. Ruch jest prostoliniowy i odbywa się pod wpły-

wem siły, której zależność od położenia przedstawiono na rysunku 7.31. Jaką pracę wykonuje ta siła nad klokiem w czasie jego ruchu z punktu  $x = 0$  do punktu  $x = 8 \text{ m}$ ?



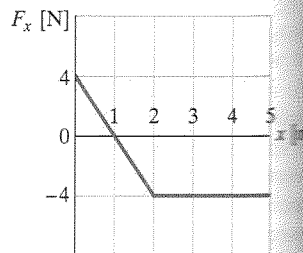
Rys. 7.31. Zadanie 24

25. Cegła o masie 10 kg porusza się wzdłuż osi  $x$ . Na rysunku 7.32 przedstawiono jej przyspieszenie  $a$  jako funkcję położenia. Wyznacz całkowitą pracę wykonaną nad cegłą w czasie jej ruchu od  $x = 0$  do  $x = 8 \text{ m}$  przez siłę, która nadaje jej przyspieszenie. *ilw*



Rys. 7.32. Zadanie 25

26. Jedyna siła działająca na ciało o masie 2 kg, w czasie jego ruchu wzdłuż osi  $x$  zmienia się zgodnie z wykresem, przedstawionym na rysunku 7.33. Prędkość ciała w punkcie  $x = 0$  wynosi 4 m/s. a) Ile wynosi energia kinetyczna ciała w punkcie  $x = 3 \text{ m}$ ? b) Dla jakiej wartości  $x$  ciało będzie miało energię kinetyczną równą 8 J? c) Ile wynosi największa wartość energii kinetycznej ciała w trakcie jego ruchu od  $x = 0$  do  $x = 5 \text{ m}$ ?



Rys. 7.33. Zadanie 26

27. Na cząstkę działa siła skierowana wzdłuż osi  $x$ , dana wyrażeniem  $F = F_0(x/x_0 - 1)$ . Wyznacz pracę, wykonaną przez tę siłę w czasie przemieszczania cząstki z punktu o współrzędnej  $x = 0$  do  $x = x_0$ : a) sporządzając wykres  $F(x)$  i wyznaczając pracę z tego wykresu, b) całkując  $F(x)$ .

28. Klocek o masie 1,5 kg spoczywa początkowo na poziomej powierzchni, po której może się poruszać bez tarcia. W pewnej chwili zostaje do niego przyłożona poziomo siła, skierowana w dodatnim kierunku osi  $x$ . Siła ta jest dana wzorem  $\vec{F}(x) = (2,5 - x^2)\hat{i} \text{ N}$ , przy czym  $x$  jest wyrażone w metrach, a  $x = 0$  oznacza położenie początkowe klocka. a) Jaką energię kinetyczną ma klocek w chwili, gdy mija punkt  $x = 2 \text{ m}$ ? b) Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna klocka w czasie ruchu od  $x = 0$  do  $x = 2 \text{ m}$ ?

29. Jaką pracę wykonuje siła  $\vec{F} = (2x \text{ N})\hat{i} + (3 \text{ N})\hat{j}$ , gdzie  $x$  jest wyrażone w metrach, przemieszczając cząstkę z punktu  $\vec{r}_{\text{pocz}} = (2 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{j}$  do punktu:  $\vec{r}_{\text{końc}} = -(4 \text{ m})\hat{i} - (3 \text{ m})\hat{j}$ ?

## 7.7. Moc

30. Winda ma wraz z ładunkiem masę  $3 \cdot 10^3$  kg. Jadąc do góry, pokonuje odległość 210 m w czasie 23 s, przy czym porusza się z prędkością o stałej wartości. Jaką pracę nad windą wykonuje średnio w jednostce czasu siła działająca na nią ze strony liny?

31. Siła zewnętrzna o wartości 122 N skierowana ukośnie w górę pod kątem  $37^\circ$  do poziomemu ciągnie po poziomej podłodze klocek o masie 100 kg ze stałą prędkością o wartości 5 m/s. Jaką pracę wykonuje ta siła nad klockiem w jednostce czasu? *ilw*

32. a) W pewnej chwili ciało ma prędkość:  $\vec{v} = -(2 \text{ m/s})\hat{i} + (4 \text{ m/s})\hat{k}$ , a działa na nie siła:  $\vec{F} = (4 \text{ N})\hat{i} - (2 \text{ N})\hat{j} + (9 \text{ N})\hat{k}$ . Ile wynosi w tej chwili szybkość, z jaką siła wykonuje pracę nad ciałem? b) W pewnej innej chwili prędkość ciała ma tylko składową  $y$ . Ile wynosi w tej chwili prędkość ciała, jeśli siła nie ulega zmianie, a moc chwilowa jest równa  $-12$  W?

33. Na ciało o masie 15 kg, znajdujące się początkowo w spoczynku, działa siła o wartości 5 N. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę w czasie: a) pierwszej, b) drugiej, c) trzeciej sekundy ruchu ciała, d) moc chwilową, pochodzącą od tej siły, pod koniec trzeciej sekundy ruchu.

34. Narciarz jest wciągany bez tarcia przez linę wyciągu w górę stoku, tworzącego z poziomem kąt  $12^\circ$ . Lina porusza się równoległe do stoku ze stałą prędkością o wartości 1 m/s. Praca wykonana przez siłę naciągu liny nad narciarzem w czasie przeniesienia go o 1 m wzdłuż stoku w górę wynosi 900 J. a) Jaką pracę wykonałaby ta siła nad narciarzem na tej samej drodze, gdyby stała prędkość miała wartość 2 m/s? Ile wynosi szybkość wykonywania pracy nad narciarzem przez tę siłę, gdy lina porusza się z prędkością o wartości: b) 1 m/s, c) 2 m/s?

35. Powolna winda towarowa, której kabina ma z pełnym obciążeniem masę 1200 kg ma wnieść ładunek na wysokość 54 m w czasie 3 min licząc od startu, ze stanu spoczynku na dole, do zatrzymania na górze. Masa przeciwwagi dźwigu wynosi jedynie 50 kg, tak że ruch kabiny w górę musi być wspomagany przez silnik. Jaka musi być średnia moc związana z siłą, jaką działa silnik na kabinę za pośrednictwem liny? *www*

36. Czerpak o masie 0,3 kg, ślizgający się bez tarcia po poziomej powierzchni, jest przymocowany do jednego końca poziomej sprężyny (o  $k = 500$  N/m), której drugi koniec jest unieruchomiony. W chwili przejścia przez położenie równowagi (tzn. przez punkt, w którym siła sprężystości jest równa zeru) czerpak ma energię kinetyczną równą 10 J. Wyznacz szybkość, z jaką sprężyna wykonuje pracę nad czerpakiem, gdy: a) przechodzi on przez położenie równowagi, b) sprężyna jest ściśnięta o 0,1 m, a czerpak oddala się od położenia równowagi.

37. Siła (lecz nie moc) potrzebna do holowania łodzi ze stałą prędkością, jest proporcjonalna do wartości tej prędkości. Ile wynosi moc, potrzebna do holowania łodzi z prędkością 12 km/h, jeśli moc potrzebna do holowania jej z prędkością 4 km/h jest równa 7,5 kW?

38. Do przenoszenia pudeł z jednego miejsca magazynu na drugie używa się pasa transmisyjnego, poruszającego się ze stałą prędkością o wartości 0,5 m/s. W pewnej części magazynu pas porusza się przez 2 m w górę, pod kątem  $10^\circ$  do poziomemu, potem przez 2 m poziomo i na koniec przez 2 m w dół, pod kątem  $10^\circ$  do poziomemu. Załóż, że pudło o masie 2 kg nie ślizga się po tym pasie. Ile wynosi szybkość, z jaką pas transmisyjny wykonuje pracę nad pudłem, gdy pudło porusza się: a) w górę pod kątem  $10^\circ$  do poziomemu, b) poziomo, c) w dół, pod kątem  $10^\circ$  do poziomemu?

39. Koń ciągnie powóz z prędkością 10 km/h, działając na niego siłą o wartości 180 N, skierowaną pod kątem  $30^\circ$  w górę od poziomemu. a) Jaką pracę wykonuje ta siła w czasie 10 min? b) Ile wynosi średnia moc (w koniach mechanicznych), związana z działaniem tej siły?

40. Ciało o masie 2 kg, znajdujące się początkowo w spoczynku zostaje wprowadzone w ruch jednostajnie przyspieszony w poziomie i osiąga prędkość o wartości 10 m/s w czasie 3 s. a) Jaką pracę nad ciałem wykonuje w ciągu 3 s siła nadająca mu przyspieszenie? Ile wynosi związana z działaniem tej siły moc chwilowa: b) na końcu tego przedziału czasu, c) w połowie tego przedziału czasu?

# 8 Energia potencjalna i zachowanie energii

W czasach prehistorycznych mieszkańcy Wyspy Wielkanocnej wyrzeźbili w swych kamieniołomach setki gigantycznych postaci kamiennych, po czym przetransportowali je w wybrane miejsca w różnych punktach wyspy. Pytanie, jak udało im się przenieść posągi — czasem i o 10 km — bez użycia skomplikowanych maszyn, było przedmiotem gorących dyskusji i wielu wymyślnych teorii co do źródeł niezbędnej do tego celu energii.

Ile właściwie energii potrzeba było, aby przetransportować jeden z tych posągów, korzystając jedynie z prymitywnych metod?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 8.1. Energia potencjalna

W tym rozdziale będziemy nadal rozważać pojęcie energii, o którym zaczęliśmy mówić w rozdziale 7. Zaczniemy od zdefiniowania **energii potencjalnej**  $E_p$ : jest to energia związana z konfiguracją (czyli ustawieniem) układu ciał, działających na siebie siłami. Gdy zmienia się konfiguracja tych ciał, może się również zmie-

nić energia potencjalna układu. Jednym z rodzajów energii potencjalnej jest **gravitacyjna energia potencjalna**, związana z odległością ciał przyciągających się siłą grawitacyjną (siłą ciężkości). Na przykład, gdy Andriej Czemerkin podnosił nad głowę rekordowy ciężar w czasie Olimpiady w 1996 roku, zwiększał odległość ciężaru od Ziemi. Praca wykonana przez siłę, jaką działał on na ciężar zmieniła grawitacyjną energię potencjalną układu ciężar–Ziemia, gdyż zmieniła konfigurację elementów tego układu — innymi słowy, w wyniku działania siły zmieniło się względne położenie ciężaru i Ziemi (rys. 8.1).

Innym rodzajem energii potencjalnej jest **energia potencjalna sprężystości**, związana ze ściskaniem lub rozciąganiem ciała sprężystego (na przykład sprężyny). Gdy ściskasz lub rozciągasz sprężynę, wykonujesz pracę, aby zmie-

nić względne położenie zwojów tej sprężyny. Praca wykonana przez przyłożoną przez ciebie siłę zwiększa energię potencjalną sprężystości tej sprężyny. Pojęcie energii potencjalnej może być niezwykle użytecznym narzędziem do analizy ruchu ciał. Korzystając z niego, będziemy mogli łatwo uporać się z zadaniami, których rozwiązanie przy użyciu jedynie pojęć z poprzednich rozdziałów wymagałoby złożonych obliczeń komputerowych.

### Praca i energia potencjalna

W rozdziale 7 analizowaliśmy związek pracy ze zmianą energii kinetycznej. Teraz omówimy związek pracy ze zmianą energii potencjalnej.

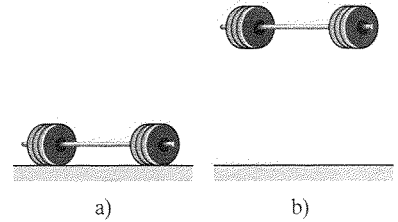
Rzucmy do góry pomidora (rys. 8.2). Wiemy już, że gdy pomidor wznosi się, praca  $W_g$  wykonana nad nim przez siłę ciężkości jest ujemna, ponieważ w wyniku działania tej siły energia kinetyczna pomidora *maleje*. Możemy teraz odpowiedzieć rzecz do końca, stwierdzając, że siła ciężkości zamienia tę energię w grawitacyjną energię potencjalną układu pomidor–Ziemia.

Pomidor zwalnia aż do prędkości równej zero, po czym zaczyna spadać pod wpływem siły ciężkości. W czasie jego spadku energia jest przekazywana w przeciwnym kierunku. Praca  $W_g$ , wykonana nad nim przez siłę ciężkości jest teraz dodatnia — w wyniku działania siły grawitacyjna energia potencjalna układu pomidor–Ziemia zamienia się w energię kinetyczną pomidora.

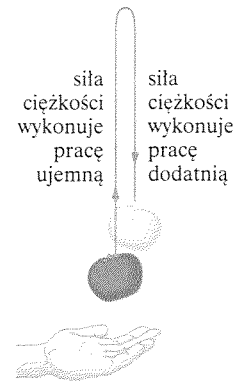
Zmianę grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  definiujemy — zarówno dla wznoszenia, jak i dla spadku ciała — jako pracę wykonaną nad ciałem przez siłę ciężkości, wziętą z przeciwnym znakiem. Oznaczając pracę — jak zwykle — symbolem  $W$ , zapisujemy to stwierdzenie w postaci:

$$\Delta E_p = -W. \quad (8.1)$$

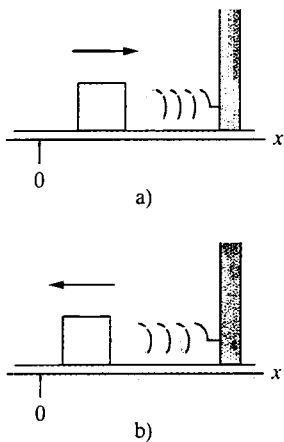
Równanie to stosuje się także do układu klocki–sprężyna, jak na rysunku 8.3. Gdy uderzymy gwałtownie klocek, aby wprawić go w ruch w prawą stronę, siła sprężystości działa w lewo, a zatem wykonuje nad klockiem pracę ujemną, co



Rys. 8.1. Podnosząc ciężar nad głowę Czemerkin zmienił położenie ciężaru względem Ziemi, a zatem zmienił konfigurację układu ciężar–Ziemia z tej, którą przedstawiono na rysunku (a), na tę, którą przedstawiono na rysunku (b)



Rys. 8.2. Rzucamy pomidora w górę. Gdy wznosi się on, siła ciężkości wykonuje nad nim pracę ujemną, zmniejszając jego energię kinetyczną. Gdy pomidor spada, siła ciężkości wykonuje nad nim pracę dodatnią, przy czym jego energia kinetyczna rośnie



Rys. 8.3. Klocek przymocowany do sprężyny pozostający początkowo w spoczynku w punkcie  $x = 0$  zostaje wprowadzony w ruch w prawą stronę. a) Gdy klocek porusza się w prawo (co zaznaczono za pomocą strzałki), siła sprężystości wykonuje nad nim pracę ujemną. b) Gdy później klocek porusza się w kierunku punktu  $x = 0$ , siła sprężystości wykonuje nad nim pracę dodatnią

prowadzi do zamiany energii kinetycznej klocka w energię potencjalną sprężystości sprężyny. Klocek zwalnia aż do zatrzymania się, po czym zaczyna poruszać się w lewo, ponieważ siła sprężystości nadal działa w lewo. Kierunek zamiany energii zmienia się wtedy na przeciwny — energia potencjalna sprężyny zamienia się w energię kinetyczną klocka.

### Siły zachowawcze i niezachowawcze

Wypiszmy najważniejsze cechy dwóch sytuacji fizycznych, które właśnie zostały przez nas omówione.

1. *Układ ciał* składa się z dwóch lub więcej ciał.
2. *Siła* działa między ciałem o właściwościach cząstki (pomidor lub klocek) a resztą układu.
3. Gdy zmienia się konfiguracja układu, siła wykonuje *pracę* nad ciałem (oznaczmy ją przez  $W_1$ ), przy czym energia kinetyczna  $E_k$  ciała zamienia się na inną postać energii układu.
4. Gdy zmiana konfiguracji układu zachodzi w drugą stronę, zamiana energii przebiega w przeciwnym kierunku, a siła wykonuje pracę  $W_2$ .

W sytuacji, gdy zawsze spełniony jest związek  $W_1 = -W_2$ , energia kinetyczna zamieniana jest na energię potencjalną, a siłę nazywamy **siłą zachowawczą**. Jak już zapewne się domyślasz, siła ciężkości i siła sprężystości są siłami zachowawczymi (gdyby tak nie było, nie moglibyśmy mówić o grawitacyjnej energii potencjalnej i energii potencjalnej sprężystości, jak to robiliśmy przed chwilą).

Siłę, która nie jest zachowawcza, nazywamy **siłą niezachowawczą**. Siła tarcia kinetycznego i siła oporu są niezachowawcze. Rozważmy na przykład klocek ślizgający się po podłodze w obecności tarcia. W czasie ruchu klocka siła tarcia kinetycznego działająca na klocek ze strony podłogi wykonuje nad nim pracę ujemną, spowalniając jego ruch i zamieniając jego energię kinetyczną na inny rodzaj energii — *energię termiczną* (związaną z ruchem chaotycznym atomów i cząsteczek). Wiemy z doświadczenia, że ta zamiana energii nie może być odwrócona (energia termiczna nie może zostać zamieniona przez siłę tarcia kinetycznego z powrotem w energię kinetyczną klocka). Choć zatem mamy układ ciał (złożony z klocka i podłogi), siłę działającą między elementami układu i zmianę energii związaną z działaniem tej siły, to siła ta nie jest zachowawcza. W związku z tym energia termiczna nie jest energią potencjalną.

W przypadku, gdy na ciało działają jedynie siły zachowawcze, można po-  
dać metody znacznie upraszczające rozwiązywanie zadań dotyczących ruchu tego ciała. Jedną z takich metod omówimy w następnym paragrafie, w którym poka-  
żemy, jak sprawdzić, czy siły są zachowawcze.

## 8.2. Siły zachowawcze: niezależność pracy od drogi

Podstawowe kryterium pozwalające stwierdzić, czy siła jest zachowawcza, czy niezachowawcza jest następujące: należy zbadać działanie siły na cząsteczkę

poruszającą się po dowolnej *drodze zamkniętej*, tzn. rozpoczynającą ruch w jakimś punkcie początkowym i powracającą do tego punktu po pewnym czasie (czyli wykonującą *pełny obieg* pewnej drogi, o tym samym punkcie początkowym i końcowym). Siła jest zachowawcza tylko wtedy, gdy całkowita zmiana energii cząstki w czasie pełnego obiegu tej — i każdej innej — drogi zamkniętej jest równa zero. Można to również wyrazić w następujący sposób:

► Całkowita praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Wiemy z doświadczenia, że siła ciężkości spełnia to *kryterium drogi zamkniętej*. Przykładem może być ruch pomidora z rysunku 8.2. W punkcie, z którego zostaje wyrzucony, pomidor ma prędkość o wartości  $v_0$  i energię kinetyczną, równą  $\frac{1}{2}mv_0^2$ . Pod działaniem siły ciężkości pomidor zwalnia, osiąga prędkość równą zero, po czym zaczyna spadać. W punkcie, z którego zostaje wyrzucony, ma znowu prędkość o wartości  $v_0$  i energię kinetyczną, równą  $\frac{1}{2}mv_0^2$ . Siła ciężkości *odbiera* zatem od pomidora tyle samo energii w czasie jego wznoszenia, ile *przekazuje* mu w czasie spadku do punktu początkowego ruchu. Całkowita praca wykonana nad pomidorem przez siłę ciężkości w czasie pełnego obiegu drogi zamkniętej jest równa zero.

Z kryterium drogi zamkniętej wynika ważny wniosek:

► Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką, przemieszczającą się między dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka.

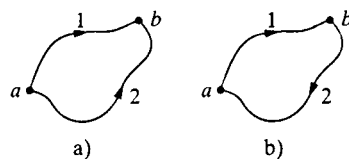
Zalóżmy na przykład, że cząstka przemieszcza się z punktu *a* do punktu *b* na rysunku 8.4a po drodze 1 albo po drodze 2. Jeśli na cząstkę działa tylko siła zachowawcza, to praca wykonana nad cząstką jest taka sama na obydwu drogach. Stwierdzenie to możemy zapisać w postaci związku:

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \quad (8.2)$$

przy czym wskaźnik *ab* zawiera informację o położeniu początkowym i końcowym cząstki, a wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do drogi. Jest to bardzo ważny wniosek pozwalający znacznie upraszczać rozwiązywanie trudnych zadań w przypadku, gdy występują tylko siły zachowawcze. Wyobraź sobie, że musisz obliczyć pracę wykonaną przez siłę zachowawczą nad ciałem poruszającym się między dwoma punktami po pewnej drodze i że obliczenia są bardzo trudne lub nawet niewykonalne bez dodatkowych informacji. Możesz wtedy wyznaczyć tę pracę, rozważając ruch cząstki między tymi dwoma punktami po innej drodze, dla której obliczenia są łatwiejsze, a więc możliwe do przeprowadzenia. Z taką właśnie sytuacją spotkamy się w przykładzie 8.1. Przedtem jednak musimy jeszcze wykazać słuszność równania (8.2).

### Wyprowadzenie równania (8.2)

Na rysunku 8.4b przedstawiono pewną drogę zamkniętą, przebytą przez cząstkę, na którą działa jedna siła. Cząstka porusza się z punktu *a* do punktu *b* po drodze 1,



Rys. 8.4. a) Cząstka, na którą działa siła zachowawcza może przemieścić się z punktu *a* do punktu *b* po drodze 1 lub 2. b) Cząstka wykonuje pełny obieg drogi zamkniętej: porusza się z punktu *a* do punktu *b* po drodze 1, a następnie powraca do punktu *a* po drodze 2

a następnie powraca do punktu  $a$  po drodze 2. W czasie ruchu cząstki po obydwu drogach siła wykonuje nad nią pracę. Nie analizując, na której drodze praca ta jest dodatnia, a na której ujemna, oznaczmy po prostu pracę wykonaną od  $a$  do  $b$  na drodze 1 przez  $W_{ab,1}$ , a pracę, wykonaną od  $b$  do  $a$  na drodze powrotnej 2 przez  $W_{ba,2}$ . Skoro siła jest zachowawcza, to praca całkowita na drodze zamkniętej musi być równa zero, tzn.:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

a stąd:

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \quad (8.3)$$

Z równania tego wynika, że praca wykonana na drodze w jedną stronę musi być przeciwna do pracy wykonanej na drodze powrotnej.

Rozważmy teraz pracę  $W_{ab,2}$  wykonaną przez siłę nad cząstką w czasie jej ruchu z  $a$  do  $b$  po drodze 2, jak zaznaczono na rysunku 8.4a. Siła jest zachowawcza, a zatem praca ta jest przeciwna do  $W_{ba,2}$ , czyli:

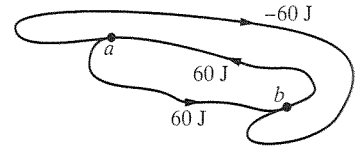
$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \quad (8.4)$$

Podstawiając w równaniu (8.3)  $W_{ab,2}$  w miejsce  $-W_{ba,2}$ , otrzymujemy:

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

czego zamierzaliśmy dowieść.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono trzy drogi, które łączą punkty  $a$  i  $b$ . Działająca na cząstkę siła  $\vec{F}$  wykonuje na każdej z tych dróg pracę o wartości podanej na rysunku. Korzystając z tych informacji odpowiedz, czy siła  $\vec{F}$  jest zachowawcza.



## Przykład 8.1

Na rysunku 8.5a pokazano blok slikskiego sera o masie 2 kg, ześlizgujący się bez tarcia z punktu  $a$  do punktu  $b$  po torze przedstawionym na rysunku. Całkowita droga przebyta przez ser po tym torze jest równa 2 m, a sumaryczna zmiana jego położenia w pionie wynosi 0,8 m. Jaką pracę wykonuje nad serem siła ciężkości w czasie jego ruchu po tym torze?

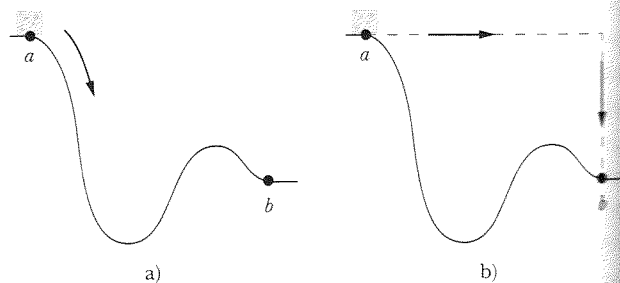
### ROZWIĄZANIE:

**1.** Do obliczenia pracy, wykonanej przez siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  nad serem w czasie jego ruchu po danym torze *nie możemy* zastosować wzoru (7.12) ( $W_g = mgd \cos \phi$ ), gdyż kąt  $\phi$  między kierunkami siły  $\vec{F}_g$  i przemieszczenia  $\vec{d}$  zmienia się wzdłuż toru w sposób, którego nie znamy (a gdybyśmy nawet znali dokładnie kształt toru i potrafili wyznaczyć zmienność  $\phi$  wzdłuż tego toru, to obliczenia byłyby bardzo trudne).

**2.** Siła  $\vec{F}_g$  jest siłą zachowawczą, więc do wyznaczenia pracy możemy zastosować jakąś inną drogę między  $a$  i  $b$ , dla której obliczenia są łatwe. Wybierzmy w tym celu drogę, oznaczoną na rysunku 8.5.b linią przerywaną. Składa się ona z dwóch odcinków prostoliniowych. Dla odcinka poziomego kąt  $\phi$  jest stały

i wynosi  $90^\circ$ . Choć nie znamy przemieszczenia sera w poziomie, to na podstawie wzoru (7.12) stwierdzamy, że praca  $W_h$ , wykonana na odcinku poziomym jest równa:

$$W_h = mgd \cos 90^\circ = 0.$$



**Rys. 8.5.** Przykład 8.1. a) Blok sera ześlizguje się bez tarcia z punktu  $a$  do punktu  $b$  po torze przedstawionym na rysunku. b) Obliczenie pracy wykonanej nad serem przez siłę ciężkości na drodze oznaczonej linią przerywaną jest łatwiejsze niż wyznaczenie pracy wykonanej na drodze, po jakiej ser w rzeczywistości się przemieszczał, a wynik obliczeń jest taki sam dla obydwu dróg.



Dla odcinka pionowego przemieszczenie  $d$  jest równe 0.8 m. a ponieważ wektory  $\vec{F}_g$  i  $\vec{d}$  skierowane są w dół, to kąt  $\phi$  jest stały i wynosi  $0^\circ$ . Z równania (7.12) wynika zatem, że praca  $W_v$ , wykonana na odcinku pionowym jest równa:

$$W_v = mgd \cos 0 = (2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})(1) = 15.7 \text{ J}.$$

Całkowita praca wykonana nad serem przez siłę  $\vec{F}_g$  w czasie jego ruchu z punktu  $a$  do punktu  $b$ , po drodze oznaczonej linią przerywaną jest wobec tego równa:

$$W = W_h + W_v = (0) + (15.7 \text{ J}) \approx 16 \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to także wartość pracy wykonanej nad serem w czasie jego ruchu z  $a$  do  $b$  po danym torze.

## 8.3. Wyznaczanie energii potencjalnej

W tym paragrafie wyprowadzimy wzory na energię potencjalną dla dwóch rodzajów omawianych w tym rozdziale, tzn. dla grawitacyjnej energii potencjalnej i dla energii potencjalnej sprężystości. Najpierw jednak musimy znaleźć ogólny związek między siłą zachowawczą a związaną z nią energią potencjalną.

Rozważmy ciało o właściwościach cząstki stanowiące część układu, w którym działa siła zachowawcza  $\vec{F}$ . Gdy siła wykonuje nad ciałem pracę  $W$ , związana z tym zmiana energii potencjalnej układu jest przeciwna do wykonanej pracy. Związek ten zapisaliśmy już w równaniu (8.1) jako  $\Delta E_p = -W$ . W przypadku ogólnym, gdy siła może zależeć od położenia, praca  $W$  jest wyznaczona przez równanie (7.32), tzn.:

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx. \quad (8.5)$$

Jest to wzór na pracę, wykonaną przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczenia z punktu  $x_{\text{pocz}}$  do punktu  $x_{\text{końc}}$ , przy którym zmienia się konfiguracja układu (ponieważ siła jest zachowawcza, to praca jest taka sama dla każdej drogi między dwoma danymi punktami).

Podstawiając (8.5) do (8.1), wyznaczamy zmianę energii potencjalnej układu, związaną ze zmianą jego konfiguracji jako:

$$\Delta E_p = - \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx. \quad (8.6)$$

Jest to poszukiwane przez nas wyrażenie ogólne. Zastosujemy je teraz w przypadkach szczególnych.

### Grawitacyjna energia potencjalna

Rozważmy najpierw cząstkę o masie  $m$ , poruszającą się pionowo wzdłuż osi  $y$  (o kierunku dodatnim do góry). Gdy cząstka przemieszcza się z punktu  $y_{\text{pocz}}$  do punktu  $y_{\text{końc}}$ , siła ciężkości  $\vec{F}_g$  wykonuje nad nią pracę. W celu wyznaczenia towarzyszącej temu zmiany energii potencjalnej układu ciało–Ziemia zastosujemy równanie (8.6), z tym że: 1) całkować będziemy wzdłuż osi  $y$ , a nie  $x$ , gdyż siła ciężkości działa w pionie, 2) w miejsce siły  $F$  podstawimy wartość  $-mg$ , ponieważ siła  $\vec{F}_g$  ma wartość  $mg$  i jest skierowana wzdłuż osi  $y$  w dół. Mamy wobec tego:

$$\Delta E_p = - \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} (-mg) dy = mg \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} dy = mg [y]_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}}.$$

skąd wynika, że:

$$\Delta E_p = mg(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}) = mg\Delta y. \quad (8.7)$$

Znaczenie fizyczne mają jedynie zmiany  $\Delta E_p$  grawitacyjnej energii potencjalnej (tak samo, jak każdego innego rodzaju energii potencjalnej). Dla wygody obliczeń i rozważań przyjmujemy jednak nieraz, że konfiguracji układu cząstka–Ziemia, w której cząstka znajduje się na pewnej wysokości  $y$  nad Ziemią, odpowiada pewna grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$ . W tym celu zapiszmy równanie (8.7) w postaci:

$$E_p - E_{p \text{ pocz}} = mg(y - y_{\text{pocz}}) = mg\Delta y \quad (8.8)$$

i uznajmy, że  $E_{p \text{ pocz}}$  jest grawitacyjną energią potencjalną układu w **konfiguracji odniesienia**, w której cząstka znajduje się w **punkcie odniesienia**  $y_{\text{pocz}}$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że  $E_{p \text{ pocz}} = 0$  i  $y_{\text{pocz}} = 0$ . Równanie (8.8) przybiera wtedy następującą postać:

$$E_p(y) = mgy \quad (\text{grawitacyjna energia potencjalna}). \quad (8.9)$$

Z tego równania wynika, że:

- Grawitacyjna energia potencjalna układu cząstka–Ziemia zależy jedynie od położenia  $y$  cząstki w pionie, liczonego względem punktu odniesienia  $y = 0$  (czyli jej wysokości), a nie zależy od jej położenia w poziomie.

## Energia potencjalna sprężystości

Rozważmy teraz układ klocek–sprężyna przedstawiony na rysunku 8.3, w którym ruchomy klocek jest przymocowany do końca sprężyny o stałej sprężystości  $k$ . Gdy klocek przemieszcza się z punktu  $x_{\text{pocz}}$  do punktu  $x_{\text{końc}}$ , działa na niego siła sprężystości:  $F = -kx$ . W celu wyznaczenia odpowiadającej temu zmiany energii potencjalnej sprężystości układu klocek–sprężyna korzystamy z równania (8.6), w którym podstawiamy  $-kx$  w miejsce  $F(x)$ . Otrzymujemy:

$$\Delta E_p = - \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} (-kx) dx = k \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} x dx = \frac{1}{2}k [x^2]_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}}.$$

czyli

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2. \quad (8.10)$$

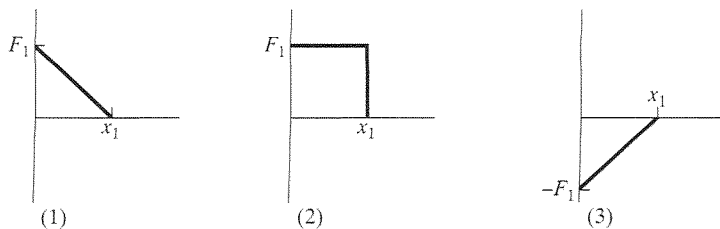
Aby powiązać energię potencjalną  $E_p$  z położeniem klocka  $x$ , wybieramy jako konfigurację odniesienia stan układu, gdy sprężyna jest nieodkształcona, a klocek znajduje się w punkcie  $x_{\text{pocz}} = 0$ . Energia potencjalna  $E_{p \text{ pocz}}$  jest wtedy równa zeru i równanie (8.10) przybiera postać:

$$E_p - 0 = \frac{1}{2}kx^2 - 0.$$

z czego wynika:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{energia potencjalna sprężystości}). \quad (8.11)$$

**SPRAWDZIAN 2:** Cząstka, na którą działa siła zachowawcza skierowana wzdłuż osi  $x$  przemieszcza się wzdłuż tej osi od  $x = 0$  do  $x_1$ . Na rysunkach przedstawiono zależności siły od położenia w trzech przypadkach. We wszystkich przypadkach największa wartość bezwzględna siły  $F_1$  jest taka sama. Uszereguj te przypadki według wartości zmiany energii potencjalnej podczas ruchu cząstki, począwszy od największej (dodatniej).



### Sztuka rozwiązywania zadań

#### Porada 1: Jak używać pojęcia „energia potencjalna”?

Energia potencjalna jest związana z układem jako całością. Możesz się jednak zetknąć ze stwierdzeniem, w którym wiąże się ją tylko z częścią układu. Na przykład, możesz przeczytać, że grawitacyjna energia potencjalna wiszącego na drzewie jabłka wynosi 30 J. Istotnie, tak się często mówi, ale należy zawsze

pamiętać, że jest to skrót myślowy i że w istocie rzeczy chodzi o energię potencjalną układu — w tym przypadku układu jabłko–Ziemia. Musisz także pamiętać, że mówienie o określonej wartości energii potencjalnej, tutaj równej 30 J, ma sens *tylko wtedy*, gdy ustalona jest wartość odniesienia energii potencjalnej, o czym będziemy szczegółowo mówić w przykładzie 8.2.

### Przykład 8.2

Leniwiec o masie 2 kg wisi na gałęzi na wysokości 5 m nad ziemią (rys. 8.6).

a) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$  układu leniwiec–Ziemia, gdy jako punkt odniesienia  $y = 0$  wybierzemy położenie: 1) powierzchni ziemi, 2) podłogi balkonu, znajdującego się o 3 m nad ziemią, 3) gałęzi, na której wisi leniwiec, 4) korony drzewa, znajdującej się o 1 m nad tą gałęzią? Przyjmij, że na poziomie odniesienia  $y = 0$  grawitacyjna energia potencjalna jest równa zeru.

#### ROZWIĄZANIE:

➡ Gdy ustalony jest punkt odniesienia, dla którego  $y = 0$ , grawitacyjną energię potencjalną  $E_p$  układu względem tego punktu odniesienia można wyznaczyć z równania (8.9). Na przykład, w przypadku 1 leniwiec znajduje się na wysokości  $y = 5$  m i otrzymujemy:

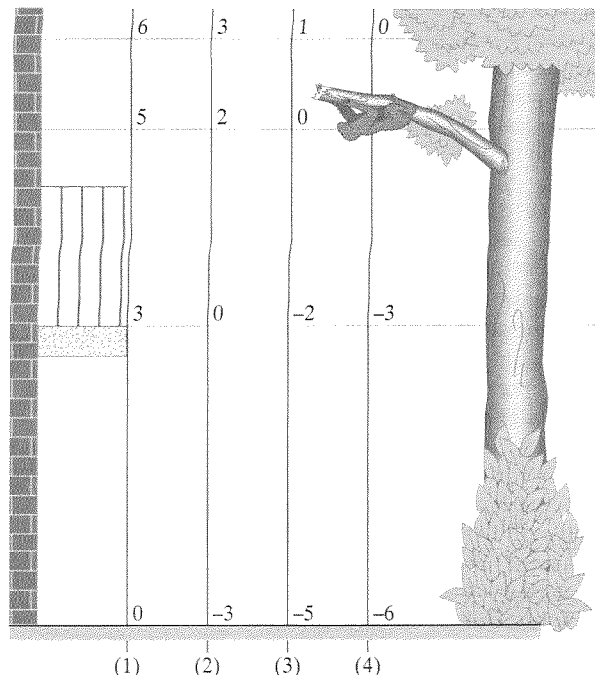
$$E_p = mgy = (2 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m}) = 98 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

W pozostałych przypadkach otrzymujemy:

$$2) E_p = mgy = mg(2 \text{ m}) = 39 \text{ J,}$$

$$3) E_p = mgy = mg(0) = 0 \text{ J,}$$

$$4) E_p = mgy = mg(-1 \text{ m}) = -19,6 \text{ J} \approx -20 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 8.6. Przykład 8.2. Cztery przypadki wyboru punktu odniesienia  $y = 0$ . Wszystkie wartości  $y$  podano w metrach. Wartość energii potencjalnej układu leniwiec–Ziemia zależy od wyboru punktu odniesienia. Od tego wyboru nie zależy jednak zmiana energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu w czasie ruchu leniwca, na przykład, gdy spada on z gałęzi

b) Leniwiec spada na ziemię. Jaka jest przy tym zmiana energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu leniwiec–Ziemia w każdym z przypadków wyboru punktu odniesienia?

wszystkich czterech przypadkach mamy taką samą wartość  $\Delta y = -5$  m. Wobec tego z równania (8.7) wynika, że we wszystkich przypadkach (od 1 do 4):

ROZWIĄZANIE:

$$\Delta E_p = mg\Delta y = (2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(-5 \text{ m}) = -98 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

➔ Zmiana energii potencjalnej nie zależy od wyboru poziomu odniesienia  $y = 0$ ; zależy ona od zmiany wysokości  $\Delta y$ . We

## 8.4. Zachowanie energii mechanicznej

**Energia mechaniczna**  $E_{\text{mech}}$  układu jest sumą jego energii potencjalnej  $E_p$  oraz energii kinetycznej  $E_k$  wszystkich jego składników:

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p \quad (\text{energia mechaniczna}). \quad (8.12)$$

W tym paragrafie zbadamy, co dzieje się z energią mechaniczną, gdy zamiana energii w układzie zachodzi jedynie pod wpływem sił zachowawczych, tzn. gdy na składniki układu nie działają siły tarcia ani siły oporu ośrodka. Założymy również, że układ jest *izolowany* od otoczenia, tzn. że żadne *siły zewnętrzne* pochodzące od ciał spoza układu nie powodują zmian energii w obrębie układu.

Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę  $W$  nad jednym z ciał układu, zachodzi zamiana energii kinetycznej  $E_k$  ciała w energię potencjalną  $E_p$  układu. Z równania (7.10) wynika, że zmiana energii kinetycznej  $\Delta E_k$  jest równa:

$$\Delta E_k = W, \quad (8.13)$$

a z równania (8.1) — że zmiana energii potencjalnej wynosi:

$$\Delta E_p = -W. \quad (8.14)$$

Z równań (8.13) i (8.14) otrzymujemy zatem:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \quad (8.15)$$

Oznacza to, że wzrost jednego z tych rodzajów energii jest dokładnie równy ubytkowi drugiego z nich.

Równanie (8.15) możemy również zapisać w postaci:

$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1}), \quad (8.16)$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil, a zatem do dwóch różnych konfiguracji składników układu. Przekształcając równanie (8.16), otrzymujemy:

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} \quad (\text{zachowanie energii mechanicznej}). \quad (8.17)$$

Z równania tego wynika, że gdy układ jest izolowany, a na jego składniki działają jedynie siły zachowawcze, to:

$$\left( \begin{array}{c} \text{suma } E_k \text{ i } E_p \text{ dla} \\ \text{dowolnego stanu układu} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{suma } E_k \text{ i } E_p \text{ dla} \\ \text{każdego innego stanu układu} \end{array} \right).$$

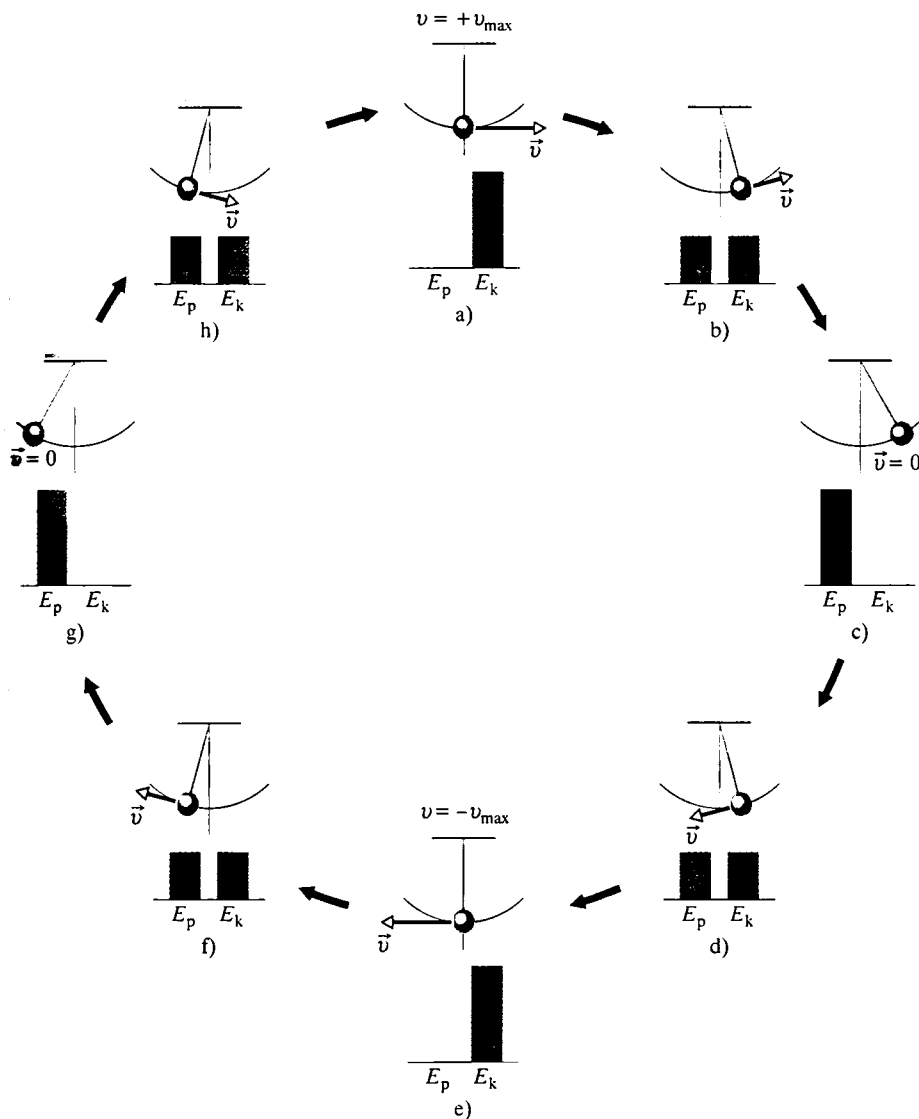
Można to wyrazić jeszcze inaczej:

W układzie izolowanym, w którym zamiana energii pochodzi jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i energia potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  nie może ulegać zmianie.

Twierdzenie to nazywamy **zasadą zachowania energii mechanicznej** (wiesz teraz, czemu zawdzięczają swoją nazwę siły *zachowawcze*). Korzystając z równania (8.15), możemy tę zasadę zapisać w jeszcze innej postaci:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (8.18)$$

Zasada zachowania energii mechanicznej umożliwi nam rozwiązanie zadań, które są bardzo trudne, gdy korzysta się jedynie z zasad dynamiki. Wynika to z następującego twierdzenia:



Rys. 8.7. Wahadło, którego masa jest skupiona w kulce wykonuje drgania — na rysunku przedstawiono ich pełny okres. W czasie ruchu wahadła kulka wznosi się i opada, przy czym zmienia się energia potencjalna i kinetyczna układu wahadło–Ziemia, lecz energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  układu pozostaje stała. Można powiedzieć, że energia mechaniczna zmienia w sposób ciągły postać z kinetycznej na potencjalną i na odwrót. W fazach (a) i (e) cała energia układu jest energią kinetyczną. Kulka ma wtedy największą prędkość i znajduje się w najniższym punkcie toru. W fazach (c) i (g) cała energia układu jest energią potencjalną. Kulka ma wtedy prędkość równą zero i znajduje się w najwyższym punkcie toru. W fazach (b), (d), (f) i (h) połowę energii układu stanowi energia kinetyczna, a połowę — potencjalna. Gdyby w czasie ruchu wahadła występowało tarcie w punkcie zaczepienia wahadła do sufitu lub gdyby ruch kulki napotykał opór powietrza, to energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  nie byłaby zachowana i po pewnym czasie wahadło by się zatrzymało

➤ Gdy energia mechaniczna układu jest zachowana, można powiązać ze sobą sumę energii kinetycznej i potencjalnej w pewnej chwili i w jakiejś innej chwili *bez analizowania ruchu układu w chwilach pośrednich i bez wyznaczania pracy wykonanej przez tym przez działające w układzie siły.*

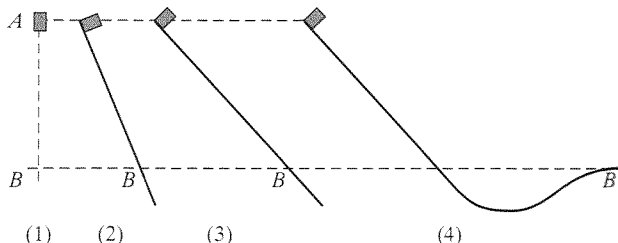
Na rysunku 8.7 przedstawiono przykład zastosowania zasady zachowania energii mechanicznej. W czasie drgań wahadła energia układu wahadło–ziemia zamienia się okresowo z energii kinetycznej  $E_k$  w grawitacyjną energię potencjalną  $E_p$  i na odwrót, przy czym ich suma  $E_k + E_p$  pozostaje stała. Jeśli znamy grawitacyjną energię potencjalną w chwili, gdy kulka osiąga największe wzniesienie (rys. 8.7c), to korzystając z równania (8.17) możemy wyznaczyć energię kinetyczną kulki w najniższym punkcie jej toru (rys. 8.7e).

Jako punkt odniesienia możemy wybrać na przykład najniższy punkt toru kulki i przyjąć, że w tym punkcie grawitacyjna energia potencjalna  $E_{p2} = 0$ . Załóżmy, że w najwyższym punkcie toru energia potencjalna wynosi  $E_{p1} = 20 \text{ J}$  względem wybranego punktu odniesienia. W najwyższym punkcie toru kulka ma prędkość równą zero, więc energia kinetyczna w tym punkcie  $E_{k1} = 0$ . Wstawiając te wartości do równania (8.17), otrzymujemy energię kinetyczną  $E_{k2}$  kulki w najniższym punkcie toru:

$$E_{k2} + 0 = 0 + 20 \text{ J}, \quad \text{czyli} \quad E_{k2} = 20 \text{ J}.$$

Zauważ, że otrzymaliśmy ten wynik bez analizowania ruchu kulki między punktami jej największego i najmniejszego wzniesienia (jak na rysunku 8.7d), a także bez wyznaczania pracy wykonanej przez siły, powodujące ruch wahadła.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono cztery przypadki ruchu klocka pozostającego początkowo w spoczynku. W jednym z nich klocek spada swobodnie, a w pozostałych ześlizguje się bez tarcia po pochylniach o różnym nachyleniu i kształcie. a) U szereguj te przypadki według energii kinetycznej klocka w punkcie B, od wartości największej do najmniejszej. b) U szereguj przypadki według wartości prędkości klocka w punkcie B, od największej do najmniejszej.

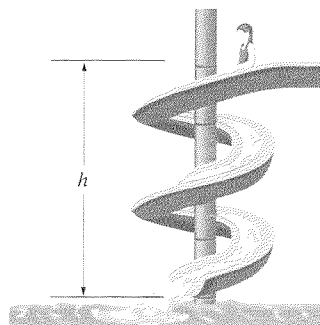


### Przykład 8.3

Jak pokazano na rysunku 8.8 dziecko o masie  $m$ , nieruchome w chwili początkowej, zaczyna ześlizgiwać się wzdłuż zjeżdżalni wodnej. Punkt startowy znajduje się na wysokości  $h = 8.5 \text{ m}$  nad dolnym końcem zjeżdżalni. Zakładając, że zjazd dziecka odbywa się — ze względu na obecność wody — bez tarcia wyznacz prędkość dziecka na końcu zjeżdżalni.

**ROZWIĄZANIE:**

➤ 1. Do wyznaczenia prędkości dziecka na końcu zjeżdżalni nie możemy zastosować przyspieszenia jego ruchu — jak to robiliśmy w poprzednich rozdziałach — gdyż nie znamy nachylenia zjeżdżalni. Jednak prędkość jest związana z energią kinetyczną,



Rys. 8.8. Przykład 8.3. Dziecko ześlizguje się ze zjeżdżalni wodnej o wysokości  $h$

dlatego też być może uda nam się wyznaczyć tę prędkość na podstawie zasady zachowania energii mechanicznej. Gdyby nam się to powiodło, to nie musielibyśmy znać ani nachylenia, ani w ogóle kształtu zjeżdżalni.

Musimy jednak pamiętać, że:

➔ 2. Energia mechaniczna jest zachowana jedynie w układzie izolowanym, w którym zamiana energii jest powodowana przez siły zachowawcze. Sprawdźmy, czy tak jest w naszym przypadku.

**Siły.** Na dziecko działają dwie siły. *Siła ciężkości*, która wykonuje nad nim pracę jest siłą zachowawczą. *Siła normalna*, działająca na dziecko ze strony zjeżdżalni nie wykonuje nad nim pracy, gdyż w każdym punkcie toru jest prostopadła do kierunku ruchu dziecka.

**Układ.** Jedyną siłą, jaka wykonuje pracę nad dzieckiem jest siła ciężkości, dlatego też możemy rozważać układ dziecko–Ziemia. Możemy też przyjąć, że jest to układ izolowany. Wobec tego, skoro rozpatrujemy układ izolowany, a pracę wykonuje w nim siła zachowawcza, to możemy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Oznaczmy energię mechaniczną układu, gdy dziecko znajduje się na górze zjeżdżalni, przez  $E_{\text{mech.g}}$ , a gdy znajduje się ono na dole — przez  $E_{\text{mech.d}}$ . Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że:

$$E_{\text{mech.d}} = E_{\text{mech.g}}$$

Zapisując energię mechaniczną jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej, otrzymujemy:

$$E_{k,d} + E_{p,d} = E_{k,g} + E_{p,g},$$

czyli

$$\frac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d = \frac{1}{2}mv_g^2 + mgy_g.$$

Po podzieleniu obydwu stron tego równania przez  $m$  i jego przekształceniu otrzymujemy:

$$v_d^2 = v_g^2 + 2g(y_g - y_d).$$

Podstawiając do tego wzoru  $v_g = 0$  oraz  $y_g - y_d = h$ , dostajemy:

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(8.5 \text{ m})} = 13 \text{ m/s. (odpowiedź)}$$

Jest to prędkość o takiej samej wartości, jaką miałyby dziecko po spadku swobodnym z wysokości 8,5 m. W rzeczywistości na zjeżdżalni występuje zawsze pewna siła tarcia i ruch dziecka jest nieco wolniejszy.

Zadanie to, trudne do rozwiązania na podstawie zasad dynamiki, okazało się całkiem proste, gdy do jego rozwiązania zastosowaliśmy zasadę zachowania energii mechanicznej. Gdybyśmy jednak chcieli znaleźć czas, po jakim dziecko znajdzie się na końcu zjeżdżalni, to zasada zachowania energii na nic by się nam nie przydała — musielibyśmy znać kształt zjeżdżalni i zadanie nie byłoby łatwe do rozwiązania.

Znając już rozwiązanie tego zadania, powróć do przykładu z krążkiem w pierwszym paragrafie rozdziału 7 i przekonaj się, czy potrafisz teraz wyznaczyć prędkość krążka na końcu toru (wynosi ona 5 m/s).

## Przykład 8.4

Skoczek na linie bungee ma masę 61 kg i stoi na moście o wysokości 45 m nad wodą. Długość nieodkształconej sprężystej liny wynosi  $L = 25$  m. Przyjmij, że odkształcenie liny spełnia prawo Hooke'a, a stała sprężystości liny jest równa 160 N/m. W czasie skoku na linie skoczek nie wpada do wody. Wyznacz wysokość  $h$  stop skoczka nad wodą, gdy znajduje się on najbliżej wody.

### ROZWIĄZANIE:

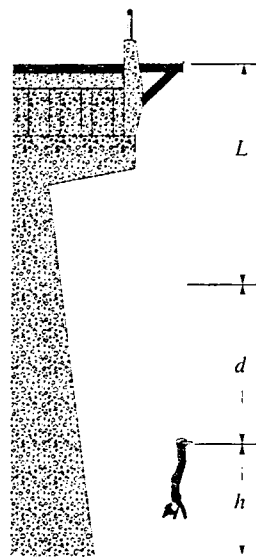
Na rysunku 8.9 przedstawiono skoczka w najniższym punkcie toru, gdy jego stopy znajdują się na wysokości  $h$  nad wodą, a lina wydłużyła się o odcinek  $d$  w stosunku do długości liny nieodkształconej. Jeśli znajdziemy  $d$ , to będziemy mogli obliczyć  $h$ .

➔ 1. Być może uda się nam wyznaczyć  $d$ , korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej, rozpatrując przy tym położenie skoczka w chwili początkowej (na moście) oraz w najniższym punkcie toru lotu.

Musimy pamiętać, że:

➔ 2. Energia mechaniczna jest zachowana jedynie w układzie izolowanym, w którym zamiana energii jest spowodowana przez siły zachowawcze. Sprawdźmy, czy tak jest w naszym przypadku.

**Siły.** Siła ciężkości wykonuje pracę nad skoczkiem przez cały czas jego lotu na linie. Od chwili, gdy lina zostaje napięta, pracę nad nim wykonuje ponadto siła sprężystości liny, zamieniając jego



Rys. 8.9. Przykład 8.4. Skoczek na linie bungee w chwili, gdy znajduje się najbliżej wody

energię na energię potencjalną sprężystości liny. Lina działa także siłą na most, który jest związany z ziemią. Siła ciężkości i siła sprężystości są siłami zachowawczymi.

*Układ.* Wszystkie te siły działają w układzie skoczek–Ziemia–lina, zawierającym też wszystkie ciała, których energia jest wymieniana. Układ ten można uznać za izolowany. Wobec tego możemy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Na podstawie równania (8.18) zapisujemy ją w postaci:

$$\Delta E_k = \Delta E_{p,s} + \Delta E_{p,g} = 0, \quad (8.19)$$

przy czym  $\Delta E_k$  jest zmianą energii kinetycznej skoczka,  $\Delta E_{p,s}$  — zmianą energii potencjalnej sprężystości liny, a  $\Delta E_{p,g}$  — zmianą grawitacyjnej energii potencjalnej skoczka. Wszystkie te zmiany są liczone od punktu początkowego do najniższego punktu toru skoczka. W punkcie początkowym i końcowym skoczek pozostaje w bezruchu (choćby tylko chwilowym), a zatem  $\Delta E_k = 0$ . Z rysunku 8.9 widać, że zmiana wysokości skoczka  $\Delta y$  jest równa  $-(L + d)$ , wobec czego mamy:

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta y = -mg(L + d),$$

gdzie  $m$  jest masą skoczka. Z rysunku 8.9 widać również, że lina zostaje rozciągnięta o odcinek  $d$ . Zatem:

$$\Delta E_{p,s} = \frac{1}{2}kd^2.$$

Wstawiając te wyrażenia oraz dane do równania (8.19), mamy:

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 - mg(L + d) = 0,$$

czyli

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd = 0,$$

a następnie:

$$\frac{1}{2}(160 \text{ N/m})d^2 - (61 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m}) - (61 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)d = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, dostajemy:

$$d = 17,9 \text{ m}.$$

Stopy skoczka znajdują się w odległości  $(L + d) = 42,9 \text{ m}$  niż od punktu wyjściowego, a zatem:

$$h = (45 \text{ m}) - (42,9 \text{ m}) = 2,1 \text{ m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Zachowanie energii mechanicznej

Podczas rozwiązywania zadań dotyczących zachowania energii mechanicznej warto postawić sobie następujące pytania.

*Dla jakiego układu zachowana jest energia mechaniczna?* Musisz umieć oddzielić badany układ od jego otoczenia. Spróbuj sobie wyobrazić zamkniętą powierzchnię taką, że wszystko, co jest wewnątrz niej, stanowi twój układ, a wszystko co jest na zewnątrz niej jest jego otoczeniem. W przykładzie 8.3 układ stanowiły: *dziecko + Ziemia*, a w przykładzie 8.4 — *skoczek + Ziemia + lina*.

*Czy występują siły tarcia lub oporu ośrodka?* W obecności tarcia lub oporu ośrodka energia mechaniczna nie jest zachowana.

*Czy badany układ jest izolowany?* Zasada zachowania energii mechanicznej obowiązuje tylko w układzie zamkniętym. Oznacza to, że żadne siły zewnętrzne (tzn. siły wywierane przez ciała należące do układu) nie wykonują pracy nad ciałami będącymi składnikami układu.

*Jaki jest stan początkowy i końcowy badanego układu?* Układ przechodzi z jakiegoś stanu początkowego (czyli konfiguracji) do stanu końcowego. Zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej polega na stwierdzeniu, że  $E_{\text{mech}}$  ma taką samą wartość w obydwu tych stanach. Musisz mieć pełną jasność, które są stany.

## 8.5. Zastosowanie krzywych energii potencjalnej

Rozważmy jeszcze raz cząstkę będącą składnikiem układu, w którym działa siła zachowawcza. Przyjmijmy tym razem, że w czasie, gdy siła zachowawcza wykonuje nad nią pracę, cząstka może się poruszać tylko wzdłuż osi  $x$ . Bardzo wiele informacji o ruchu cząstki można uzyskać z wykresu energii potencjalnej układu jako funkcji położenia cząstki  $E_p(x)$ . Zanim jednak przejdziemy do analizy takich wykresów, wprowadzimy jeszcze jeden związek.

### Jak analitycznie wyznaczyć siłę?

Z równania (8.6) wiemy, jak w przypadku jednowymiarowym wyznaczyć zmianę energii potencjalnej  $\Delta E_p$  między dwoma położeniami cząstki, jeśli znamy siłę  $F(x)$ . Obecnie chcemy skorzystać z tego równania w celu odwrotnym — chcemy byłśmy wyznaczyć siłę, znając zależność energii potencjalnej od położenia  $E_p(x)$ .



Dla ruchu w jednym wymiarze praca  $W$  wykonana nad cząstką przez działającą na nią siłę, przy przemieszczeniu cząstki o odcinek  $\Delta x$ , wynosi  $F(x)\Delta x$ .

Równanie (8.1) możemy zatem zapisać w postaci:

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x.$$

Składając to równanie względem siły  $F(x)$  i przechodząc w granicy do pochodnej, otrzymujemy:

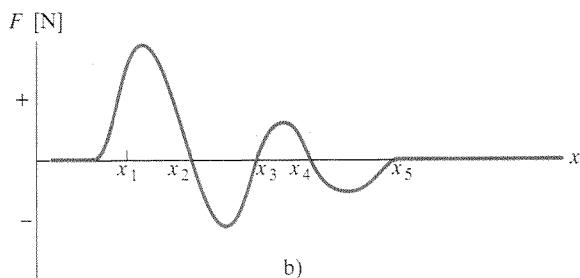
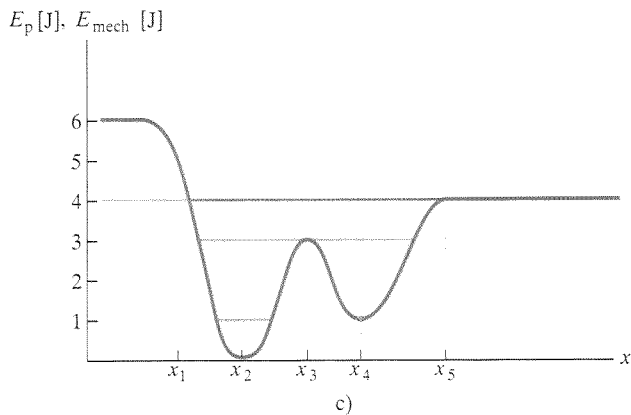
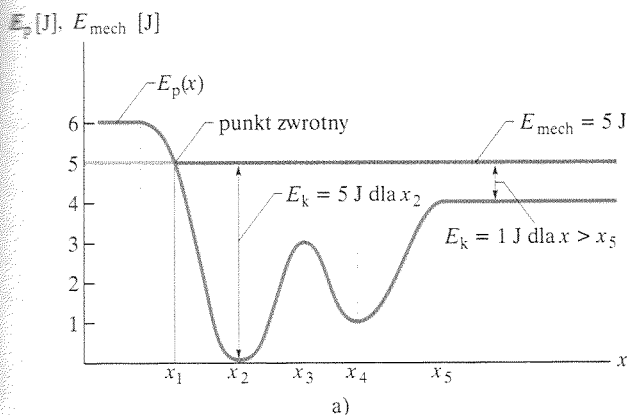
$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad (\text{ruch w jednym wymiarze}), \quad (8.20)$$

to jest wyrażeniem, które zamierzaliśmy wyprowadzić.

Aby sprawdzić ten wzór, podstawmy do niego:  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ , czyli wyrażenie na energię sprężystości sprężyny. Z równania (8.20) otrzymujemy — jak się należało spodziewać —  $F(x) = -kx$ , czyli prawo Hooke'a. Podobnie możemy do tego wzoru podstawić:  $E_p(x) = mgx$ , czyli wyrażenie na grawitacyjną energię potencjalną układu cząstka–Ziemia, gdy cząstka o masie  $m$  znajduje się na wysokości  $x$  nad ziemią. Z równania (8.20) otrzymujemy wówczas:  $F = -mg$  czyli wyrażenie na działającą na cząstkę siłę ciężkości.

### Krzywa energii potencjalnej

Na rysunku 8.10a przedstawiono wykres energii potencjalnej  $E_p(x)$  jako funkcji położenia cząstki, dla układu zawierającego cząstkę, poruszającą się w jednym wymiarze, nad którą pracę wykonuje siła zachowawcza  $F(x)$ . Siłę tę możemy łatwo wyznaczyć z tego wykresu, znajdując (graficznie) nachylenie krzywej  $E_p(x)$



Rys. 8.10. a) Wykres  $E_p(x)$  czyli zależności energii potencjalnej od położenia, dla układu, zawierającego cząstkę, mogącą poruszać się tylko wzdłuż osi  $x$ . Nie ma tarcia, więc energia mechaniczna jest zachowana. b) Wykres działającej na cząstkę siły  $F(x)$  jako funkcji położenia, otrzymanej z krzywej energii potencjalnej przez wyznaczenie jej nachylenia w poszczególnych punktach. c) Wykres  $E_p(x)$ , jak w punkcie (a), lecz dla trzech innych wartości energii  $E_{\text{mech}}$

w różnych jej punktach (wiemy z równania (8.20), że wartość  $F(x)$  jest przeciwna do nachylenia krzywej  $E_p(x)$ ). Na rysunku 8.10b przedstawiono otrzymany w ten sposób wykres  $F(x)$ .

## Punkty zwrotne

Pod nieobecność sił niezachowawczych energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  układu ma wartość stałą daną równaniem:

$$E_p(x) + E_k(x) = E_{\text{mech}}, \quad (8.21)$$

w którym  $E_k(x)$  opisuje energię kinetyczną cząstki jako funkcję jej położenia  $x$ . Równanie (8.21) możemy zapisać jako:

$$E_k(x) = E_{\text{mech}} - E_p(x). \quad (8.22)$$

Założmy, że energia  $E_{\text{mech}}$  (która jest — pamiętajmy — stała) wynosi 5 J. Na rysunku 8.10a należałoby ją przedstawić jako prostą poziomą, przechodzącą przez punkt na osi energii o wartości 5 J (w istocie już to zrobiono).

Z równania (8.22) wynika, jak wyznaczyć energię kinetyczną  $E_k$  dla dowolnego położenia cząstki  $x$ , mianowicie z krzywej  $E_p(x)$  należy odczytać wartość  $E_p$ , odpowiadającą danemu położeniu  $x$ , a następnie odjąć tę wartość  $E_p$  od  $E_{\text{mech}}$ . Na przykład, gdy cząstka znajduje się w dowolnym punkcie na prawo od  $x_5$ , wtedy  $E_k = 1$  J. Energia  $E_k$  jest największa (5 J), gdy cząstka jest w punkcie  $x_2$ , a najmniejsza (równa zero), gdy cząstka jest w punkcie  $x_1$ .

Energia  $E_k$  nie może być ujemna (gdyż wartość  $v^2$  jest zawsze nieujemna), więc cząstka nie może znaleźć się na lewo od punktu  $x_1$ , w tym obszarze bowiem różnica  $E_{\text{mech}} - E_p$  jest ujemna. Gdy cząstka porusza się z punktu  $x_2$  do  $x_1$ , wartość  $E_k$  maleje (cząstka zwalnia) aż do  $E_k = 0$  w punkcie  $x_1$  (cząstka ma w tym punkcie prędkość równą zero).

Zauważ, że gdy cząstka zbliża się do punktu  $x_1$ , działająca na nią siła — daną równaniem (8.20) — jest dodatnia (ponieważ nachylenie  $dE_p/dx$  jest ujemne). Oznacza to, że po dotarciu do punktu  $x_1$  cząstka nie pozostaje w nim, lecz zaczyna poruszać się w prawo, czyli w kierunku przeciwnym do poprzedniego kierunku jej ruchu. Punkt, w którym  $E_k = 0$  (gdyż  $E_p = E$ ) i cząstka zmienia kierunek ruchu, taki jak  $x_1$ , nazywamy **punktem zwrotnym**. Z prawej strony wykresu, na rysunku 8.10a nie ma punktu zwrotnego (w którym  $E_k = 0$ ). Cząstka poruszająca się w prawo będzie już zawsze poruszała się w tym kierunku.

## Położenia równowagi

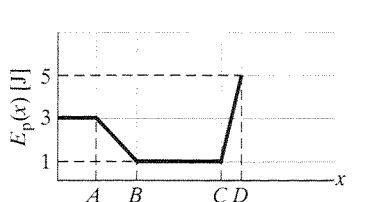
Na rysunku 8.10c na tę samą co poprzednio krzywą energii potencjalnej  $E_p(x)$  naniesiono trzy inne wartości  $E_{\text{mech}}$ . Zobaczmy, jak zmienia się sytuacja cząstki wraz ze zmianą tej energii. Jeśli  $E_{\text{mech}} = 4$  J (linia fioletowa), to punkt zwrotny znajduje się bardziej na prawo niż  $x_1$  (między  $x_1$  a  $x_2$ ). Z drugiej strony, dla każdego punktu leżącego na prawo od  $x_5$  energia mechaniczna układu jest równa jego energii potencjalnej. Cząstka nie ma więc energii kinetycznej, a ponieważ — jak wynika z równania (8.20) — nie działa na nią żadna siła, to musi ona pozostawać w spoczynku. Takie położenie cząstki nazywamy położeniem

**Równowagi obojętnej** (w takim stanie jest np. kulka szklana, która leży na poziomym blacie).

Jeśli  $E_{\text{mech}} = 3 \text{ J}$  (linia różowa), to istnieją dwa punkty zwrotne — jeden między  $x_1$  a  $x_2$  oraz drugi między  $x_4$  a  $x_5$ . Ponadto, w punkcie  $x_3$  mamy  $E_k = 0$ . Na cząstkę umieszczoną dokładnie w tym punkcie nie działa żadna siła, a zatem pozostaje ona w spoczynku. Gdy jednak przemieści się ona choć trochę w którąś stronę, zacznie na nią działać siła w kierunku zgodnym z przemieszczeniem cząstki, a zatem cząstka będzie się od tego punktu oddalać. W takim przypadku mówimy o położeniu **równowagi nietrwalej** (przykładem może być kulka szklana, starannie umieszczona na szczycie kuli do kręgli).

Rozważmy jeszcze zachowanie się cząstki dla  $E_{\text{mech}} = 1 \text{ J}$  (linia zielona). Jeśli cząstkę umieścimy w punkcie  $x_4$ , to zostanie ona w tym punkcie na zawsze. Nie może ona przemieścić się sama z tego punktu ani w lewo, ani w prawo, bo odpowiadałoby to ujemnej energii kinetycznej. Jeśli pchnęlibyśmy ją nieznacznie w lewą lub prawą stronę, to pojawiłaby się siła zwrotna kierująca cząstkę z powrotem do  $x_4$ . Takie położenie nazywamy położeniem **równowagi trwałe** (przykład: kulka szklana na dnie miski w kształcie półkuli). Cząstka umieszczona w pobliżu punktu  $x_2$  znajdzie się między dwoma punktami zwrotnymi. Będzie ona mogła poruszać się — ale niezbyt daleko — w stronę punktu  $x_1$  lub punktu  $x_3$ . W takiej sytuacji mówimy, że cząstka znajduje się w *studni potencjału* (w naszym przypadku o kształcie filizanki).

**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku przedstawiono krzywą energii potencjalnej  $E_p(x)$  dla układu zawierającego cząstkę, mogącą poruszać się w jednym wymiarze. a) Uszereguj obszary  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$  według wartości siły działającej na cząstkę, od największej do najmniejszej. b) Jaki jest kierunek siły działającej na cząstkę w obszarze  $AB$ ?



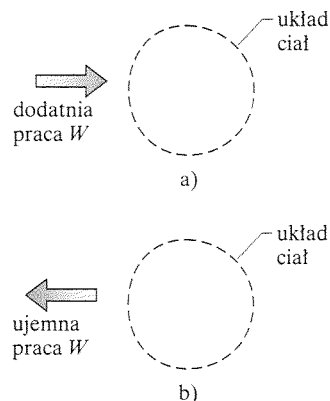
## 8.6. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

W rozdziale 7 zdefiniowaliśmy pracę jako energię przekazaną ciału lub odebraną od niego w wyniku działania na to ciało siły. Obecnie uogólnimy tę definicję na przypadek siły zewnętrznej, działającej na układ ciał.

Praca jest równa energii przekazanej układowi lub odebranej od niego przez siłę zewnętrzną działającą na ten układ.

Na rysunku 8.11a przedstawiono sytuację, w której praca jest dodatnia (układ *zyskuje* energię), a na rysunku 8.11b — sytuację, w której praca jest ujemna (układ *traci* energię). Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, energia przekazana układowi lub odebrana od niego jest równa *całkowanej pracy* wykonanej przez te siły.

Energia jest przekazywana w podobny sposób, w jaki odbywają się przelewy pieniędzy na rachunek bankowy i z tego rachunku. Jeśli układ stanowi



Rys. 8.11. a) Praca  $W$  wykonana nad dowolnym układem jest dodatnia, jeśli energia zostaje przekazana układowi. b) Praca  $W$  jest ujemna, gdy energia jest odebrana od układu

pojedyncza cząstka lub ciało o analogicznych właściwościach, jakie rozważaliśmy w rozdziale 7, to praca wykonana przez siłę nad tym układem, może zmienić jedynie jego energię kinetyczną. Praca jest wtedy równoważna zmianie energii kinetycznej, co opisuje równanie (7.10) ( $\Delta E_k = W$ ). W języku bankowców powiemy, że pojedyncza cząstka ma tylko jeden rachunek energii, zwany energią kinetyczną. Siła zewnętrzna może przekazać energię na ten rachunek lub odprowadzić ją z niego. Gdy jednak układ jest bardziej złożony, siła zewnętrzna może powodować zmiany innych rodzajów energii (na przykład energii potencjalnej) — układ złożony ma wiele rachunków energii.

Spróbujemy wyznaczyć związki między pracą i energią dla takich złożonych układów, rozważając dwa podstawowe przypadki, w których nie występuje lub występuje tarcie.

### Brak tarcia

Wyobraź sobie, że startujesz w konkursie rzutu kulą do kręgli. Aby wyrzucić kulę, najpierw przykucasz, umieszczając ręce na podłodze pod kulą, po czym gwałtownie prostujesz się, podnosząc jednocześnie szybko ręce, aby w końcu wyrzucić kulę pod kątem w górę, mniej więcej na wysokości twarzy. Przy twoim ruchu w górę siła, jaką działasz na kulę niewątpliwie wykonuje pracę. Jest to siła zewnętrzna, która przekazuje energię... no właśnie — jakiemu układowi?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się, jakie ciała doznają zmiany energii. Zmienia się energia kinetyczna kuli (o  $\Delta E_k$ ), a ponadto — ponieważ zmienia się odległość kuli od ziemi — ulega zmianie grawitacyjna energia potencjalna układu kula–Ziemia (o  $\Delta E_p$ ). Aby uwzględnić obie te zmiany, musimy rozpatrywać układ kula–Ziemia. Przyłożona przez ciebie siła jest siłą zewnętrzną, wykonującą pracę nad tym układem, a praca ta jest równa:

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p, \quad (8.23)$$

czyli

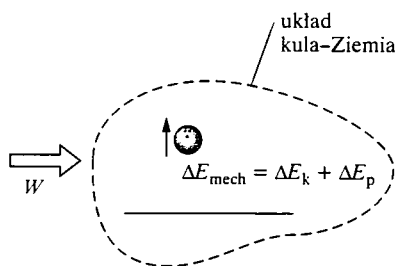
$$W = \Delta E_{\text{mech}} \quad (\text{praca wykonana nad układem, brak tarcia}), \quad (8.24)$$

przy czym  $\Delta E_{\text{mech}}$  jest zmianą energii mechanicznej układu. Dwa powyższe równania, zilustrowane także na rysunku 8.12 pozwalają stwierdzić równość pracy wykonanej nad układem przez siłę zewnętrzną i zmiany energii układu pod nieobecność tarcia.

### Obecność tarcia

Rozważmy obecnie sytuację przedstawioną na rysunku 8.13a. Na klocek działa wzdłuż osi  $x$  stała siła pozioma  $\vec{F}$ , przy czym przy przemieszczeniu klocka o  $d$  jego prędkość zwiększa się z  $\vec{v}_0$  na  $\vec{v}$ . W czasie ruchu klocka działa na niego ze strony podłoża stała siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$ . Przyjmijmy początkowo, że naszym układem jest sam klocek i zastosujmy do niego drugą zasadę dynamiki. W rozważanym przypadku możemy ją zapisać dla składowych wzdłuż osi  $x$  ( $F_{\text{wyp},x} = ma_x$ ), co daje:

$$F - f_k = ma. \quad (8.25)$$



Rys. 8.12. Nad układem złożonym z kuli do kręgli i Ziemi zostaje wykonana dodatnia praca  $W$ , co powoduje zmianę energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  układu, zmianę energii kinetycznej  $\Delta E_k$  kuli, oraz grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu

Obie siły są stałe, a zatem stałe jest też przyspieszenie  $\vec{a}$ . Możemy więc skorzystać z równania (2.16), aby otrzymać:

$$v^2 = v_0^2 + 2ad.$$

Rozwiązując to równanie względem  $a$ , a następnie podstawiając rozwiązanie do równania (8.25), dostajemy po przekształceniach:

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d. \quad (8.26)$$

Dla klocka  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k$ , dlatego też powyższe równanie możemy zapisać jako:

$$Fd = \Delta E_k + f_k d. \quad (8.27)$$

W ogólniejszym przypadku (na przykład, gdy klocek porusza się po równi pochyłej) może zachodzić również zmiana energii potencjalnej. Aby to uwzględnić, uogólnimy równanie (8.27), zapisując je w postaci:

$$Fd = \Delta E_{\text{mech}} + f_k d. \quad (8.27)$$

Doświadczalnie można stwierdzić, że gdy klocek ślizga się po podłożu, sam klocek i ta część podłoża, po której się on ślizga, się rozgrzewają. Jak dowiesz się z rozdziału 19, temperaturę ciała można powiązać z energią termiczną  $E_{\text{term}}$  ciała, tzn. energią związaną z chaotycznym ruchem atomów i cząsteczek ciała. Energia termiczna klocka i podłoża wzrasta, ponieważ: 1) działa między nimi tarcie oraz 2) następuje ruch ciała. Przypomnijmy, że tarcie pochodzi od spawania na zimno stykających się ze sobą powierzchni. Gdy klocek ślizga się po podłożu, na styku powierzchni klocka i podłoża ciągle następuje zrywanie i tworzenie na nowo miejsc spawanych, dzięki czemu klocek i powierzchnia się rozgrzewają. W wyniku poślizgu rośnie zatem ich energia termiczna  $E_{\text{term}}$ .

Doświadczenie uczy nas także, że wzrost energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  jest równy iloczynowi wartości  $f_k$  i  $d$ :

$$\Delta E_{\text{term}} = f_k d \quad (\text{wzrost energii termicznej przy poślizgu}). \quad (8.29)$$

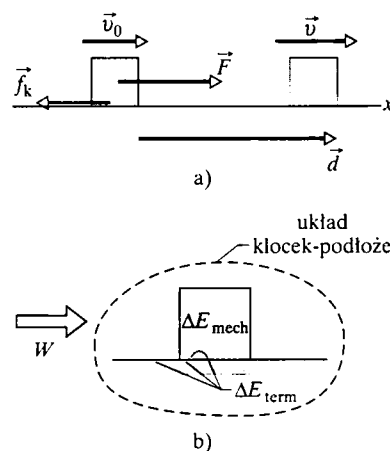
Równanie (8.28) możemy zatem zapisać jako:

$$Fd = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}. \quad (8.30)$$

Wielkość  $Fd$  jest pracą  $W$  wykonaną przez siłę zewnętrzną  $\vec{F}$  (czyli energią, przekazaną w wyniku działania tej siły), lecz nad jakim układem wykonana jest ta praca (jakim ciałom przekazana jest energia)? Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się, jakie ciała zmieniają swoją energię. Zmienia się energia mechaniczna klocka, a także energia termiczna klocka i podłoża. Wobec tego siła  $\vec{F}$  wykonuje pracę nad układem klocek–podłoże. Praca ta jest równa:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} \quad (\text{praca wykonana nad układem w obecności tarcia}). \quad (8.31)$$

Równanie to, które zilustrowano na rysunku 8.13b pozwala stwierdzić równość pracy wykonanej nad układem przez siłę zewnętrzną i zmiany energii układu w obecności tarcia.



Rys. 8.13. a) Klocek porusza się po podłożu pod wpływem siły  $\vec{F}$ , a jego ruchowi przeciwdziałają siła tarcia kinetycznego. Klocek doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , przy czym na początku ma prędkość  $\vec{v}_0$ , a na końcu —  $\vec{v}$ . b) Siła  $\vec{F}$  wykonuje dodatnią pracę  $W$  nad układem klocek–podłoże, co powoduje zmianę energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  klocka, oraz zmianę energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  klocka i podłoża

**SPRAWDZIAN 5:** Wykonano trzy doświadczenia, podczas których do klocka ślizgającego się po podłożu w obecności tarcia przyłożono poziomo, jak na rysunku 8.13a, siły zewnętrzne o różnych wartościach. W tabeli podano wartości sił oraz ich wpływ na wartość prędkości klocka. We wszystkich tych doświadczeniach siła działała na klocek podczas takiego samego przemieszczenia  $d$ . Uszereguj te doświadczenia ze względu na zmianę energii termicznej klocka i podłoża, w czasie przemieszczenia klocka o  $d$ , od największej do najmniejszej.

Doświadczenie	$F$	Wartość prędkości klocka
a	5 N	zmaląła
b	7 N	nie zmieniła się
c	8 N	wzrosła

## Przykład 8.5

Prehistoryczni mieszkańcy Wyspy Wielkanocnej najprawdopodobniej transportowali swe gigantyczne posągi kamienne w ten sposób, że każdy z nich był ułożony na drewnianych saniach, które następnie przesuwano po torze, tworzonym przez niemal jednokowej grubości pnie drzew działające jak rolki. Aby sprawdzić tę hipotezę, wykonano doświadczenie, w którym 25 mężczyzn zdołało w ciągu 2 minut przemieścić w ten sposób na odległość 45 m po poziomym torze posąg o masie 9000 kg, zbliżonej do masy posągów z Wyspy Wielkanocnej.

a) Oszacuj pracę wykonaną przez wypadkową sił  $\vec{F}$ , jakimi działali na posąg ci mężczyźni w czasie przemieszczania posągu na odległość 45 m i stwierdź, nad jakim układem została wykonana ta praca.

### ROZWIĄZANIE:

1. Pracę możemy wyznaczyć z równania (7.7) ( $W = Fd \cos \phi$ ). Odległość  $d$  wynosi 45 m,  $F$  jest wartością siły, jaką działało na posąg 25 mężczyzn, a  $\phi = 0^\circ$ . Przyjmijmy, że każdy z mężczyzn działał na posąg siłą dwa razy większą od swego ciężaru, który uznamy za taki sam dla wszystkich mężczyzn, równy  $mg$ . Wartość siły wypadkowej wynosiła zatem:  $F = (25)(2mg) = 50mg$ . Zakładając następnie, że masa każdego mężczyzny była równa 80 kg, z równania (7.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W &= Fd \cos \phi = 50mgd \cos \phi \\ &= (50)(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(45 \text{ m}) \cos 0^\circ \\ &= 1.8 \cdot 10^6 \text{ J} \approx 2 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

2. Aby ustalić, jakie ciała stanowią układ, nad którym wykonywana jest praca, zastanówmy się, które ciała zmieniają swoje energie. Posąg porusza się, a więc z pewnością w czasie tego ruchu ulega zmianie jego energia kinetyczna. Można też bez trudu zgadnąć, że między saniami, pniami i podłożem działają znaczne siły tarcia, a zatem zmienia się energia termiczna tych ciał. Układ,

nad którym wykonywana jest praca składa się więc z posągu, sani, pni i podłoża.

b) Ile wynosi wzrost energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  układu w czasie przemieszczania posągu na odległość 45 m?

### ROZWIĄZANIE:

Zmiana energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  i praca  $W$  wykonana przez siłę  $\vec{F}$  są ze sobą związane za pośrednictwem równania (8.31), wyrażającego równość pracy i zmiany energii w obecności siły tarcia:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}.$$

Wartość  $W$  wyznaczyliśmy w punkcie (a). Zmiana energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  sani jest równa zeru, gdyż posąg znajduje się w spoczynku na początku i na końcu przemieszczenia, a jego wysokość nad ziemią nie ulega zmianie. Mamy wobec tego:

$$\Delta E_{\text{term}} = W = 1.8 \cdot 10^6 \text{ J} \approx 2 \text{ MJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Oszacuj pracę, jaką musiałoby wykonać tych 25 mężczyzn, przemieszczając posąg o 10 km po płaskim terenie na Wyspie Wielkanocnej. Oszacuj też zachodzącą przy tym całkowitą zmianę energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  układu posąg–sanie–pnie–podłoże.

### ROZWIĄZANIE:

Postępujemy, jak w punktach (a) i (b). Pracę  $W$  obliczamy tak, jak w punkcie (a), z tym, że teraz podstawiamy za  $d$  wartość  $1 \cdot 10^4$  m. Jak poprzednio, przyrównujemy do siebie  $\Delta E_{\text{term}}$  i  $W$ . Otrzymujemy w ten sposób:

$$W = \Delta E_{\text{term}} = 3.9 \cdot 10^8 \text{ J} \approx 400 \text{ MJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przemieszczenie posągu wymagałoby zatem oddania przez tych mężczyzn oszałamiającej ilości energii. Niemniej jednak mężczyźni ci mogliby przetransportować posąg na odległość 10 km, a zatem nie są do tego potrzebne żadne tajemne źródła energii.

## Przykład 8.6

Dostawca żywności pcha po betonowej podłodze drewnianą skrzynię z głowami kapusty (o całkowitej masie  $m = 14$  kg), działając na nią stałą siłą poziomą  $\vec{F}$  o wartości 40 N. W trakcie prostoliniowego przemieszczenia o wartości  $d = 0,5$  m prędkość skrzyni maleje od wartości  $v_0 = 0,6$  m/s do wartości  $v = 0,2$  m/s.

a) Wyznacz pracę wykonaną przez siłę  $\vec{F}$ . Nad jakim układem jest ona wykonana?

ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Pracę  $W$  wykonaną przez siłę  $\vec{F}$  możemy wyznaczyć z równania (7.7), co daje:

$$W = Fd \cos \phi = (40 \text{ N})(0,5 \text{ m}) \cos 0^\circ = 20 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

➔ 2. Aby ustalić, które ciała stanowią układ, nad którym wykonywana jest praca zastanówmy się, które ciała zmieniają swoje energie. Wartość prędkości skrzyni ulega zmianie, tak więc z pewnością zmienia się energia kinetyczna skrzyni. Czy między skrzynią a podłogą występuje tarcie, a więc, czy ulega zmianie energia termiczna skrzyni i podłogi? Zauważ, że kierunek siły  $\vec{F}$  jest taki sam, jak kierunek prędkości skrzyni.

➔ 3. Gdyby zatem nie było tarcia, to w wyniku działania siły  $\vec{F}$  zwiększałaby się prędkość skrzyni. Tymczasem skrzynia zwalnia, a więc tarcie z pewnością występuje, a zatem następuje

zmiana energii termicznej skrzyni i podłogi. Wobec tego układem, nad którym wykonywana jest praca, jest układ skrzynia–podłoga, ponieważ obie zmiany energii występują w tym układzie.

c) Ile wynosi wzrost energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  ustalonego układu skrzynia–podłoga?

ROZWIĄZANIE:

➔ Zmiana energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  jest związana z wykonaną przez siłę  $\vec{F}$  pracą  $W$ . za pomocą równania (8.31), wyrażającego równość pracy i zmiany energii w obecności tarcia:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}. \quad (8.32)$$

Wartość pracy  $W$  znamy już z punktu (a). Zmiana energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  skrzyni jest równa tylko zmianie jej energii kinetycznej, ponieważ energia potencjalna się nie zmienia. Mamy zatem:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (8.32) i rozwiązując je względem  $\Delta E_{\text{term}}$ , otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{term}} &= W - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) = W - \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \\ &= 20 \text{ J} - \frac{1}{2}(14 \text{ kg})[(0,2 \text{ m/s})^2 - (0,6 \text{ m/s})^2] \\ &= 22,2 \text{ J} \approx 22 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

## 8.7. Zasada zachowania energii

Omówiliśmy już wiele sytuacji, w których energia jest dostarczana ciałom lub ich układom, lub też jest od nich odbierana, co przypomina przepływ pieniędzy między rachunkami bankowymi. We wszystkich przypadkach zakładaliśmy, że każdą zmianę energii możemy jakoś wyjaśnić, że energia nie może się w cudowny sposób pojawiać ani znikać. Wyrażając to bardziej formalnie przyjmowaliśmy (prawidłowo), że energia spełnia prawo, zwane **zasadą zachowania energii**, dotyczące całkowitej energii  $E$  układu. Energia całkowita jest to suma energii mechanicznej układu, jego energii termicznej oraz wszystkich rodzajów jego energii wewnętrznej, innych niż energia termiczna (tych innych postaci energii wewnętrznej jeszcze nie omawialiśmy). Zasada ta mówi, co następuje:

➤ Zmiana całkowitej energii  $E$  układu jest równa energii dostarczonej do układu lub od niego odebranej.

Jedynym rozważanym przez nas dotąd sposobem zmiany energii jest wykonanie nad układem pracy  $W$ . Zatem zasadę zachowania energii możemy tymczasem zapisać w postaci:

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}}, \quad (8.33)$$

przy czym  $\Delta E_{\text{mech}}$  jest dowolną zmianą energii mechanicznej układu,  $\Delta E_{\text{term}}$  — dowolną zmianą jego energii termicznej, a  $\Delta E_{\text{wewn}}$  — dowolną zmianą innych postaci jego energii wewnętrznej. Zmiana energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  zawiera w sobie zmianę energii kinetycznej  $\Delta E_k$  oraz zmianę energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu (sprężystości, grawitacyjnej lub jakiegokolwiek innej).

Zasady zachowania energii *nie wyprowadziliśmy* z podstawowych praw fizyki. Jest to prawo wynikające z niezliczonych doświadczeń. Naukowcy i inżynierowie nie napotkali dotychczas żadnego wyjątku od tej zasady.

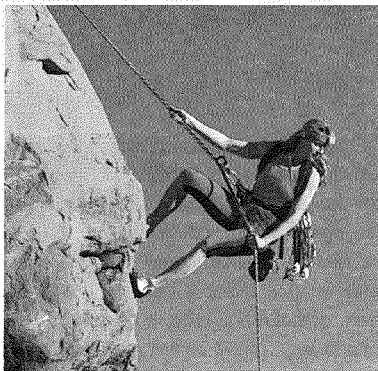
### Układ izolowany

Jeśli układ jest izolowany od otoczenia, to energia nie może być do niego dostarczona ani od niego odebrana. W tym przypadku zasada zachowania energii ma następujące brzmienie:

➤ Całkowita energia  $E$  układu izolowanego nie może się zmieniać.

Wiele zmian energii może natomiast zachodzić w *obrębie* układu izolowanego, na przykład energia kinetyczna może zamieniać się na energię potencjalną lub energię termiczną. Jednakże suma wszystkich rodzajów energii w układzie nie może ulegać zmianie.

Jako przykład możemy przeanalizować sytuację przedstawioną na rysunku 8.14. Zakładamy, że alpinistka, jej sprzęt i Ziemia stanowią układ izolowany. Opuszczając się wzdłuż ściany skalnej, przy czym zmienia się konfiguracja ciała układu, alpinistka musi sterować zamianą grawitacyjnej energii potencjalnej układu na inne rodzaje energii (energia nie może po prostu zniknąć). Energia potencjalna zamienia się częściowo na energię kinetyczną alpinistki. Jednak kobieta nie chce oczywiście, aby ta zamiana energii była zbyt duża, bo wtedy musiałaby bardzo szybko zjeżdżać wzdłuż ściany. Aby to osiągnąć, linę przekłada się przez metalowe pierścienie, tak aby przy ruchu alpinistki w dół występowało tarcie między liną a tymi pierścieniami. Przy ślizganiu się pierścieni po linie grawitacyjna energia potencjalna układu zamienia się na energię termiczną liny i pierścieni z szybkością, którą kobieta może łatwo sterować. Całkowita energia układu alpinistka–sprzęt–Ziemia (czyli suma grawitacyjnej energii potencjalnej, energii kinetycznej i energii termicznej tego układu) nie zmienia się w czasie zjazdu alpinistki wzdłuż ściany.



Rys. 8.14. Opuszczając się wzdłuż ściany skalnej, alpinistka dokonuje zamiany grawitacyjnej energii potencjalnej układu, złożonego z siebie, swojego sprzętu i Ziemi na inne rodzaje energii. Wykonująca zjazd kobieta owinęła linę wokół metalowych pierścieni, tak że lina trze o nie. Dzięki temu większość energii potencjalnej zamienia się na energię termiczną liny i pierścieni, a nie na energię kinetyczną alpinistki

Zasadę zachowania energii w układzie izolowanym możemy zapisać na dwa sposoby. Z jednej strony, możemy wstawić w równaniu (8.33)  $W = 0$ , co daje

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}} = 0 \quad (\text{układ izolowany}). \quad (8.34)$$

Z drugiej strony, możemy zapisać energię mechaniczną jako  $\Delta E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},2} - E_{\text{mech},1}$ , gdzie wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil, na przykład przed i po zajściu pewnego procesu. Równanie (8.34) przybiera wtedy postać

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}} - \Delta E_{\text{wewn}}. \quad (8.35)$$



Z równania (8.35) wynika, że:

► Dla układu izolowanego możemy powiązać całkowitą energię układu w pewnej chwili z jego całkowitą energią w innej chwili w sposób *niewymagający znajomości energii w chwilach pośrednich*.

Stwierdzenie to daje nam do ręki bardzo użyteczne narzędzie do rozwiązywania zadań dotyczących układów izolowanych w sytuacji, gdy potrzebny jest nam związek energii układu przed i po zajściu w układzie pewnego procesu.

W paragrafie 8.4 omówiliśmy układy izolowane w pewnej szczególnej sytuacji, mianowicie, gdy nie działają w nich siły niezachowawcze (jak np. siła tarcia kinetycznego). W tym szczególnym przypadku zarówno  $\Delta E_{\text{term}}$ , jak i  $\Delta E_{\text{wewn}}$  wynoszą zero i równanie (8.35) sprowadza się do równania (8.18). Inaczej mówiąc, energia mechaniczna jest zachowana w układzie izolowanym, w którym nie działają siły niezachowawcze.

## Moc

Gdy już wiemy, w jaki sposób energia może przechodzić z jednej postaci w inną, możemy uogólnić definicję mocy podaną w paragrafie 7.7. Stwierdziliśmy tam, że moc jest szybkością, z jaką siła wykonuje pracę. Mówiąc bardziej ogólnie, moc  $P$  jest to szybkość związanej z działaniem siły zamiany jednej postaci energii na inną. Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  zamianie ulega energia  $\Delta E$ , to **moc średnia** związana z działaniem siły jest równa:

$$P_{\text{sr}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.36)$$

Podobnie **moc chwilowa** związana z działaniem tej siły wynosi:

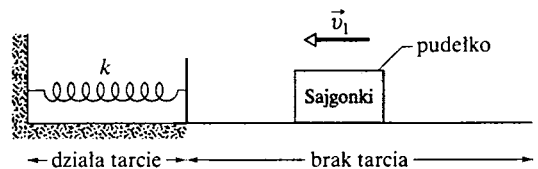
$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8.37)$$

## Przykład 8.7

Jak pokazano na rysunku 8.15, pudełko sajonek o masie 2 kg ślizga się po blacie z prędkością o wartości  $v_1 = 4 \text{ m/s}$  i wpada na sprężynę, ściskając ją aż do chwili, gdy jego prędkość spadnie do zera. Przed dotarciem do sprężyny pudełko porusza się po blacie bez tarcia, a potem — gdy ścisną sprężynę — działa na nie ze strony blatu siła tarcia kinetycznego o wartości 15 N. Stała sprężystości sprężyny wynosi 10 000 N/m. O jaką długość zostaje ściśnięta sprężyna, gdy pudełko osiąga prędkość równą zero?

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Przede wszystkim musimy rozważyć wszystkie siły, jakie działają na pudełko i stwierdzić, czy mamy do czynienia z układem izolowanym, czy też z układem, nad którym siła zewnętrzna wykonuje pracę.



Rys. 8.15. Przykład 8.7. Pudełko ślizga się po blacie bez tarcia, poruszając się z prędkością  $\vec{v}_1$  w kierunku sprężyny o stałej sprężystości  $k$ . Od chwili, gdy pudełko dociera do sprężyny działa na nie ze strony blatu siła tarcia

*Siły.* Siła normalna, działająca na pudełko ze strony blatu nie wykonuje pracy nad pudełkiem, gdyż jest zawsze prostopadła do kierunku jego ruchu. Z tego samego powodu nie wykonuje pracy nad pudełkiem siła ciężkości. Natomiast, gdy sprężyna jest ściskana, jej siła sprężystości wykonuje pracę nad pudełkiem.

zamieniając energię kinetyczną pudełka na energię potencjalną sprężystości sprężyny. Siła sprężystości działa też na nieruchomą ścianę, do której przymocowany jest drugi koniec sprężyny. Ruchowi pudełka towarzyszy tarcie, dlatego też przy poślizgu pudełka zwiększa się energia termiczna pudełka i blatu.

*Układ.* Wszystkie te siły działają w układzie pudełko–sprężyna–blat–ściana, a energia jest przekazywana tylko między jego składnikami, zatem jest to układ izolowany.

➔ 2. Skoro układ jest izolowany, to nie zmienia się jego całkowita energia. Zasadę zachowania energii dla tego układu możemy zapisać — na podstawie równania (8.35) — w postaci:

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}}. \quad (8.38)$$

Niech wskaźnik 1 odnosi się do stanu początkowego ślizgającego się pudełka, natomiast wskaźnik 2 — do stanu, w którym prędkość pudełka jest równa zero, a sprężyna jest ściśnięta o odcinek  $d$ . W obydwu tych stanach energia mechaniczna układu jest sumą

energii kinetycznej pudełka ( $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ) oraz energii potencjalnej sprężyny ( $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ). W stanie 1  $E_p = 0$  (ponieważ sprężyna nie jest ściskana), a prędkość pudełka ma wartość  $v_1$ . Mamy więc:

$$E_{\text{mech},1} = E_{k,1} + E_{p,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0.$$

W stanie 2  $E_k = 0$  (ponieważ prędkość pudełka jest równa zero), a sprężyna jest ściśnięta o odcinek  $d$ . Wobec tego:

$$E_{\text{mech},2} = E_{k,2} + E_{p,2} = 0 + \frac{1}{2}kd^2.$$

Wreszcie, korzystając z równania (8.29), możemy w miejsce zmiany energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  pudełka i blatu podstawić iloczyn  $f_k d$ . Równanie (8.38) przybiera zatem postać:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - f_k d.$$

Przekształcając to równanie i podstawiając dane liczbowe, mamy:

$$5000d^2 + 15d - 16 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, dostajemy:

$$d = 0.055 \text{ m} = 5.5 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 8.8

Na rysunku 8.16 przedstawiono pieska cyrkowego o masie  $m = 6 \text{ kg}$ , dobiegającego z lewej strony z prędkością o wartości  $v_0 = 7.8 \text{ m/s}$  do krzywoliniowej belki, której lewy koniec znajduje się na wysokości  $y_0 = 8.5 \text{ m}$  nad poziomem areny. Następnie piesek ślizga się wzdłuż tej belki i osiąga prędkość równą zero na wysokości  $y = 11.1 \text{ m}$  nad areną. Poślizgowi pieska wzdłuż belki towarzyszy tarcie. Wyznacz wzrost energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  pieska i belki podczas tego ruchu pieska.

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Rozważmy najpierw wszystkie siły działające na pieska i przekonajmy się, czy mamy do czynienia z układem izolowanym, czy z układem, nad którym siła zewnętrzna wykonuje pracę.

*Siły.* Siła normalna, działająca na pieska ze strony belki nie wykonuje nad nim pracy, gdyż jest zawsze prostopadła do kierunku ruchu pieska. Siła ciężkości wykonuje pracę nad pieskiem, ponieważ zmienia się jego wysokość nad areną. Ruchowi pieska towarzyszy tarcie, a zatem przy jego poślizgu zwiększa się energia termiczna pieska i belki.

*Układ.* Wszystkie te siły działają w układzie piesek–belka–Ziemia, a energia jest przekazywana tylko między jego składnikami, zatem jest to układ izolowany.

➔ 2. Skoro układ jest izolowany, to nie zmienia się jego całkowita energia. Zasadę zachowania energii dla tego układu możemy zapisać — na podstawie równania (8.34) — w postaci:

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} = 0, \quad (8.39)$$

przy czym zmiany energii zachodzą od chwili dotarcia pieska do belki do chwili, w której prędkość pieska osiąga wartość zero. Zmiana energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  jest sumą zmiany energii kinetycznej  $\Delta E_k$  pieska i zmiany grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu, które wynoszą odpowiednio:

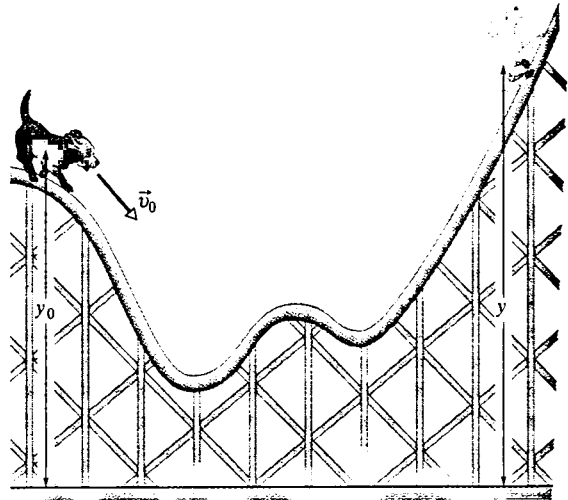
$$\Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

i

$$\Delta E_p = mgy - mgy_0.$$

Podstawiając te wyrażenia do równania (8.39) i rozwiązując je względem  $\Delta E_{\text{term}}$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{term}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) \\ &= \frac{1}{2}(6 \text{ kg})(7.8 \text{ m/s})^2 - (6 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(11.1 \text{ m} - 8.5 \text{ m}) \\ &\approx 30 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 8.16. Przykład 8.8. Piesek ślizga się wzdłuż krzywoliniowej belki, mając w chwili początkowej prędkość o wartości  $v_0$  oraz wysokość  $y_0$  i docierając w chwili osiągnięcia prędkości równej zero na wysokość  $y$

**Siły zachowawcze** Siła jest siłą zachowawczą, jeśli całkowita praca wykonana przez nią nad cząstką poruszającą się po dowolnym torze zamkniętym, tzn. powracającą po pewnym czasie do punktu wyjściowego jest równa zero. Z definicji równoważnej danej wyżej wynika, że siła jest zachowawcza, o ile całkowita praca wykonana nad cząstką w czasie jej przemieszczania między dowolnymi dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka. Siła ciężkości i siła sprężystości są siłami zachowawczymi, natomiast siła tarcia kinetycznego jest siłą niezachowawczą.

**Energia potencjalna** Energia potencjalna jest to energia związana z konfiguracją ciał w układzie, w którym działają siły zachowawcze. Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę  $W$  nad jedną z cząstek układu, jego energia potencjalna zmienia się o:

$$\Delta E_p = -W. \quad (8.1)$$

Jeśli cząstka przemieszcza się z punktu  $x_{\text{pocz}}$  do punktu  $x_{\text{końc}}$ , to zmiana energii potencjalnej układu wynosi:

$$\Delta E_p = - \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x) dx. \quad (8.6)$$

**Grawitacyjna energia potencjalna** Energię potencjalną układu złożonego z Ziemi i znajdującej się w jej pobliżu cząstki nazywamy grawitacyjną energią potencjalną. Gdy cząstka zmienia wysokość z  $y_{\text{pocz}}$  na  $y_{\text{końc}}$ , zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu cząstka–Ziemia jest równa:

$$\Delta E_p = mg(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}) = mg\Delta y. \quad (8.7)$$

Jeśli jako położenie odniesienia cząstki wybierzemy punkt  $y_{\text{pocz}} = 0$ , w którym energię potencjalną przyjmujemy za równą zero:  $E_{p \text{ pocz}} = 0$ , to grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$  cząstki na dowolnej wysokości  $y$  wyraża się jako:

$$E_p(y) = mgy. \quad (8.9)$$

**Energia potencjalna sprężystości** Energia potencjalna sprężystości jest to energia związana ze stanem ściśnięcia lub rozciągnięcia ciała sprężystego. Sprężyna, która po przemieszczeniu jej swobodnego końca o  $x$  działa siłą sprężystości:  $F = -kx$  ma energię potencjalną sprężystości równą:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (8.11)$$

Konfiguracją odniesienia jest dla sprężyny stan, w którym jest ona nieodkształcona; w tym stanie  $x = 0$  i  $E_p = 0$ .

**Energia mechaniczna** Energia mechaniczna układu jest to suma jego energii kinetycznej  $E_k$  i energii potencjalnej  $E_p$ :

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p. \quad (8.12)$$

**Układem izolowanym** nazywamy układ, w którym żadne siły zewnętrzne nie powodują zmian energii. Jeśli w układzie izolowanym pracę wykonują tylko siły zachowawcze, to energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  układu nie ulega zmianie. Stwierdzenie to, noszące nazwę zasady zachowania energii mechanicznej można zapisać w postaci:

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}, \quad (8.17)$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil w trakcie procesu zamiany energii. Zasadę tę można również podać w postaci:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (8.18)$$

**Krzywe energii potencjalnej** Jeśli znamy zależność energii potencjalnej układu  $E_p(x)$  od położenia cząstki, na którą działa w jednym wymiarze siła  $F$ , to siłę możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx}. \quad (8.20)$$

Jeśli funkcja  $E_p(x)$  jest dana w postaci wykresu, to siłę  $F$  można wyznaczyć dla dowolnej wartości  $x$  jako nachylenie krzywej w punkcie  $x$ , wzięte z przeciwnym znakiem, a energię kinetyczną cząstki można otrzymać jako:

$$E_k(x) = E_{\text{mech}} - E_p(x), \quad (8.22)$$

przy czym  $E_{\text{mech}}$  jest energią mechaniczną układu. Punktem zwrotnym nazywamy punkt  $x$ , w którym cząstka zmienia kierunek ruchu (w takim punkcie  $E_k = 0$ ). Cząstka jest w równowadze w punktach, w których nachylenie krzywej  $E_p(x)$  jest równe zero (w takich punktach  $F(x) = 0$ ).

**Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną** Praca  $W$  jest równa energii, przekazanej układowi lub od niego odebranej, przez działanie na układ siłą zewnętrzną. Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, zmiana energii układu jest równa całkowitej pracy wykonanej przez te wszystkie siły. Gdy nie występuje tarcie, praca wykonana nad układem jest równa zmianie energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  układu:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p. \quad (8.24, 8.23)$$

Gdy w układzie działa siła tarcia kinetycznego, zmienia się także energia termiczna  $\Delta E_{\text{term}}$  układu (czyli energia związana z chaotycznym ruchem atomów i cząsteczek w układzie). Praca wykonana nad układem jest wtedy równa:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}. \quad (8.31)$$

Zmiana energii termicznej  $\Delta E_{\text{term}}$  jest związana z wartością siły tarcia  $f_k$  i wartością przemieszczenia  $d$  ciała pod wpływem siły zewnętrznej, a związek ten opisuje równanie:

$$\Delta E_{\text{term}} = f_k d. \quad (8.29)$$

**Zasada zachowania energii** Całkowita energia  $E$  układu (będąca sumą jego energii mechanicznej i różnych postaci energii wewnętrznej, w tym energii termicznej) może ulegać zmianie tylko o energię dostarczoną do układu lub od niego odebraną. To prawo empiryczne nosi nazwę **zasady zachowania energii**. Jeśli nad układem wykonywana jest praca  $W$ , to zachodzi równość:

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}}. \quad (8.33)$$

Gdy układ jest izolowany ( $W = 0$ ), otrzymujemy stąd:

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}} = 0, \quad (8.34)$$

czyli

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}} - \Delta E_{\text{wewn}}. \quad (8.35)$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil.

**Moc** Moc związana z działaniem siły jest to **szybkość**, z jaką następuje zamiana energii pod działaniem tej siły. Jeśli w przedziale czasu  $\Delta t$  siła przekazuje układowi lub odbiera od niego energię równą  $\Delta E$ , to **moc średnia** związana z działaniem tej siły wynosi:

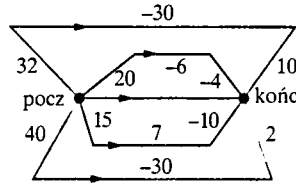
$$P_{\text{sr}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.36)$$

**Moc chwilowa** związana z działaniem tej siły jest równa:

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8.37)$$

## Pytania

1. Na rysunku 8.17 przedstawiono pięć torów, łączących punkty pocz i końc, jeden prosty i cztery łamane. Wzdłuż toru prostego i trzech spośród torów łamanych na pewne ciało, poruszające się po tych torach, działa jedynie siła zachowawcza  $F_z$ . Wzdłuż czwartego toru łamanego na ciało to działa zarówno siła  $F_z$ , jak i siła niezachowawcza  $F_{nz}$ . Przy każdym odcinku torów łamanych, między punktami pocz i końc podano wartość zmiany energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  ciała (w dżulach), zachodzącej w czasie ruchu ciała wzdłuż tego odcinka. a) Ile wynosi wartość  $\Delta E_{\text{mech}}$  przy przejściu przez ciało z punktu pocz do końc po torze prostym? b) Ile wynosi wartość  $\Delta E_{\text{mech}}$  pochodząca od siły  $F_{nz}$  na torze, wzdłuż którego działa ta siła?

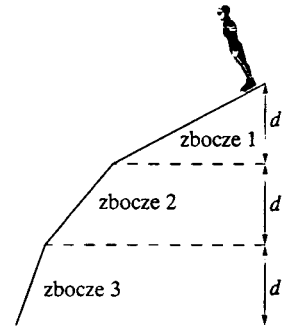


Rys. 8.17. Pytanie 1

2. Sprężyna jest początkowo rozciągnięta o 3 cm w stosunku do jej długości w warunkach, gdy nie jest odkształcona. W chwili końcowej stan sprężyny w czterech przypadkach odpowiada jej: a) rozciągnięciu o 2 cm, b) ściśnięciu o 2 cm, c) ściśnięciu o 4 cm, d) rozciągnięciu o 4 cm. Uszereguj te przypadki według zmiany energii potencjalnej sprężystości tej sprężyny, od chwili początkowej do końcowej, od wartości największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).

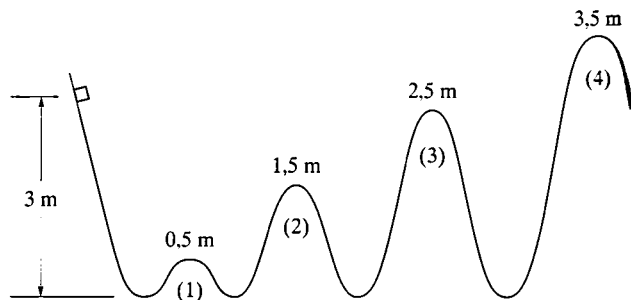
3. Orzech kokosowy rzucono z brzegu urwiska w stronę leżącej pod nim rozległej, płaskiej doliny, z prędkością początkową o wartości  $v_0 = 8$  m/s. W pięciu kolejnych rzutach prędkość początkowa orzecha  $v_0$  była: 1) skierowana niemal pionowo w górę, 2) skierowana ku górze pod kątem  $45^\circ$ , 3) pozioma, 4) skierowana ku dołowi pod kątem  $45^\circ$ , 5) skierowana niemal pionowo w dół. Uszereguj te rzuty według: a) początkowej energii kinetycznej orzecha, b) energii kinetycznej orzecha tuż przed spadkiem na dno doliny, od największych do najmniejszych.

4. Nieustraszona łyżwiarka zjeżdża bez tarcia po trzech oblodzonych zboczach o takich samych wysokościach  $d$  w pionie. Uszereguj te zbocza według: a) pracy wykonanej nad łyżwiarką przez siłę ciężkości w czasie zjazdu po każdym ze zboczy, b) zmiany energii kinetycznej łyżwiarki na danym zboczu, od wartości największych do najmniejszych.



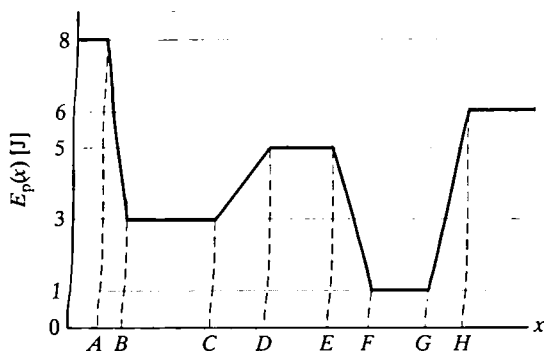
Rys. 8.18. Pytanie 4

5. Mały klocek pozostający początkowo w spoczynku ześlizguje się bez tarcia z wysokości 3 m wzdłuż toru o kształcie przedstawionym na rysunku 8.19. Górki wzdłuż toru mają identyczny, kołowy kształt szczytu (załóż, że klocek nie odrywa się tam od toru). a) Która z górek jest pierwszą, na którą klocek nie zdoła się już wspiąć? b) Jaki będzie ruch klocka od chwili, gdy nie zdoła wjechać na tę górkę? Na której górze: c) przyspieszenie dośrodkowe klocka będzie największe, d) działająca na klocek siła normalna będzie najmniejsza?



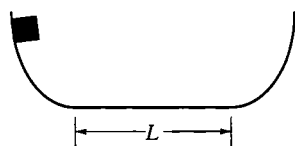
Rys. 8.19. Pytanie 5

6. Na rysunku 8.20 przedstawiono energię potencjalną cząstki jako funkcję jej położenia. a) Uszereguj obszary  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DE$  według wartości siły działającej w nich na cząstkę, od największej do najmniejszej. Jaka może być największa wartość energii mechanicznej  $E_{\text{mech}}$  cząstki, aby cząstka: b) została uwięziona w studni potencjału po lewej stronie rysunku, c) została uwięziona w studni potencjału po prawej stronie rysunku, d) mogła poruszać się między tymi obszarami, ale nie mogła przedostać się na prawo od punktu  $H$ ? W którym z obszarów,  $BC$ ,  $DE$ , czy  $FG$  cząstka będzie miała: e) największą energię kinetyczną, f) prędkość o najmniejszej wartości, jeśli jej energia odpowiada sytuacji z punktu (d)?



Rys. 8.20. Pytanie 6

7. Klocek pozostający początkowo w spoczynku i mający wtedy grawitacyjną energię potencjalną  $E_p$  poślizguje się wzdłuż toru o kształcie przedstawionym na rysunku 8.21. Klocek porusza się po

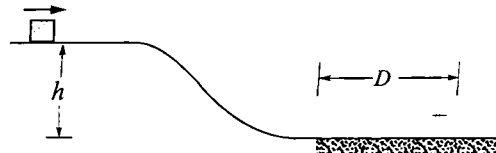


Rys. 8.21. Pytanie 7

torze. Na końcach toru bez tarcia, natomiast na odcinku poziomym toru o długości  $L$ , na klocek działa siła tarcia  $f$ . a) Ile energii zamienia się na energię termiczną przy jednokrotnym przebyciu przez klocek poziomego odcinka toru? Ile razy klocek przebę-

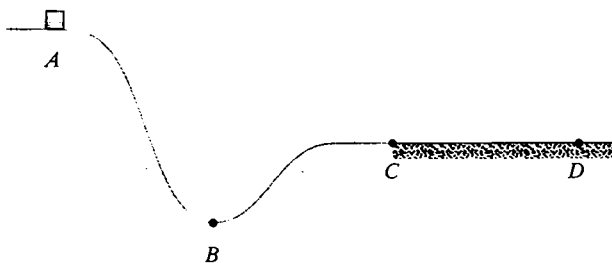
dzie ten odcinek, jeśli jego początkowa energia potencjalna  $E_p$  będzie wynosić: b)  $0,5fL$ , c)  $1,25fL$ , d)  $2,25fL$ ? e) Gdzie zatrzyma się klocek w każdym z tych trzech przypadków: na środku, na lewo od środka, czy na prawo od środka odcinka poziomego (rozgrzewka przed zadaniem 67)?

8. Jak pokazano na rysunku 8.22, klocek ześlizguje się po torze o różnicy poziomów  $h$ . Siła tarcia działa na klocek jedynie na dolnym odcinku poziomym toru i powoduje zatrzymanie się klocka po przebyciu na tym odcinku drogi  $D$ . a) Czy droga ta zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie równa  $D$ , jeśli zmniejszymy wartość  $h$ ? b) Czy droga ta zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie równa  $D$ , jeśli — nie zmieniając  $h$  — zwiększymy masę klocka?



Rys. 8.22. Pytanie 8

9. Klocek ześlizguje się po torze pokazanym na rysunku 8.23, przy czym jego ruch z punktu  $A$  do punktu  $C$  odbywa się bez tarcia, a w obszarze  $CD$  na klocek działa siła tarcia. Czy energia kinetyczna klocka rośnie, maleje, czy nie zmienia się w obszarze: a)  $AB$ , b)  $BC$ , c)  $CD$ ? d) Czy w tych obszarach energia mechaniczna klocka rośnie, maleje, czy pozostaje bez zmiany?



Rys. 8.23. Pytanie 9

## Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

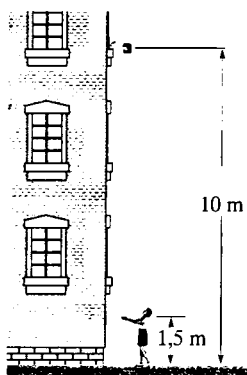
### 8.3. Wyznaczanie energii potencjalnej

1. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny, która ma energię potencjalną sprężystości równą  $25 \text{ J}$  po ściśnięciu jej o  $7,5 \text{ cm}$  w stosunku do jej długości w sytuacji, gdy nie jest odkształcona?

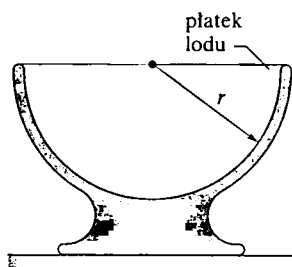
2. Stojąc w oknie, upuszczasz podręcznik o masie  $2 \text{ kg}$ , znajdujący się początkowo na wysokości  $10 \text{ m}$  nad poziomem ulicy, tak aby mogła go złapać koleżanka stojąca na chodniku i trzymająca wyciągnięte ręce na wysokości  $1,5 \text{ m}$  nad poziomem ulicy (rys. 8.24). a) Jaką pracę  $W_g$  wykona nad podręcznikiem siła ciężkości podczas jego lotu do rąk koleżanki? b) Jaka będzie w czasie tego lotu zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  układu podręcznik–Ziemia? Jeśli przyjmiemy, że grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$  układu jest równa zero na poziomie ulicy, to ile wynosi ona, gdy: c) wypuszczasz podręcznik z rąk, d) podręcznik dociera do rąk koleżanki? Załóż następnie, że na poziomie ulicy

$E_p$  wynosi 100 J i wyznaczyć w tych warunkach: e)  $W_g$ , f)  $\Delta E_p$ , g)  $E_p$  na wysokości twoich rąk, h)  $E_p$  na wysokości rąk koleżanki.

3. Jak pokazano na rysunku 8.25, płatek lodu o masie 2 g zostaje puszczone swobodnie na krawędzi miski w kształcie półkuli o promieniu  $r$  równym 22 cm. Płatek ześlizguje się po powierzchni miski bez tarcia. a) Jaką pracę wykona nad płatkami siła ciężkości, gdy ześlizguje się on na dno miski? b) Ile wyniesie zmiana energii potencjalnej układu płatek–Ziemia w czasie tego ruchu? c) Ile wynosi energia potencjalna płatka na krawędzi miski, jeśli przyjęto, że wynosi ona zero na dnie miski? d) Jeśli zaś przyjmiemy, że energia potencjalna jest równa zero na krawędzi miski, to ile będzie ona wynosić, gdy płatek dotrze na dno miski? e) Czy wartości, jakie otrzymaliśmy jako odpowiedzi na pytania (a)–(d), zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, jeśli zwiększymy dwukrotnie masę płatka?

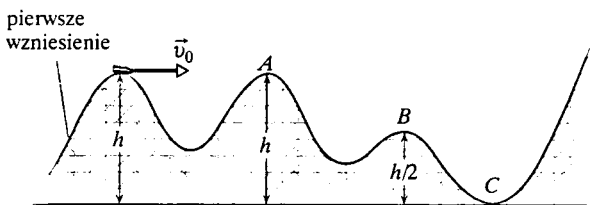


Rys. 8.24. Zadania 2 i 10



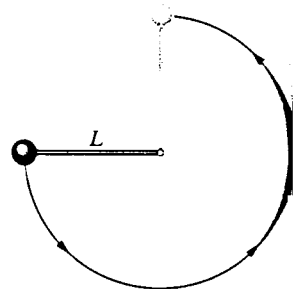
Rys. 8.25. Zadania 3 i 9

4. Wagonik kolejki górskiej w wesołym miasteczku porusza się bez tarcia po torze o kształcie przedstawionym na rysunku 8.26 i na szczycie pierwszego wzniesienia osiąga prędkość o wartości  $v_0$ . Masa wagonika jest równa  $m$ . Jaką pracę wykona nad wagonikiem siła ciężkości podczas jego ruchu ze szczytu pierwszego wzniesienia do punktu: a) A, b) B, c) C? Jeśli przyjmiemy, że grawitacyjna energia potencjalna układu wagonik–Ziemia jest równa zero w punkcie C, to ile będzie ona równa, gdy wagonik znajdzie się w punkcie: d) B, e) A? f) Czy zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu między punktami A i B wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli zwiększymy masę  $m$  dwukrotnie?



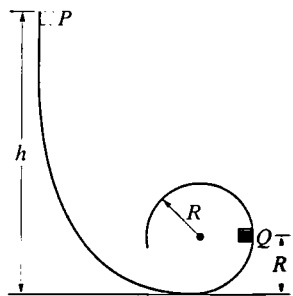
Rys. 8.26. Zadania 4 i 12

5. Na rysunku 8.27 przedstawiono kulkę o masie  $m$ , przymocowaną do końca cienkiego pręta o długości  $L$  i znikomo małej masie. Drugi koniec pręta umocowany jest na osi, dzięki czemu kulka może zataczać okrąg w płaszczyźnie pionowej. W chwili początkowej pręt ustawiony jest poziomo — jak pokazano na rysunku — po czym zostaje pchnięty w dół, tak że kulka porusza się najpierw w dół, a następnie do góry, aż do położenia, w którym pręt jest skierowany pionowo w górę, przy czym w tym położeniu prędkość kulki wynosi już zero. Jaką pracę wykonała nad kulką siła ciężkości przy ruchu kulki od położenia początkowego do: a) najniższego punktu jej toru, b) najwyższego punktu jej toru, c) położenia przeciwnego w stosunku do początkowego? Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu kulka–Ziemia, gdy kulka znajduje się: d) w najniższym punkcie toru, e) w najwyższym punkcie toru, f) w położeniu przeciwnym w stosunku do początkowego, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zero, gdy kulka znajduje się w położeniu początkowym? g) Załóż, że pręt pchnięty mocniej, w wyniku czego kulka dotarła do położenia górnego z prędkością różną od zera. Czy w tej sytuacji zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej podczas ruchu kulki z najniższego do najwyższego punktu toru jest większa, mniejsza czy taka sama, jak poprzednio?



Rys. 8.27. Zadania 5 i 11

6. Jak pokazano na rysunku 8.28, mały klocek o masie  $m$  może się ślizgać bez tarcia wzdłuż toru kończącego się kołową pętlą. Klocek zostaje puszczone swobodnie z punktu P, znajdującego się na wysokości  $h = 5R$  nad dolnym brzegiem pętli. Jaką pracę wykona nad klokiem siła ciężkości w czasie jego ruchu z punktu P do: a) punktu Q, b) najwyższego punktu pętli? Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu klocek–Ziemia, gdy klocek znajduje się: c) w punkcie P, d) w punkcie Q, e) w najwyższym punkcie pętli, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zero, gdy kulka znajduje się na dole pętli? f) Czy wartości, otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(e) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli klocek nie zostanie puszczone z punktu startowego swobodnie, lecz z pewną różną od zera prędkością początkową, skierowaną w dół wzdłuż toru?

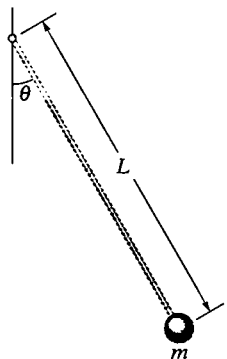


Rys. 8.28. Zadania 6 i 20

7. Kula śnieżna o masie 1,5 kg zostaje wystrzelona z urwiska o wysokości 12,5 m z prędkością początkową o wartości 14 m/s, skierowaną pod kątem  $41^\circ$  w górę od poziomu. a) Jaką pracę wykona nad tą kulą siła ciężkości w czasie lotu kuli aż do jej upadku

na płaski grunt pod urwiskiem? b) Ile wyniesie zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kula–Ziemia w czasie lotu kuli? c) Ile wynosić będzie energia potencjalna układu w chwili dotarcia kuli śnieżnej do gruntu pod urwiskiem, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kula znajduje się na krawędzi urwiska?

8. Na rysunku 8.29 przedstawiono cienki pręt o długości  $L$  i znikomo małej masie, który może obracać się w płaszczyźnie pionowej wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców. Do drugiego końca pręta przymocowana jest ciężka kulka o masie  $m$ . Pręt zostaje odchylony od pionu o kąt  $\theta$  i puszczony swobodnie. Ile wynosi: a) praca wykonana nad kulką przez siłę ciężkości, b) zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kulka–Ziemia, gdy kulka porusza się od położenia wyjściowego do najniższego punktu jej toru? c) Ile wynosi energia potencjalna układu w chwili zwolnienia kulki, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kulka znajduje się w najniższym punkcie jej toru? d) Czy wartości, otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(c) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli zwiększymy wartość kąta  $\theta$ ?



Rys. 8.29. Zadania 8 i 14

#### 8.4. Zachowanie energii mechanicznej

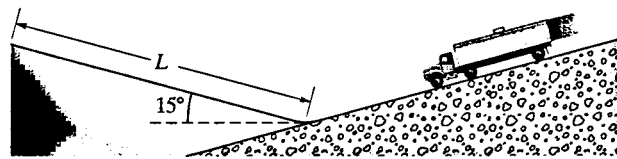
9. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 3. a) Jaka jest wartość prędkości płatka lodu w chwili, gdy dociera on do dna miski? b) Ile wyniesie wartość prędkości dla płatka o dwukrotnie większej masie? c) Czy wartość otrzymana jako odpowiedź na pytanie (a) wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli płatek nie zostanie puszczony z punktu startowego swobodnie, lecz z pewną różną od zera prędkością początkową skierowaną w dół wzdłuż powierzchni miski? [www](#)

10. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 2. a) Jaka jest wartość prędkości podręcznika w chwili, gdy dociera on do rąk twojej koleżanki? b) Ile wyniesie wartość prędkości dla podręcznika o dwukrotnie większej masie? c) Czy wartość otrzymana jako odpowiedź na pytanie (a) wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli podręcznik nie zostanie puszczony swobodnie, lecz będzie rzucony w dół z pewną różną od zera prędkością początkową?

11. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 5. a) Jaka musi być wartość prędkości początkowej kulki, aby osiągnęła ona najwyższy punkt swego toru z prędkością równą zeru? Jaka jest w tych warunkach wartość jej prędkości? b) w najniższym punkcie jej toru, c) w położeniu przeciwnym do stosunku do początkowego? d) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(c) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli dwukrotnie zwiększymy masę kulki?

12. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 4. Jaka jest wartość prędkości wagonika w punkcie: a) A, b) B, c) C? d) Jak wysoko wjedzie on na ostatnie wzniesienie, którego nie zdoła już pokonać? e) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(d) wzrosną, zmaleją czy pozostaną bez zmiany, jeśli dwukrotnie zwiększymy masę wagonika?

13. Jak pokazano na rysunku 8.30, ciężarówka mająca zepsute hamulce pędzi w dół zbocza. W chwili, gdy prędkość pojazdu osiąga wartość 130 km/h, kierowcy udaje się skierować go na drogę wznoszącą się pod kątem  $15^\circ$ , po której ciężarówka jedzie bez tarcia. Masa ciężarówki wynosi 5000 kg. a) Ile musi wynieść co najmniej długość tej drogi  $L$ , aby w czasie ruchu po niej ciężarówka zwolniła, aż do prędkości równej zeru (przyjmij, że możesz potraktować ciężarówkę jako cząstkę i uzasadnij to założenie)? Czy minimalna długość drogi  $L$  wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli: b) zmniejszymy masę ciężarówki, c) zmniejszymy prędkość ciężarówki?

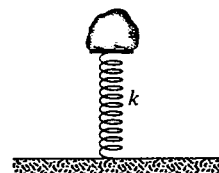


Rys. 8.30. Zadanie 13

14. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 8. a) Jaką wartość ma prędkość kulki w najniższym punkcie jej toru, jeśli  $L = 2$  m,  $\theta = 30^\circ$ , a  $m = 5$  kg? b) Czy wartość ta wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, gdy zwiększymy masę kulki?

15. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 7. a) Wyznacz wartość prędkości kuli śnieżnej w chwili, gdy spadnie ona na grunt pod urwiskiem, korzystając z bilansu energii, a nie z metod z rozdziału 4. Jaka będzie wartość tej prędkości, jeśli zmienimy dane zadania, tak że: b) kąt wyrzucenia kuli będzie wynosił  $41^\circ$  w dół od poziomu, c) masa kuli będzie równa 2,5 kg?

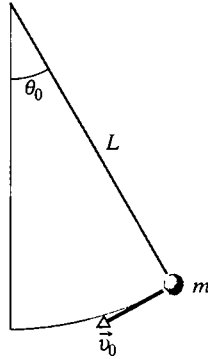
16. Na rysunku 8.31 przedstawiono kamień o masie 8 kg spoczywający na ustawionej pionowo sprężynie. Sprężyna jest ściśnięta o 10 cm. a) Ile wynosi stała sprężystości tej sprężyny? b) Naciskając na kamień, przemieszczamy go w dół o dalsze 30 cm, po czym zwalniamy nacisk. Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ściśniętej w ten sposób sprężyny tuż przed zwolnieniem nacisku? c) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kamień–Ziemia w czasie ruchu kamienia, od punktu zwolnienia nacisku do punktu jego największego wzniesienia? d) Na jaką największą wysokość — licząc od punktu zwolnienia nacisku — wzniesie się kamień?



Rys. 8.31. Zadanie 16

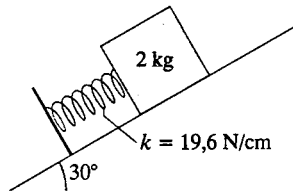
17. Kulka kamienna o masie 5 g zostaje wystrzelona pionowo w górę z pistoletu sprężynowego. Sprężynę trzeba ścisnąć o 8 cm, jeśli kulka ma dotrzeć do tarczy znajdującej się 20 m nad położeniem kulki na ściśniętej sprężynie. a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_{p,g}$  układu kulka–Ziemia w czasie wznoszenia się tej kulki o 20 m? b) Ile wynosi zmiana energii potencjalnej sprężystości  $\Delta E_{p,s}$  sprężyny w czasie wystrzelenia kulki? c) Ile wynosi stała sprężystości sprężyny? **www**

18. Na rysunku 8.32 przedstawiono wahadło o długości  $L$ . Jego obciążnik (w którym skupiona jest praktycznie cała masa wahadła) ma prędkość o wartości  $v_0$ , gdy nić tworzy z pionem kąt  $\theta_0$ . a) Znajdź wyrażenie na wartość prędkości obciążnika w najniższym punkcie jego toru. Jaka musi być co najmniej wartość  $v_0$ , aby po dotarciu do najniższego punktu toru obciążnika wahadło wzniósł się: b) do poziomego położenia nici. c) do pionowego położenia nici, która powinna być w tym położeniu napięta? d) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (b) i (c) zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, jeśli wartość  $\theta_0$  wzrośnie o kilka stopni?



Rys. 8.32. Zadanie 18

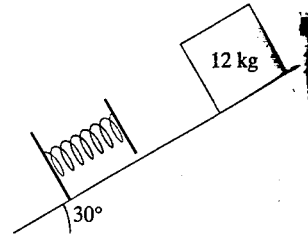
19. Klocek o masie 2 kg leży na swobodnym końcu sprężyny na równi pochyłej o nachyleniu  $30^\circ$  (rys. 8.33). Klocek nie jest przymocowany do sprężyny i może poruszać się po tej równi bez tarcia. Sprężyna, której stała sprężystości wynosi 19,6 N/cm, zostaje ściśnięta o 20 cm, a następnie zwolniona. a) Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ściśniętej sprężyny? b) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu klocek–Ziemia w czasie ruchu klocka od punktu, w którym znajduje się on w chwili zwolnienia sprężyny do punktu jego największego wzniesienia po równi? c) Jaką drogę przebędzie klocek wzdłuż równi od chwili zwolnienia sprężyny do chwili osiągnięcia przez niego największej wysokości? **ilw**



Rys. 8.33. Zadanie 19

20. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 6. Ile wynosi: a) składowa pozioma, b) składowa pionowa siły wypadkowej, działającej na klocek w punkcie  $Q$ ? c) Z jakiej wysokości  $h$  powinien być upuszczony klocek, aby w najwyższym punkcie pętli był na granicy utraty kontaktu z torem (co oznacza, że właśnie w tym punkcie siła normalna działająca na klocek ze strony toru staje się równa zero)? d) Sporządź wykres zależności wartości siły normalnej działającej na klocek w najwyższym punkcie pętli, od wysokości początkowej klocka  $h$ , w zakresie od  $h = 0$  do  $h = 6R$ .

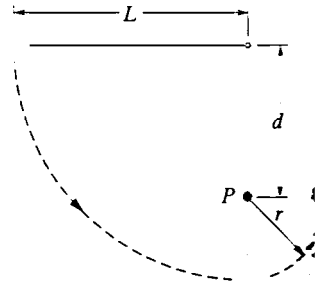
21. Jak pokazano na rysunku 8.34, klocek o masie 12 kg znajdujący się początkowo w spoczynku, zaczyna poruszać się bez tarcia wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia  $30^\circ$ . Na jego drodze znajduje się sprężyna, którą można ścisnąć o 2 cm, działając na nią siłą 270 N. Klocek zwalnia do prędkości równej zero, po ściśnięciu sprężyny o 5,5 cm. a) Jaką drogę przebył klocek wzdłuż równi od punktu, w którym początkowo spoczywał, do punktu, w którym ponownie osiągnął prędkość równą zero? b) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego zetknięcia ze sprężyną?



Rys. 8.34. Zadanie 21

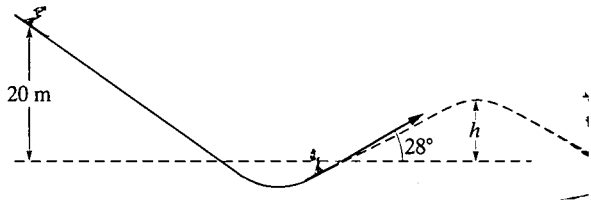
22. W chwili  $t = 0$  piłka o masie 1 kg zostaje rzucona z wieży wysokochołka z prędkością:  $\vec{v} = (18 \text{ m/s})\hat{i} + (24 \text{ m/s})\hat{j}$ . Wyznacz zmianę energii potencjalnej układu piłka–Ziemia, w chwili  $t = 0$  do chwili  $t = 6 \text{ s}$ .

23. Na rysunku 8.35 przedstawiono nić o długości  $L = 120 \text{ cm}$ . Na jednym końcu jest do niej przymocowana kulka, a na drugim koniec jest unieruchomiony. W punkcie  $P$ , odległym od nieruchomego końca nici o  $d = 75 \text{ cm}$ , znajduje się kołek. Gdy kulka, pozostająca początkowo w bezruchu na końcu poziomej nici, zostaje zwolniona, porusza się ona wzdłuż łuku zaznaczonego na rysunku linią przerywaną. Jaka jest wartość prędkości kulki: a) w najniższym punkcie jej toru. b) w najwyższym punkcie jej toru, po owinięciu się nici wokół kołka? **ilw**



Rys. 8.35. Zadania 23 i 29

24. Narciarz o masie 60 kg rusza wzdłuż rozbiegu skoczni narciarskiej o kształcie, pokazanym na rysunku 8.36, przy czym jego punkt startu, w którym pozostawał początkowo w spoczynku, znajduje się na wysokości 20 m nad progiem. W chwili odzwalniania się narciarza od progu jego prędkość tworzy z poziomem

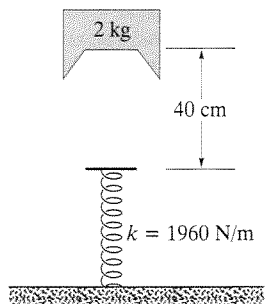


Rys. 8.36. Zadanie 24



kat  $28^\circ$ . Pomiń opór powietrza i załóż, że narciarz porusza się po rozbiegu bez tarcia. a) Na jaką maksymalną wysokość  $h$  ponad próg wzniesie się narciarz w czasie skoku? b) Czy wartość  $h$  zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie bez zmiany, jeżeli narciarz zwiększy swój ciężar, zakładając plecak?

25. Obciążnik o masie 2 kg zostaje puszczonej z wysokości 40 cm na sprężynę, której stała sprężystości wynosi  $k = 1960 \text{ N/m}$  (rys. 8.37). Wyznacz długość odcinka, o jaki maksymalnie zostanie ściśnięta sprężyna.



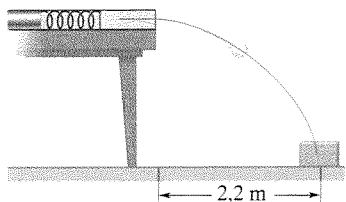
Rys. 8.37. Zadanie 25

26. Tarzan, którego ciężar wynosi 688 N, stara się przeskoczyć nad urwiskiem, trzymając się końca liany o długości 18 m (rys. 8.38). Najniższy punkt planowanego przez niego toru znajduje się 3,2 m niżej od jego punktu startowego. Liana zerwie się, jeśli siła jej naciągu przekroczy wartość 950 N. a) Czy liana zerwie się? b) Jeśli nie, to ile wynosi największa siła naprężenia liany podczas lotu Tarzana? Jeśli tak, to jaki kąt będzie tworzyła liana z pionem w chwili zerwania?



Rys. 8.38. Zadanie 26

27. Dwoje dzieci bawi się w ten sposób, że starają się trafić kulka kamienną w małe pudełko leżące na podłodze. Kulka jest wyrzeliwana z ustawionej na stole wyrzutni sprężynowej. Pudełko jest odległe w poziomie od krawędzi stołu o 2,2 m (patrz rysunek 8.39). Jaś ścisnął sprężynę o 1,1 cm, lecz kulka upadła na podłogę, 27 cm przed środkiem pudełka. O jaki odcinek musi ścisnąć sprężynę Małgosia, aby trafić w środek pudełka? Przyjmij, że ani sprężyna, ani kulka nie doznają tarcia ze strony ścian wyrzutni.



Rys. 8.39. Zadanie 27

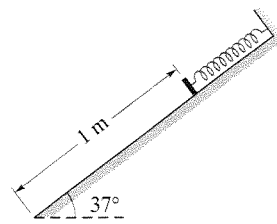
28. Klocek o masie 700 g zostaje upuszczony z wysokości  $h_0$  nad ustawioną pionowo sprężyną o stałej sprężystości  $k = 400 \text{ N/m}$  i znikomo małej masie. Klocek spada na sprężynę i osiąga prędkość równą zeru po ściśnięciu sprężyny o 19 cm. Ile wynosi praca wykonana: a) przez klocek nad sprężyną, b) przez sprężynę nad klokiem? c) Ile wynosiła wysokość  $h_0$ ? d) O jaki odcinek zostałaaby maksymalnie ściśnięta sprężyna, gdyby klocek został upuszczony z wysokości  $2h_0$  nad sprężyną?

29. Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 23 (rys. 8.35). Wykaż, że kulka zakreśli pełny okrąg wokół kołka, jeśli  $d > 3L/5$  (wskazówka: aby tak się stało, kulka musi być wciąż w ruchu, gdy znajdzie się w najwyższym punkcie toru po owinięciu się nici wokół kołka; dlaczego?). [www](http://www)

30. Do budowy wahadła użyto kulki o masie 300 g, przymocowanej do końca nici o długości 1,4 m i znikomo małej masie (drugi koniec nici unieruchomiono). Kulkę odchyłono w bok, tak że nie była napięta i tworzyła z pionem kąt  $30^\circ$ , a kulka była nieruchoma, po czym kulkę zwolniono. Wyznacz: a) wartość prędkości kulki, gdy nie tworzy z pionem kąt  $20^\circ$ , b) maksymalną wartość prędkości kulki. c) Jaki kąt tworzy z pionem niec wahadła, gdy prędkość kulki ma wartość równą jednej trzeciej jej wartości maksymalnej?

31. Wahadło składa się ze sztywnego pręta o długości  $L$  i znikomo małej masie oraz kulki o masie  $m$ , przymocowanej do jednego jego końca; drugi koniec pręta jest unieruchomiony. Wahadło zostaje ustawione pionowo, tak że kulka znajduje się nad prętem, po czym zostaje puszczone swobodnie. Ile wynosi: a) wartość prędkości kulki, b) naprężenie pręta w najniższym punkcie toru kulki? c) Następnie wahadło zostaje puszczone swobodnie w położeniu, gdy pręt jest poziomy. Jaki kąt tworzy pręt z pionem, gdy naprężenie pręta jest równe ciężarowi kulki?

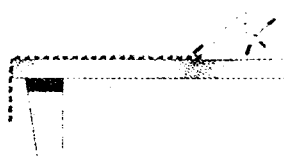
32. Jak pokazano na rysunku 8.40, sprężyna o stałej sprężystości  $k = 170 \text{ N/m}$  jest umocowana na górnym końcu równi pochyłej o kącie nachylenia  $37^\circ$ . Dolny koniec nieodkształconej sprężyny znajduje się w odległości 1 m od dolnego końca równi. Sprężyna zostaje ściśnięta o 0,2 m za pomocą pojemnika o masie 2 kg, po czym pojemnik zostaje zwolniony w chwili, gdy jest nieruchomy. Pojemnik porusza się po równi bez tarcia. a) Jaka będzie wartość prędkości pojemnika, gdy sprężyna będzie ponownie nieodkształcona (tzn. w chwili, gdy pojemnik oderwie się od sprężyny)? b) Jaka będzie wartość prędkości pojemnika, gdy dotrze on do dolnego końca równi?



Rys. 8.40. Zadanie 32

33. Jak pokazano na rysunku 8.41, łańcuszek leżący na stole, po którym może się on poruszać bez tarcia, jest przytrzymywany tak, że jedna czwarta jego długości zwisa ze stołu. Przyjmij

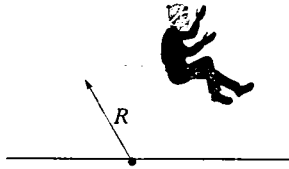
mij, że łańcuszek ma długość  $L$  oraz masę  $m$  i wyznacz pracę, potrzebną do wciągnięcia na stół zwisającej z niego części łańcuszka.



Rys. 8.41. Zadanie 33

34. Sprężynę o stałej sprężystości  $k = 400 \text{ N/m}$  ustawiono pionowo, tak że jej dolny koniec opiera się na poziomym podłożu. Sprężynę ściśnięto, przy czym jej górny koniec opuścił się o 25 cm w stosunku do jego położenia dla sprężyny nieodkształconej, a następnie postawiono na tym końcu klocek o ciężarze 40 N, nie przymocowując go do sprężyny. Gdy cały układ znajdował się w spoczynku, zwolniono nacisk na sprężynę. Przyjmij, że grawitacyjna energia potencjalna  $E_{p,g}$  klocka jest równa zeru w punkcie, w którym znajdował się on w chwili zwolnienia nacisku ( $y = 0$ ) i wyznacz grawitacyjną energię potencjalną, energię potencjalną sprężystości  $E_{p,s}$  oraz energię kinetyczną  $E_k$  klocka, gdy  $y$  jest równe: a) 0, b) 5 cm, c) 10 cm, d) 15 cm, e) 20 cm, f) 25 cm, g) 30 cm. h) Jak wysoko wzniesie się klocek, licząc od jego położenia w chwili zwolnienia nacisku na sprężynę?

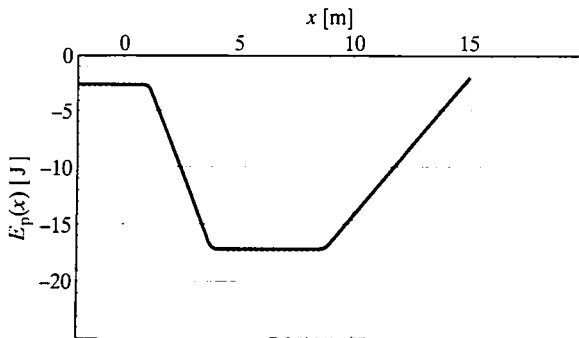
35. Chłopiec siedzi na szczycie bryły lodu o kształcie półkuli (rys. 8.42). Następnie zostaje lekko popchnięty i zaczyna ześlizgiwać się po lodzie. Wykaż, że odrywa się on od powierzchni bryły, gdy znajduje się na wysokości  $2R/3$  nad podłożem, przy założeniu, że jego ruch po lodzie odbywa się bez tarcia (Wskazówka: chłopiec odrywa się od powierzchni bryły, gdy siła normalna staje się równa zeru).



Rys. 8.42. Zadanie 35

## 8.5. Zastosowanie krzywych energii potencjalnej

36. Na cząstkę o masie 2 kg, poruszającą się wzdłuż osi  $x$ , działa siła zachowawcza  $F(x)$ . Wykres energii potencjalnej  $E_p(x)$ , związanej z działaniem tej siły  $F(x)$ , przedstawiono na rysunku 8.43.



Rys. 8.43. Zadanie 36

Gdy cząstka znajduje się w punkcie  $x = 2 \text{ m}$ , jej prędkość wynosi  $-1.5 \text{ m/s}$ . a) Jaka jest wartość i kierunek siły  $F(x)$  w tym punkcie? b) Jakie są wartości graniczne  $x$ , między którymi może poruszać się cząstka? c) Jaka jest wartość prędkości cząstki w punkcie  $x = 7 \text{ m}$ ?

37. Energia potencjalna cząsteczki dwuatomowej (tzn. układu złożonego z dwóch atomów, jak  $\text{H}_2$  lub  $\text{O}_2$ ) jest dana wzorem:

$$E_p = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

przy czym  $r$  jest odległością dwóch atomów, tworzących cząsteczkę, a  $A$  i  $B$  są stałymi dodatnimi. Ta energia potencjalna jest związana z istnieniem siły, która wiąże ze sobą atomy cząsteczki. a) Wyznacz odległość równowagi, tzn. odległość atomów, przy której siła, działająca na każdy z nich jest równa zeru. Czy siła działająca między atomami jest siłą odpychania, czy siłą przyciągania, gdy ich odległość jest: b) mniejsza, c) większa od odległości równowagi?

38. Na cząstkę o masie 1 kg, poruszającą się wzdłuż osi  $x$ , działa tylko jedna siła zachowawcza  $F(x)$ . Energia potencjalna  $E_p(x)$ , związana z działaniem siły  $F(x)$ , jest dana wzorem:

$$E_p(x) = -4xe^{-x/4} \text{ J},$$

przy czym  $x$  wyrażono w metrach. W punkcie o współrzędnej  $x = 5 \text{ m}$  cząstka ma energię kinetyczną równą 2 J. a) Ile wynosi energia mechaniczna układu? b) Sporządź wykres  $E_p(x)$  dla  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$  i narysuj na nim prostą, przedstawiającą energię mechaniczną układu. Na podstawie tego wykresu wyznacz c) najmniejszą, d) największą wartość współrzędnej  $x$  punktów, w których może znajdować się cząstka w czasie swego ruchu. Wyznacz również: e) największą wartość energii kinetycznej cząstki, f) współrzędną  $x$  punktu, w którym energia kinetyczna cząstki przybiera tę wartość. g) Znajdź równanie, przedstawiające zależność  $F(x)$ . h) Dla jakiej (skończonej) wartości  $x$  zachodzi równość:  $F(x) = 0$ ?

## 8.6. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

39. Owczarek collie ciągnie po podłodze kosz, który służy mu za legowisko, przykładając do niego poziomo siłę o wartości 8 N. Działająca na kosz siła tarcia kinetycznego ma wartość 5 N. Kosz przebywa drogę 0,7 m. Ile wynosi: a) praca, wykonana przez siłę, jaką owczarek działa na kosz, b) wzrost energii termicznej kosza i podłogi?

40. Plastikowy sześcián, na który działa poziomo siła o wartości 15 N, porusza się po podłodze ze stałą prędkością i przebywa drogę 3 m. Pomiarzy temperatury sześciánu w czasie jego ruchu wykazały, że energia termiczna sześciánu wzrosła przy tym o 20 J. O ile wzrosła energia termiczna podłogi w czasie ruchu tego sześciánu?

41. Klocek o masie 3,57 kg jest ciągnięty za pomocą liny po poziomej podłodze. na drodze 4,06 m. Siła, działająca na klocek ze strony liny, jest skierowana pod kątem  $15^\circ$  w górę od poziomu i ma wartość 7,68 N. Wyznacz: a) pracę, wykonaną przez siłę, jaką ciągnięta jest lina. b) wzrost energii termicznej układu klocek–podłoga. c) współczynnik tarcia kinetycznego między klokiem a podłogą.

42. Robotnik pcha skrzynię o masie 27 kg po poziomej podłodze. działając na nią siłą, skierowaną pod kątem  $32^\circ$  w dół od poziomu. Wiedząc, że skrzynia porusza się ze stałą prędkością i przebywa drogę 9,2 m, a współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a podłogą wynosi 0,2, wyznacz: a) pracę, wykonaną przez siłę, jaką robotnik działa na skrzynię. b) wzrost energii termicznej układu skrzynia–podłoga.

## 8.7. Zasada zachowania energii

43. Niedźwiadek o masie 25 kg ześlizguje się po pniu sosny. Jego prędkość początkowa, na wysokości 12 m nad ziemią, jest równa zero, a prędkość w chwili dotarcia do ziemi wynosi 5,6 m/s. a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu niedźwiadek–Ziemia w czasie zjazdu niedźwiadka na ziemię? b) Ile wynosi energia kinetyczna niedźwiadka w chwili dotarcia do ziemi? c) Ile wynosi średnia siła tarcia, działająca na niedźwiadka w czasie jego ruchu? ilw

44. Pocisk o masie 30 g, lecący poziomo z prędkością 500 m/s, zagłębia się w ścianę na głębokość 12 cm. a) Ile wynosi przy tym zmiana jego energii mechanicznej? b) Ile wynosi średnia wartość siły hamującej, działającej na pocisk ze strony ściany?

45. Narciarz o masie 60 kg ma przy odbiciu z progu skoczni narciarskiej prędkość o wartości 24 m/s, skierowaną pod kątem  $25^\circ$  w górę od poziomu. Na skoczka działa siła oporu powietrza, w wyniku czego, w chwili lądowania w punkcie, leżącym w pionie 14 m niżej od progu, ma on prędkość o wartości 22 m/s. O ile zmniejszyła się pod wpływem oporu powietrza energia mechaniczna układu narciarz–Ziemia w czasie jego lotu, od wybiecia z progu do lądowania na zeskoku?

46. Zabawka frisbee zostaje wyrzucona w punkcie, leżącym 1,1 m nad ziemią, z prędkością o wartości 12 m/s. Po osiągnięciu wysokości 2,1 m ma ona prędkość o wartości 10,5 m/s. O ile zmniejszyła się w tym czasie energia mechaniczna układu frisbee–Ziemia pod wpływem siły oporu powietrza?

47. Zawodnik rzuca piłkę baseballową z prędkością początkową o wartości 132 km/h. Gdy inny zawodnik chwyt ją na takiej samej wysokości nad ziemią, piłka ma prędkość o wartości 33,5 m/s. O ile zmniejszyła się energia mechaniczna układu piłka–Ziemia w wyniku działania oporu powietrza (piłka baseballowa ma masę 225 g)?

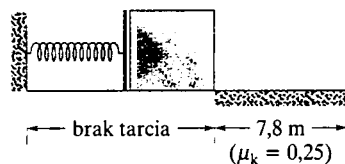
48. Z Wodospadu Niagara o wysokości 50 m spada w ciągu każdej sekundy woda o masie równej w przybliżeniu  $5,5 \cdot 10^6$  kg. a) O ile zmniejsza się grawitacyjna energia potencjalna układu

woda–Ziemia w ciągu każdej sekundy? b) Gdyby całą tę energię można było zamienić na energię elektryczną (co nie jest możliwe), to z jaką szybkością wytwarzana byłaby energia elektryczna (masa  $1 \text{ m}^3$  wody wynosi 1000 kg)? c) Oblicz wartość energii elektrycznej, uzyskanej w ten sposób w ciągu roku, jeśli jej cena wyniosłaby 5 groszy za 1 kWh.

49. Podczas lawiny kamiennej nieruchomy początkowo blok skalny ześlizguje się po zboczu o długości 500 m i wysokości 300 m. Współczynnik tarcia kinetycznego między blokiem a zboczem wynosi 0,25. a) Przyjmując, że grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$  układu blok–Ziemia jest równa zero u podnóża stoku, wyznacz wartość  $E_p$  przed ześlizgnięciem się bloku. b) Ile energii zostaje zamienione w energię termiczną w czasie ruchu bloku? c) Ile wynosi energia kinetyczna bloku u podnóża stoku? d) Jaką ma on wtedy prędkość?

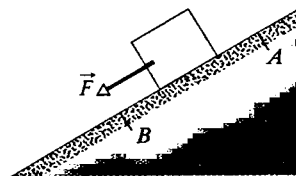
50. Do ustawionej poziomo sprężyny przyciskasz klocek o masie 2 kg, tak że sprężyna zostaje ściśnięta o 15 cm. Następnie puszczasz klocek, a sprężyna wprawia go w ruch po blacie stołu. Klocek zatrzymuje się w odległości 75 cm od punktu, w którym się znajdował, gdy zwolniłeś nacisk. Stała sprężystości sprężyny wynosi 200 N/m. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między klokiem a blatem?

51. Na rysunku 8.44 przedstawiono klocek o masie 3,5 kg, wprawiany w ruch przyspieszony przez ściśniętą sprężynę o stałej sprężystości 640 N/m. Gdy sprężyna osiąga długość, odpowiadającą stanowi, w którym jest nieodkształcona, klocek odrywa się od niej i porusza się po powierzchni poziomej aż do zatrzymania się, przebywając przy tym drogę 7,8 m. Współczynnik tarcia kinetycznego między klokiem a tą powierzchnią wynosi 0,25. a) O ile wzrasta przy tym energia termiczna układu klocek–podłoga? b) Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna klocka? c) O ile była ściśnięta sprężyna, gdy rozpoczął się ruch klocka? www



Rys. 8.44. Zadanie 51

52. Klocek, przedstawiony na rysunku 8.45, porusza się w dół wzdłuż równi pochyłej pod wpływem siły  $\vec{F}$ , która jest równoległa do równi i ma wartość 2 N. Klocek przebywa drogę o długości 5 m z punktu A do punktu B. Działająca na klocek siła tarcia ma wartość 10 N. Jaką pracę wykonuje nad klokiem siła ciężkości w czasie jego ruchu z A do B, jeśli energia kinetyczna klocka wzrasta przy tym o 35 J?



Rys. 8.45. Zadanie 52

53. Stwierdzono, że dla pewnej sprężyny prawo Hooke'a *nie jest* spełnione. Po zmianie jej długości o odcinek  $x$  (w metrach) działa ona siłą o wartości  $52,8x + 38,4x^2$  (w niutonach) i kierunku przeciwnym do jej odkształcenia. a) Wyznacz pracę, potrzebną do zwiększenia wydłużenia sprężyny z  $x = 0,5$  m na  $x = 1$  m. b) Jeden koniec sprężyny unieruchomiono, a do drugiego przy mocowano ciało o masie 2,17 kg, po czym sprężynę rozciągnięto o  $x = 1$  m. Następnie nieruchome w tych warunkach ciało puszczono swobodnie. Wyznacz prędkość ciała w chwili, gdy wydłużenie sprężyny wyniesie  $x = 0,5$  m. c) Czy siła, wywierana przez sprężynę jest zachowawcza, czy niezachowawcza (uzasadnij swoją odpowiedź)?

54. Tobolek o masie 4 kg rozpoczyna ruch w górę po równi pochyłej, o kącie nachylenia  $30^\circ$ , mając u jej podnóża energię kinetyczną równą 128 J. Jaką drogę przebędzie on po równi, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego między tobółkiem a równią wynosi 0,3?

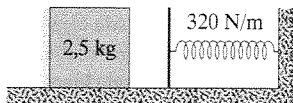
55. Dwie ośnieżone góry mają wysokości 850 m i 750 m względem obniżenia między nimi. Tor narciarski, prowadzący ze szczytu wyższej góry na szczyt niższej, ma całkowitą długość 3,2 km i średnie nachylenie  $30^\circ$  (rys. 8.46). a) Nieruchomy początkowo narciarz rusza po torze ze szczytu wyższej góry. Jaką prędkość będzie on miał na szczycie niższej góry, jeśli nie używa kijków, a tarcie jest znikomo małe? b) Ile powinien wynosić w przybliżeniu współczynnik tarcia między nartami a śniegiem na stoku, aby narciarz zatrzymał się na szczycie niższej góry?



Rys. 8.46. Zadanie 55

56. Dziewczynka, której ciężar wynosi 267 N, ześlizguje się na placu zabaw po zjeżdżalni o długości 6,1 m i kącie nachylenia  $20^\circ$  do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego między dzieckiem a zjeżdżalnią wynosi 0,1. a) Ile energii zostaje przy tym zamienione na energię termiczną? b) Jaka jest wartość prędkości dziewczynki na dole zjeżdżalni, jeśli jej prędkość na starcie miała wartość 0,457 m/s?

57. Na rysunku 8.47 przedstawiono klocek o masie 2,5 kg, ślizgający się w kierunku sprężyny o stałej sprężystości 320 N/m. Prędkość klocka spada do zera, gdy sprężyna jest ściśnięta o 7,5 cm. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a poziomą powierzchnią, po której się

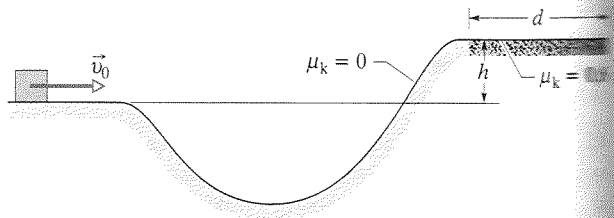


Rys. 8.47. Zadanie 57

on ślizga, wynosi 0,25. Wyznacz: a) pracę wykonaną przez siłę sprężystości sprężyny, b) wzrost energii termicznej układu klocek-podłoże w czasie od zetknięcia się klocka ze sprężyną do osiągnięcia przez niego prędkości równej zeru. c) Jaką prędkość ma klocek w chwili dotarcia do sprężyny? ilw

58. Robotnik w fabryce zwalnia niechący blokadę, utrzymującą skrzynię o masie 180 kg w spoczynku, na szczycie pochylni o długości 3,7 m i kącie nachylenia  $39^\circ$  w stosunku do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a pochylnią i między skrzynią a poziomą podłogą hali fabrycznej wynosi 0,22. a) Z jaką prędkością porusza się skrzynia na dolnym końcu pochylni? b) Jaką drogę przebędzie skrzynia po podłodze hali (przyjmij, że energia kinetyczna skrzyni nie zmienia się przy zmianie kierunku ruchu skrzyni, gdy zjeżdża ona z pochylni na podłogę)? c) Czy wartości, otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a) i (b), zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, gdy masę skrzyni zmniejszy się o połowę?

59. Jak pokazano na rysunku 8.48, klocek ślizga się po torze, mającym na końcach odcinki poziome, a między nimi pewne obniżenie. Tarcie między klockiem a torem występuje jedynie na krótkim poziomym odcinku toru. W wyniku działania siły tarcia klocek zatrzymuje się po przebyciu wzdłuż tego odcinka drogi  $d$ . Prędkość początkowa  $v_0$  klocka ma wartość 6 m/s, różnica wysokości  $h$  poziomych odcinków toru jest równa 1,1 m, a współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$  wynosi 0,6. Wyznacz wartość  $d$ .



Rys. 8.48. Zadanie 59

60. Pudełko z ciasteczkami porusza się w górę po równi pochyłej o kącie nachylenia  $40^\circ$ . W punkcie, odległym o 55 cm (licząc wzdłuż równi) od jej dolnego końca, pudełko ma prędkość o wartości 1,4 m/s. Współczynnik tarcia kinetycznego między pudełkiem a równią wynosi 0,15. a) Jaką drogę w górę równi przebędzie jeszcze pudełko od tego punktu? b) Jaka będzie prędkość pudełka, gdy ześlizgnie się ono potem do dolnego końca równi? c) Czy wartości, otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a) i (b), zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, gdy podamy mniejszy współczynnik tarcia kinetycznego (ale nie zmienimy podanej prędkości pudełka, ani punktu, w którym ma ono tę prędkość)?

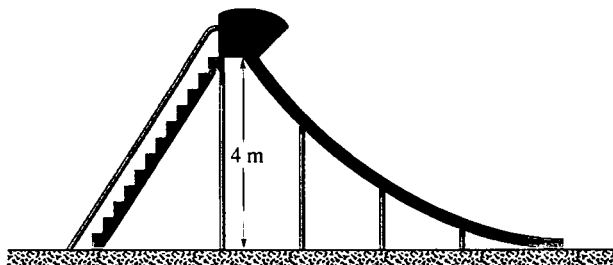
61. Kamień o ciężarze  $w$  zostaje wyrzucony pionowo w górę z powierzchni ziemi, z prędkością początkową o wartości  $v_0$ . Zakładamy, że w czasie całego lotu kamienia działa na niego siła oporu powietrza o wartości  $f$ . a) Wykaż, że maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się kamień, wynosi:

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

b) Wykaż, że prędkość kamienia w chwili jego upadku na ziemię ma wartość:

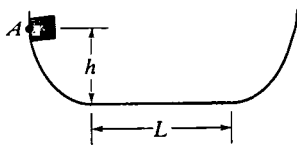
$$v = v_0 \left( \frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

62. Zjeżdżalnia na placu zabaw ma kształt łuku okręgu o promieniu 12 m. Jej wysokość jest równa 4 m, a jej dolny koniec jest styczny do powierzchni ziemi (rys. 8.49). Dziecko o masie 25 kg ześlizguje się po tej zjeżdżalni, ruszając z góry, z prędkością początkową równą zero i osiągając na dole zjeżdżalni prędkość o wartości 6.2 m/s. a) Ile wynosi długość zjeżdżalni? b) Ile wynosi średnia siła tarcia, działająca na dziecko na tej drodze? Załóż następnie, że zjeżdżalnia nie jest styczna do podłoża, lecz do linii pionowej, przechodzącej przez górny koniec zjeżdżalni. Ile wynosi w tym przypadku: c) długość zjeżdżalni, d) średnia siła tarcia, działająca na dziecko w czasie zjazdu?



Rys. 8.49. Zadanie 62

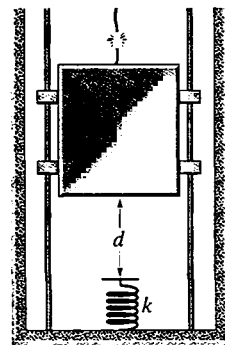
63. Cząstka może ślizgać się wzdłuż toru, który wznosi się na końcach, a w części środkowej zawiera płaski odcinek o długości  $L$ , jak na rysunku 8.50. Po łukach na końcach toru cząstka porusza się bez tarcia, natomiast na płaskim odcinku toru występuje tarcie, a współczynnik tarcia kinetycznego między cząstką a torem wynosi tam  $\mu_k = 0,2$ . Cząstka zostaje zwolniona z prędkością początkową równą zero, w punkcie A, leżącym na wysokości  $h = L/2$  nad płaską częścią toru. Gdzie ta cząstka ostatecznie się zatrzyma?



Rys. 8.50. Zadanie 63

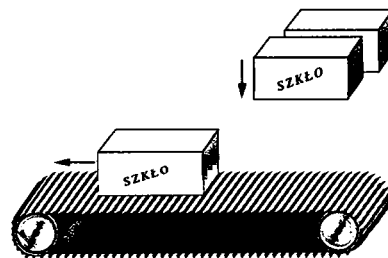
64. Lina, na której zawieszona jest kabina windy, urywa się, gdy kabina stoi na pierwszym piętrze, a jej podłoga znajduje się na wysokości  $d = 3,7$  m nad sprężyną amortyzującą, o stałej sprężystości  $k = 0,15$  MN/m (rys. 8.51). Układ zabezpieczający zwiększa wtedy docisk uchwytów kabiny do szyn windy, tak że ruch kabiny utrudnia stała siła tarcia o wartości 4,4 kN. a) Wyznacz prędkość kabiny w chwili jej dotarcia do sprężyny amortyzującej. b) Wyznacz długość odcinka  $x$ , o jaki maksymalnie zostanie

ściśnięta ta sprężyna (siła tarcia działa także podczas ściskania sprężyny). c) Wyznacz wysokość, na jaką wzniesie się potem ponownie kabina wzdłuż szybu. d) Korzystając z zasady zachowania energii, wyznacz w przybliżeniu całkowitą drogę, przebytą przezabinę do jej zatrzymania (przyjmij, że siła tarcia jest praktycznie równa zero, gdy kabina się nie porusza).



Rys. 8.51. Zadanie 64

65. W pewnej fabryce skrzynie o masie 300 kg spadają pionowo z maszyny do ich pakowania na pas transmisyjny, poruszający się z prędkością 1,2 m/s (rys. 8.52). Silnik utrzymuje stałą prędkość pasa. Współczynnik tarcia kinetycznego między każdą ze skrzyń a pasem wynosi 0,4. Po krótkim czasie od spadku na pas skrzynia przestaje się po nim ślizgać i porusza się z prędkością pasa. Rozważ przedział czasu, w którym skrzynia zostaje unieruchomiona względem pasa i wyznacz dla tego przedziału: a) energię kinetyczną nadaną skrzyni, b) wartość działającej na skrzynię siły tarcia kinetycznego, c) energię dostarczoną przez silnik. Wykonaj obliczenia w układzie współrzędnych, związanym z halą fabryczną. d) Wyjaśnij, dlaczego odpowiedzi w punktach (a) i (c) są od siebie różne.

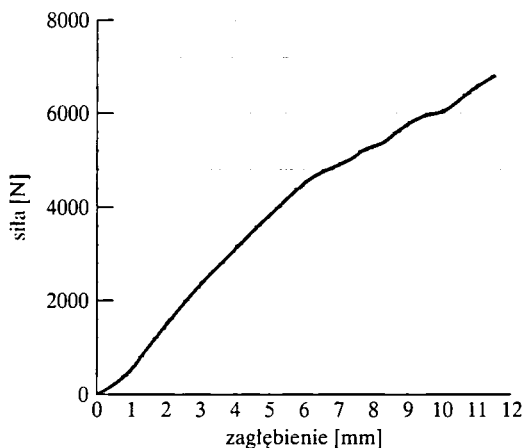


Rys. 8.52. Zadanie 65

### Zadania dodatkowe

66. Największa siła, jaką możesz działać na jakiś przedmiot jedynym z zębów trzonowych, wynosi około 750 N. Wyobraź sobie, że starasz się wbić ząb w sprężysty cukierek (jak tzw. żelki), który przeciwdziała temu, działając na twój ząb siłą sprężystości, jak sprężyna o stałej sprężystości  $2,5 \cdot 10^5$  N/m. Wyznacz: a) odcinek, o jaki uda ci się ścisnąć ten cukierek, b) pracę wykonaną przy tym przez twój ząb nad cukierkiem, c) Sporządź wykres wielkości wywieranej przez ciebie siły jako funkcji odcinka, o jaki cukierek zostaje ściśnięty, d) Jeśli ściśniętemu cukierkowi można przypisać energię potencjalną, sporządź także wykres tej energii jako funkcji liniowego odkształcenia cukierka.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku na miednicy pewnego dinozaura, o nazwie *Triceratops*, odkryto głębokie ślady zębów. Kształt śladów sugerował, że mogły one zostać pozostawione przez innego dinozaura, o nazwie tyranozaur (*Tyrannosaurus rex*). W celu zweryfikowania tej hipotezy naukowcy sporządzili replikę zęba tyranozaura z brązu i aluminium, którą następnie wciskali za pomocą prasy hydraulicznej w kość krowy na głębokość śladów w kości *Triceratopsa*. Na rysunku 8.53 przedstawiono przykładowy wykres otrzymanej w tych doświadczeniach zależności między przyłożoną siłą a zagłębieniem zęba w kość. Siła rośnie ze wzrostem zagłębienia, bo gdy ząb o niemal stożkowym kształcie zagłębia się w kość, wzrasta powierzchnia styku zęba z kością. e) Jaka praca została wykonana przez prasę hydrauliczną — a więc zapewne i tyranozaura — przy maksymalnym zagłębieniu zęba w kość? f) Czy z zagłębieniem zęba w kość można powiązać energię potencjalną? Omawiane doświadczenia wykazały, że tyranozaurowy dysponowały potężną siłą ukąszenia i związanym z tym wydatkiem energii (niespotykanymi u współczesnych zwierząt), co wskazuje na to, że były one drapieżnikami, a nie żywiły się padliną (jak dowodzili niektórzy badacze).



Rys. 8.53. Zadanie 66

67. *Łowienie ryb na muszki i wzrost prędkości.* Jeśli rzucisz przed siebie samą muszkę do łowienia ryb, to przeleci ona poziomo zaledwie około 1 m. Gdy jednak przymocujesz ją do żyłki wędkarskiej i do jej wyrzucenia użyjesz wędki, wtedy bez trudu wyrzucisz ją na odległość równą pełnej długości żyłki, czyli — powiedzmy — 20 m.

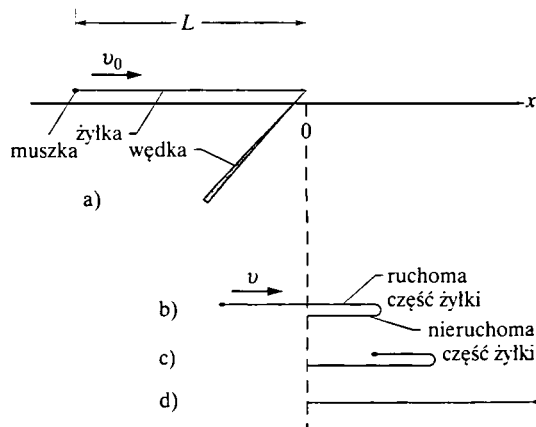
Taki wyrzut przedstawiono na rysunku 8.54. Początkowo żyłka o długości  $L$  rozciąga się poziomo w lewo i porusza się w prawo z prędkością  $v_0$  (rys. 8.54a). Muszka na końcu żyłki porusza się przez cały czas w prawo, natomiast żyłka zaczyna zawiijać się po zatrzymaniu wędki, tak że jej górna część nadal się porusza, a dolna jest nieruchoma (rys. 8.54b). Długość górnej części żyłki

zmniejsza się, a dolnej — rośnie (rys. 8.54c) aż do chwili, gdy cała długość żyłki jest rozciągnięta w poziomie w prawo i się nie porusza (rys. 8.54d). Jeśli pominiemy opór powietrza, to możemy stwierdzić, że początkowa energia kinetyczna muszki i żyłki z rysunku 8.54a zostaje w całości przekazana muszce oraz tej części żyłki, która nadal jest w ruchu, a ponieważ ta część żyłki robi się coraz krótsza, to następuje wzrost prędkości muszki i ruchomej części żyłki.

a) Skorzystaj z wyboru osi  $x$ , jak na rysunku i wykaż, że gdy położenie muszki wynosi  $x$ , to długość tej części żyłki, która jest w ruchu (czyli jej części górnej), jest równa  $(L - x)/2$ . b) Ile wynosi masa ruchomej części żyłki, jeśli żyłka jest jednorodna i ma gęstość liniową (czyli masę na jednostkę długości) równą  $\rho$ ? Przyjmij, że masa muszki wynosi  $m_m$  oraz, że energia kinetyczna ruchomej części żyłki jest równa — mimo zmniejszania się jej długości — energii kinetycznej żyłki w chwili początkowej (czyli wtedy, gdy cała jej długość  $L$  porusza się z prędkością  $v_0$ ). c) Znajdź wyrażenie na prędkość muszki i znajdującej się w ruchu części żyłki.

Przyjmij, że prędkość początkowa  $v_0 = 6$  m/s, długość żyłki  $L = 20$  m, masa muszki  $m_m = 0,8$  g, a gęstość liniowa żyłki  $\rho = 1,3$  g/m. d) Wykreśl prędkość  $v$  muszki jako funkcję jej położenia  $x$ . e) Ile wynosi prędkość muszki tuż przed osiągnięciem przez żyłkę jej końcowego ustawienia, czyli przed obróceniem się i zatrzymaniem muszki (w bardziej realistycznych obliczeniach trzeba uwzględnić opór powietrza, co daje nieco mniejszą prędkość końcową muszki)?

Wzrost prędkości końca przedmiotu o kształcie liny otrzymuje się także przy strzelaniu z bicia, a nawet przy wyrzuceniu do przodu zwiniętego mokrego ręcznika — niektórzy żartownicy uważają, że taki wyrzut ręcznika w kierunku kolegi w przebieralni to jeden z lepszych dowcipów. (Na podstawie artykułu Graiga A. Spoleka w *American Journal of Physics*, t. 54, s. 832 (nr 9, wrzesień 1986)).



Rys. 8.54. Zadanie 67

# 9 Układy cząstek

Gdy skaczesz do przodu, twoja głowa i tors poruszają się w przybliżeniu po torze parabolicznym, jak piłka wybita od bramki. Gdy jednak doświadczona baletnica wykonuje skok, noszący nazwę *grand jeté*, jej głowa i tors poruszają się niemal poziomo przez prawie cały czas lotu — ma się wrażenie, że tancerka płynie nad sceną. Widzowie na ogół nie wiedzą zbyt wiele o rzucie ukośnym, lecz mimo to mają poczucie, że obserwują coś niezwykłego.

Jak to się dzieje, że baletnica może jak gdyby „wyłączyć” siłę ciężkości?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





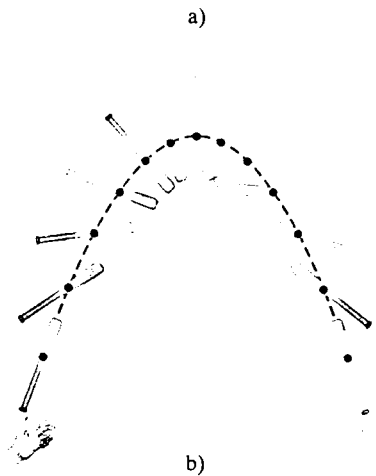
## 9.1. Pewien szczególnie punkt

Fizycy najbardziej się cieszą, gdy patrząc na coś skomplikowanego, potrafią dostrzec w tym coś, co jest proste i znajome. Oto przykład. Gdy rzucisz do góry kij baseballowy, przekonasz się, że jego ruch jest znacznie bardziej złożony niż — powiedzmy — rzut piłki, która wprawiona w ruch bez obrotu się (rys. 9.1a) porusza się jak cząstka. Każda część kija porusza się inaczej, nie można więc uważać ruchu kija za ruch cząstki — jest to ruch układu cząstek.

Gdy przyjrzyś się ruchowi kija nieco dokładniej, zauważysz, że istnieje taki punkt kija, który porusza się po paraboli, dokładnie tak, jak wyrzucona w powietrze cząstka (rys. 9.1b). Okazuje się, że ten szczególny punkt porusza się tak, jak gdyby: 1) była w nim skupiona cała masa kija, 2) tylko w tym punkcie działała na kij siła ciężkości. Ten punkt nazywamy **środkiem masy** kija. Ogólnie powiemy, że:

➤ Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

Środek masy kija leży na jego osi. Możesz wyznaczyć jego położenie, podpierając poziomy kij wyciągniętym palcem tak, aby kij nie ześlizgiwał się z palca w żadną stronę. Środek masy leży wówczas na osi kija, wprost nad twoim palcem.



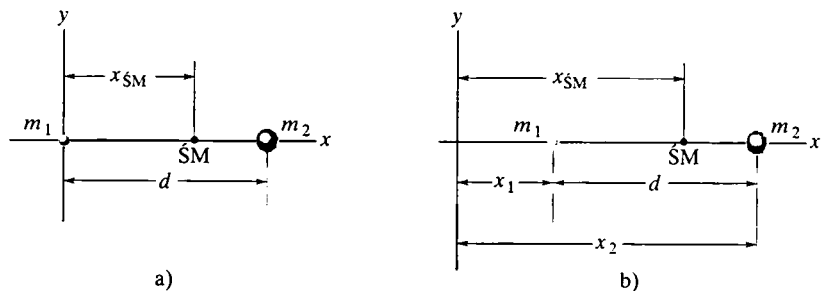
Rys. 9.1. a) Wyrzucona w powietrze piłka porusza się po torze parabolicznym. b) Gdy rzucimy kij baseballowy, po takim torze porusza się tylko środek masy kija (oznaczony jako czarna kropka), a torzy wszystkich innych punktów kija są znacznie bardziej złożone

## 9.2. Środek masy

Teraz zajmiemy się przez pewien czas problemem znajdowania środka masy różnych układów ciał. Zaczniemy od układów zawierających tylko kilka cząstek, a potem przejdziemy do układów bardzo wielu cząstek (jak np. kij baseballowy).

### Układy kilku cząstek

Na rysunku 9.2a przedstawiono dwie cząstki o masach  $m_1$  i  $m_2$ , odległe od siebie o  $d$ . Oś  $x$  dla wygody wybrano tak, że przechodzi ona przez obie cząstki, a jej



Rys. 9.2. a) Dwie cząstki o masach  $m_1$  i  $m_2$ , odległe od siebie o  $d$ . Czerwoną kropką oznaczono położenie środka masy ( $\dot{S}M$ ), wyznaczone z równania (9.1). b) To samo, co na rysunku (a), lecz dla początku osi bardziej odległego od obydwu cząstek. Położenie środka masy obliczono teraz z równania (9.2). Położenie środka masy względem cząstek jest w obydwu przypadkach takie samo



początkiem jest położenie cząstki o masie  $m_1$ . Położenie środka masy tego układu **cząstek definiujemy** jako:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d. \quad (9.1)$$

Załóżmy na przykład, że  $m_2 = 0$ . Mamy więc tylko jedną cząstkę o masie  $m_1$ , a zatem środek masy musi być punktem, w którym się ona znajduje. Równanie (9.1) sprowadza się w tym przypadku — tak, jak oczekujemy — do:  $x_{\text{ŚM}} = 0$ . Jeśli  $m_1 = 0$ , to znów mamy tylko jedną cząstkę (o masie  $m_2$ ) i zgodnie z oczekiwaniem otrzymujemy:  $x_{\text{ŚM}} = d$ . Jeśli  $m_1 = m_2$ , tzn. masy cząstek są jednakowe, środek masy powinien leżeć w połowie odległości między cząstkami. Równanie (9.1) daje w tym przypadku:  $x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{2}d$ , a więc znów to, czego należy oczekiwać. Wreszcie, gdy ani  $m_1$ , ani  $m_2$  nie są równe zero, z równania (9.1) wynika, że  $x_{\text{ŚM}}$  może przybierać jedynie wartości między 0 a  $d$ , czyli środek masy leży gdzieś między cząstkami.

Na rysunku 9.2b przedstawiono sytuację bardziej ogólną, gdy początek układu współrzędnych wybrano na lewo od obydwu cząstek. Położenie środka masy **definiujemy** w tym przypadku jako:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.2)$$

Zauważ, że jeśli w tym równaniu podstawimy  $x_1 = 0$ , to  $x_2$  będzie równe  $d$  i równanie (9.2) sprowadzi się do równania (9.1) — jak oczekiwaliśmy. Zauważ też, że choć początek układu współrzędnych umieściliśmy w innym punkcie niż poprzednio, to położenie środka masy względem cząstek nie uległo zmianie.

Równanie (9.2) możemy przedstawić w postaci:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_u}, \quad (9.3)$$

przy czym  $m_u$  jest całkowitą masą układu (w naszym przypadku  $m_u = m_1 + m_2$ ). W sytuacji bardziej ogólnej, gdy wzdłuż osi  $x$  rozłożono  $n$  cząstek, całkowita masa układu jest równa:  $m_u = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ , a położenie jego środka masy wynosi:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_u} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (9.4)$$

Wskaźnik  $i$  jest tzw. wskaźnikiem bieżącym, przybierającym wartości całkowite od 1 do  $n$ . Numeruje on poszczególne cząstki, a także ich masy i położenia.

Jeśli cząstki znajdują się w przestrzeni trójwymiarowej, to środek masy ma trzy współrzędne. Uogólnienie równania (9.4) daje:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (9.5)$$

Położenie środka masy możemy również przedstawić w zapisie wektorowym. Przypomnijmy najpierw, że jeśli cząstka znajduje się w punkcie o współrzędnych  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$ , to jej położenie można określić za pomocą wektora położenia:

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}. \quad (9.6)$$

przy czym wskaźnik  $i$  numeruje cząstki, a  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  oraz  $\hat{k}$  są to wektory jednostkowe, skierowane w dodatnich kierunkach osi  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ . Położenie środka masy możemy zatem określić jako:

$$\vec{r}_{\text{SM}} = x_{\text{SM}}\hat{i} + y_{\text{SM}}\hat{j} + z_{\text{SM}}\hat{k}. \quad (9.7)$$

W ten sposób zamiast trzech równań skalarnych (9.5) otrzymujemy jedno równanie wektorowe:

$$\vec{r}_{\text{SM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (9.8)$$

przy czym  $m_u$  jest — jak poprzednio — całkowitą masą układu. Możesz sprawdzić, że równanie to jest poprawne, podstawiając do niego wyrażenia (9.6) i (9.7), a następnie rozdzielając je na składowe  $x$ ,  $y$  i  $z$  — powinieneś w ten sposób otrzymać równania (9.5).

### Ciała rozciągłe

Ciała, z którymi spotykamy się w życiu codziennym, jak choćby kij baseballowy, składają się z tak wielkiej liczby cząstek (atomów), że najlepiej opisać je za pomocą ciągłego rozkładu materii. „Cząstkami” ciała są w tym opisie różniczkowe elementy masy  $dm$ , sumy w równaniu (9.5) przechodzą w całki, a zatem współrzędne środka masy można zdefiniować jako:

$$x_{\text{SM}} = \frac{1}{m_u} \int x dm, \quad y_{\text{SM}} = \frac{1}{m_u} \int y dm, \quad z_{\text{SM}} = \frac{1}{m_u} \int z dm. \quad (9.9)$$

przy czym  $m_u$  jest masą całego ciała.

Obliczenie tych całek dla ciał z naszego otoczenia (jak telewizor czy łoś) jest dość trudne, zajmiemy się więc jedynie ciałami *jednorodnymi*. Takie ciała mają stałą *gęstość*, czyli masę jednostki objętości, co oznacza, że ich gęstość  $\rho$  (grecka litera ro) jest dla każdego elementu ich objętości taka sama, jak dla całego ciała:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m_u}{V}, \quad (9.10)$$

przy czym  $dV$  jest objętością elementu ciała o masie  $dm$ , a  $V$  — całkowitą objętością ciała. Jeśli podstawimy  $dm = (m_u/V)dV$  z równania (9.10) do równania (9.9), to stwierdzimy, że:

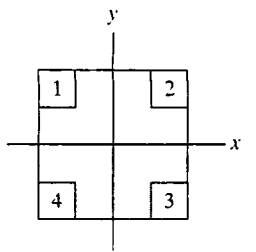
$$x_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int x dV, \quad y_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int y dV, \quad z_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int z dV. \quad (9.11)$$

Jednej lub kilku z tych całek nie trzeba obliczać, jeśli ciało ma środek, oś, lub płaszczyzną symetrii. Środek masy ciała leży wówczas w tym punkcie, na tej osi lub na tej płaszczyźnie. Na przykład środek masy jednorodnej kuli (która ma środek symetrii) leży w środku tej kuli (będącym jej środkiem symetrii). Środek

Środek masy jednorodnego stożka (którego oś jest jego osią symetrii) leży gdzieś na tej osi. Środek masy banana (który ma płaszczyznę symetrii, dzielącą go na dwie symetryczne połówki) leży gdzieś na tej płaszczyźnie.

Środek masy ciała nie musi leżeć w obrębie tego ciała. W środku masy czaranka nie ma nic do jedzenia, a w środku masy podkowy — ani trochę stali.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono jednorodną płytę kwadratową, od której mają być odcięte jednakowe małe kwadraty w każdym z jej rogów. a) Gdzie leży środek masy płyty przed tą operacją? Gdzie leży on po odcięciu: b) kwadratu 1. c) kwadratów 1 i 2. d) kwadratów 1 i 3. e) kwadratów 1, 2 i 3. f) wszystkich czterech kwadratów? Odpowiedz, podając punkty, osie lub ćwiartki układu współrzędnych (oczywiście, nie wykonując żadnych obliczeń).



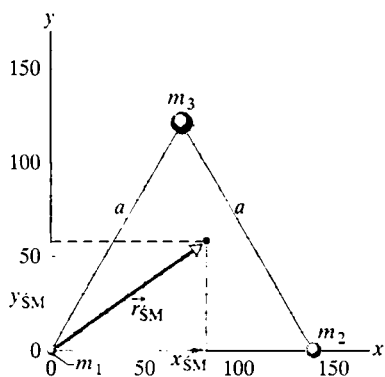
### Przykład 9.1

Trzy cząstki o masach  $m_1 = 1.2$  kg,  $m_2 = 2.5$  kg i  $m_3 = 3.4$  kg, leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku  $a = 140$  cm. Znajdź położenie środka masy układu tych trzech cząstek.

**ROZWIĄZANIE:**

Zacznijmy od tego, że:

1. Mamy tu do czynienia z oddzielnymi cząstkami, a nie z ciałem rozciąglwym, a zatem do wyznaczenia środka ich masy możemy skorzystać z równania (9.5). Cząstki leżą w jednej płaszczyźnie (płaszczyźnie trójkąta równobocznego), a zatem będziemy musieli wyznaczyć tylko dwie liczby — współrzędne środka masy w tej płaszczyźnie.



Rys. 9.3. Przykład 9.1. Trzy cząstki leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku  $a$ . Ich środek masy leży w punkcie o wektorze położenia  $\vec{r}_{SM}$

2. Aby ułatwić sobie obliczenia, wybierzmy układ współrzędnych tak, że jedna z cząstek leży w jego początku, a jeden z boków trójkąta, w wierzchołkach którego znajdują się cząstki, leży na osi  $x$  (jak na rysunku 9.3). Współrzędne cząstek są wtedy następujące:

Cząstka	Masa [kg]	$x$ [cm]	$y$ [cm]
1	1.2	0	0
2	2.5	140	0
3	3.4	70	121

Całkowita masa układu  $m_u$  jest równa 7.1 kg.

Współrzędne środka masy w tym układzie wyznaczamy z równania (9.5), co daje:

$$\begin{aligned} x_{SM} &= \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_u} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3.4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{(7.1 \text{ kg})} \\ &= 83 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

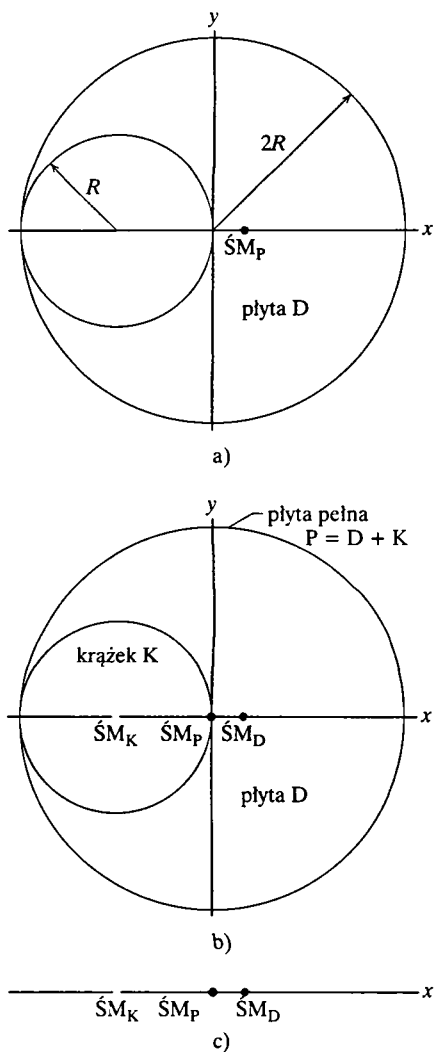
oraz:

$$\begin{aligned} y_{SM} &= \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_u} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(0) + (3.4 \text{ kg})(121 \text{ cm})}{(7.1 \text{ kg})} \\ &= 58 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Na rysunku 9.3 położenie środka masy przedstawiono za pomocą wektora położenia  $\vec{r}_{SM}$  o współrzędnych  $x_{SM}$  i  $y_{SM}$ .

## Przykład 9.2

Na rysunku 9.4a przedstawiono jednorodną płytę metalową o promieniu  $2R$ , z której na taśmie produkcyjnej wykrojono (usunięto) krążek o promieniu  $R$ . Znajdź położenie środka masy otrzymanej w ten sposób płyty z dziurą  $\dot{S}_D$  w układzie współrzędnych zaznaczonym na rysunku.



Rys. 9.4. Przykład 9.2. a) Płyta D powstała przez wycięcie krążka o promieniu  $R$  z kołowej płyty o promieniu  $2R$ . Środek masy płyty D znajduje się w punkcie  $\dot{S}_D$ . b) Wycięty krążek K włożono w pozostały po nim otwór, tworząc znów wyjściową płytę pełną P. Na rysunku zaznaczono środek masy  $\dot{S}_K$  krążka K, oraz środek masy płyty P,  $\dot{S}_P$ . c) Środek masy układu D + K,  $\dot{S}_{D+K}$  leży w punkcie  $\dot{S}_P$ , czyli w punkcie  $x = 0$

## ROZWIĄZANIE:

1. Spróbujmy najpierw określić z grubsza położenie środka masy płyty D, korzystając z jej właściwości symetrii. Zauważ, że płyta jest symetryczna względem osi  $x$  (jej część dolną możemy nałożyć na górną, obracając ją wokół osi  $x$ ). Wobec tego  $\dot{S}_D$  musi leżeć na osi  $x$ . Po wycięciu krążka płyta nie jest już symetryczna względem osi  $y$ . Masa jej części leżącej na prawo od osi  $y$  jest większa od części leżącej na lewo od tej osi, a więc  $\dot{S}_D$  musi leżeć na prawo od osi  $y$ . Tak właśnie z grubsza ustalone położenie  $\dot{S}_D$  zaznaczono na rysunku 9.4a

2. Zauważmy ponadto, że: płyta D jest rozciągniętym ciałem stałym, a zatem do dokładnego wyznaczenia współrzędnych punktu  $\dot{S}_D$  możemy zastosować równanie (9.11). Nie jest to jednak łatwe.

3. Znacznie prościej będzie skorzystać z następującego spostrzeżenia: środek masy to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa ciała *jednorodnego*. Jak możemy z tego skorzystać?

Najpierw wstawmy usunięty krążek (nazwijmy go krążkiem K) z powrotem w miejsce, z którego został wycięty z pierwotnej płyty pełnej (nazwijmy ją płytą P), jak pokazano na rysunku 9.4b. Ze względu na symetrię kołową krążka K jego środek masy  $\dot{S}_K$  znajduje się w jego środku, czyli w punkcie  $x = -R$  (jak pokazano na rysunku). Analogicznie, środek masy płyty pełnej P znajduje się w jej środku, czyli w początku układu współrzędnych (co także pokazano na rysunku). Mamy więc:

Ciało	Środek masy	Położenie $\dot{S}_M$	Masa
D	$\dot{S}_D$	$x_D = ?$	$m_D$
K	$\dot{S}_K$	$x_K = -R$	$m_K$
P	$\dot{S}_P$	$x_P = 0$	$m_P = m_K + m_D$

Możemy teraz skorzystać z uwagi o skupieniu masy: krążek K możemy zastąpić cząstką o masie  $m_K$  znajdującą się w punkcie  $x_K = -R$ , a płytę bez krążka — cząstką o masie  $m_D$  znajdującą się w punkcie  $x_D$  (rys. 9.4c). Położenie środka masy układu tych dwóch cząstek  $x_{K+D}$  możemy wyznaczyć z równania (9.12). Otrzymujemy zatem:

$$x_{K+D} = \frac{m_K x_K + m_D x_D}{m_K + m_D} \quad (9.12)$$

Zauważ teraz, że łącząc krążek K z płytą D otrzymujemy płytę pełną P. Wobec tego położenie  $x_{K+D}$  punktu  $\dot{S}_{K+D}$ , musi być takie samo, jak położenie  $x_P$  punktu  $\dot{S}_P$ , a to ostatnie jest początkiem układu współrzędnych, czyli  $x_{K+D} = x_P = 0$ . Podstawiając to do równania (9.12) i wyznaczając z niego  $x_D$ , dostajemy:

$$x_D = -x_K \frac{m_K}{m_D} \quad (9.13)$$

Wydaje się, że mamy kłopot, gdyż nie znamy mas występujących w równaniu (9.13). Stosunek tych mas możemy jednak powiązać z stosunkiem pól powierzchni odpowiednich części płyty, ponieważ:

$$\begin{aligned} \text{masa} &= (\text{gęstość}) \cdot (\text{objętość}) \\ &= (\text{gęstość}) \cdot (\text{grubość}) \cdot (\text{pole powierzchni}). \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\frac{m_K}{m_D} = \frac{(\text{gęstość})_K}{(\text{gęstość})_D} \cdot \frac{(\text{grubość})_K}{(\text{grubość})_D} \cdot \frac{(\text{pole powierzchni})_K}{(\text{pole powierzchni})_D}$$

Płyta jest jednorodna, a zatem gęstości i grubości różnych jej części są jednakowe. Otrzymujemy zatem:

$$\frac{m_K}{m_D} = \frac{(\text{pole powierzchni})_K}{(\text{pole powierzchni})_D}$$

$$= \frac{(\text{pole powierzchni})_K}{(\text{pole powierzchni})_D - (\text{pole powierzchni})_K}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R^2) - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

Podstawiając ten związek oraz  $x_K = -R$  do równania (9.13), otrzymujemy ostatecznie:

$$x_D = \frac{1}{3}R. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 1: Zadania dotyczące środka masy

W przykładach 9.1 i 9.2 podano trzy metody, które mogą ci ułatwić rozwiązanie zadań dotyczących środka masy. 1) Uwzględnij symetrię ciała — względem środka, osi lub płaszczyzny. 2) Jeśli ciało można podzielić na części, to rozważ każdą z tych części jako cząstkę położoną w środku masy odpowiedniej części ciała. 3) Wybierz mądrze osie układu współrzędnych. Jeśli masz do czy-

nienia z układem cząstek, to wybierz początek układu współrzędnych w punkcie, w którym znajduje się jedna z nich. Jeśli układ jest symetryczny względem pewnej prostej, to wybierz tę prostą za oś  $x$  lub  $y$ . Wybór układu współrzędnych jest zupełnie dowolny — położenie środka masy względem składników układu ciał nie zależy od tego, w jakim układzie współrzędnych je wyznaczamy.

## 9.3. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

Jeśli pchniesz jedną kulę bilardową w kierunku drugiej nieruchomej początkowo bili, to zapewne spodziewasz się, że po zderzeniu układ bil będzie poruszał się do przodu. Zdziwiłbyś się, gdyby obie kule poruszały się do tyłu (w twoją stronę) lub obie potoczyły się w lewo lub w prawo.

Punktem, który porusza się do przodu i którego ruch jest całkowicie niezaburzony przez zderzenie jest środek masy układu zderzających się bil. Jeśli skupisz swoją uwagę na tym punkcie — znajdującym się zawsze w połowie odległości między bilami, gdyż mają one takie same masy — to po kilku doświadczeniach przy bilardowym łatwo to spostrzeżesz. Niezależnie od tego, czy zderzenie jest czołowe, czy jest ledwie muśnięciem się kul lub czymś pośrednim między tymi sytuacjami skrajnymi, środek masy porusza się do przodu, jak gdyby nie było żadnego zderzenia. Zbadamy teraz ruch środka masy nieco bardziej szczegółowo.

Przeanalizujmy teraz zespół  $n$  cząstek o masach niekoniecznie jednakowych. Interesuje nas *jedynie* ruch ich środka masy. Choć środek masy to tylko punkt, jego ruch jest taki sam, jak ruch cząstki o masie równej sumie mas wszystkich cząstek układu. Do jego opisu możemy zastosować pojęcia położenia, prędkości i przyspieszenia. Okazuje się (co wkrótce udowodnimy), że ruch środka masy układu cząstek opisuje równanie wektorowe:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m_u \vec{a}_{\text{SM}} \quad (\text{układ cząstek}). \quad (9.14)$$

Jest to druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu środka masy układu cząstek. Zauważ, że ma ona taką samą postać ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ ), jak dla ruchu jednej cząstki. Wielkości w niej występujące należy jednak dobierać z pewną starannością.

1.  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  jest to wypadkowa *wszystkich sił zewnętrznych*, jakie działają na układ. Siły działające między składnikami układu cząstek (*siły wewnętrzne*) nie występują w równaniu (9.14).
2.  $m_u$  jest *całkowitą masą* układu. Zakładamy, że w czasie ruchu układu jego masa nie zwiększa się, ani nie zmniejsza, tak że  $m_u$  jest stałe. Taki układ nazywamy **układem zamkniętym**.
3.  $\vec{a}_{\text{SM}}$  jest przyspieszeniem *środką masy* układu. Równanie (9.14) nie daje żadnych informacji o przyspieszeniu jakiegokolwiek innego punktu układu.

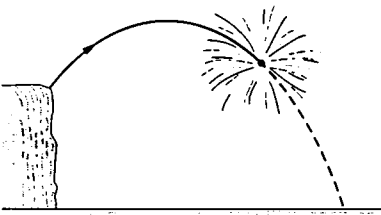
Równanie (9.14) jest równoważne trzem równaniom dla składowych  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  i  $\vec{a}_{\text{SM}}$  wzdłuż trzech osi układu współrzędnych. Oto te równania:

$$\vec{F}_{\text{wyp},x} = m_u \vec{a}_{\text{SM},x}, \quad \vec{F}_{\text{wyp},y} = m_u \vec{a}_{\text{SM},y}, \quad \vec{F}_{\text{wyp},z} = m_u \vec{a}_{\text{SM},z}. \quad (9.15)$$

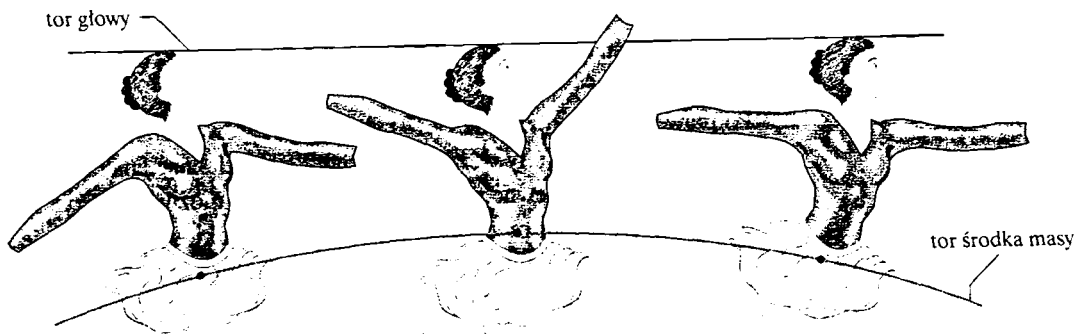
Wróćmy teraz do naszych kul bilardowych i zbadajmy dokładniej ich ruch. Od chwili, gdy pierwsza bila została wprawiona w ruch, na nasz układ ciał (dwie bile) nie działa żadna wypadkowa siła zewnętrzna. Z równania (9.14) wynika, że skoro  $\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$ , to także  $\vec{a}_{\text{SM}} = 0$ . Przyspieszenie jest szybkością zmiany prędkości, oznacza to więc, że prędkość środka masy układu cząstek (dwóch bil) się nie zmienia. Podczas zderzenia w układzie działają siły *wewnętrzne*, czyli siły, jaką każda z bil działa na drugą. Te siły nie mają wpływu na wielkość siły  $\vec{F}_{\text{wyp}}$ , która jest nadal równa zero. Tak więc, jeśli środek masy układu cząstek porusza się przed zderzeniem w pewnym kierunku i z pewną prędkością, to po zderzeniu będzie poruszał się w tym samym kierunku i z taką samą prędkością.

Równanie (9.14) stosujemy nie tylko dla układu cząstek, lecz i dla ciała rozciągniętego, jak na przykład kij baseballowy z rysunku 9.1b. W tym konkretnym przypadku  $m_u$  w równaniu (9.14) jest masą kija, a  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  — działającą na kij siłą ciężkości. Z równania (9.14) wynika, że  $\vec{a}_{\text{SM}} = \vec{g}$ . Innymi słowy, środek masy kija poruszał się tak, jak gdyby kij był cząstką o masie  $m_u$ , na którą działa siła  $\vec{F}_g$ .

Inny ciekawy przypadek przedstawiono na rysunku 9.5. Wyobraź sobie, że w czasie pokazu ogni sztucznych wystrzelono rakieta, która najpierw poruszała się po torze parabolicznym, po czym w pewnej chwili eksplodowała i rozpadła się na kawałki. Gdyby rakietę nie wybuchła, to nadal poruszałaby się po torze przedstawionym na rysunku. Siły, działające w czasie wybuchu to siły *wewnętrzne*, działające w układzie, którym jest najpierw rakietę, a potem jej fragmenty. Są to siły, które działają między składnikami naszego układu ciał. Jeśli pominiemy opór powietrza, to działającą na układ wypadkową siłą *zewnętrzną*  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  jest siła ciężkości, niezależnie od tego, czy rakietę rozpadła się na części, czy nie. Wobec tego z równania (9.14) wynika, że przyspieszenie  $\vec{a}_{\text{SM}}$  środka masy fragmentów rakiety jest równe  $\vec{g}$  dopóty, dopóki wszystkie fragmenty rakiety po eksplozji znajdują się w locie. Oznacza to, że środek masy fragmentów porusza się po takim samym torze parabolicznym, po jakim poruszałaby się rakietę, gdyby nie wybuchła w locie.



Rys. 9.5. W czasie pokazu ogni sztucznych rakietę eksploduje w locie. Jeśli pominiemy opór powietrza, to środek masy kawałków, na które rozpadła się rakietę porusza się torze parabolicznym, po jakim poruszałaby się rakietę, gdyby nie uległa rozpadowi, aż do chwili spadku pierwszych fragmentów rakiety na ziemię



Rys. 9.6. Skok „grand jeté” (na podstawie książki Kennetha Lawsa *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984)

Baletnica, wykonująca skok „grand jeté”, zaraz po oderwaniu się od sceny wznosi ręce i prostuje nogi do pozycji poziomej (rys. 9.6). Dzięki temu jej środek masy przemieszcza się ku górze. Środek masy baletnicy porusza się nad sceną po torze parabolicznym, lecz dzięki zmianie jego położenia w obrębie ciała tancerki znajduje się on coraz bliżej jej głowy i torsu. W wyniku tego głowa i tors baletnicy poruszają się po torze niemal poziomym, co sprawia wrażenie „płynięcia” tancerki nad sceną.

### Uzasadnienie równania (9.14)

Wyprowadzimy teraz to bardzo ważne równanie. Dla układu  $n$  cząstek ze wzoru (9.8) otrzymujemy:

$$m_u \vec{r}_{\Sigma M} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n, \quad (9.16)$$

gdzie  $m_u$  jest całkowitą masą układu, a  $\vec{r}_{\Sigma M}$  — wektorem położenia środka masy układu.

Różniczkując równanie (9.16) względem czasu, dostajemy:

$$m_u \vec{v}_{\Sigma M} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n. \quad (9.17)$$

gdzie  $\vec{v}_i$  ( $= d\vec{r}_i/dt$ ) jest prędkością  $i$ -tej cząstki, a  $\vec{v}_{\Sigma M}$  ( $= d\vec{r}_{\Sigma M}/dt$ ) — prędkością środka masy.

Różniczkując następnie równanie (9.17) względem czasu, otrzymujemy:

$$m_u \vec{a}_{\Sigma M} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots + m_n \vec{a}_n, \quad (9.18)$$

gdzie  $\vec{a}_i$  ( $= d\vec{v}_i/dt$ ) jest przyspieszeniem  $i$ -tej cząstki, a  $\vec{a}_{\Sigma M}$  ( $= d\vec{v}_{\Sigma M}/dt$ ) — przyspieszeniem środka masy. Choć środek masy jest tylko punktem geometrycznym, to możemy mu — podobnie jak cząstce — przypisać położenie, prędkość i przyspieszenie.

Z drugiej zasady dynamiki wynika, że iloczyn  $m_i \vec{a}_i$  jest równy sile wypadkowej, działającej na  $i$ -tą cząstkę. Korzystając z tego, możemy zapisać równanie (9.18) w postaci:

$$m_u \vec{a}_{\dot{S}M} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n. \quad (9.19)$$

Po prawej stronie równania (9.19) występują zarówno siły, jakimi działają na siebie cząstki układu (siły wewnętrzne), jak i siły działające na cząstki układu spoza tego układu (siły zewnętrzne). Siły wewnętrzne można połączyć w pary akcja-reakcja, które — na mocy trzeciej zasady dynamiki — redukują się w sumie po prawej stronie równania (9.19). Suma ta jest zatem równa jedynie sumie wektorowej wszystkich sił *zewnętrznych*, jakie działają na układ cząstek. Równanie (9.19) sprowadza się zatem do równania (9.14), które zamierzaliśmy uzasadnić.

**SPRAWDZIAN 2:** Dwoje łyżwiarzy trzyma przeciwległe końce tyczki o znikomo małej masie. łyżwiarze stoją na tafli lodowej, po której mogą poruszać się bez tarcia. Przyjmij, że oś układu współrzędnych jest zgodna z kierunkiem tyczki, a początek osi znajduje się w środku masy układu dwojga łyżwiarzy. Jedno z łyżwiarzy — Filip — waży dwa razy tyle, co drugie — Eliza. Gdzie spotkają się łyżwiarze, jeśli: a) Filip ciągnie tyczkę, chwytając ją coraz dalej tak, aby zbliżyć się do Elizy, b) tyczkę ciągnie w ten sposób Eliza, c) oboje ciągną tyczkę równocześnie?

### Przykład 9.3

Trzy cząstki przedstawione na rysunku 9.7a znajdują się początkowo w spoczynku. W pewnej chwili na każdą z nich zaczyna działać siła *zewnętrzna*, pochodząca od ciała spoza tego układu cząstek. Kierunki działania sił pokazano na rysunku, a ich wartości są równe:  $F_1 = 6 \text{ N}$ ,  $F_2 = 12 \text{ N}$  i  $F_3 = 14 \text{ N}$ . Ile wynosi przyspieszenie środka masy układu i w jakim kierunku będzie się on poruszać?

#### ROZWIĄZANIE:

Położenie środka masy wyznaczone metodą z przykładu 9.1, zaznaczono na rysunku czerwoną kropką. Przypomnij sobie, że:

➤ 1. Środek masy możemy traktować jako cząstkę o masie równej całkowitej masie układu, tzn.  $m_u = 16 \text{ kg}$ . Można również uważać, że siły zewnętrzne działają tak, jak gdyby przyłożone były w środku masy układu (rys. 9.7b).

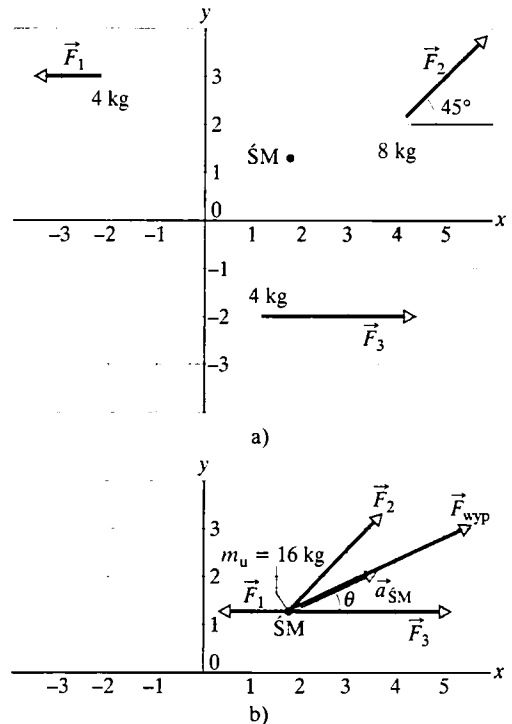
Zauważ następująco, że:

➤ 2. Ruch środka masy opisuje druga zasada dynamiki ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m_u \vec{a}$ ), która w naszym przypadku przyjmuje postać:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m_u \vec{a}_{\dot{S}M}, \quad (9.20)$$

czyli

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m_u \vec{a}_{\dot{S}M}.$$



Rys. 9.7. Przykład 9.3. a) Na trzy cząstki znajdujące się początkowo w spoczynku zaczynają działać siły zewnętrzne. Na rysunku zaznaczono położenia początkowe cząstek i ich środki masy oraz działające na nie siły. b) Siły przesunięto do środka masy, który porusza się jak cząstka o masie  $m_u$  równej całkowitej masie układu. Pokazano również wektor wypadkowej siły zewnętrznej  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  oraz wektor przyspieszenia  $\vec{a}_{\dot{S}M}$  środka masy



skład wynika, że:

$$\vec{a}_{\text{SM}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m_u}. \quad (9.21)$$

Z równania (9.20) wynika, że przyspieszenie środka  $\vec{a}_{\text{SM}}$  masy układu ma taki sam kierunek, jak wypadkowa siła zewnętrzna  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  działająca na układ (rys. 9.7b). W chwili początkowej cząstki spoczywają, a więc spoczywa również ich środek masy. Wobec tego, gdy środek masy zaczyna się poruszać, przemieszcza się on we wspólnym kierunku  $\vec{a}_{\text{SM}}$  i  $\vec{F}_{\text{wyp}}$ .

Aby obliczyć wartość prawej strony równania (9.21), zapiszemy to równanie dla składowych, a następnie wyznaczmy z niego składowe wektora  $\vec{a}_{\text{SM}}$  i sam wektor. Równanie dla składowych wzdłuż osi  $x$  ma postać:

$$a_{\text{SM},x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{m_u} = \frac{(-6 \text{ N}) + (12 \text{ N}) \cos 45^\circ + (14 \text{ N})}{(16 \text{ kg})} = 1,03 \text{ m/s}^2,$$

a dla składowych wzdłuż osi  $y$ :

$$a_{\text{SM},y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{m_u} = \frac{(0) + (12 \text{ N}) \sin 45^\circ + (0)}{(16 \text{ kg})} = 0,53 \text{ m/s}^2.$$

Mając wartości składowych, wyznaczamy moduł wektora  $\vec{a}_{\text{SM}}$ :

$$a_{\text{SM}} = \sqrt{(a_{\text{SM},x})^2 + (a_{\text{SM},y})^2} = 1,16 \text{ m/s}^2 \approx 1,2 \text{ m/s}^2 \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz kąt, jaki tworzy on z dodatnim kierunkiem osi  $x$ :

$$\theta = \arctg \frac{a_{\text{SM},y}}{a_{\text{SM},x}} = 27^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

## 9.4. Pęd

Słowo „pęd” ma wiele znaczeń w mowie potocznej, lecz tylko jedno ścisłe znaczenie w fizyce. Pędem cząstki jest wektor  $\vec{p}$  zdefiniowany jako:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{pęd cząstki}), \quad (9.22)$$

przy czym  $m$  jest masą cząstki, a  $\vec{v}$  — jej prędkością. Ponieważ  $m$  jest zawsze dodatnią wielkością skalarną, z równania (9.22) wynika, że wektory  $\vec{p}$  i  $\vec{v}$  mają taki sam kierunek. Wynika z niego również, że jednostką pędu w układzie SI jest kilogram razy metr na sekundę.

Korzystając z pojęcia pędu, możemy sformułować drugą zasadę dynamiki jako:

► Szybkość zmian pędu cząstki jest równa wypadkowej sił działających na cząstkę i ma kierunek tej siły.

Właśnie tak pierwotnie sformułował ją Newton. Stwierdzenie to możemy zapisać w postaci równania:

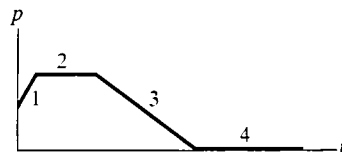
$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9.23)$$

Podstawiając do tego równania  $\vec{p}$  ze wzoru (9.22), otrzymujemy:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Wyrażenia:  $\vec{F}_{\text{wyp}} = d\vec{p}/dt$  oraz  $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$  są więc równoważnymi sobie postaciami drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu cząstki.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku pokazano, jak zależy od czasu pęd cząstki poruszającej się wzdłuż osi  $x$ . Na cząstkę działa siła, mająca kierunek tej osi. a) U szereguj cztery obszary z rysunku, według wartości działającej w nich siły, od największej do najmniejszej. b) W którym z tych obszarów cząstka zwalnia?



## 9.5. Pęd układu cząstek

Przeanalizujmy teraz układ  $n$  cząstek o pewnych wartościach masy, prędkości i pędu. Cząstki mogą ze sobą oddziaływać, a ponadto mogą na nie działać siły zewnętrzne. Cały układ cząstek ma pęd  $\vec{P}$ , zdefiniowany jako suma wektorów pędów poszczególnych cząstek. Wobec tego:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n. \quad (9.24)$$

Porównując to równanie ze wzorem (9.17) stwierdzamy, że:

$$\vec{P} = m_u \vec{v}_{\Sigma M} \quad (\text{pęd układu cząstek}). \quad (9.25)$$

Korzystając z powyższego wzoru, możemy podać jeszcze inną definicję pędu układu cząstek:

► Pęd układu cząstek jest równy iloczynowi całkowitej masy układu  $m_u$  oraz prędkości jego środka masy.

Różniczkując równanie (9.25) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m_u \frac{d\vec{v}_{\Sigma M}}{dt} = m_u \vec{a}_{\Sigma M}. \quad (9.26)$$

Porównując ze sobą równania (9.14) i (9.26) możemy stwierdzić, że drugą z dynamiki Newtona dla układu cząstek możemy również zapisać w postaci:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{układ cząstek}). \quad (9.27)$$

przy czym  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  jest wypadkową sił zewnętrznych działających na układ. Równanie to stanowi uogólnienie równania dla pojedynczej cząstki:  $\vec{F}_{\text{wyp}} = d\vec{p}$  dla przypadku układu wielu cząstek.

### Przykład 9.4

Na rysunku 9.8a przedstawiono model samochodu o masie 2 kg przed i po pokonaniu przez niego zakrętu toru. Jego prędkość przed skrzyżowaniem ma wartość 0.5 m/s, a po wyjściu z zakrętu — wartość 0.4 m/s. Wyznacz zmianę pędu  $\Delta \vec{P}$  samochodu, jakiej doznał on w czasie pokonywania zakrętu.

#### ROZWIĄZANIE:

Potraktujmy samochód jako układ cząstek.

► 1. Aby wyznaczyć  $\Delta \vec{P}$ , musimy znać pęd samochodu przed i po pokonaniu przez niego zakrętu. Potrzebne nam są prędkości  $\vec{v}_{\text{pocz}}$  i  $\vec{v}_{\text{końc}}$  samochodu przed i po skrzyżowaniu. W układzie współrzędnych z rysunku 9.8a możemy zapisać  $\vec{v}_{\text{pocz}}$  i  $\vec{v}_{\text{końc}}$  jako:

$$\vec{v}_{\text{pocz}} = -(0.5 \text{ m/s})\hat{j} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}_{\text{końc}} = (0.4 \text{ m/s})\hat{i}$$

Korzystając z równania (9.25), wyznaczamy pęd samochodu przed i po pokonaniu przez niego zakrętu:

$$\vec{P}_{\text{pocz}} = m_u \vec{v}_{\text{pocz}} = (2 \text{ kg})(-0,5 \text{ m/s})\hat{j} = (-1 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{j}$$

oraz

$$\vec{P}_{\text{końc}} = m_u \vec{v}_{\text{końc}} = (2 \text{ kg})(0,4 \text{ m/s})\hat{i} = (0,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{i}.$$

2. Wektory pędu nie mają jednakowego kierunku, dlatego nie możemy wyznaczyć zmiany pędu  $\Delta \vec{P}$ , po prostu odejmując wartość  $\vec{P}_{\text{pocz}}$  od wartości  $\vec{P}_{\text{końc}}$ . Zmianę pędu musimy wyznaczyć z równania wektorowego:

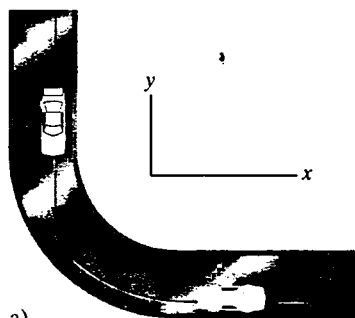
$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_{\text{końc}} - \vec{P}_{\text{pocz}}, \quad (9.28)$$

co daje:

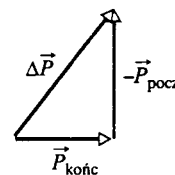
$$\begin{aligned} \Delta \vec{P} &= (0,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{i} - (-1 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{j} \\ &= (0,8\hat{i} + 1\hat{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Na rysunku 9.8b przedstawiono wektory  $\Delta \vec{P}$ ,  $\vec{P}_{\text{końc}}$  i  $-\vec{P}_{\text{pocz}}$ .

Zwróć uwagę, że aby odjąć  $\vec{P}_{\text{pocz}}$  od  $\vec{P}_{\text{końc}}$  w równaniu (9.28) dodajemy  $-\vec{P}_{\text{pocz}}$  do  $\vec{P}_{\text{końc}}$ .



a)



b)

Rys. 9.8. Przykład 9.4. a) Model samochodu pokonuje zakręt. b) Zmiana pędu  $\Delta \vec{P}$  samochodu jest sumą wektorową pędu  $\vec{P}_{\text{końc}}$  pojazdu po wykonaniu manewru i wektora przeciwnego do pędu początkowego  $\vec{P}_{\text{pocz}}$  samochodu

## 9.6. Zachowanie pędu

Załóżmy, że wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ cząstek jest równa zero (tzn. układ jest izolowany) oraz że żadne cząstki nie opuszczają układu, ani do niego nie przybywają (tzn. układ jest zamknięty). Podstawiając do równania (9.27)  $\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$ , otrzymujemy:  $d\vec{P}/dt = 0$ , czyli:

$$\vec{P} = \text{const} \quad (\text{układ zamknięty i izolowany}). \quad (9.29)$$

Wyrażając to słowami:

➤ Jeśli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zero, to całkowity pęd  $\vec{P}$  układu nie ulega zmianie.

Stwierdzenie to nosi nazwę **zasady zachowania pędu**. Można je także zapisać w postaci:

$$\vec{P}_{\text{pocz}} = \vec{P}_{\text{końc}} \quad (\text{układ zamknięty i izolowany}). \quad (9.30)$$

Słownie oznacza to, że dla układu zamkniętego i izolowanego:

$$\left( \begin{array}{c} \text{całkowity pęd układu} \\ \text{w pewnej chwili początkowej } t_{\text{pocz}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{całkowity pęd układu} \\ \text{w dowolnej chwili późniejszej } t_{\text{końc}} \end{array} \right).$$

Równania (9.29) i (9.30) są równaniami wektorowymi, a zatem każde z nich jest równoważne trzem równaniom wyrażającym zachowanie pędu wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych kierunków, np. trzech osi układu współrzędnych  $xyz$ . W zależności od tego, jakie siły działają na układ, pęd może nie być zachowany

wzdłuż wszystkich trzech kierunków, a tylko wzdłuż jednego lub dwóch z nich. Prawdziwe jest przy tym następujące stwierdzenie:

➤ Jeśli wypadkowa sił zewnętrżnych działających na układ zamknięty ma wzdłuż pewnej osi składową równą zeru, to składowa pędu układu wzdłuż tej osi nie ulega zmianie.

Rozważmy prosty przykład — wyobraź sobie, że rzucasz grejpfruta w drugi koniec pokoju. Jedyłą siłą zewnętrżną działającą na grejpfruta (którego przyjmujemy za nasz układ cząstek) w czasie jego lotu jest siła ciężkości  $\vec{F}_g$  skierowana pionowo w dół. Wobec tego składowa pionowa pędu grejpfruta zmienia się w czasie jego lotu, lecz składowa pozioma jego pędu nie ulega zmianie, gdyż w poziomie nie działa na grejpfruta żadna siła zewnętrżna.

Zwróć uwagę, że mówimy o siłach zewnętrżnych działających na układ zamknięty. Siły wewnętrzne mogą zmienić pęd składników układu, lecz nie mogą spowodować zmiany pędu układu jako całości.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** Pewien mechanizm leżący początkowo w bezruchu na podłodze, po której może się poruszać bez tarcia nagle wybucha i rozpada się na dwie części, które rozjeżdżają się po podłodze. Jedna z tych części ślizga się w dodatnim kierunku osi  $x$ . a) Ile wynosi suma pędów obydwu części po wybuchu? b) Czy druga część może ślizgać się pod kątem względem osi  $x$ ? c) Jaki jest kierunek pędu drugiej części?

## Przykład 9.5

Urna wyborcza o masie  $m = 6$  kg ślizga się bez tarcia po podłodze, z prędkością o wartości  $v = 4$  m/s i kierunku zgodnym z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . Nagle urna wybucha i rozpada się na dwie części. Jedna z nich o masie  $m_1 = 2$  kg porusza się w dodatnim kierunku osi  $x$ , z prędkością o wartości  $v_1 = 8$  m/s. Ile wynosi prędkość drugiej części, której masa jest równa  $m_2$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Należy zauważyć dwie rzeczy:

➤ 1. Wyznamy prędkość drugiej części urny, jeśli znajdziemy jej pęd, gdyż wiemy już, ile wynosi jej masa:  $m_2 = m - m_1 = 4$  kg.

➤ 2. Pęd każdej części urny będziemy mogli powiązać z pędem urny przez wybuchem, o ile pęd jest zachowany. Sprawdzimy to.

Wybieramy układ odniesienia związany z podłogą. Rozważany układ złożony początkowo z urny, a potem z dwóch jej części, jest zamknięty, ale nie jest izolowany, ponieważ na urnę i każdą z jej części działa siła normalna ze strony podłogi oraz siła ciężkości. Obie te siły działają jednak w pionie, a więc nie mogą powodować zmiany składowej poziomej pędu układu. Zmiany takiej nie mogą również wywołać siły działające podczas wybuchu urny, ponieważ z punktu widzenia naszego układu ciała są to siły wewnętrzne. Dochodzimy więc do wniosku, że składowa pozioma

pędu układu jest zachowana, a zatem możemy skorzystać z równania (9.30) dla składowych wzdłuż osi  $x$ .

Początkowy pęd układu to pęd całej urny:

$$\vec{P}_{\text{pocz}} = m\vec{v}.$$

Podobnie, pędy końcowe dwóch części urny są równe:

$$\vec{P}_{\text{końc.1}} = m_1\vec{v}_1 \quad \text{i} \quad \vec{P}_{\text{końc.2}} = m_2\vec{v}_2.$$

Całkowity pęd końcowy  $\vec{P}_{\text{końc}}$  układu jest sumą wektorową pędów obydwu części urny:

$$\vec{P}_{\text{końc}} = \vec{P}_{\text{końc.1}} + \vec{P}_{\text{końc.2}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Wszystkie występujące w tym zadaniu prędkości i pędy są wektorami skierowanymi wzdłuż osi  $x$ , dlatego też możemy uwzględnić tylko ich składowe  $x$ . Zapisując równanie (9.30) dla składowych wzdłuż tej osi, otrzymujemy:

$$P_{\text{pocz}} = P_{\text{końc.}}$$

a zatem:

$$mv = m_1v_1 + m_2v_2.$$

Podstawiając wartości liczbowe danych, dostajemy:

$$(6 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) = (2 \text{ kg})(8 \text{ m/s}) + (4 \text{ kg})v_2.$$

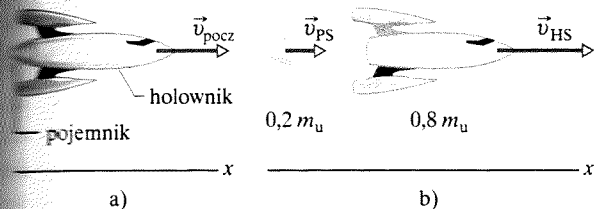
a stąd:

$$v_2 = 2 \text{ m/s.} \quad (\text{odp.})$$

Wynik jest dodatni, a więc druga część urny porusza się w dodatnim kierunku osi  $x$ .

## Przykład 9.6

Przedstawiono holownik kosmiczny wraz z pojemnikiem na ładunek, o łącznej masie  $m_u$ , poruszający się w kierunku osi  $x$ . Prędkość początkowa  $\vec{v}_{pocz}$  holownika względem Słońca ma wartość 2100 km/h. W wyniku wybuchu holownik uwalnia się od pojemnika, którego masa wynosi  $0,2m_u$  (rys. 9.9b). Holownik porusza się następnie wzdłuż osi  $x$  o 500 km/h szybciej niż pojemnik, tzn. prędkość holownika i pojemnika ma wartość  $v_{wzgl}$ , równą 500 km/h. Ile wynosi wówczas prędkość  $v_{HS}$  holownika względem Słońca?



Rys. 9.9. Przykład 9.6. a) Holownik kosmiczny z pojemnikiem na ładunek porusza się z prędkością początkową  $\vec{v}_{pocz}$ . b) Holownik wyrzucił pojemnik na ładunek. Pojemnik ma teraz prędkość  $\vec{v}_{PS}$ , a holownik — prędkość  $\vec{v}_{HS}$

### ROZWIĄZANIE:

Układ ciał, który jest złożony z holownika i pojemnika na ładunek jest zamknięty i izolowany, więc jego całkowity pęd jest zachowany, tzn.:

$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{końc}, \quad (9.31)$$

czyli wskaźniki pocz i końc odnoszą się do sytuacji przed wybuchem i po nim. Ruch odbywa się przez cały czas w tym samym kierunku, a zatem możemy zajmować się tylko składowymi prędkościami i pędami wzdłuż tego kierunku. Przed wybuchem mamy:

$$P_{pocz} = m_u v_{pocz}, \quad (9.32)$$

Oznaczmy przez  $v_{PS}$  prędkość odrzuconego pojemnika względem Słońca. Całkowity pęd układu po wybuchu wynosi zatem:

$$P_{końc} = (0,2m_u)v_{PS} + (0,8m_u)v_{HS}. \quad (9.33)$$

przy czym pierwszy wyraz po prawej stronie równania to pęd pojemnika, a drugi — pęd holownika.

Nie znamy prędkości  $v_{PS}$  pojemnika względem Słońca, lecz możemy ją przedstawić za pomocą znanych prędkości:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{prędkość holownika} \\ \text{względem Słońca} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{l} \text{prędkość holownika} \\ \text{względem pojemnika} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{prędkość pojemnika} \\ \text{względem Słońca} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Zapisując to przy użyciu symboli, dostajemy:

$$v_{HS} = v_{wzgl} + v_{PS}, \quad (9.34)$$

czyli

$$v_{PS} = v_{HS} - v_{wzgl}.$$

Podstawiając wyrażenie na  $v_{PS}$  do wzoru (9.33), a następnie wstawiając wyrażenia (9.32) i (9.33) do równania (9.31), otrzymujemy:

$$m_u v_{pocz} = 0,2m_u(v_{HS} - v_{wzgl}) + 0,8m_u v_{HS},$$

a stąd:

$$v_{HS} = v_{pocz} + 0,2v_{wzgl},$$

czyli

$$v_{HS} = (2100 \text{ km/h}) + (0,2)(500 \text{ km/h}) = 2200 \text{ km/h}.$$

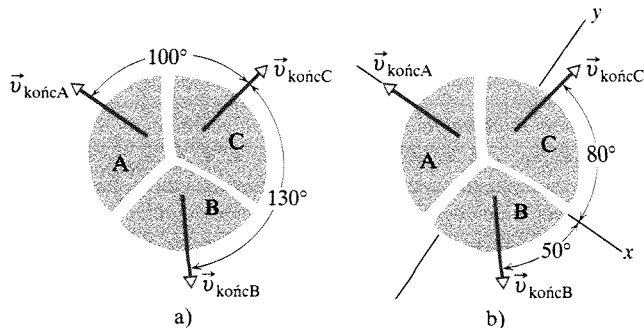
(odpowiedź)

**SPRAWDZIAN 5:** Tabela zawiera wartości prędkości holownika i pojemnika (po ich rozdzieleniu się, względem Słońca) oraz ich prędkości względnej w trzech przypadkach. Wypełnij puste pola w tabeli.

	Prędkość [km/h]		Prędkość względna [km/h]
	Pojemnik	Holownik	
a	1500	2000	
b		3000	400
c	1000		600

## Przykład 9.7

Petarda umieszczona wewnątrz orzecha kokosowego o masie  $m_u$  rozrywa go na trzy kawałki, które rozsypują się po podłodze. Przed wybuchem orzech pozostawał w spoczynku, a po wybuchu ruch jego kawałków po podłodze odbywa się bez tarcia. Widok z góry orzecha w chwilę po wybuchu przedstawiono na rysunku 9.10a. Kawałek C o masie  $0,3m_u$  porusza się po wybuchu petardy z prędkością o wartości  $v_{końcC} = 5 \text{ m/s}$ .



Rys. 9.10. Przykład 9.7. Trzy kawałki orzecha, na które został on rozerwany w wyniku wybuchu petardy, rozsypują się bez tarcia po podłodze w trzech kierunkach. a) Widok z góry tuż po wybuchu. b) To samo w wybranym, dwuwymiarowym układzie współrzędnych

a) Ile wynosi prędkość kawałka B o masie  $0,2m_u$ ?

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Sprawdźmy, czy w omawianym przypadku pęd jest zachowany. Zauważ, że: 1) orzech i jego kawałki tworzą układ zamknięty; 2) siły działające podczas wybuchu są w tym układzie siłami wewnętrznymi; 3) wypadkowa działających na układ sił zewnętrznych jest równa zero. Wobec tego w układzie tym pęd jest na pewno zachowany.

Zacznijmy od wyboru układu współrzędnych  $x, y$ , jak na rysunku 9.10b, tzn. tak, aby wektor  $\vec{v}_{końc.A}$  był skierowany zgodnie z ujemnym kierunkiem osi  $x$ . Oś  $x$  tworzy kąt  $80^\circ$  z kierunkiem wektora  $\vec{v}_{końc.C}$  i kąt  $50^\circ$  z kierunkiem wektora  $\vec{v}_{końc.B}$ .

Zauważ następnie, że:

➔ 2. Pęd jest zachowany z osobna dla składowych wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Dla składowych wzdłuż osi  $y$  mamy:

$$P_{pocz.y} = P_{końc.y}, \quad (9.35)$$

przy czym wskaźnik pocz odnosi się do sytuacji początkowej (przed wybuchem), a wskaźnik  $y$  oznacza, że rozważamy składowe  $y$  wektorów  $\vec{P}_{pocz}$  i  $\vec{P}_{końc}$ .

Wartość początkowa składowej pędu  $P_{pocz.y}$  jest równa zero, ponieważ orzech znajduje się początkowo w spoczynku. Aby znaleźć wyrażenie na  $P_{końc.y}$ , wyznaczmy składowe pędu każdego z kawałków, korzystając z równania (9.22) zapisanego dla składowych  $y$  ( $p_y = mv_y$ ):

$$p_{końcA.y} = 0,$$

$$p_{końcB.y} = -0,2m_u v_{końcB.y} = -0,2m_u v_{końcB} \sin 50^\circ,$$

$$p_{końcC.y} = 0,3m_u v_{końcC.y} = 0,3m_u v_{końcC} \sin 80^\circ$$

(postać pierwszego z tych równań  $p_{końcA.y} = 0$ , jest konsekwencją naszego wyboru osi układu współrzędnych). Równanie (9.35) przybiera zatem postać:

$$P_{pocz.y} = P_{końc.y} = p_{końcA.y} + p_{końcB.y} + p_{końcC.y}.$$

Ponieważ  $v_{końcC} = 5$  m/s, otrzymujemy stąd:

$$0 = 0 - 0,2m_u v_{końcB} \sin 50^\circ + (0,3m_u)(5 \text{ m/s}) \sin 80^\circ,$$

a następnie:

$$v_{końcB} = 9,64 \text{ m/s} \approx 9,6 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi prędkość kawałka A?

### ROZWIĄZANIE:

Pęd jest też zachowany dla składowych wzdłuż osi  $x$ , mamy więc:

$$P_{pocz.x} = P_{końc.x}, \quad (9.36)$$

przy czym  $P_{pocz.x} = 0$ , gdyż w chwili początkowej orzech spoczywa. Aby wyznaczyć  $P_{końc.x}$  obliczamy składowe  $x$  pędu końcowego poszczególnych kawałków orzecha, pamiętając, że masa kawałka A musi być równa  $0,5m_u$  ( $= m_u - 0,2m_u - 0,3m_u$ ):

$$p_{końcA.x} = -0,5m_u v_{końcA}$$

$$p_{końcB.x} = 0,2m_u v_{końcB.x} = 0,2m_u v_{końcB} \cos 50^\circ,$$

$$p_{końcC.x} = 0,3m_u v_{końcC.x} = 0,3m_u v_{końcC} \cos 80^\circ.$$

Równanie (9.36) przybiera teraz postać:

$$P_{pocz.x} = P_{końc.x} = p_{końcA.x} + p_{końcB.x} + p_{końcC.x}.$$

Ponieważ  $v_{końcC} = 5$  m/s, a  $v_{końcB} = 9,64$  m/s, otrzymujemy:

$$0 = -0,5m_u v_{końcA} + 0,2m_u (9,64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ + (0,3m_u)(5 \text{ m/s}) \cos 80^\circ,$$

a stąd:

$$v_{końcA} = 3 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

✓ **SPRAWDZIAN 6:** Wyobraź sobie, że przed wybuchem orzech porusza się ruchem przyspieszonym w ujemnym kierunku osi  $y$  z rysunku 9.10 (na przykład stacza się po równi pochyłej opadającej w tym kierunku). Czy w tym przypadku pęd jest zachowany wzdłuż: a) osi  $x$  (jak opisano w równaniu (9.36)), b) osi  $y$  (jak opisano w równaniu (9.35))?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Zachowanie pędu

Rozwiązując zadania dotyczące zachowania pędu upewnij się przede wszystkim, czy wybrałeś zamknięty układ izolowany. Określenie *zamknięty* oznacza, że przez granice układu nie przepływa w żadnym kierunku materia (czyli cząstki). Określenie *izolowany* oznacza, że wypadkowa działających na układ sił zewnętrznych jest równa zero. Pamiętaj, że dla układu, który nie jest izolowany pęd jest zachowany jedynie dla tych składowych, dla których odpowiednia składowa wypadkowej sił zewnętrznych jest równa zero. Tak więc dla pewnych składowych pęd może być zachowany, a dla innych nie.

Następnie wybierz rozsądnie dwa stany układu (możesz je nazwać stanem początkowym i stanem końcowym) i zapisz wyrażenia na pęd układu w każdym z tych stanów. Upewnij się przy tym, że wiesz, w jakim inercjalnym układzie odniesienia zapisujesz te wyrażenia oraz pamiętaj, aby zapisać pęd całego układu, tzn. aby nie zapomnieć o żadnym składniku tego układu oraz nie włączyć do układu ciał, które do niego nie należą.

Na koniec przyrównaj wyrażenia na  $\vec{P}_{pocz}$  oraz  $\vec{P}_{końc}$  i z otrzymanego równania wyznacz te wielkości, które należało znaleźć w zadaniu.

## 9.7. Układ o zmiennej masie: rakiet

Dotychczas zajmowaliśmy się układami, co do których zakładaliśmy, że ich całkowita masa pozostaje stała. Czasem jednak tak nie jest, na przykład dla rakiety (rys. 9.11). W chwili startu rakiety większość jej masy stanowi paliwo, które jest potem stopniowo spalane i wyrzucane przez dysze silnika pojazdu.

Aby uwzględnić zmianę masy rakiety w czasie jej ruchu, zastosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona nie dla samej rakiety, lecz dla układu, jaki stanowią łącznie rakiet i wyrzucane przez nią produkty spalania paliwa. Masa tego układu nie zmienia się w czasie lotu rakiety.

### Wyznaczenie przyspieszenia

Wyobraź sobie, że znajdujesz się w spoczynku w inercjalnym układzie odniesienia i obserwujesz raketę poruszającą się ruchem przyspieszonym w przestrzeni kosmicznej, gdzie nie działa na nią ani siła ciężkości, ani siła oporu aerodynamicznego. Ruch rakiety jest zatem prostoliniowy. Przyjmijmy, że w chwili  $t$  masa rakiety wynosi  $m_u$ , a jej prędkość jest wówczas równa  $v$  (patrz rysunek 9.12a).

Na rysunku 9.12b przedstawiono sytuację w chwili późniejszej o  $dt$ . Rakiet ma teraz prędkość  $v + dv$  oraz masę  $m_u + dm_u$ , przy czym zmiana masy  $dm_u$  jest ujemna. Produkty spalania paliwa, wyrzucone przez raketę w przedziale czasu  $dt$ , mają masę  $-dm_u$ , a ich prędkość względem naszego inercjalnego układu odniesienia wynosi  $u$ .

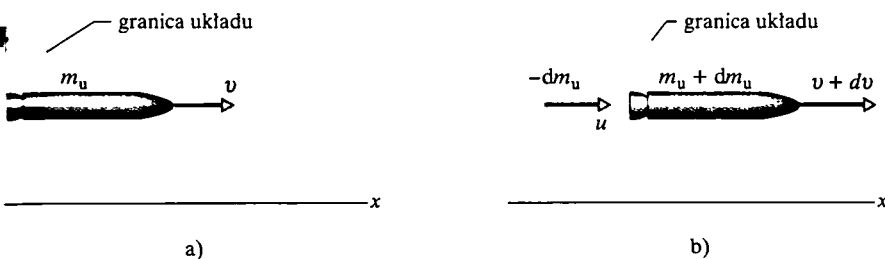
Rozważmy układ, złożony z rakiety i produktów spalania wyrzuconych z silnika w czasie  $dt$ . Układ ten jest zamknięty i izolowany, a zatem jego pęd musi być zachowany w przedziale czasu  $dt$ , czyli musi zachodzić związek:

$$P_{\text{pocz}} = P_{\text{końc}}, \quad (9.37)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do chwil stanowiących początek i koniec przedziału  $dt$ . Równanie (9.37) możemy zapisać w postaci:

$$m_u v = -dm_u u + (m_u + dm_u)(v + dv), \quad (9.38)$$

przy czym pierwszy wyraz po prawej stronie równania jest pędem spalin wyrzuconych w przedziale czasu  $dt$ , a drugi wyraz — pędem rakiety na końcu przedziału  $dt$ .



Rys. 9.12. a) Rakiet poruszająca się ruchem przyspieszonym, obserwowana z inercjalnego układu odniesienia, ma w chwili  $t$  masę  $m_u$ . b) To samo, co na rysunku (a), lecz w chwili  $t + dt$ . Pokazano również produkty spalania paliwa, wyrzucone w przedziale czasu  $dt$



Rys. 9.11. Start statku kosmicznego z serii Mercury

Równanie (9.38) można zapisać w prostszej postaci, przez wprowadzenie prędkości względnej rakiety  $v_{wzgl}$  i spalin związanej z prędkościami w układzie inercyjnym zależnością:

$$\left( \begin{array}{c} \text{prędkość rakiety} \\ \text{w układzie inercyjnym} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{prędkość rakiety} \\ \text{względem spalin} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{prędkość spalin} \\ \text{w układzie inercyjnym} \end{array} \right).$$

Zapisując to równanie za pomocą symboli, otrzymujemy:

$$(v + dv) = v_{wzgl} + u$$

czyli

$$u = v + dv - v_{wzgl}. \quad (9.39)$$

Po podstawieniu wyrażenia na  $u$  do równania (9.38) i wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych dostajemy:

$$-dm_u v_{wzgl} = m_u dv. \quad (9.40)$$

Dzieląc obie strony równania przez  $dt$ , otrzymujemy:

$$-\frac{dm_u}{dt} v_{wzgl} = m_u \frac{dv}{dt}. \quad (9.41)$$

Wielkość  $dm_u/dt$  (czyli szybkość, z jaką rakieta traci masę) oznaczmy przez  $-R$ , przy czym  $R$  jest szybkością, z jaką spalane jest paliwo ( $R$  jest wielkością dodatnią). Zauważając ponadto, że  $dv/dt$  jest to przyspieszenie rakiety, możemy zapisać równanie (9.41) w postaci:

$$R v_{wzgl} = m_u a. \quad (9.42)$$

Równanie (9.42) obowiązuje w każdej chwili, przy czym masa  $m_u$ , szybkość spalania paliwa  $R$  i przyspieszenie  $a$  odnoszą się do tej samej chwili.

Lewa strona równania (9.42) ma wymiar siły ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ ) i zależy od parametrów silnika rakiety, mianowicie od szybkości zużycia paliwa  $R$  i prędkości  $v_{wzgl}$ , z jaką wyrzucane są spaliny względem rakiety. Wyraz  $R v_{wzgl}$  nazywamy siłą ciągu rakiety i oznaczamy symbolem  $T$ . Zapisując równanie (9.42) w postaci  $T = m_u a$ , rozpoznajemy w nim bez trudu drugą zasadę dynamiki Newtona, przy czym  $a$  jest przyspieszeniem rakiety w chwili, w której ma masę równą  $m_u$ .

## Wyznaczenie prędkości

Jak zmienia się prędkość rakiety w miarę spalania przez nią paliwa? Z równaniem (9.40) otrzymujemy:

$$dv = -v_{wzgl} \frac{dm_u}{m_u}.$$

Scałkowanie tego równania daje:

$$\int_{v_{pocz}}^{v_{końc}} dv = -v_{wzgl} \int_{m_u_{pocz}}^{m_u_{końc}} \frac{dm_u}{m_u}.$$



czym  $m_{u \text{ pocz}}$  jest masą początkową rakiety, a  $m_{u \text{ końc}}$  — jej masą końcową. Szukając całki, otrzymujemy wyrażenie na wzrost prędkości rakiety w czasie, którym jej masa zmienia się z  $m_{u \text{ pocz}}$  na  $m_{u \text{ końc}}$ :

$$v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_{u \text{ pocz}}}{m_{u \text{ końc}}} \quad (9.43)$$

Symbol „ln” oznacza *logarytm naturalny*). Z równania tego widać, że korzystne stosowanie rakiet wielostopniowych, dla których odrzucanie kolejnych części rakiety po zużyciu zawartego w nich paliwa daje dodatkowe zmniejszenie wartości  $m_{u \text{ końc}}$ . Najlepsza rakietą to taka, która w chwili osiągnięcia celu zawiera tylko swój ładunek.

## Przykład 9.8

Rakietą o masie początkowej  $m_{u \text{ pocz}}$  równej 850 kg zużywa paliwo z szybkością  $R = 2.3 \text{ kg/s}$ . Prędkość  $v_{\text{wzgl}}$  wyrzucanych z silnika spalin względem rakiety wynosi 2800 m/s.

a) Jaka siłę ciągu ma silnik tej rakiety?

ROZWIĄZANIE:

Przypomnij sobie, że:  $\bullet \rightarrow$  siła ciągu  $T$  jest równa iloczynowi szybkości zużycia paliwa  $R$  i prędkości względnej  $v_{\text{wzgl}}$ , z jaką spalin opuszczają pojazd, to znaczy:

$$T = Rv_{\text{wzgl}} = (2.3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) = 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi początkowe przyspieszenie rakiety?

ROZWIĄZANIE:

Wartość przyspieszenia  $a$  rakiety jest związana z siłą ciągu  $T$  zależnością:  $T = m_u a$ , przy czym  $m_u$  jest masą rakiety. Trzeba jednak pamiętać, że:  $\bullet \rightarrow$  w miarę zużywania paliwa  $m_u$  maleje, zaś  $a$  rośnie. Naszym zadaniem jest znalezienie początkowej wartości  $a$ , zatem musimy do tego wzoru podstawić wartość początkową masy rakiety  $m_{u \text{ pocz}}$ , co daje:

$$a = \frac{T}{m_{u \text{ pocz}}} = \frac{(6440 \text{ N})}{(850 \text{ kg})} = 7.6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeśli rakietą ma być wyrzucana w kosmos z powierzchni Ziemi, to jej przyspieszenie początkowe musi być większe niż  $g =$

$9.8 \text{ m/s}^2$ . Inaczej mówiąc, siła ciągu rakiety musi być większa niż działająca początkowo na raketę siła ciężkości, której wartość  $m_{u \text{ pocz}}g$  wynosi w naszym przypadku  $(850 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$  czyli 8330 N. Warunek ten nie jest spełniony (gdyż — jak stwierdziliśmy —  $T = 6400 \text{ N}$ ), a zatem nasza rakietą nie może być z powodzeniem wyrzucana w kosmos z powierzchni Ziemi; jej siła ciągu jest na to zbyt mała.

c) Załóżmy wobec tego, że rakietą zostaje wyrzucana ze statku kosmicznego, który wyniósł już ją w przestrzeń kosmiczną, gdzie na raketę nie działa żadna siła grawitacyjna. Masa rakiety po zużyciu całego paliwa  $m_{u \text{ końc}}$  jest równa 180 kg. Ile wynosi wówczas prędkość rakiety względem tego statku kosmicznego? Przyjmijmy, że masa statku jest tak duża, że jego prędkość praktycznie nie zmienia się w chwili startu rakiety.

ROZWIĄZANIE:

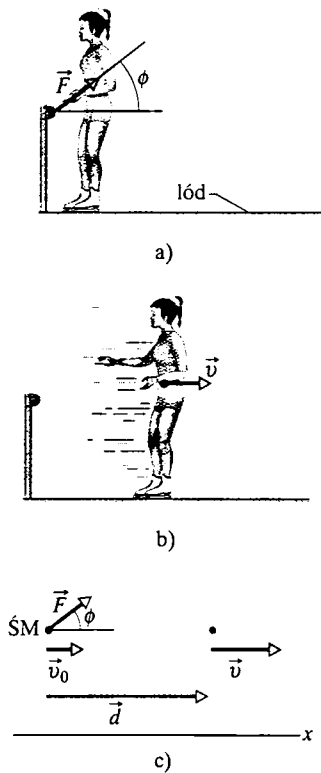
$\bullet \rightarrow$  Prędkość końcowa  $v_{\text{końc}}$  rakiety, jaką osiąga ona w chwili całkowitego zużycia paliwa, zależy od stosunku jej mas: początkowej i końcowej, zgodnie z równaniem (9.43). Prędkość początkowa rakiety wynosi  $v_{\text{pocz}} = 0$ , a więc mamy:

$$v_{\text{końc}} = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_{u \text{ pocz}}}{m_{u \text{ końc}}} = (2800 \text{ m/s}) \ln \frac{850 \text{ kg}}{180 \text{ kg}} \\ = (2800 \text{ m/s}) \ln 4.72 \approx 4300 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć uwagę na to, że prędkość końcowa rakiety może być większa od prędkości, z jaką wyrzucane są spalin.

## 9.8. Siły zewnętrzne i zmiany energii wewnętrznej

Gdy łyżwiarka odpycha się od poręczy, jak na rysunku 9.13a, działa na nią ze strony poręczy siła  $\vec{F}$ , skierowana w tym przypadku pod kątem  $\phi$  do poziomu. W wyniku działania tej siły łyżwiarka zwiększa swoją prędkość, czyli porusza



Rys. 9.13. a) Gdy łyżwiarka odpycha się od poręczy, działa na nią ze strony tej poręczy siła  $\vec{F}$ . b) Po oderwaniu się łyżwiarki od poręczy jej środek masy porusza się z prędkością  $\vec{v}$ . c) Przyjmujemy, że siła zewnętrzna  $\vec{F}$  działa na środek masy łyżwiarki, czyli pod kątem  $\phi$  do osi poziomej  $x$ . Gdy środek masy przemieszcza się o  $\vec{d}$ , jego prędkość zmienia się z  $\vec{v}_0$  na  $\vec{v}$ , pod wpływem składowej poziomej siły  $\vec{F}$

się ruchem przyspieszonym aż do oderwania się od poręczy (rys. 9.13b). Zatem z powodu działania na nią siły zwiększa się jej energia kinetyczna. Przypadek ten różni się jednak pod dwoma względami od rozpatrywanych przez nas poprzednio sytuacji, w których energia kinetyczna ciała zwiększała się w wyniku działania na nie siły.

1. Poprzednio każda część ciała poruszała się jednakowo w tym samym kierunku. Tu ramiona łyżwiarki nie poruszają się tak samo, jak reszta jej ciała.
2. Poprzednio następowało przekazanie energii między ciałem (lub układem ciał) a jego otoczeniem, za pośrednictwem siły zewnętrznej, tzn. siła ta wykonywała pracę. Obecnie energia jest przekazywana w obrębie układu (z jednej jego części do innej), za pośrednictwem siły zewnętrznej  $\vec{F}$ . Konkretnie, energia mięśni łyżwiarki zamienia się na energię kinetyczną łyżwiarki jako całości.

Chcemy znaleźć związek siły zewnętrznej z tą zamianą energii. Mimo dwóch wymienionych różnic siłę  $\vec{F}$  można powiązać ze zmianą energii kinetycznej praktycznie tak samo, jak to zrobiliśmy dla cząstki w paragrafie 7.3. W tym celu założymy najpierw, że cała masa  $m_u$  łyżwiarki jest skupiona w jej środku masy, co pozwoli traktować ją jak cząstkę, znajdującą się w tym punkcie. Możemy teraz uważać, że siła zewnętrzna  $\vec{F}$  działa na cząstkę punktową (rys. 9.13c). Składowa pozioma tej siły  $F \cos \phi$  powoduje ruch przyspieszony cząstki, w wyniku czego energia kinetyczna cząstki zmienia się o  $\Delta E_k$  przy przemieszczeniu o wartość  $d$ . Jak wykażemy nieco później, wielkości te związane są zależnością:

$$\Delta E_k = Fd \cos \phi. \quad (9.44)$$

Można sobie łatwo wyobrazić sytuację, w której pod działaniem siły zewnętrznej zmienia się również wysokość środka masy łyżwiarki nad ziemią, a zatem zmienia się także grawitacyjna energia potencjalna  $E_p$  układu łyżwiarka–Ziemia. Musimy wtedy uwzględnić również zmianę energii potencjalnej  $\Delta E_p$  i zapisać równanie (9.44) w postaci:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = Fd \cos \phi. \quad (9.45)$$

Po lewej stronie tego równania mamy zmianę energii mechanicznej  $\Delta E_{\text{mech}}$  układu. Zatem w przypadku ogólnym otrzymujemy:

$$\Delta E_{\text{mech}} = Fd \cos \phi \quad (\text{siła zewnętrzna, zmiana } E_{\text{mech}}). \quad (9.46)$$

Przeanalizujemy teraz zmiany energii w obrębie łyżwiarki, która będzie stanowić badany przez nas układ. Choć na ten układ działa siła zewnętrzna, to nie powoduje ona ani dostarczenia energii do układu, ani odebrania jej od niego. Zatem całkowita energia  $E$  układu nie ulega zmianie:  $\Delta E = 0$ . Wiemy, że gdy łyżwiarka odpycha się od poręczy, zmienia się nie tylko energia mechaniczna jej środka masy, lecz także energia jej mięśni. Nie wchodząc w szczególności zmiany energii mięśni, oznaczmy ją po prostu jako  $\Delta E_{\text{wewn}}$  (czyli zmianę energii wewnętrznej). Równanie  $\Delta E = 0$  możemy teraz zapisać w postaci:

$$\Delta E_{\text{wewn}} + \Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (9.47)$$

czyli

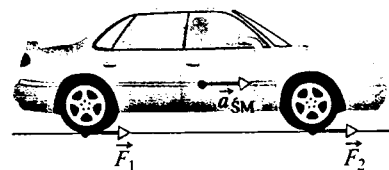
$$\Delta E_{\text{wewn}} = -\Delta E_{\text{mech}}. \quad (9.48)$$

Z równania wynika, że gdy  $E_{\text{mech}}$  łyżwiarki rośnie, jej  $E_{\text{wewn}}$  maleje dokładnie o taką samą wartość. Podstawiając zależność  $\Delta E_{\text{mech}}$  z równania (9.48) do równania (9.46), otrzymujemy:

$$\Delta E_{\text{wewn}} = -Fd \cos \phi \quad (\text{siła zewnętrzna, zmiana energii wewnętrznej}). \quad (9.49)$$

Równanie to wiąże zmianę energii wewnętrznej  $\Delta E_{\text{wewn}}$  z siłą zewnętrzną  $\vec{F}$ , za pośrednictwem której ta zmiana zachodzi. Jeśli siła  $\vec{F}$  nie ma stałej wartości, to w miejsce  $F$  w równaniach (9.46) i (9.49) należy podstawić  $F_{\text{sr}}$ , czyli średnią wartość siły  $\vec{F}$ .

Choć równania (9.46) i (9.49) wyprowadziliśmy dla łyżwiarki, obowiązują one i dla innych ciał, dla których zmiana energii wewnętrznej  $\Delta E_{\text{wewn}}$  układu zachodzi za pośrednictwem siły zewnętrznej. Rozważmy na przykład samochód z napędem na cztery koła (co oznacza, że silnik obraca wszystkie cztery koła pojazdu), który zwiększa swoją prędkość. W trakcie przyspieszania silnik powoduje, że opony pchają powierzchnię drogi do tyłu. Dzięki temu pojawia się siła tarcia, która działa na wszystkie koła pojazdu w kierunku jego ruchu (rys. 9.14). Wypadkowa siła zewnętrzna  $\vec{F}$ , która jest sumą sił tarcia działających na poszczególne koła jest źródłem przyspieszenia  $\vec{a}$  środka masy pojazdu. Zachodzi zatem zamiana energii wewnętrznej paliwa na energię kinetyczną samochodu. Jeśli siła  $\vec{F}$  jest stała, to dla danego przemieszczenia  $\vec{d}$  środka masy samochodu **na poziomej drodze, zmianę energii kinetycznej  $\Delta E_k$  pojazdu możemy powiązać z siłą zewnętrzną  $\vec{F}$  za pomocą równania (9.49), podstawiając w nim  $\Delta E_p = 0$  i  $\phi = 0$ .**



Rys. 9.14. Samochód z napędem na cztery koła porusza się ruchem przyspieszonym w prawo. Powierzchnia drogi działa na dolną powierzchnię opon siłami tarcia, z których dwie pokazano na rysunku. Wypadkowa siła zewnętrzna  $\vec{F}$ , jaka działa na samochód jest sumą tych czterech sił

Równanie (9.45) jest również spełnione, gdy kierowca hamuje swój pojazd. Siła  $\vec{F}$  jest wtedy sumą sił tarcia działających w kierunku przeciwnym do ruchu samochodu, a  $\phi = 180^\circ$ . Energia kinetyczna środka masy pojazdu zamienia się przy tym na **energię termiczną** hamulców.

### Uzasadnienie równania (9.44)

Powróćmy do łyżwiarki i rysunku 9.13. Załóżmy, że w czasie przemieszczania jej środka masy o  $\vec{d}$  jego prędkość ulega zmianie z  $\vec{v}_0$  na  $\vec{v}$ . Odpowiednie wartości prędkości są ze sobą związane — jak wynika z równania (2.16) — zależnością:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \quad (9.50)$$

gdzie  $a_x$  jest przyspieszeniem łyżwiarki. Pomnóżmy obie strony równania (9.50) przez masę łyżwiarki  $m$  i podzielmy je przez 2. Po przeniesieniu wyrazu z  $v_0^2$  na lewą stronę równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma_x d. \quad (9.51)$$

Lewa strona równania (9.51) jest różnicą końcowej energii kinetycznej  $E_k$  końcówki środka masy łyżwiarki i jego początkowej energii kinetycznej  $E_{k \text{ pocz}}$ . Ta różnica stanowi zmianę energii kinetycznej  $\Delta E_k$  środka masy związaną z działaniem

siły  $\vec{F}$ . Zapisując lewą stronę równania (9.51) jako  $\Delta E_k$ , a po prawej stronie podstawiając  $F \cos \phi$  w miejsce  $ma_x$ , co wynika z drugiej zasady dynamiki. otrzymujemy:

$$\Delta E_k = Fd \cos \phi,$$

co zamierzaliśmy wykazać.

## Przykład 9.9

Leżący na grzbiecie chrząszcza sprężyk może podskoczyć, wyginając gwałtownie grzbiet, przy czym energia jego mięśni zamienia się na energię mechaniczną. Towarzyszy temu całkiem dobrze słyszalny trzask. Z analizy zapisu na taśmie wideo jednego z podskoków chrząszcza wynika, że środek masy chrząszcza o masie  $m = 4 \cdot 10^{-6}$  kg w czasie wyskoku wznosił się pionowo w górę na wysokość 0,77 mm, a całkowita wysokość skoku sprężyka wyniosła  $h = 0,3$  m. Wyznacz średnią wartość siły zewnętrznej  $\vec{F}$ , działającej na grzbiet chrząszcza ze strony podłoża podczas jego wyskoku.

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. W czasie wyskoku energia wewnętrzna chrząszcza zamienia się w energię mechaniczną układu chrząszcz–Ziemia, przy czym ta ostatnia wzrasta o  $\Delta E_{\text{mech}}$ . Zamiana energii odbywa się za pośrednictwem siły zewnętrznej  $\vec{F}$ . Aby wyznaczyć wartość tej siły z równania (9.46), musimy najpierw znaleźć wartość  $\Delta E_{\text{mech}}$ .

Oznaczmy przez  $E_{\text{mech},0}$  energię mechaniczną układu tuż przed wyskokiem chrząszcza, a przez  $E_{\text{mech},1}$  — jego energię mechaniczną na końcu wyskoku. Zmiana  $\Delta E_{\text{mech}}$  wynosi zatem:

$$\Delta E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},1} - E_{\text{mech},0}. \quad (9.52)$$

Musimy teraz znaleźć  $E_{\text{mech},1}$  i  $E_{\text{mech},0}$ . Przyjmijmy, że gdy chrząszcz leży spokojnie na podłożu, energia potencjalna układu chrząszcz–Ziemia wynosi  $E_{p,0} = 0$ . Przed skokiem energia kinetyczna środka masy chrząszcza jest także równa zeru:  $E_{k,0} = 0$ , a zatem początkowa energia mechaniczna  $E_{\text{mech},0}$  układu jest równa 0. Niestety, nie potrafimy wyznaczyć energii  $E_{\text{mech},1}$ , gdyż nie znamy ani energii kinetycznej  $E_{k,1}$ , ani prędkości  $v_1$  chrząsz-

cza na końcu wyskoku. Ze ślepej uliczki, w jaką w ten sposób zabrnęliśmy możemy się wydostać zauważając, że:

➔ 2. Energia mechaniczna układu jest stała od chwili zakończenia wyskoku, a więc w szczególności jest taka sama na końcu wyskoku, jak na największej wysokości chrząszcza nad ziemią. Energię mechaniczną w punkcie największego wzniesienia chrząszcza możemy wyznaczyć, gdyż wiemy, jaka jest wtedy jego prędkość ( $v = 0$ ) i jego wysokość nad ziemią ( $y = h$ ). Mamy zatem:

$$E_{\text{mech},1} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0 + mgh = mgh.$$

Podstawiając tę wartość  $E_{\text{mech},1}$  oraz  $E_{\text{mech},0} = 0$  do równania (9.52), dostajemy:

$$\Delta E_{\text{mech}} = mgh - 0 = mgh. \quad (9.53)$$

Teraz możemy już skorzystać z równania (9.46), które opisuje związek energii mechanicznej z siłą zewnętrzną. Zapiszemy je w postaci:

$$\Delta E_{\text{mech}} = F_{\text{sr}}d \cos \phi. \quad (9.54)$$

W równaniu tym  $F_{\text{sr}}$  jest średnią wartością działającej na chrząszcza siły zewnętrznej,  $d$  jest wartością przemieszczenia (0,77 mm) środka masy chrząszcza w czasie wyskoku (tzn. wtedy, gdy działa na niego siła zewnętrzna), a  $\phi (= 0^\circ)$  kątem między kierunkami siły zewnętrznej i przemieszczenia.

Wyznaczając  $F_{\text{sr}}$  z równania (9.54) i korzystając ze związku (9.53), otrzymujemy:

$$F_{\text{sr}} = \frac{\Delta E_{\text{mech}}}{d \cos \phi} = \frac{mgh}{d \cos \phi} = \frac{(4 \cdot 10^{-6} \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,3 \text{ m})}{(7,7 \cdot 10^{-4} \text{ m})(\cos 0^\circ)} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta wartość siły może ci się wydać dość mała, lecz dla sprężyka jest ona olbrzymia, gdyż — jak możesz łatwo obliczyć — w czasie wyskoku chrząszcza nadaje mu ona przyspieszenie ponad 380g.

## Podsumowanie

**Środek masy** Środkiem masy układu  $n$  cząstek nazywamy punkt o współrzędnych:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (9.5)$$

czyli

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (9.8)$$

przy czym  $m_u$  jest całkowitą masą układu. Jeśli masa ciała jest rozłożona w sposób ciągły, to środek masy tego ciała jest zdefiniowany jako punkt o współrzędnych:

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \int x dm, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \int y dm, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_u} \int z dm. \quad (9.9)$$

Jeśli gęstość ciała, czyli masa jego jednostki objętości jest stała (ciało jest jednorodne), to równanie (9.9) przybiera postać:

$$x_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int x dV, \quad y_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int y dV, \quad z_{\text{SM}} = \frac{1}{V} \int z dV. \quad (9.11)$$

przy czym  $V$  jest objętością ciała.

**Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek** Ruch środka masy dowolnego układu cząstek jest opisany przez drugą zasadę dynamiki Newtona dla układu cząstek w postaci:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m_u \vec{a}_{\text{SM}}. \quad (9.14)$$

W tym równaniu  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  jest wypadkową wszystkich sił zewnętrznych działających na układ,  $m_u$  — całkowitą masą układu, a  $\vec{a}_{\text{SM}}$  — przyspieszeniem środka masy układu.

**Pęd i druga zasada dynamiki Newtona** Dla pojedynczej cząstki pęd definiujemy jako:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (9.22)$$

co pozwala zapisać drugą zasadę dynamiki jako:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9.23)$$

Dla układu cząstek powyższe związki przybierają postać:

$$\vec{P} = m_u \vec{v} \quad \text{oraz} \quad \vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (9.25, 9.27)$$

**Zachowanie pędu** Jeśli układ jest izolowany, tzn. wypadkowa działających na niego sił zewnętrznych jest równa zero, to pęd układu  $\vec{P}$  pozostaje stały:

$$\vec{P} = \text{const} \quad (\text{układ zamknięty i izolowany}). \quad (9.29)$$

Stwierdzenie to można także zapisać w postaci:

$$\vec{p}_{\text{pocz}} = \vec{p}_{\text{końc}} \quad (\text{układ zamknięty i izolowany}), \quad (9.30)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do wartości  $\vec{P}$  w pewnej chwili przyjętej za początkową i w pewnej chwili późniejszej, którą przyjęliśmy za końcową. Równania (9.29) i (9.30) są równoważnymi sobie sformułowaniami zasady zachowania pędu.

**Układy o zmiennej masie** Jeśli masa układu zmienia się, to analizujemy większy układ taki, aby jego masa pozostawała bez zmian; dla takiego układu zasada zachowania pędu jest spełniona. W przypadku rakiety układ taki zawiera raketę i gazowe produkty spalania paliwa. Analiza tego układu wykazuje, że pod nieobecność sił zewnętrznych rakietę porusza się ruchem przyspieszonym, którego przyspieszenie chwilowe jest dane równaniem:

$$R v_{\text{wzgl}} = m_u a, \quad (9.42)$$

przy czym  $m_u$  jest chwilową masą rakiety (w tym paliwa, które nie zostało jeszcze zużyte),  $R$  — szybkością spalania paliwa, a  $v_{\text{wzgl}}$  — prędkością spalin względem rakiety. Wielkość  $R v_{\text{wzgl}}$  nazywamy siłą ciągu silnika rakiety. Dla rakiety, dla której wartości  $R$  i  $v_{\text{wzgl}}$  są stałe, a jej prędkość zmienia się z  $v_{\text{pocz}}$  na  $v_{\text{końc}}$ , gdy jej masa zmienia się z  $m_u$  pocz na  $m_u$  końc, otrzymujemy:

$$v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_u \text{ pocz}}{m_u \text{ końc}}. \quad (9.43)$$

**Siły zewnętrzne i zmiany energii wewnętrznej** Zmiany energii w obrębie układu polegające na zamianie energii wewnętrznej na mechaniczną lub odwrotnie, mogą zachodzić za pośrednictwem siły zewnętrznej  $\vec{F}$ . Zmiana energii  $\Delta E_{\text{wewn}}$  wewnętrznej układu jest związana z siłą zewnętrzną zależnością:

$$\Delta E_{\text{wewn}} = -F d \cos \phi, \quad (9.49)$$

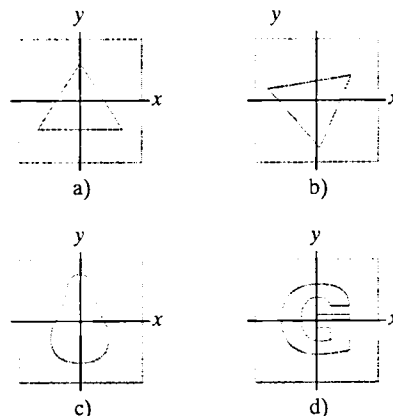
przy czym  $\vec{d}$  jest przemieszczeniem środka masy układu, a  $\phi$  — kątem między kierunkami wektorów  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$ . Zmiana energii mechanicznej wynosi:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p = F d \cos \phi. \quad (9.46, 9.45)$$

## Pytania

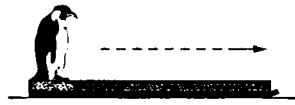
1. Na rysunku 9.15 przedstawiono cztery jednorodne kwadratowe płyty metalowe, z których wycięto pewne ich części. Jeśli układ współrzędnych wybierzemy tak, że jego początek znajduje się w środku płyty wyjściowej, to środek masy części usuniętej z każdej płyty będzie leżeć w początku tego układu. Określ miejsce, w którym leży środek masy płyty po usunięciu z niej każdej z tych części, podając ćwiartkę układu, prostą lub punkt.

2. Dobry koszykarz potrafi podczas wyskoku pod koszem niemal zawisnąć w powietrzu, co daje mu więcej czasu na przerzucenie piłki z ręki do ręki i trafienie nią do kosza. Czy czas przebywania gracza w powietrzu wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli w czasie wyskoku podniesie on w górę ręce lub nogi?



Rys. 9.15. Pytanie 1

3. Jak pokazano na rysunku 9.16, pingwin stoi na lewym brzegu jednorodnych sań o długości  $L$ , spoczywających na powierzchni lodu, po którym mogą się one poruszać bez tarcia. Pingwin ma taką samą masę jak sanie. a) Gdzie znajduje się środek masy sań? b) Jak daleko od tego punktu i w jakim kierunku od niego znajduje się środek masy układu sanie-pingwin?

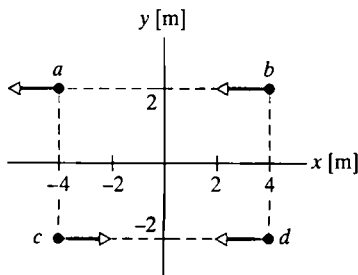


Rys. 9.16. Pytanie 3

W pewnej chwili pingwin zaczyna dreptać w prawo po saniach, przechodząc na ich prawy brzeg, przy czym sanie ślizgają się po lodzie. c) Czy środek masy układu sanie-pingwin przesuwa się wówczas w prawo, w lewo, czy nie zmienia swego położenia? d) Jak daleko od środka masy układu sanie-pingwin i w jakim od niego kierunku znajduje się środek masy sań po przejściu pingwina na prawy brzeg sań? e) Jak daleko przemieścił się pingwin względem sań? Jak daleko przesunął się przy tym względem środka masy układu pingwin-sanie: f) środek sań, g) pingwin (rozgrzewka przed zadaniem 19)?

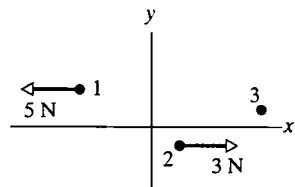
4. Przeanalizuj ponownie pytanie 3 i rysunek 9.16 zakładając teraz, że sanie i pingwin poruszają się początkowo w prawo z prędkością  $v_0$ . a) Czy prędkość  $v$  sań, gdy pingwin drepcze na ich prawy brzeg jest mniejsza, większa, czy równa  $v_0$ ? b) Czy prędkość sań, gdy pingwin przechodzi z powrotem na ich lewy brzeg, jest mniejsza, większa, czy równa  $v_0$ ?

5. Na rysunku 9.17 przedstawiono widok z góry czterech cząstek o jednakowych masach, ślizgających się bez tarcia po podłożu ze stałymi prędkościami. Kierunki ich prędkości pokazano na rysunku, a wartości ich prędkości są takie same. Przeanalizuj różne pary cząstek i odpowiedz, które pary tworzą taki układ, że jego środek masy: a) jest nieruchomy, b) jest nieruchomy i znajduje się w początku układu współrzędnych, c) jest ruchomy, a w czasie tego ruchu przechodzi przez początek układu współrzędnych.



Rys. 9.17. Pytanie 5

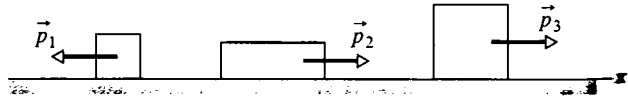
6. Na rysunku 9.18 przedstawiono widok z góry trzech cząstek, na które działają siły zewnętrzne. Wartości i kierunki sił działających na dwie z tych cząstek pokazano na rysunku. Jaka jest wartość i kierunek siły, działającej na trzecią cząstkę, jeśli środek masy



Rys. 9.18. Pytanie 6

układu tych trzech cząstek: a) jest nieruchomy, b) porusza się w prawo ze stałą prędkością, c) porusza się w prawo ruchem przyspieszonym?

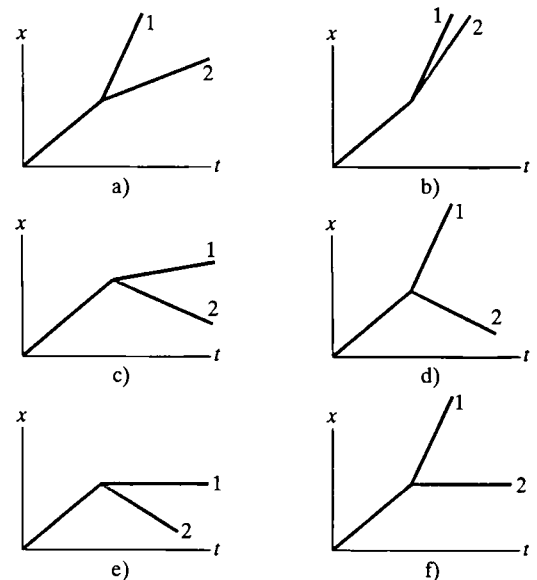
7. Pojemnik ślizgający się bez tarcia po powierzchni wzdłuż osi  $x$  wybuchu i rozpada się na trzy części. Każda z tych części porusza się następnie wzdłuż osi  $x$ , w kierunku wskazanym na rysunku 9.19. W tabeli podano wartości pędu poszczególnych części  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  i  $\vec{p}_3$  (w  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ) dla czterech różnych przypadków. Uszereguj te przypadki według wartości prędkości początkowej pojemnika, od wartości największej do najmniejszej.



Rys. 9.19. Pytanie 7

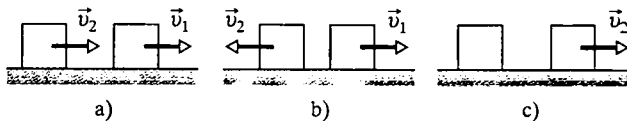
	$p_1$	$p_2$	$p_3$
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10

8. Statek kosmiczny poruszający się wzdłuż osi  $x$  dzieli się na dwie części, jak holownik z rysunku 9.9. a) Które z wykresów pokazanych na rysunku 9.20 mogą ilustrować zależność od czasu położenia statku i dwóch jego części? b) Które z linii na tych wykresach odnoszą się do tej części statku, która pozostaje w tyle za drugą? c) Wykresy wybrane w punkcie (a) uszereguj według wartości względnej prędkości części statku, od największej do najmniejszej.



Rys. 9.20. Pytanie 8

9. Pudło porusza się jak urna wyborcza z przykładu 9.5 ze stałą prędkością w dodatnim kierunku osi  $x$ . Nagle wybucha i rozpada się na dwie części. Jedną z tych części o masie  $m_1$  ma po wybuchu prędkość  $v_1$  dodatnią, a druga o masie  $m_2$ , prędkość  $v_2$ : a) dodatnią (rys. 9.21a), b) ujemną (rys. 9.21b), c) równą zero (rys. 9.21c). Uszereguj te trzy przypadki według wartości prędkości  $v_1$ , od największej do najmniejszej



Rys. 9.21. Pytanie 9

## Zadania

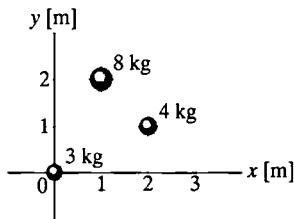
- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
 ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

### 9.2. Środek masy

1. a) Jak daleko od środka Ziemi znajduje się środek masy układu Ziemia–Księżyc (odległość Ziemi i Księżycza oraz ich masy znajdziesz w dodatku C)? b) Jaka to część promienia Ziemi  $R_Z$ ?

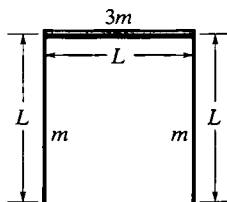
2. Środki atomów węgla i tlenu w cząsteczce gazowego tlenku węgla (CO) znajdują się w odległości  $1,131 \cdot 10^{-10}$  m od siebie. Wyznacz położenie środka masy cząsteczki CO względem atomu węgla (masy atomów C i O znajdziesz w dodatku F).

3. Znajdź: a) współrzędną  $x$ , b) współrzędną  $y$  środka masy układu trzech cząstek, przedstawionego na rysunku 9.22. c) Jak będzie zmieniać się położenie tego środka masy, gdy masa położonej najwyżej cząstki będzie się stopniowo zwiększać?



Rys. 9.22. Zadanie 3

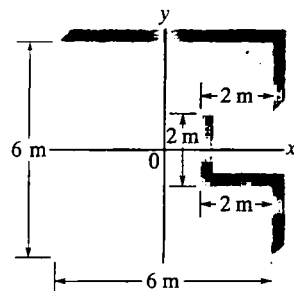
4. Trzy cienkie pręty, każdy o długości  $L$  ustawiono tak, że tworzą odwróconą literę U, jak pokazano na rysunku 9.23. Pręty ustawione pionowo mają każdy masę  $m$ , a trzeci pręt ma masę  $3m$ . Znajdź położenie środka masy układu prętów.



Rys. 9.23. Zadanie 4

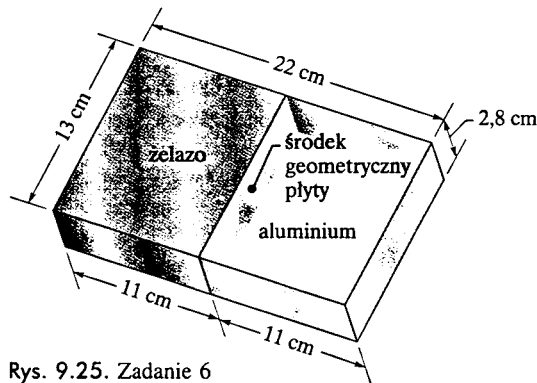
5. Z jednorodnej płyty kwadratowej o boku równym 6 m wycięto kwadrat o boku 2 m na środku jednej z krawędzi (rys. 9.24). Układ współrzędnych wybrano tak, że środek płyty znajduje się w punkcie o współrzędnych  $x = y = 0$ , a środek wycięcia — w punkcie

$x = 2$  m,  $y = 0$ . Wyznacz: a) współrzędną  $x$ , b) współrzędną  $y$  środka masy części płyty, jaka pozostała po wycięciu kwadratu.



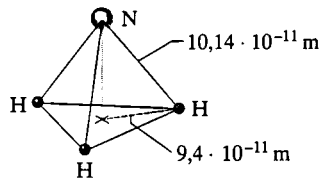
Rys. 9.24. Zadanie 5

6. Na rysunku 9.25 podano wymiary płyty, złożonej z dwóch materiałów — jedna jej połowa jest z aluminium (o gęstości  $2,7 \text{ g/cm}^3$ ), a druga z żelaza (o gęstości  $7,85 \text{ g/cm}^3$ ). Gdzie znajduje się środek masy tej płyty?



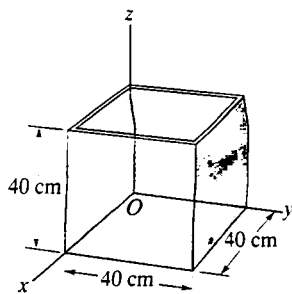
Rys. 9.25. Zadanie 6

7. W cząsteczce amoniaku  $\text{NH}_3$  (rys. 9.26) trzy atomy wodoru (H) znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego, w odległości  $9,4 \cdot 10^{-11}$  m od środka tego trójkąta. Atom azotu (N) znajduje się w wierzchołku ostrosłupa prawidłowego, którego podstawą jest trójkąt utworzony przez atomy wodoru. Stosunek mas atomów azotu i wodoru wynosi 13,9, a odległość atomu azotu od każdego z atomów wodoru jest równa  $10,14 \cdot 10^{-11}$  m. Wyznacz położenie środka masy cząsteczki amoniaku w stosunku do atomu azotu. ilw



Rys. 9.26. Zadanie 7

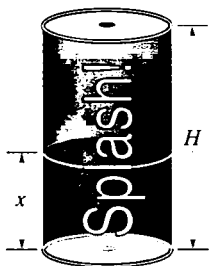
8. Na rysunku 9.27 przedstawiono pudełko w kształcie sześcianu zbudowane z płyty metalowej o stałej gęstości i znikomo małej grubości. Pudełko nie ma ściany górnej, a jego krawędź ma długość 40 cm. Wyznacz: a) współrzędną  $x$ , b) współrzędną  $y$ , c) współrzędną  $z$  środka masy pudełka.



Rys. 9.27. Zadanie 8

9. Walcowa puszka do napojów o masie  $m_u$ , wysokości  $H$  i stałej gęstości jest początkowo wypełniona napojem gazowanym o masie  $m$  (rys. 9.28). Następnie robimy niewielkie otwory w środku obydwu podstaw walca, aby opróżnić puszkę z napoju. Oznaczmy przez  $h$  wysokość środka masy puszkę i zawartego w niej napoju. Ile wynosi  $h$ : a) przed wypuszczeniem napoju z puszkę, b) po całkowitym jej opróżnieniu?

c) Jak zmienia się wartość  $h$  w czasie wypływania napoju z puszkę? d) Oznacz przez  $x$  wysokość słupa napoju w puszcze w określonej chwili i wyznacz wartość  $x$  w chwili, gdy środek masy puszkę i zawartego w niej napoju znajduje się najniżej, wyrażając  $x$  przez  $m_u$ ,  $H$  i  $m$ .



Rys. 9.28. Zadanie 9

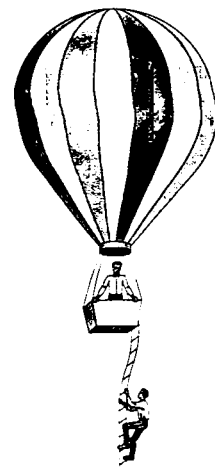
### 9.3. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

10. Dwie łyżwiarki, jedna o masie 65 kg i druga o masie 40 kg stoją na lodowisku, trzymając za końce tyczkę o długości 10 m i znikomo małej masie. W pewnej chwili zaczynają ciągnąć tyczkę, chwytając ją coraz dalej i w ten sposób zbliżają się do siebie aż do chwili, gdy się spotkają. O ile przemieszcza się przy tym łyżwiarka o masie 40 kg?

11. Stary Chrysler o masie 2400 kg jedzie po prostym odcinku drogi z prędkością 80 km/h, a za nim jedzie Ford o masie 1600 kg, którego prędkość wynosi 60 km/h. Z jaką prędkością przemieszcza się przy tym środek masy obydwu samochodów?

12. Człowiek o masie  $m_1$  trzyma się drabinki sznurowej, zwisającej z gondoli balonu o masie  $m_2$  — patrz rysunek 9.29. Balon pozostaje w spoczynku względem ziemi. a) W jakim kierunku i z jaką prędkością (względem ziemi) będzie poruszać się balon, gdy człowiek zacznie wspinać się po drabince z prędkością  $v$  (w stosunku do drabiny)? b) Czy i jak będzie poruszał się balon, gdy człowiek przestanie się wspinać?

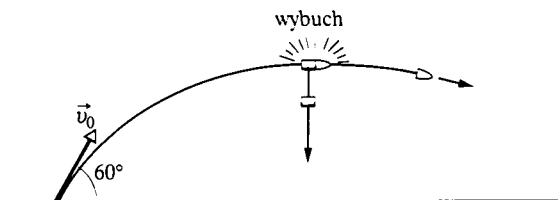
13. Jeden kamień upuszczono swobodnie w chwili  $t = 0$ , a drugi o masie dwa razy większej niż pierwszy, upuszczono swobodnie z tego samego punktu w chwili  $t = 100$  ms. a) W jakiej odległości od punktu wypuszczenia kamieni znajduje się środek ich masy w chwili  $t = 300$  ms (przyjmij, że żaden z kamieni nie spadł jeszcze na ziemię)? b) Ile wynosi prędkość ruchu środka masy kamieni w tej chwili? ilw



Rys. 9.29. Zadanie 12

14. Samochód osobowy o masie 1000 kg stoi przed skrzyżowaniem, czekając na zmianę świateł. W chwili, gdy zapala się zielone światło samochód rusza ze stałym przyspieszeniem  $4 \text{ m/s}^2$ . W tej samej chwili wyprzedza go ciężarówka o masie 2000 kg, jadąca ze stałą prędkością o wartości 8 m/s. a) Jak daleko od sygnalizatora znajdzie się środek masy układu samochód-ciężarówka w chwili  $t = 3$  s (przyjmij, że samochód rusza w chwili  $t = 0$ )? b) Z jaką prędkością porusza się w tej chwili środek masy samochodu i ciężarówki?

15. Granat zostaje wyrzuty z prędkością początkową  $\vec{v}_0$  o wartości 20 m/s, pod kątem  $60^\circ$  do poziomu. W najwyższym punkcie toru granat wybuchu i rozpada się na dwie części o jednakowych masach (rys. 9.30). Jedna z tych części, która ma tuż po wybuchu prędkość równą zero, spada pionowo na ziemię. Jak daleko od wyrzutni spadnie na ziemię druga część granatu, jeśli teren jest płaski, a opór powietrza można pominąć?

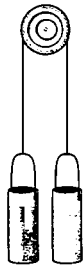


Rys. 9.30. Zadanie 15

16. Gigantyczna oliwka (o masie  $m_1 = 0,5$  kg) znajduje się w początku układu współrzędnych, a gigantyczny orzech brazylijski (o masie  $m_2 = 1,5$  kg) — w punkcie o współrzędnych (1, 2) m na płaszczyźnie  $xy$ . W chwili  $t = 0$  na oliwkę zaczyna działać siła:  $\vec{F}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j})$  N, a na orzech siła:  $\vec{F}_2 = (-3\hat{i} - 2\hat{j})$  N. Wyznacz przemieszczenie środka masy układu oliwka-orzech, od chwili  $t = 0$  do chwili  $t = 4$  s i zapisz je za pomocą wektorów jednostkowych.



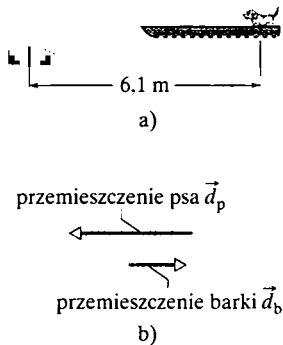
17. Dwa jednakowe naczynia z cukrem połączone są linką o zniedołężalności małej masie, przełożoną przez krążek o średnicy 50 mm (rys. 9.31), o którym zakładamy, że jego masa jest znikomo mała i może się on obracać bez tarcia. W chwili początkowej naczynia znajdują się na tym samym poziomie i każde z nich ma masę 500 g. a) Jakie jest wówczas poziome położenie ich środka masy? b) W pewnej chwili przenosimy 20 g cukru z jednego naczynia do drugiego, ale nie pozwalamy im zmienić swego położenia. Jakie jest wtedy nowe położenie poziome ich środka masy, licząc od pionowej osi symetrii lżejszego naczynia? c) Następnie puszczaamy naczynia, pozwalając im się poruszać. W jakim kierunku porusza się środek masy naczyni z cukrem? d) Ile wynosi jego przyspieszenie?



Rys. 9.31. Zadanie 17

18. Ricardo o masie 80 kg i Carmelita, która jest od niego lżejsza, podziwiają o zmierzchu jezioro Merced z łódki o masie 30 kg. W chwili, gdy łódka jest nieruchoma na spokojnej wodzie, zamieniają się oni miejscami, które są odległe od siebie o 3 m i są położone symetrycznie względem środka łódki. Ricardo zauważa, że łódka przesuwa się przy tym o 40 cm względem znajdującej się w wodzie gałęzi i na tej podstawie szybko oblicza masę Carmelity, której ta nigdy nie chciała mu zdradzić. Ile wynosi masa Carmelity?

19. Jak pokazano na rysunku 9.32a, pies o masie 4.5 kg stoi na barce o masie 18 kg, znajdując się w odległości 6.1 m od brzegu. Następnie pies przechodzi 2.4 m po barce w kierunku brzegu, po czym się zatrzymuje. Załóż, że między barką a wodą nie występuje tarcie i oblicz, jak daleko od brzegu znajduje się pies, kończąc spacer. *Wskazówka:* Spójrz na rysunek 9.32b — pies porusza się w lewo, a barka w prawo, lecz czy zmienia się przy tym położenie środka masy układu barka + pies? [www](#)



Rys. 9.32. Zadanie 19

## 9.5. Pęd układu cząstek

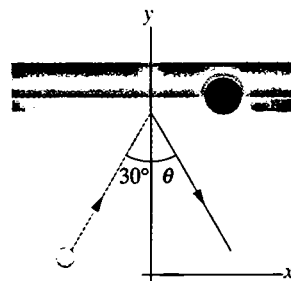
20. Jak szybko musi poruszać się Volkswagen „garbus” o masie 816 kg, aby: a) miał taki sam pęd jak Cadillac o masie 2650 kg, jadący z prędkością 16 km/h. b) miał taką samą energię kinetyczną, jak ten Cadillac?

21. Załóż, że twoja masa wynosi 80 kg. Jak szybko musiałbyś biec, aby mieć taki sam pęd, jak samochód o masie 1600 kg, jadący z prędkością 1.2 km/h?

22. Piłka o masie 0.7 kg porusza się poziomo z prędkością 5 m/s i uderza w pionową ścianę. Prędkość piłki po odbiciu od ściany ma wartość 2 m/s. Jaka jest wartość zmiany pędu piłki przy opisanym odbiciu?

23. Ciężarówka o masie 2100 kg jadąca na północ z prędkością 41 km/h, skręca w pewnej chwili na wschód i przyspiesza do prędkości 51 km/h. a) Ile wynosi zmiana energii kinetycznej ciężarówki przy tym manewrze? Jakie są przy tym: b) wartość, c) kierunek zmiany pędu ciężarówki? [ilw](#)

24. Biła o masie 0.165 kg i prędkości początkowej o wartości 2 m/s odbija się od bandy stołu bilardowego, jak pokazano na rysunku 9.33, na którym przedstawiono widok stołu z góry. W układzie współrzędnych zaznaczonym na rysunku, składowa  $y$  prędkości bili zmienia się przy odbiciu na przeciwną, a jej składowa  $x$  nie ulega zmianie. a) Ile wynosi kąt  $\theta$  na rysunku 9.33? b) Ile wynosi zmiana pędu bili, zapisana za pomocą wektorów jednostkowych? Fakt, że biła toczy się po stole nie ma wpływu na odpowiedź na żadne z tych pytań.



Rys. 9.33. Zadanie 24

25. Stwierdzono, że wektor położenia przedmiotu, wyznaczony za pomocą radaru jest dany wyrażeniem:  $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{i} + 2700\hat{j} + 300t\hat{k}$ , przy czym  $\vec{r}$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  w sekundach. Oś  $x$  skierowana jest na wschód, oś  $y$  — na północ, a oś  $z$  — pionowo do góry. Okazało się, że przedmiotem tym jest sonda meteorologiczna o masie 250 kg. a) Ile wynosi pęd sondy? b) Jaki jest kierunek ruchu sondy? c) Ile wynosi wypadkowa działających na nią sił?

26. Piłka, której masa wynosi 0.3 kg, a prędkość ma wartość 15 m/s i jest skierowana pod kątem  $35^\circ$  w dół od poziomu, zderza się z kijem odbijającego ją gracza. Wyznacz wartość zmiany pędu piłki w wyniku jej odbicia, gdy po odbiciu jej prędkość: a) ma wartość 20 m/s i jest skierowana pionowo w dół, b) ma wartość 20 m/s i jest skierowana poziomo w kierunku gracza, który ją rzucił w stronę odbijającego.

## 9.6. Zachowanie pędu

27. Leżący na podłodze człowiek o masie 91 kg rzuca w bok po podłodze kamień o masie 68 g, nadając mu prędkość o wartości 4 m/s. Z jaką prędkością zaczyna się wówczas sam ślizgać po podłodze, jeśli zarówno on, jak i kamień poruszają się po podłodze bez tarcia?

28. Dwa klocki o masach 1 kg i 3 kg są połączone sprężyną i znajdują się w spoczynku na powierzchni, po której mogą poruszać się bez tarcia. Obydwa klocki zostają następnie wprowadzone w ruch ku sobie, przy czym klocek o masie 1 kg porusza się w chwili początkowej z prędkością 1,7 m/s w kierunku ich środka masy, który nie zmienia swego położenia. Ile wynosi w chwili początkowej prędkość drugiego klocka?

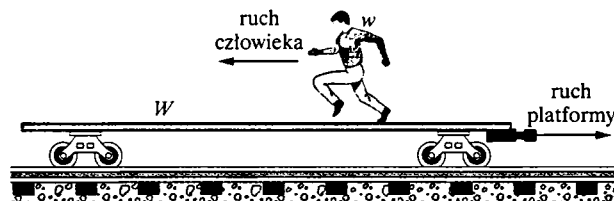
29. Człowiek o masie 75 kg jedzie wózkiem o masie 39 kg poruszającym się z prędkością 2,3 m/s. W pewnej chwili wyskakuje z wózka, przy czym składowa pozioma jego prędkości względem ziemi jest równa zero. Jak zmienia się przy tym prędkość wózka?

30. Zabawka mechaniczna ślizga się bez tarcia po podłodze. Ruch zachodzi wzdłuż osi  $x$  i odbywa się z prędkością  $(-0,4 \text{ m/s})\hat{i}$ . W pewnej chwili uruchamiają się dwie wewnętrzne sprężyny i zabawka rozpada się na trzy części o masach i prędkościach podanych w tabeli. Ile wynosi prędkość części A?

Część	Masa [kg]	Prędkość [m/s]
A	0,5	?
B	0,6	$0,2\hat{i}$
C	0,2	$0,3\hat{i}$

31. Pojazd kosmiczny porusza się z prędkością 4300 km/h względem Ziemi, gdy zużyty człon napędowy zostaje odłączony od kabiny statku i odrzucony w tył z prędkością 82 km/h względem kabiny. Masa członu jest czterokrotnie większa od masy kabiny. Ile wynosi prędkość kabiny względem Ziemi, tuż po odłączeniu od niej członu napędowego?

32. Platforma kolejowa o ciężarze  $W$  może toczyć się bez tarcia po prostym torze poziomym. Na platformie znajduje się człowiek o ciężarze  $w$  (rys. 9.34). Początkowo człowiek stoi na platformie bez ruchu, a platforma toczy się w prawo z prędkością  $v_0$ . Jak zmieni się prędkość platformy, gdy człowiek zacznie biec po niej w lewo (jak na rysunku) z prędkością  $v_{w,zgl}$  względem platformy?



Rys. 9.34. Zadanie 32

33. W końcowej fazie lotu pojazd raketowy poruszający się z prędkością 7600 m/s składa się z dwóch połączonych ze sobą części: członu napędowego o masie 290 kg i kapsuły z ładunkiem o masie 150 kg. W trakcie rozłączania tych części zwolniona sprężyna odpycha je od siebie z prędkością względną 910 m/s. Ile wynosi prędkość: a) członu napędowego, b) kapsuły z ładunkiem po ich rozłączeniu? Załóż, że wszystkie prędkości, o których mowa

w zadaniu, są skierowane wzdłuż jednej prostej. Oblicz łączną energię kinetyczną obydwu części pojazdu: c) przed, d) po ich odłączeniu się od siebie. Wyjaśnij przyczynę ewentualnej różnicy tych wartości.

34. Kocher o masie 4 kg ślizga się bez tarcia po podłodze. W pewnej chwili rozpada się on na dwie części o masach 2 kg, z których jedna porusza się na północ z prędkością 3 m/s, a druga — pod kątem  $30^\circ$  na północ względem kierunku wschodniego, z prędkością 5 m/s. Ile wynosiła prędkość kochera przed jego rozpadem?

35. Pewne jądro promieniotwórcze może zamienić się w inne jądro, wysyłając elektron i neutrino (*neutrino* to jedna z cząstek elementarnych). Przyjmij, że przed rozpadem jądro znajduje się w spoczynku, oraz że elektron i neutrino wysyłane są w kierunkach wzajemnie prostopadłych, a wartości ich pędów wynoszą  $1,2 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  dla elektronu i  $6,4 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  dla neutrina. Jądro zostaje przy tym wprowadzone w ruch (doznaje odrzutu). a) Ile wynosi wartość pędu jądra końcowego? Jaki kąt tworzy kierunek ruchu tego jądra z kierunkiem ruchu: b) elektronu, c) neutrina? d) Ile wynosi energia kinetyczna tego jądra, jeśli jego masa wynosi  $5,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ ? ilw

36. Cząstki A i B znajdują się na końcach ściśniętej sprężyny. Gdy sprężyna zostaje zwolniona, odpycha ona te cząstki od siebie, w wyniku czego rozbiegają się one w przeciwnych kierunkach, przy czym żadna z nich nie styka się ze sprężyną. Masa cząstki A jest 2 razy większa od masy cząstki B, a energia ściśniętej sprężyny jest równa 60 J. Przyjmij, że masa sprężyny jest znikomo mała i że cała jej energia zostaje przekazana cząstkom. Wyznacz energię kinetyczną: a) cząstki A, b) cząstki B po ich oddzieleniu się od sprężyny.

37. Ciało o masie 20 kg porusza się w dodatnim kierunku osi  $x$  z prędkością 200 m/s, gdy w wyniku wybuchu w jego wnętrzu rozpada się ono na trzy części. Jedna z tych części o masie 10 kg porusza się po wybuchu z prędkością 100 m/s w dodatnim kierunku osi  $y$ , a druga, o masie 4 kg porusza się w ujemnym kierunku osi  $x$  z prędkością 500 m/s. a) Ile wynosi prędkość trzeciej części (o masie 6 kg)? b) Ile wynosi energia uwolniona w czasie wybuchu? Pomiń zjawiska związane z działaniem siły ciężkości. ilw  $www$ .

38. Ciało o masie  $m$  i prędkości  $v$  względem pewnego obserwatora rozpada się na dwie części, z których jedna ma masę trzy razy większą od drugiej. Wybuch następuje w przestrzeni kosmicznej. Cząstka o mniejszej masie zatrzymuje się w układzie obserwatora. Ile wynosi energia przekazana układowi w trakcie wybuchu, mierzona w układzie odniesienia obserwatora?

39. Nieruchome naczynie wybuchu i rozpada się na trzy części. Dwie z nich o jednakowych masach rozbiegają się w kierunkach wzajemnie prostopadłych z prędkościami o jednakowych wartościach. Trzecia część ma masę trzykrotnie większą od masy każdej z pozostałych. Wyznacz wartość i kierunek prędkości tej części zaraz po wybuchu.

40. Ciało o masie 8 kg porusza się z prędkością 2 m/s, przy czym nie działają na nie żadne siły zewnętrzne. W pewnej chwili następuje wybuch i ciało rozpada się na dwa kawałki o masach po 4 kg każda. W wyniku wybuchu ciało zyskuje energię 16 J, która zostaje zamieniona na energię kinetyczną. Obie części, na jakie rozpadło się ciało poruszają się wzdłuż kierunku ruchu ciała przed jego rozpadem. Wyznacz wartość i kierunek prędkości każdej części ciała po rozpadzie.

### 9.7. Układ o zmiennej masie: rakietą

41. Silnik sondy kosmicznej o masie 6090 kg lecącej w kierunku Jowisza dziobem do przodu, z prędkością względem Słońca o wartości 105 m/s, zostaje włączony, przy czym gazy spalinowe o masie 80 kg zostają wyrzucone z prędkością 253 m/s względem sondy. Ile wynosi końcowa prędkość sondy?

42. Rakietą oddalą się od Układu Słonecznego z prędkością  $6 \cdot 10^3$  m/s. W pewnej chwili zostaje włączony silnik, który wyrzuca gazy spalinowe z prędkością  $3 \cdot 10^3$  m/s względem rakiety. Masa rakiety wynosi wtedy  $4 \cdot 10^4$  kg, a jej przyspieszenie jest równe  $2 \text{ m/s}^2$ . a) Ile wynosi siła ciągu silnika rakiety? b) Z jaką prędkością wyrażoną w kilogramach na sekundę wyrzucane są z silnika rakiety gazy spalinowe?

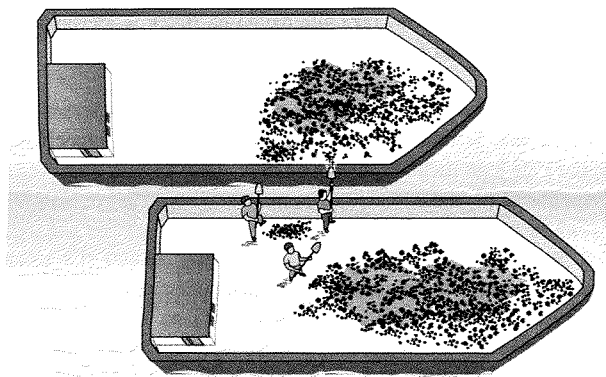
43. Rakietą znajdującą się daleko w przestrzeni kosmicznej i poruszającą początkowo w spoczynku względem inercyjnego układu odniesienia ma masę równą  $2,55 \cdot 10^5$  kg, z czego  $1,81 \cdot 10^5$  kg stanowi paliwo. W pewnej chwili silnik rakiety zostaje włączony na czas 250 s, w którym to czasie paliwo jest spalane z szybkością 40 kg/s. Spaliny są wyrzucane z prędkością 3,27 km/s względem rakiety. a) Ile wynosi siła ciągu silnika rakiety? Ile wynosi: b) masa, c) prędkość rakiety po 250 s pracy jej silnika? ilw

44. Przeanalizuj raketę, znajdującą się daleko w przestrzeni kosmicznej i pozostającą w spoczynku względem inercyjnego układu odniesienia. Silnik tej rakiety ma zostać uruchomiony na pewien czas. Ile musi wynosić stosunek masy rakiety na początku do końca okresu działania silnika, jeśli końcowa prędkość rakiety względem inercyjnego układu odniesienia ma być: a) równa prędkości spalin względem rakiety, b) dwukrotnie większa od prędkości spalin?

45. W celu skorygowania toru statku kosmicznego lecącego w pobliżu Księżyca z prędkością 400 m/s względem Księżyca należy zwiększyć jego prędkość o 2,2 m/s. Prędkość wyrzucanych z silnika spalin wynosi 1000 m/s względem statku. Jaka część początkowej masy statku musi być spalona i wyrzucona ze statku w postaci spalin, aby uzyskać założony wzrost jego prędkości?

46. Wagon towarowy przejeżdża pod wylotem elewatora zbożowego ze stałą prędkością 3,2 m/s. Ziarno sypie się do wagonu z szybkością 540 kg/min. Wyznacz wartość siły potrzebnej do utrzymania stałej prędkości ruchu wagonu zakładając, że tarcie pod wagonem o szyny można pominąć.

47. Jak pokazano na rysunku 9.35, dwie długie barki płyną w tę samą stronę po spokojnej wodzie, jedna z prędkością 10 km/h, a druga z prędkością 20 km/h. Gdy jedna z nich wyprzedza drugą, z wolniejszej na szybszą przesypany jest węgiel z szybkością 1000 kg/min. O ile musi wzrosnąć siła wytwarzana przez silnik: a) szybszej, b) wolniejszej barki, jeśli prędkość każdej z nich ma pozostać niezmienną? Załóż, że węgiel jest przesypany dokładnie w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu barek, oraz że siła tarcia między barką a wodą nie zależy od masy barki.



Rys. 9.35. Zadanie 47

48. Rakietą o masie 6100 kg ma być wystrzelona pionowo z powierzchni Ziemi. Silnik rakiety wyrzuca gazy spalinowe z prędkością 1200 m/s. Jaka masa spalin musi być wyrzucana z silnika rakiety w ciągu 1 sekundy, jeśli siła ciągu rakiety ma: a) być równa wartości działającej na raketę siły ciężkości, b) umożliwić rakiecie uzyskanie skierowanego w górę przyspieszenia początkowego o wartości  $21 \text{ m/s}^2$ ?

### 9.8. Siły zewnętrzne i zmiany energii wewnętrznej

49. W 1981 roku Daniel Goodwin wspiął się po zewnętrznej ścianie wieżowca Searsa w Chicago na wysokość 443 m, korzystając z przysawek i metalowych klamer. a) Wyznacz w przybliżeniu masę wspinacza i oblicz energię, jaką musiał on wytworzyć z energii wewnętrznej i zamienić ją na grawitacyjną energię potencjalną układu Ziemia–Goodwin, aby wnieść swój środek masy na podaną wysokość. b) Ile wyniosłaby ta energia, gdyby zamiast wspiąć się po ścianie Goodwin wszedł na tę samą wysokość po schodach wewnątrz budynku?

50. Szczyt Mount Everestu znajduje się na wysokości 8850 m nad poziomem morza. a) Jaka energia potrzebna jest alpinistcie o masie 90 kg do pokonania działającej na niego siły ciężkości, przy wejściu z poziomu morza na ten szczyt? b) Ile batoników o wartości energetycznej 1,25 MJ może dostarczyć alpinistcie równoważnej jej energii? Uzyskana odpowiedź powinna ci uprzytomnić, że

praca wykonana przeciwko sile ciężkości jest bardzo małą częścią energii zużywanej w czasie wspinaczki górskiej.

51. Sprinter o ciężarze 670 N przebiega pierwsze 7 m dystansu w czasie 1,6 s, poruszając się od startu ze stałym przyspieszeniem. Wyznacz: a) prędkość, b) energię kinetyczną sprintera po 1,6 s biegu. c) Ile wynosi średnia moc, wytwarzana przez sprintera w tym czasie?

52. Luksusowy statek pasażerski *Queen Elizabeth 2* jest napędzany generatorem o maksymalnej mocy 92 MW przy prędkości podróżnej 32,5 węzłów. Jaka siła działa na statek w kierunku ruchu przy tej prędkości (1 węzeł = 1,852 km/h)?

53. Pływak porusza się w wodzie ze średnią prędkością o wartości 0,22 m/s. Średnia siła oporu hydrodynamicznego, przeciwstawiająca się jego ruchowi, wynosi 110 N. Jaką średnią mocą musi dysponować pływak?

54. Samochód ma wraz z pasażerami ciężar 16 400 N i jedzie z prędkością 113 km/h, gdy kierowca zaczyna hamować, do chwili zatrzymania pojazdu. Siła tarcia działająca na koła samochodu ze strony drogi ma wartość 8230 N. Wyznacz drogę, na jakiej samochód się zatrzyma.

55. Kobieta o masie 55 kg skacze pionowo w górę. Szykując się do skoku, znajduje się w pozycji kucznej, w której jej środek masy jest odległy od podłoża o 40 cm. Gdy kobieta odrywa stopy od podłoża, jej środek masy znajduje się 90 cm nad podłożem, a w najwyższym punkcie skoku jest on na wysokości 120 cm. a) Ile wynosi średnia wartość siły, jaka działa na kobietę ze strony podłoża, gdy odpycha się ona od ziemi? b) Ile wynosi maksymalna wartość prędkości kobiety w czasie skoku?

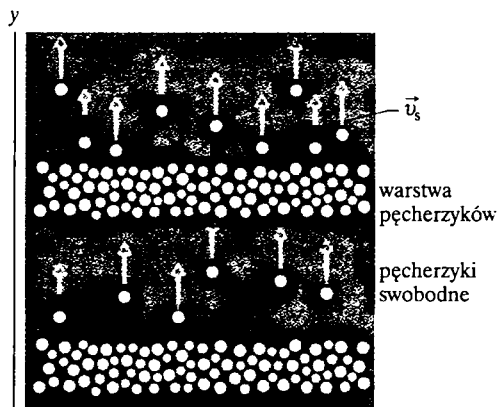
56. Samochód o masie 1500 kg rusza z miejsca i na poziomej drodze uzyskuje prędkość 72 km/h w czasie 30 s. a) Ile wynosi energia kinetyczna samochodu po 30 s? b) Ile wynosi średnia moc, dostarczana przez układ napędu samochodu w tym czasie? c) Ile wynosi chwilowa wartość mocy po 30 s przy założeniu, że przyspieszenie pojazdu jest stałe?

57. Lokomotywa o mocy 1,5 MW zwiększa prędkość pociągu z 10 m/s do 25 m/s w czasie 6 minut. a) Oblicz masę pociągu. Wyznacz: b) prędkość pociągu, c) siłę powodującą przyspieszenie pociągu jako funkcję czasu (wyrażonego w sekundach) w ciągu 6 minut. d) Oblicz drogę, jaka zostaje przebyta przez pociąg w tym przedziale czasu.

58. Ruchowi samochodu przeciwdziałają siła tarcia opon o drogę, która jest praktycznie niezależna od prędkości pojazdu oraz siła oporu powietrza, która jest proporcjonalna do kwadratu tej prędkości. Dla pewnego samochodu o ciężarze 12 000 N całkowita siła oporu  $F$  jest dana zależnością:  $F = 300 + 1,8v^2$ , gdzie  $F$  jest wyrażone w niutonach, a  $v$  w metrach na sekundę. Oblicz moc (w koniach mechanicznych) potrzebną do nadania samochodowi przyspieszenia o wartości 0,92 m/s<sup>2</sup>, gdy jego prędkość ma wartość 80 km/h.

### Zadanie dodatkowe

59. W niektórych rodzajach zestalonej lawy stwierdzono istnienie poziomych warstw pęcherzyków z gazem, między którymi występują jedynie nieliczne pęcherzyki pojedyncze (aby się tego dowiedzieć, badacze musieli rozcinać zestalone bloki lawy). Można to wytłumaczyć w ten sposób, że przy ochładzaniu się lawy pęcherzyki wznoszące się z dolnych obszarów łączyły się w warstwy, które potem zastygły przy zestalaniu się jej. Podobnie tworzenie się warstw pęcherzyków obserwowano przy napełnianiu przezroczystej szklanki spienionym mocnym piwem z beczki. Wznoszące się z dna szklanki pęcherzyki szybko zbierają się w poziome warstwy (rys. 9.36). Pęcherzyki w warstwie wznoszą się z prędkością  $v_w$ , a swobodne pęcherzyki między warstwami — z prędkością  $v_s$ , większą od  $v_w$ . Pęcherzyki odrywające się od górnego brzegu jednej warstwy dołączają zatem do warstwy wyższej. Można więc założyć, że z górnej części każdej warstwy pęcherzyki ubywają z szybkością  $dy/dt = v_s$  i z taką szybkością przybywają do jej dolnej części. Załóżmy również, że  $v_s = 2v_w = 1$  cm/s. Z jaką prędkością i w jakim kierunku porusza się środek masy warstwy pęcherzyków?



Rys. 9.36. Zadanie 59

# 10 Zderzenia

Ronald McNair, fizyk i astronauta, który zginął w katastrofie promu kosmicznego *Challenger*, był posiadaczem czarnego pasa karate. Na zdjęciu niżej rozbija jednym ciosem kilka płyt betonowych. W pokazach swoich możliwości karatecy najczęściej łamią drewniane deski lub betonowe płyty chodnikowe. Po uderzeniu deska lub płyta uginają się, zyskując energię, jak rozciągnięta sprężyna, aż do pewnej energii krytycznej. Po przekroczeniu tej energii przedmiot się łamie. Energia, potrzebna do złamania deski jest mniej więcej trzy razy większa od energii umożliwiającej rozbicie betonowej płyty.

**Dlaczego zatem deskę  
jest znacznie łatwiej złamać?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 10.1. Co to jest zderzenie?

W języku potocznym o *zderzeniu* mówimy wtedy, gdy jeden przedmiot **wpada** na drugi. Choć za chwilę podamy definicję bardziej precyzyjną, stwierdzenie to całkiem dobrze oddaje znaczenie tego terminu i odnosi się do wielu **typo-**wych zderzeń, jak zderzenia kul bilardowych, zderzenie młotka z gwoździem czy — **niestety** zbyt częste — kolizje drogowe. Na rysunku 10.1a pokazano wciąż widoczne skutki gigantycznego zderzenia, jakie miało miejsce około 20 000 **lat** temu. Zderzenia mogą dotyczyć zarówno obiektów mikroskopowych, na przykład cząstek mniejszych od atomów (rys. 10.1b), jak i obiektów astronomicznych, **ta-**kich jak zderzające się gwiazdy lub nawet galaktyki. Zderzenia, z którymi **spo-**tykamy się w życiu codziennym trwają zwykle zbyt krótko, abyśmy widzieli, **jak** one zachodzą, choć mogą im towarzyszyć znaczne deformacje zderzających się ciał (rys. 1.10c).

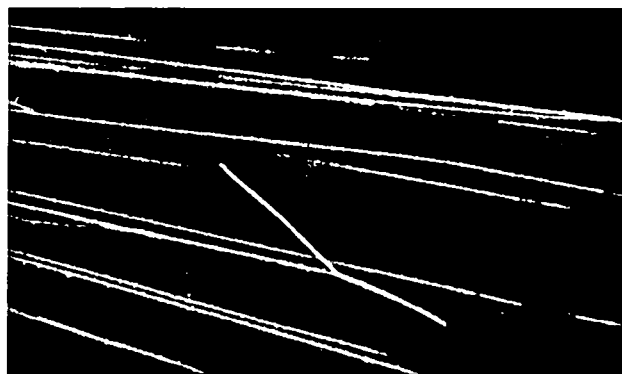
Podamy teraz dokładną definicję zderzenia:

➤ Zderzenie zachodzi wtedy, gdy dwa lub więcej ciał (partnerów zderzenia) działają na siebie stosunkowo dużymi siłami w stosunkowo krótkim przedziale czasu.

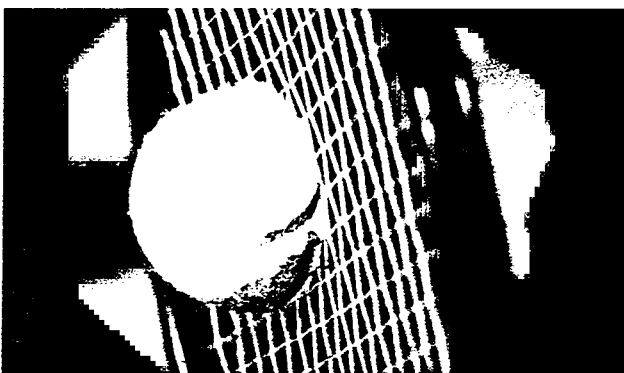
Mówiąc o zderzeniu, musimy być w stanie rozróżnić przedziały czasu *przed* zderzeniem, *podczas* zderzenia i *po* zderzeniu, jak pokazano na rysunku 10.2.



a)



b)



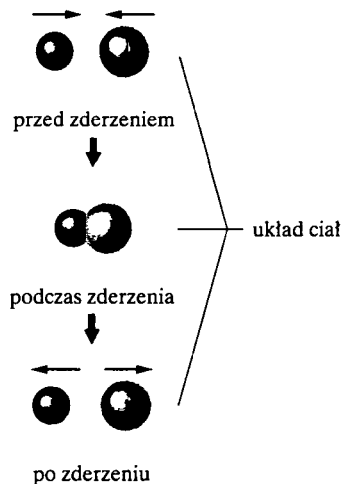
c)

Rys. 10.1. Zderzać się mogą obiekty o bardzo różnych wielkościach. a) Krater w Arizonie, powstały w wyniku upadku meteoroidu, ma średnicę około 1200 m i głębokość około 200 m. b) Cząstka  $\alpha$  (której tor zaznaczono na żółto — barwy na tym zdjęciu nie są rzeczywiste: dodano je dla wygody obserwacji) zbliżająca się z lewej strony, zderza się z jądrem azotu i odbija się od niego. Jądro azotu, nieruchome przed zderzeniem, po zderzeniu porusza się w prawo, w dół (tor czerwony). c) W czasie meczu tenisowego piłka styka się z rakiętą przez około 4 ms w ciągu każdego odbicia (co daje łącznie zaledwie około 1 s w czasie całego seta)

Przedstawiono na nim układ dwóch zderzających się ciał — z punktu widzenia tego układu siły działające między partnerami zderzenia są siłami wewnętrznymi.

Zauważ, że podana definicja zderzenia nie wymaga, aby zderzające się ciała uderzyły w siebie, jak w potocznym rozumieniu tego terminu. Gdy sonda kosmiczna okrąży dużą planetę, aby nabrać prędkości (wykorzystać planetę jako katapultę), również jest to zderzenie. Sonda nie styka się przy tym z planetą, ale też zderzenie nie musi oznaczać zetknięcia się ciał, a siła działająca podczas zderzenia nie musi być związana z tym, że ciała stykają się ze sobą — może nią być równie dobrze siła ciężkości, jak w tym przypadku.

Wielu fizyków spędza dziś cały swój czas, zajmując się czymś, co moglibyśmy nazwać „grą w zderzenia”. Głównym celem tej gry jest uzyskanie jak najwięcej informacji o siłach działających podczas zderzenia, na podstawie znajomości stanu cząstek przed i po zderzeniu. Właściwie cała nasza wiedza dotycząca świata cząstek — elektronów, protonów, neutronów, mionów, kwarków i im podobnych — pochodzi z doświadczeń zderzeniowych. Regułami gry w zderzenia są zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii.



Rys. 10.2. Przebieg zderzenia dwóch ciał

## 10.2. Popęd siły i pęd

### Pojedyncze zderzenie

Na rysunku 10.3 pokazano, że siły  $\vec{F}(t)$  i  $-\vec{F}(t)$  działające podczas prostego zderzenia czołowego cząstek o różnych masach, stanowią parę akcja–reakcja. W wyniku działania tych sił zmienia się pęd obydwu cząstek, przy czym zmiana pędu zależy nie tylko od średniej wartości sił, lecz i od czasu  $\Delta t$  ich działania. Aby ująć rzecz ilościowo, zapiszmy drugą zasadę dynamiki Newtona w postaci:  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  dla którejś z tych cząstek, np. dla ciała znajdującego się po prawej stronie na rysunku 10.3 i oznaczonego przez P. Otrzymujemy:

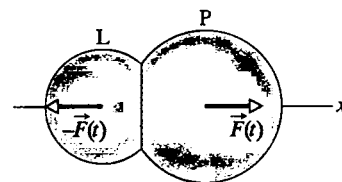
$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt, \quad (10.1)$$

przy czym  $\vec{F}(t)$  jest siłą, której wartość zależy od czasu w sposób przedstawiony jakościowo na rysunku 10.4a. Scałkujemy równanie (10.1) w przedziale czasu  $\Delta t$ , tzn. od chwili początkowej  $t_{\text{pocz}}$  (tuż przed zderzeniem) do chwili końcowej  $t_{\text{końc}}$  (tuż po zderzeniu). Daje to:

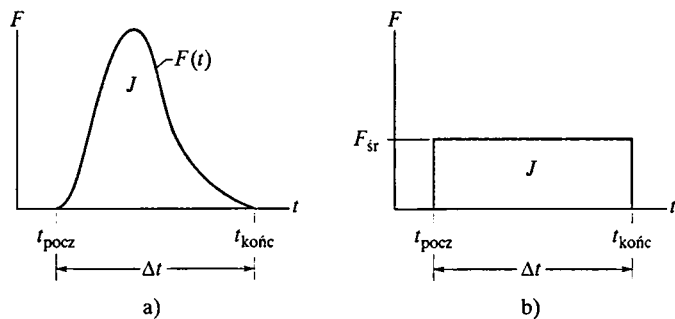
$$\int_{\vec{p}_{\text{pocz}}}^{\vec{p}_{\text{końc}}} d\vec{p} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t)dt. \quad (10.2)$$

Lewa strona tego równania wynosi  $\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}}$ , czyli stanowi zmianę pędu ciała P. Prawą stronę, zależną zarówno od wielkości siły działającej podczas zderzenia, jak i od czasu jej działania nazywamy **popędem siły** w czasie zderzenia i oznaczamy przez  $\vec{J}$ . Tak więc:

$$\vec{J} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t)dt \quad (\text{definicja popędu siły}). \quad (10.3)$$



Rys. 10.3. Zderzenie dwóch cząstek L i P. Podczas zderzenia cząstka L działa na cząstkę P siłą  $F(t)$ , a cząstka P na cząstkę L siłą  $-F(t)$ . Siły  $F(t)$  i  $-F(t)$  stanowią parę akcja–reakcja. Ich wartości zmieniają się podczas zderzenia, lecz w każdej chwili są sobie równe



Rys. 10.4. a) Wykres wartości siły  $F(t)$  działającej na cząstkę P w czasie zderzenia z rysunku 10.3, jako funkcji czasu. Pole powierzchni pod tą krzywą jest równe wartości popędu siły  $\vec{J}$ , doznawanego przez cząstkę P podczas całego zderzenia. b) Wysokość zacięniowanego prostokąta jest wartością średnią siły  $F_{\text{sr}}$  działającej na cząstkę P w przedziale czasu  $\Delta t$ . Pole tego prostokąta jest równe polu pod krzywą z rysunku (a), a zatem także wartości popędu  $\vec{J}$  siły podczas zderzenia

Z równania (10.3) wynika, że wartość popędu siły jest równa polu powierzchni pod krzywą  $F(t)$  z rysunku 10.4a. Siła  $F(t)$  działająca na ciało P i siła  $-F(t)$  działająca na ciało L stanowią parę akcja–reakcja, a więc ich popędy mają jednakową wartość, lecz przeciwne kierunki.

Jak widać z równań (10.2) i (10.3), zmiana pędu każdej cząstki podczas zderzenia jest równa popędowi siły działającej na to ciało:

$$\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta \vec{p} = \vec{J}. \quad (10.4)$$

Z równania (10.4) wynika, że popęd siły i pęd są wektorami o tych samych wymiarach i jednostkach. Równanie to można także zapisać w postaci trzech równań dla składowych wektorów, tzn.:

$$p_{\text{końc},x} - p_{\text{pocz},x} = \Delta p_x = J_x, \quad (10.5)$$

$$p_{\text{końc},y} - p_{\text{pocz},y} = \Delta p_y = J_y, \quad (10.6)$$

oraz

$$p_{\text{końc},z} - p_{\text{pocz},z} = \Delta p_z = J_z. \quad (10.7)$$

Jeśli średnia wartość siły z rysunku 10.4a wynosi  $F_{\text{sr}}$ , to wartość popędu siły możemy zapisać jako:

$$J = F_{\text{sr}} \Delta t, \quad (10.8)$$

gdzie  $\Delta t$  jest czasem trwania zderzenia. Wartość  $F_{\text{sr}}$  jest taka, że pole prostokąta z rysunku 10.4b jest równe polu pod krzywą opisującą rzeczywistą zależność  $F(t)$  z rysunku 10.4a.

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Spadochroniarz, któremu nie otworzył się spadochron wylądował na śniegu i doznał niewielkich obrażeń. Gdyby przyszło mu lądować na odkrytym gruncie, czas wytracenia przez niego prędkości byłby 10-krotnie krótszy, czego z pewnością by nie przeżył. Czy obecność śniegu zwiększa, zmniejsza, czy nie zmienia wartości: a) zmiany pędu spadochroniarza, b) popędu siły zatrzymującej spadochroniarza, c) siły zatrzymującej spadochroniarza?



## Ciąg zderzeń

Przeanalizujemy obecnie siłę działającą na ciało w wyniku ciągu jednakowych, regularnie następujących po sobie zderzeń. Wyobraź sobie, że dla zabawy ustawiliśmy armatkę do wystrzeliwania piłek tenisowych tak, że są one z dużą częstotliwością kierowane w stronę ściany. Przy każdym zderzeniu piłki ze ścianą, na tę ścianę działa siła, lecz jej wartość nas nie interesuje. Chcemy znaleźć średnią siłę  $F_{\text{sr}}$ , jaka działa na ścianę przy jej ostrzale, czyli średnią siłę w czasie, w którym zachodzi wiele zderzeń.

Na rysunku 10.5 przedstawiono cel w postaci ciała unieruchomionego, na które pada stały strumień pocisków o jednakowych masach  $m$  i pędach  $m\vec{v}$ , poruszających się wzdłuż osi  $x$ . Oznaczmy przez  $n$  liczbę pocisków, zderzających się z celem w przedziale czasu  $\Delta t$ . Ruch pocisków zachodzi wzdłuż osi  $x$ , tak więc możemy zajmować się tylko składowymi wzdłuż tej osi. Załóżmy zatem, że każdy pocisk ma początkowo pęd  $mv$ , a w wyniku zderzenia pęd ten zmienia się o  $\Delta p$ . Łączna zmiana pędu  $n$  pocisków padających na cel w przedziale czasu  $\Delta t$  wynosi  $n\Delta p$ . Łączny popęd siły  $J$ , jakiego doznaje cel w czasie  $\Delta t$  ma również wartość  $n\Delta p$ , jest skierowany wzdłuż osi  $x$ , a jego kierunek jest przeciwny do kierunku zmiany pędu. Zależność tę możemy zapisać dla składowych w kierunku ruchu pocisków w postaci:

$$J = -n\Delta p, \quad (10.9)$$

gdzie znak minus oznacza, że wektory  $\vec{J}$  i  $\Delta\vec{p}$  mają przeciwne kierunki.

Przekształcając równanie (10.8) i podstawiając do niego związek (10.9), otrzymujemy średnią siłę  $F_{\text{sr}}$ , działającą na cel w wyniku zderzeń z pociskami:

$$F_{\text{sr}} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v. \quad (10.10)$$

Równanie to podaje zależność  $F_{\text{sr}}$  od  $n/\Delta t$ , czyli częstości zderzeń pocisków z celem oraz  $\Delta v$ , czyli zmiany prędkości tych pocisków przy zderzeniu.

Jeśli przy zderzeniu pociski zostają zatrzymane, to do równania (10.10) musimy w miejsce  $\Delta v$  podstawić:

$$\Delta v = v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = 0 - v = -v, \quad (10.11)$$

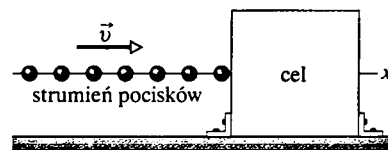
gdzie przez  $v_{\text{pocz}}$  ( $= v$ ) i  $v_{\text{końc}}$  ( $= 0$ ) oznaczyliśmy odpowiednio prędkość pocisku przez zderzeniem i po zderzeniu. Jeśli natomiast pociski odbijają się od celu w tył, bez zmiany wartości ich prędkości, to  $v_{\text{końc}} = -v$  i otrzymujemy:

$$\Delta v = v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = -v - v = -2v. \quad (10.12)$$

W przedziale czasu  $\Delta t$  do celu docierają pociski o łącznej masie  $\Delta m = nm$ . Korzystając z tego oznaczenia, równanie (10.10) możemy zapisać w postaci:

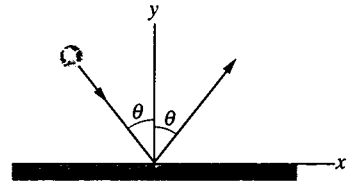
$$F_{\text{sr}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \quad (10.13)$$

To równanie podaje zależność  $F_{\text{sr}}$  od  $\Delta m/\Delta t$ , czyli szybkości, z jaką dociera do celu masa pocisków. Jak poprzednio, do równania tego możemy podstawić wartości  $\Delta v$  z równań (10.11) lub (10.12), zależnie od stanu pocisków po zderzeniu.



Rys. 10.5. Stały strumień pocisków o jednakowych pędach pada na stanowiące cel unieruchomione ciało. Średnia siła  $\vec{F}_{\text{sr}}$  działająca na to ciało jest skierowana w prawo i ma wartość zależną od częstości zderzeń z padającymi na nie pociskami, czyli — równoważnie — od szybkości, z jaką dociera do niego masa pocisków

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono widzianą z góry piłkę, odbijającą się od pionowej ściany bez zmiany wartości prędkości. Rozważ zmianę pędu  $\Delta \vec{p}$  piłki. a) Czy  $\Delta p_x$  jest dodatnie, ujemne, czy równe zero? b) Czy  $\Delta p_y$  jest dodatnie, ujemne, czy równe zero? c) Jaki jest kierunek wektora  $\Delta \vec{p}$ ?



## Przykład 10.1

Piłka baseballowa o masie 140 g poruszająca się poziomo z prędkością o wartości  $v_{\text{pocz}}$  równej 39 m/s zostaje odbita kijem. Po odbiciu piłka porusza się w przeciwnym kierunku z prędkością o wartości  $v_{\text{końc}}$  równej także 39 m/s.

a) Ile wynosi popęd siły działającej na piłkę, gdy podczas zderzenia styka się ona z kijem?

### ROZWIĄZANIE:

Popęd siły możemy obliczyć jako zmianę pędu piłki, tzn. zastosować równanie (10.4) dla ruchu w jednym wymiarze. Przyjmijmy kierunek ruchu piłki przed zderzeniem za kierunek ujemny osi. Z równania (10.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} J &= p_{\text{końc}} - p_{\text{pocz}} = m v_{\text{końc}} - m v_{\text{pocz}} \\ &= (0,140 \text{ kg})(39 \text{ m/s}) - (0,140 \text{ kg})(-39 \text{ m/s}) \\ &= 10,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Kierunek osi wybraliśmy tak, że prędkość początkowa piłki jest ujemna, a zatem jej prędkość końcowa jest dodatnia. Otrzymaliśmy dodatni popęd siły, co oznacza, że kierunek wektora popędu siły działającej na piłkę, jest zgodny z kierunkiem, w którym porusza się kij przy odbiciu piłki.

b) Czas  $\Delta t$  zderzenia piłki z kijem wynosi 1,2 ms. Jaka średnia siła działa na piłkę w czasie zderzenia?

### ROZWIĄZANIE:

Średnia siła działająca w czasie zderzenia jest równa ilorazowi popędu siły  $J$  i czasu  $\Delta t$  zderzenia (wynika to z równania (10.8)). Wobec tego:

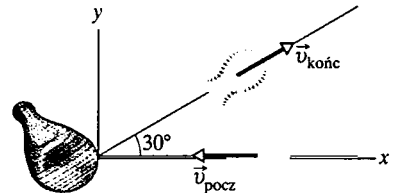
$$F_{\text{sr}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{(10,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s})}{(0,0012 \text{ s})} = 9080 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć uwagę, że jest to siła *średnia*; *maksymalna* siła działająca na piłkę w czasie uderzenia jest większa. Znak tej średniej siły jest dodatni, co oznacza, że kierunek wektora siły jest taki sam, jak kierunek wektora popędu siły.

Podając definicję zderzenia zakładaliśmy, że wypadkowa sił zewnętrznych działających na zderzające się ciała jest równa zero. W omawianym przypadku założenie to nie jest spełnione, ponieważ na piłkę działa zawsze siła ciężkości, zarówno podczas

jej lotu, jak i w czasie zderzenia z kijem. Siła ta o wartości  $mg = 1,37 \text{ N}$  jest znikomą małą w porównaniu ze średnią siłą wywieraną na piłkę przez kij, której wartość wynosi 9080 N. Poczynione przez nas przybliżenie, że zderzające się ciała można uważać za układ izolowany jest więc bardzo dobrze uzasadnione.

c) Wyobraź sobie teraz, że zderzenie nie jest czołowe, lecz że piłka ma po zderzeniu prędkość o wartości  $v_{\text{końc}}$  równej 45 m/s i porusza się ku górze, pod kątem  $30^\circ$  do poziomu (rys. 10.6). Ile wynosi w tym przypadku popęd siły działającej na piłkę?



Rys. 10.6. Przykład 10.1. Kij baseballowy uderza nadlatującą piłkę i odbija ją ku górze pod kątem  $30^\circ$  do poziomu

### ROZWIĄZANIE:

Zderzenie musimy teraz analizować w dwóch wymiarach, gdyż po odbiciu piłka nie porusza się wzdłuż tej samej prostej, co przed zderzeniem. Równanie (10.4), z którego możemy wyznaczyć popęd siły  $\vec{J}$  musimy zatem zapisać w postaci wektorowej, co daje:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = m \vec{v}_{\text{końc}} - m \vec{v}_{\text{pocz}}.$$

Wobec tego:

$$\vec{J} = m(\vec{v}_{\text{końc}} - \vec{v}_{\text{pocz}}). \quad (10.14)$$

Wybermy układ współrzędnych, jak na rysunku 10.6. W tym układzie prędkość końcowa piłki tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $x$  kąt  $30^\circ$ , a jej prędkość początkowa — kąt  $180^\circ$ . Składowe wektora  $\vec{J}$  wyznaczmy z równania (10.14), zapisanego dla składowych wzdłuż osi układu współrzędnych. Dla składowych  $x$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{\text{końc},x} - p_{\text{pocz},x} = m(v_{\text{końc},x} - v_{\text{pocz},x}) \\ &= (0,140 \text{ kg})[(45 \text{ m/s})(\cos 30^\circ) - (-39 \text{ m/s})] \\ &= 10,92 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Dla składowych  $y$  mamy:

$$\begin{aligned} J_y &= p_{\text{końc},y} - p_{\text{pocz},y} = m(v_{\text{końc},y} - v_{\text{pocz},y}) \\ &= (0,140 \text{ kg})[(45 \text{ m/s})(\sin 30^\circ) - 0] = 3,15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Popęd siły jest zatem równy:

$$\vec{J} = (10,92\hat{i} + 3,15\hat{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wartość wektora popędu siły  $J$  wynosi:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 11,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad (\text{odpowiedź})$$

a jego kierunek tworzy z osią  $x$  kąt:

$$\theta = \arctg \frac{J_y}{J_x} = 16^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

## 10.3. Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach

Przeanalizujemy układ dwóch zderzających się ciał. Skoro ma dojść do zderzenia, to przynajmniej jedno z tych ciał musi się poruszać, a zatem przed zderzeniem układ ma pewną energię kinetyczną i pewien pęd. W czasie zderzenia energia kinetyczna i pęd każdego z ciał ulegają zmianie pod wpływem popędu siły, działającej ze strony drugiego ciała. Aż do końca tego rozdziału będziemy badać te zmiany — a także zmiany energii kinetycznej i pędu całego układu — nie wnika-  
jąc, jakie są popędy sił, powodujących te zmiany. Nasze rozważania ograniczymy do zderzeń w układach **zamkniętych** (tzn. takich, których masa nie ulega zmianie) i **izolowanych** (tzn. takich, że wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało w układzie jest równa zeru).

### Energia kinetyczna

Jeśli całkowita energia kinetyczna układu złożonego ze zderzających się ciał nie zmienia się w wyniku zderzenia, to jest ona *zachowana* (tzn. jest taka sama przed i po zderzeniu). Zderzenie o tej właściwości nazywamy **zderzeniem sprężystym**. W zderzeniach, z jakimi spotykamy się na co dzień, na przykład zderzenie dwóch samochodów czy zderzenie piłki z kijem, zawsze pewna część energii kinetycznej ulega zamianie na jakąś inną postać energii, np. na energię termiczną lub energię akustyczną (dźwiękową). Zderzenia, w których energia kinetyczna układu *nie jest zachowana* nazywamy **zderzeniami niesprężystymi**.

W pewnych przypadkach zderzenia ciał spotykanych w życiu codziennym możemy jednak traktować w *przybliżeniu* jako sprężyste. Wyobraź sobie, że upuszczasz na twarde podłoże niezwykle sprężystą piłkę („superpiłkę”). Gdyby zderzenie tej piłki z podłożem (czyli ziemią) było sprężyste, piłka miałaby po zderzeniu taką samą energię kinetyczną, jak przed nim, a zatem wzniosłaby się na wysokość, z jakiej została upuszczona. Nawet bardzo sprężysta piłka odbija się jednak na wysokość nieco mniejszą od pierwotnej, co oznacza, że przynajmniej część energii kinetycznej jest tracona w czasie zderzenia, a zatem zderzenie nie jest całkiem sprężyste. Niemniej jednak czasem można pominąć tę niewielką zmianę energii kinetycznej i uważać zderzenie za *niemal* sprężyste.

Upuszczona na podłogę piłka golfowa traci przy odbiciu sporą część energii kinetycznej i odbija się na wysokość, stanowiącą jedynie 60% wysokości początkowej. Jej zderzenie z podłogą jest więc wyraźnie niesprężyste i nie można go uważać za sprężyste nawet w przybliżeniu. Jeśli upuścisz na podłogę kulkę z mokrej zaprawy gipsowej, to w ogóle się ona nie odbije, lecz pozostanie na



Rys. 10.7. Widok dwóch samochodów po niemal czołowym i niemal całkowicie niesprężystym zderzeniu

podłozde. Zaprawa styka się po zderzeniu z podłogą, tak więc zderzenie takie nazywamy **zderzeniem całkowicie niesprężystym**. Na rysunku 10.7 pokazano bardziej dramatyczny przykład zderzenia całkowicie niesprężystego. W takich zderzeniach ciała zawsze przylegają do siebie i tracą energię kinetyczną.

## Pęd

Niezależnie od tego, jakie są popędy sił działających podczas zderzenia i niezależnie od tego, czy i jak zmienia się przy tym całkowita energia kinetyczna układu ciał, całkowity pęd  $\vec{P}$  układu zamkniętego i izolowanego *nie może ulec zmianie*. Dzieje się tak dlatego, że wektor  $\vec{P}$  może ulec zmianie tylko pod działaniem sił zewnętrznych (czyli sił działających ze strony ciał spoza układu), a siły działające podczas zderzenia są siłami wewnętrznymi (tzn. wywieranymi na siebie przez ciała należące do układu). Wynika stąd bardzo ważne prawo:

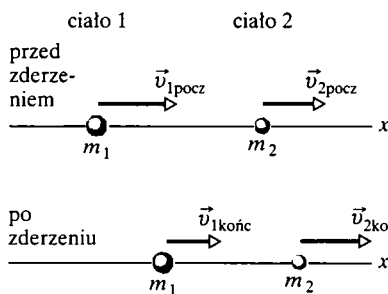
➤ Jeśli zderzenie zachodzi w układzie zamkniętym i izolowanym, to pędy zderzających się ciał mogą się zmieniać, lecz całkowity pęd układu  $\vec{P}$  nie może ulec zmianie, niezależnie od tego, czy zderzenie jest sprężyste, czy niesprężyste.

Jest to w istocie rzeczy inne sformułowanie **zasady zachowania pędu**, którą omawialiśmy już w paragrafie 9.6. W następnych dwóch paragrafach zastosujemy tę zasadę do badania pewnych rodzajów zderzeń, najpierw niesprężystych, a potem sprężystych.

## 10.4. Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze

### Zderzenia w jednym wymiarze

Na rysunku 10.8 przedstawiono dwa ciała tuż przed i tuż po *zderzeniu w jednym wymiarze* (co oznacza, że ruch obydwu ciał przed zderzeniem i po zderzeniu odbywa się wzdłuż jednej prostej). Na rysunku zaznaczono też prędkości ciał przed zderzeniem (wskaźnik pocz) i po zderzeniu (wskaźnik końc). Te dwa ciała tworzą rozważany przez nas układ, który jest zamknięty i izolowany. Z zasady zachowania pędu dla tego układu wynika, że:



Rys. 10.8. Ciała 1 i 2 poruszające się wzdłuż osi  $x$  przed zderzeniem i po ich zderzeniu niesprężystym

$$\left( \begin{array}{c} \text{całkowity pęd} \\ \text{przed zderzeniem } \vec{p}_{\text{pocz}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{całkowity pęd} \\ \text{po zderzeniu } \vec{p}_{\text{końc}} \end{array} \right),$$

co można zapisać przy użyciu symboli jako:

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}} \quad (\text{zachowanie pędu}). \quad (10.15)$$

Ruch odbywa się w jednym wymiarze, dlatego też możemy opuścić strzałki nad symbolami oznaczające wektory i zajmować się tylko składowymi wzdłuż kierunku ruchu. Korzystając z zależności  $p = mv$ , przekształcamy równanie (10.15) do postaci:

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}. \quad (10.16)$$

Jeśli znamy na przykład wartości mas i prędkości początkowych obydwu ciał oraz prędkość końcową jednego ciała, to z równania (10.16) możemy wyznaczyć prędkość końcową drugiego z nich.

### Zderzenie całkowicie niesprężyste

Na rysunku 10.9 przedstawiono dwa ciała, przed zderzeniem i po ich całkowicie niesprężystym zderzeniu (co oznacza, że po zderzeniu ciała stykają się ze sobą). Przyjmijmy, że przed zderzeniem ciało o masie  $m_2$  pozostawało w spoczynku ( $v_{2pocz} = 0$ ). Ciało to będziemy nazywać *tarczą*, a ciało poruszające się — *pociskiem*. Wspólną prędkość przylegających do siebie ciał po zderzeniu oznaczymy przez  $V$ . Równanie (10.16) daje w tym przypadku:

$$m_1 v_{1pocz} = (m_1 + m_2)V, \quad (10.17)$$

czyli

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1pocz}. \quad (10.18)$$

Jeśli znamy na przykład wartości mas i prędkości początkowej  $v_{1pocz}$  pocisku, to z równania (10.18) możemy wyznaczyć prędkość końcową  $V$ . Zwróć uwagę, że  $V$  musi być zawsze mniejsze od  $v_{1pocz}$ , ponieważ ułamek  $m_1/(m_1 + m_2)$  jest zawsze mniejszy od jedności.

### Prędkość środka masy

Prędkość  $\vec{v}_{\Sigma M}$  środka masy układu zamkniętego i izolowanego nie może się zmienić w wyniku zderzenia, ponieważ wypadkowa działających na układ sił zewnętrznych, które mogłyby to sprawić jest dla układu izolowanego równa zero. Aby wyznaczyć  $\vec{v}_{\Sigma M}$ , przeanalizujemy jeszcze raz układ dwóch ciał oraz ich zderzenie w jednym wymiarze przedstawione na rysunku 10.8. Równanie (9.25) ( $\vec{P} = m_u \vec{v}_{\Sigma M}$ ) podaje związek  $\vec{v}_{\Sigma M}$  z całkowitym pędem  $\vec{P}$  układu dwóch ciał, który możemy zapisać jako:

$$\vec{P} = m_u \vec{v}_{\Sigma M} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\Sigma M}. \quad (10.19)$$

Całkowity pęd  $\vec{P}$  jest zachowany podczas zderzenia; jest on równy każdej ze stron równania (10.15). Biorąc lewą stronę tego równania, mamy:

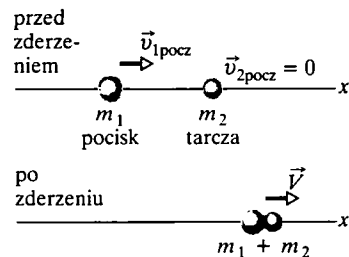
$$\vec{P} = \vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz}. \quad (10.20)$$

Wstawiając wyrażenie na  $\vec{P}$  do równania (10.19) i rozwiązując je następnie względem  $\vec{v}_{\Sigma M}$ , dostajemy:

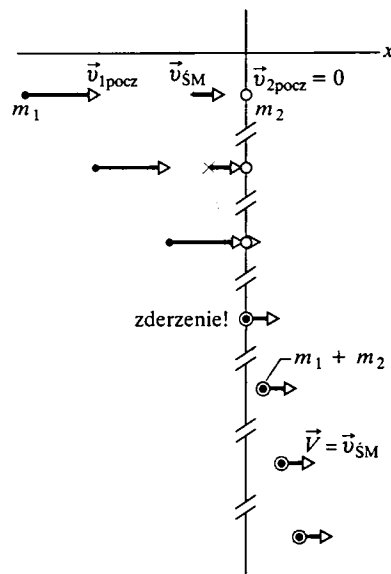
$$\vec{v}_{\Sigma M} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz}}{m_1 + m_2}. \quad (10.21)$$

Prawa strona tego równania jest stała, a zatem  $\vec{v}_{\Sigma M}$  ma taką samą wartość przed i po zderzeniu.

Jako przykład, na rysunku 10.10 pokazano stroboskopowy obraz ruchu środka masy w przypadku zderzenia całkowicie niesprężystego, pokazanego na rysunku 10.9. Ciało jest tarczą, a więc jego początkowy pęd w równaniu (10.21)



Rys. 10.9. Całkowicie niesprężyste zderzenie dwóch ciał. Przed zderzeniem ciało o masie  $m_2$  pozostaje w spoczynku, a ciało o masie  $m_1$  porusza się dokładnie w kierunku ciała nieruchomego. Po zderzeniu ciała stykają się ze sobą i poruszają się wspólnie z prędkością  $\vec{V}$



Rys. 10.10. Położenie dwóch ciał z rysunku 10.9 zderzających się ze sobą całkowicie niesprężysto, w kilku równo odległych od siebie chwilach. W każdym przypadku pokazano także położenie środka masy układu. Prędkość  $\vec{v}_{\Sigma M}$  środka masy nie ulega zmianie w wyniku zderzenia. Po zderzeniu ciała poruszają się razem, a więc ich wspólna prędkość  $\vec{V}$  musi być równa  $\vec{v}_{\Sigma M}$

wynosi  $\vec{p}_{2\text{pocz}} = m_2 \vec{v}_{2\text{pocz}} = 0$ . Ciało 1 jest pociskiem, a więc jego początkowy pęd w równaniu (10.21) wynosi  $\vec{p}_{1\text{pocz}} = m_1 \vec{v}_{1\text{pocz}}$ . Zauważ, że w miarę upływu czasu (czemu odpowiadają kolejne ujęcia na tym rysunku) środek masy porusza się w prawo ze stałą prędkością, zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu. Po zderzeniu wspólna prędkość  $\vec{V}$  obydwu ciał jest równa  $\vec{v}_{\text{SM}}$ , ponieważ środek masy porusza się wraz ze stykającymi się ze sobą ciałami.

✓ **SPRAWDZIAN 3:** Ciała 1 i 2 ulegają całkowicie niesprężystemu zderzeniu w jednym wymiarze. Ile wynosi ich pęd po zderzeniu, jeśli ich pędy przed zderzeniem wynoszą odpowiednio: a)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i  $0$ , b)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . c)  $10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i  $-4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ?

## Przykład 10.2

Przed wynalezieniem elektronicznych przyrządów do pomiaru czasu prędkość pocisków (np. karabinowych) mierzono za pomocą *wahadła balistycznego*. W wersji pokazanej na rysunku 10.11 stanowi je duży klocek drewniany o masie  $m_2 = 5.4 \text{ kg}$ , zawieszony na dwóch długich linach. Pocisk o masie  $m_1 = 9.5 \text{ g}$  wystrzelony w kierunku tego klocka zatrzymuje się w nim bardzo szybko. Układ *kłoc + pocisk* odchyła się ku górze, przy czym jego środek masy wznosi się w pionie na wysokość  $h = 6.3 \text{ cm}$  w chwili, gdy prędkość układu zmniejsza się do zera. Ile wynosiła prędkość pocisku tuż przed zderzeniem z klockem?

### ROZWIĄZANIE:

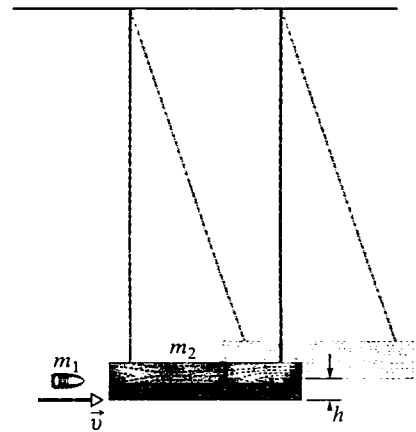
Łatwo się zorientować, że wysokość  $h$ , na jaką wznosi się wahadło, zależy od prędkości  $v$  pocisku.

➡ 1. Jednakże nie możemy wyznaczyć związku między tymi wielkościami z zasady zachowania energii mechanicznej, gdyż niewątpliwie przy zagłębieniu się pocisku w klocek energia mechaniczna ulega zamianie na inne postacie energii (jak energia termiczna i energia potrzebna do odształcenia drewna). Musimy więc podejść do zagadnienia inaczej.

➡ 2. Zauważ, że złożony ruch układu można rozdzielić na dwie fazy, z których każdą zbadamy osobno: 1) zderzenie pocisku z klockem, 2) ruch układu po zderzeniu, w trakcie którego energia mechaniczna *jest* zachowana.

**Faza 1.** Zderzenie pocisku z klockem trwa bardzo krótko, dlatego też możemy zrobić dwa ważne założenia. 1) Przyjmijmy, że w czasie zderzenia siła ciężkości działająca na klocek i siła działająca na niego ze strony lin nadal równoważą się wzajemnie. Zatem w czasie zderzenia popęd sił zewnętrznych działających na układ pocisk–klocek jest równy zero. Układ jest więc izolowany, wobec czego jego całkowity pęd jest zachowany. 2) Zderzenie zachodzi w jednym wymiarze w tym sensie, że kierunek ruchu pocisku i klocka *tuż po zderzeniu* jest taki sam, jak kierunek ruchu pocisku przed zderzeniem.

Zderzenie zachodzi w jednym wymiarze — klocek pozostaje początkowo w spoczynku, a pocisk grzęźnie w klocku, zatem za-



Rys. 10.11. Przykład 10.2. Wahadło balistyczne, stosowane do pomiaru prędkości pocisku

sadę zachowania pędu możemy wyrazić za pomocą równania (10.18). Stosując symbole, wprowadzone w treści zadania mamy

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (10.22)$$

**Faza 2.** W czasie ruchu wahadłowego pocisk razem z klockiem energia mechaniczna układu pocisk–klocek–Ziemia jest zachowana (energia ta nie zmienia się pod wpływem sił działających na klocek ze strony lin, gdyż te siły działają zawsze prostopadle do kierunku ruchu klocka). Przyjmijmy, że grawitacyjna energia potencjalna *jest* równa zero, gdy klocek znajduje się w położeniu początkowym. Zachowanie energii mechanicznej oznacza zatem, że energia kinetyczna układu, gdy wahadło zaczyna się wznosić, musi być równa grawitacyjnej energii potencjalnej w najwyższym punkcie ruchu wahadła. Prędkość pocisku i klocka na początku ruchu wahadła *jest* równa prędkości układu tuż po zderzeniu, czyli  $V$ , a zatem zasadę zachowania energii możemy w naszym przypadku zapisać w postaci:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)gh.$$

Wstawiając do tego wzoru  $V$  z równania (10.22), otrzymujemy:

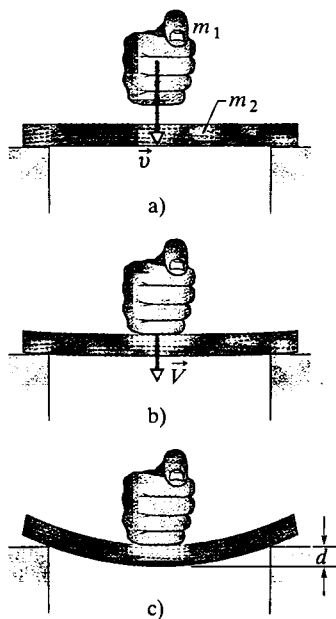
$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

$$= \left( \frac{0,0095 \text{ kg} + 5,45 \text{ kg}}{0,0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,063 \text{ m})}$$

$$= 630 \text{ m/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

### Przykład 10.3

Doskonali karateka łamie drewnianą deskę o masie 0,14 kg, uderzając w nią z góry pięścią o masie  $m_1 = 0,7 \text{ kg}$ , jak pokazano na rysunku 10.12a. Następnie robi to samo z płytą betonową o masie 3,2 kg. Stała sprężystości  $k$  przy zginaniu wynosi  $4,1 \cdot 10^4 \text{ N/m}$  dla deski oraz  $2,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  dla płyty. Deska pęka przy jej wygięciu o  $d = 16 \text{ mm}$ , a płyta — przy wygięciu o  $d = 1,1 \text{ mm}$ , jak pokazano na rysunku 10.12c (dane zaczerpnięto z artykułu S.R. Wilka, R.E. McNaira i M.S. Felda „The Physics of Karate”, *American Journal of Physics*, wrzesień 1983).



Rys. 10.12. Przykład 10.3. a) Karateka uderza w płaski przedmiot pięścią poruszającą się z prędkością  $v$ . b) Następuje całkowicie niesprężyste zderzenie pięści z przedmiotem, który zaczyna się wyginać. Układ pięść–przedmiot ma prędkość  $V$ . c) Przedmiot łamie się, gdy jego środek przemieszcza się o  $d$

a) Ile wynosi energia zgromadzona w przedmiocie (desce lub płycie), tuż przed jego złamaniem?

#### ROZWIĄZANIE:

➤ Zginany przedmiot możemy potraktować jak ściśniętą sprężynę, dla której spełnione jest prawo Hooke’a. Jego energia poten-

cjalna sprężystości jest swego rodzaju „przetwornikiem”, zamieniającym dużą prędkość ciała lekkiego (pocisku) na małą, a zatem znacznie łatwiejszą do zmierzenia, prędkość ciała ciężkiego (kłosa).

Wahadło balistyczne jest swego rodzaju „przetwornikiem”, zamieniającym dużą prędkość ciała lekkiego (pocisku) na małą, a zatem znacznie łatwiejszą do zmierzenia, prędkość ciała ciężkiego (kłosa).

$$E_p = \frac{1}{2}(4,1 \cdot 10^4 \text{ N/m})(0,016 \text{ m})^2 = 5,248 \text{ J} \approx 5,2 \text{ J,}$$

(odpowiedź)

a dla płyty:

$$E_p = \frac{1}{2}(2,6 \cdot 10^6 \text{ N/m})(0,0011 \text{ m})^2 = 1,573 \text{ J} \approx 1,6 \text{ J.}$$

(odpowiedź)

b) Ile wynosi najmniejsza prędkość  $v_p$  pięści, potrzebna do złamania przedmiotu (deski lub płyty)? Skorzystaj z następujących założeń: 1) zderzenia są całkowicie niesprężyste, a biorą w nich udział jedynie pięść i łamany przedmiot, 2) zginanie przedmiotu rozpoczyna się tuż po zderzeniu, 3) gdy przedmiot jest zginany, tzn. od końca zderzenia do początku pęknięcia przedmiotu energia mechaniczna jest zachowana, 4) gdy przedmiot zaczyna pękać, prędkości pięści i przedmiotu są praktycznie równe zeru.

#### ROZWIĄZANIE:

➤ Złożony ruch układu podzielimy na trzy fazy, a potem zbadamy kolejno każdą z nich.

1. W wyniku całkowicie niesprężystego zderzenia w jednym wymiarze energia kinetyczna pięści zamienia się na energię kinetyczną układu pięść–przedmiot.
2. Energia ta zostaje następnie zamieniona na energię potencjalną  $E_p$  zgiętego przedmiotu.
3. Gdy energia  $E_p$  osiąga wartość obliczoną w punkcie (a), przedmiot pęka.

W fazie 1 możemy skorzystać z równania (10.18), aby powiązać prędkość  $v_p$  pięści tuż przed zderzeniem, z prędkością  $V_{pp}$  układu pięść–przedmiot tuż po zderzeniu, gdy przedmiot zaczyna się zginać. Używając powyższych oznaczeń, zapisujemy równanie (10.18) jako:

$$V_{pp} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_p. \quad (10.23)$$

W fazie 2, gdy przedmiot zgina się, energia mechaniczna układu pięść–przedmiot jest zachowana (aż do chwili, gdy przedmiot się łamie). Przesunięcie przedmiotu w dół jest niewielkie, zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej pięści i przedmiotu jest tak mała, że można ją pominąć. Zachowanie energii mechanicznej możemy zatem wyrazić w postaci:

$$\left( \begin{array}{l} \text{energia kinetyczna} \\ \text{na początku zginania} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{energia potencjalna sprężystości} \\ \text{tuż przed pęknięciem} \end{array} \right).$$

czyli

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{pp}^2 = E_p. \quad (10.24)$$

Podstawiając do tego równania  $V_{pp}$  ze wzoru (10.23) i rozwiązując je względem  $v_p$ , otrzymujemy:

$$v_p = \frac{1}{m_1} \sqrt{2E_p(m_1 + m_2)}. \quad (10.25)$$

W fazie 3 podstawiamy do powyższego wzoru wartość  $E_p$ , odpowiadającą złamaniu przedmiotu, którą obliczyliśmy w punkcie (a). Wstawiając też do niego odpowiednie wartości mas, dostajemy w przypadku deski:

$$v_p = 4.2 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

a w przypadku płyty:

$$v_p = 5 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc odpowiedź na pytanie (a) oznacza, że złamanie deski wymaga większej energii niż złamanie płyty. Odpowiedź na pytanie (b) wyjaśnia jednak, dlaczego deskę łatwiej złamać: mniejsza jest w tym przypadku wymagana do tego prędkość pięści. Jak wynika z równania (10.23), dla przedmiotu o mniejszej masie uzyskuje się większą jego prędkość  $V_{pp}$  po zderzeniu, co z kolei oznacza, że zostaje mu przekazana większa część energii pięści (w układzie z rysunku 10.12 bardzo łatwo jest złamać ołówek — m.in. dlatego, że ołówek ma małą masę).

## 10.5. Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze

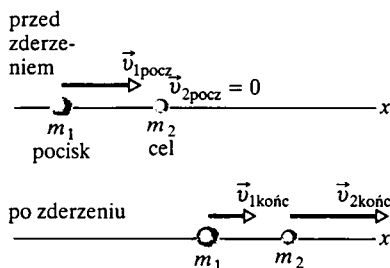
### Nieruchoma tarcza

Jak mówiliśmy w paragrafie 10.3, zderzenia spotykane w życiu codziennym są niesprężyste, lecz nieraz możemy je w przybliżeniu uważać za sprężyste. Oznacza to, że można przyjąć, iż energia kinetyczna zderzających się ciał jest w przybliżeniu zachowana, czyli nie zostaje zamieniona na inne rodzaje energii:

$$\left( \begin{array}{c} \text{całkowita energia kinetyczna} \\ \text{przed zderzeniem} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{całkowita energia kinetyczna} \\ \text{po zderzeniu} \end{array} \right).$$

Oczywiście nie oznacza to, że energia kinetyczna każdego ze zderzających się ciał się nie zmienia. Prawdziwe jest natomiast stwierdzenie, że:

➤ Przy zderzeniu sprężystym energia kinetyczna każdego ze zderzających się ciał może się zmienić, lecz nie może ulec zmianie całkowita energia kinetyczna układu tych ciał.



Rys. 10.13. Ciało 1 porusza się wzdłuż osi  $x$  przed zderzeniem sprężystym z ciałem 2, które jest przed zderzeniem nieruchome. Po zderzeniu obydwa ciała poruszają się wzdłuż tej osi

Przykładem zderzenia, które można w przybliżeniu uważać za sprężyste, jest zderzenie dwóch kul bilardowych. Jeśli to zderzenie jest czołowe (tzn. kula ruchoma porusza się dokładnie w kierunku kuli nieruchomej), to niemal cała energia kinetyczna kuli ruchomej może zostać przekazana kuli początkowo nieruchomej (z faktu, że zderzeniu kul towarzyszy charakterystyczny odgłos uderzenia można jednak wyciągnąć wniosek, że pewna niewielka część energii kinetycznej zostaje zamieniona na energię fali dźwiękowej).

Na rysunku 10.13 przedstawiono dwa ciała przed zderzenia czołowego kul bilardowych. Ciało o masie  $m_1$  i prędkości początkowej  $\vec{v}_{1pocz}$  porusza się przed zderzeniem w kierunku ciała o masie  $m_2$ , które jest przed zderzeniem nieruchome ( $\vec{v}_{2pocz} = 0$ ). Załóżmy, że ten układ dwóch ciał jest zamknięty i izolowany. Wobec tego całkowity pęd układu jest zachowany, co możemy wyrazić — korzystając z równania (10.15) — jako:

$$m_1 v_{1pocz} = m_1 v_{1końc} + m_2 v_{2końc} \quad (\text{zachowanie pędu}). \quad (10.26)$$



Skoro zderzenie jest sprężyste, to zachowana jest również całkowita energia kinetyczna, co możemy zapisać następująco:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1\text{pocz}}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1\text{końc}}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2\text{końc}}^2 \quad (\text{zachowanie energii kinetycznej}). \quad (10.27)$$

W każdym z tych równań wskaźnik pocz odnosi się do prędkości początkowej zderzających się ciał, a wskaźnik końc — do ich prędkości końcowych. Jeśli znamy masy ciał oraz prędkość początkową  $v_{1\text{pocz}}$  ciała 1, to wielkościami nieznanymi są prędkości końcowe  $v_{1\text{końc}}$  i  $v_{2\text{końc}}$  obydwu ciał. Te dwie niewiadome możemy wyznaczyć, gdyż mamy do dyspozycji dwa równania.

W tym celu zapiszmy równanie (10.26) jako:

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}}) = m_2v_{2\text{końc}}, \quad (10.28)$$

a równanie (10.27) jako\*

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}})(v_{1\text{pocz}} + v_{1\text{końc}}) = m_2v_{2\text{końc}}^2. \quad (10.29)$$

Dzieląc stronami równania (10.29) i (10.28), otrzymujemy po niewielkich przekształceniach:

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1\text{pocz}} \quad (10.30)$$

oraz

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1\text{pocz}}. \quad (10.31)$$

Zauważ, że z równania (10.31) wynika, że  $v_{2\text{końc}}$  jest zawsze dodatnie (tzn. ciało o masie  $m_2$  początkowo nieruchome, po zderzeniu zawsze porusza się do przodu). Z równania (10.30) wynika natomiast, że  $v_{1\text{końc}}$  może być dodatnie lub ujemne (tzn. ciało o masie  $m_1$  porusza się po zderzeniu do przodu, jeśli  $m_1 > m_2$ , lecz odbija się od tarczy, jeśli  $m_1 < m_2$ ).

Rozważmy kilka przypadków szczególnych.

1. **Ciała o jednakowych masach.** Jeśli  $m_1 = m_2$ , to równania (10.30) i (10.31) sprowadzają się do postaci:

$$v_{1\text{końc}} = 0 \quad \text{oraz} \quad v_{2\text{końc}} = v_{1\text{pocz}},$$

co odpowiada idealnemu uderzeniu bilardzisty — przy zderzeniu czołowym ciał o jednakowych masach ciało 1 (początkowo ruchome) zatrzymuje się, a ciało 2 (początkowo nieruchome) uzyskuje prędkość równą prędkości początkowej ciała 1. Innymi słowy, przy zderzeniu czołowym ciał o jednakowych masach „wymieniają się prędkościami”. To ostatnie stwierdzenie jest słuszne także wtedy, gdy tarcza (ciało 2) nie jest początkowo nieruchoma.

2. **Tarcza o bardzo dużej masie.** Jeśli tarcza ma bardzo dużą masę, to spełniony jest związek  $m_2 \gg m_1$  (zastosowaliśmy oznaczenia z rysunku 10.13).

---

\*Zastosowaliśmy przy tym tożsamość  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , co pozwoli nam łatwiej rozwiązać układ równań (10.28) i (10.29).

Przykładem takiej sytuacji może być wystrzelenie piłki golfowej w kierunku kuli armatniej. Równania (10.30) i (10.31) sprowadzają się w tym przypadku do postaci:

$$v_{1\text{końc}} \approx -v_{1\text{pocz}} \quad \text{oraz} \quad v_{2\text{końc}} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right)v_{1\text{pocz}}. \quad (10.32)$$

Z równań tych wynika, że ciało 1 (piłka golfowa) po prostu odbija się wzdłuż linii padania, bez zmiany wartości prędkości. Natomiast ciało 2 (kula armatnia) porusza się po zderzeniu do przodu, lecz jego prędkość jest bardzo mała, gdyż wyrażenie w nawiasach w równaniu (10.32) jest dużo mniejsze od jedności. Tego właśnie należało się spodziewać.

3. **Pocisk o bardzo dużej masie.** Jest to przypadek odwrotny do poprzedniego, tzn. przypadek, gdy  $m_1 \gg m_2$ . Odpowiada on wystrzeleniu kuli armatniej w kierunku piłki golfowej. Równania (10.30) i (10.31) sprowadzają się teraz do:

$$v_{1\text{końc}} \approx v_{1\text{pocz}} \quad \text{oraz} \quad v_{2\text{końc}} \approx 2v_{1\text{pocz}}. \quad (10.33)$$

Z równań (10.33) wynika, że ciało 1 (kula armatnia) porusza się nadal do przodu, z prędkością praktycznie niezmienną w wyniku zderzenia. Ciało 2 (piłka golfowa) natomiast porusza się po zderzeniu do przodu, z prędkością dwa razy większą od prędkości kuli armatniej.

Możesz się dziwić, dlaczego ta prędkość jest właśnie dwa razy większa. Aby to wyjaśnić, przypomnij sobie zderzenie opisane równaniami (10.32), podczas którego prędkość pocisku o małej masie (piłki golfowej) zmienia się z  $+v$  na  $-v$ , co daje zmianę prędkości o  $2v$ . W obecnym przykładzie zachodzi taka sama zmiana jej prędkości (z tym, że tym razem od wartości 0 do wartości  $2v$ ).

## Ruchoma tarcza

Po rozważeniu sprężystego zderzenia pocisku z nieruchomą tarczą zajmiemy się teraz przypadkiem, w którym przed zderzeniem sprężystym obydwa ciała znajdują się w ruchu.

W sytuacji przedstawionej na rysunku 10.14 zasada zachowania pędu przybiera postać:

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}, \quad (10.34)$$

a zasada zachowania energii może być zapisana jako:

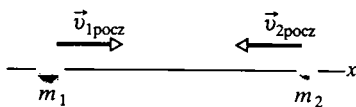
$$\frac{1}{2}m_1 v_{1\text{pocz}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2\text{pocz}}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1\text{końc}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2\text{końc}}^2. \quad (10.35)$$

Aby rozwiązać ten układ równań względem  $v_{1\text{końc}}$  i  $v_{2\text{końc}}$ , przekształćmy równanie (10.34) do postaci:

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}}) = -m_2(v_{2\text{pocz}} - v_{2\text{końc}}), \quad (10.36)$$

a równanie (10.35) do postaci:

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}})(v_{1\text{pocz}} + v_{1\text{końc}}) = -m_2(v_{2\text{pocz}} - v_{2\text{końc}})(v_{2\text{pocz}} + v_{2\text{końc}}). \quad (10.37)$$



Rys. 10.14. Dwa ciała przed czołowym zderzeniem sprężystym

Dzieląc stronami równania (10.37) i (10.36), otrzymujemy po niewielkich przekształceniach:

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2\text{pocz}} \quad (10.38)$$

oraz

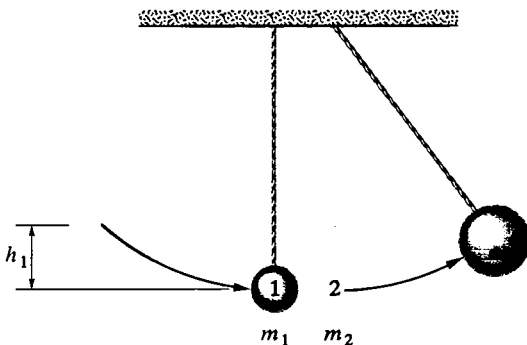
$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2\text{pocz}}. \quad (10.39)$$

Zauważ, że przypisanie ciałom wskaźników 1 i 2 jest całkowicie dowolne. Zamiana wskaźników (1 na 2 i 2 na 1) na rysunku 10.14 oraz w równaniach (10.38) i (10.39) nie zmienia tych równań. Zauważ również, że jeśli podstawimy  $v_{2\text{pocz}} = 0$ , to ciało 2 stanie się tarczą nieruchomą, jak na rysunku 10.13, a równania (10.38) i (10.39) sprowadzą się do równań (10.30) i (10.31).

**SPRAWDZIAN 4:** Ile wynosi końcowy pęd tarczy z rysunku 10.13, jeśli początkowy pęd pocisku jest równy  $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , a końcowy pęd pocisku wynosi: a)  $2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , b)  $-2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ? c) Ile wynosi końcowa energia kinetyczna tarczy, jeśli początkowa energia kinetyczna pocisku jest równa  $5 \text{ J}$ , a jego końcowa energia kinetyczna wynosi  $2 \text{ J}$ ?

## Przykład 10.4

Dwie kule metalowe, zawieszona na pionowych linach w chwili początkowej ledwie się ze sobą stykają, jak pokazano na rysunku 10.15. Kula 1, o masie  $m_1 = 30 \text{ g}$ , zostaje odchylona w lewo, przy czym wznosi się w pionie na wysokość  $h_1 = 8 \text{ cm}$ , a następnie zostaje puszczone swobodnie. Po powrocie do położenia początkowego zderza się ona sprężysto z kulą 2 o masie  $m_2 = 75 \text{ g}$ . Ile wynosi prędkość  $v_{1\text{końc}}$  kuli 1 tuż po zderzeniu?



Rys. 10.15. Przykład 10.4. Dwie kule metalowe zawieszona na linach w chwili początkowej spoczywają, ledwie się ze sobą stykając. Następnie kula 1 o masie  $m_1$  zostaje odchylona w lewo na wysokość  $h_1$  i puszczone swobodnie

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że:  $\bullet \rightarrow$  złożony ruch kul możemy rozdzielić na dwie fazy, które zbadamy osobno: 1) powrót kuli 1 do położenia początkowego, 2) zderzenie kul.

Faza 1.  $\bullet \rightarrow$  W czasie powrotu kuli 1 do położenia początkowego energia mechaniczna układu kula–Ziemia jest zachowana (energia mechaniczna nie zmienia się pod wpływem siły działającej na kulę 1 ze strony liny, ponieważ ta siła jest zawsze skierowana prostopadłe do kierunku ruchu kuli). Wybierzmy najniższe położenie kuli jako poziom odniesienia, na którym grawitacyjna energia potencjalna jest równa zero. Energia kinetyczna kuli 1 w jej najniższym położeniu musi być zatem równa grawitacyjnej energii potencjalnej układu, gdy kula 1 znajduje się w swym najwyższym położeniu, czyli:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\text{pocz}}^2 = m_1 g h_1.$$

Z równania tego możemy wyznaczyć prędkość  $v_{1\text{pocz}}$  kuli 1 tuż przed zderzeniem. Otrzymujemy:

$$v_{1\text{pocz}} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,08 \text{ m})} = 1,252 \text{ m/s}.$$

Faza 2. Oprócz założenia, że zderzenie kul jest sprężyste poczynimy jeszcze dwa inne założenia. Po pierwsze, potraktujemy zderzenie jako zachodzące w jednym wymiarze, gdyż ruch kul jest z dobrym przybliżeniem poziomy od chwili tuż przed, do chwili tuż po zderzeniu. Po drugie, ponieważ zderzenie trwa bardzo krótko możemy przyjąć, że układ tych dwóch kul jest zamknięty i izolowany. Wobec tego  $\bullet \rightarrow$  całkowity pęd układu jest zachowany. Do wyznaczenia prędkości kuli 1 tuż po zderzeniu możemy zatem skorzystać z równania (10.30). Daje to:

$$\begin{aligned} v_{1\text{końc}} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} = \frac{(0,03 \text{ kg}) - (0,075 \text{ kg})}{(0,03 \text{ kg}) + (0,075 \text{ kg})} (1,252 \text{ m/s}) \\ &= -0,537 \text{ m/s} \approx -0,54 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Znak minus oznacza, że tuż po zderzeniu kula 1 porusza się w lewą stronę.

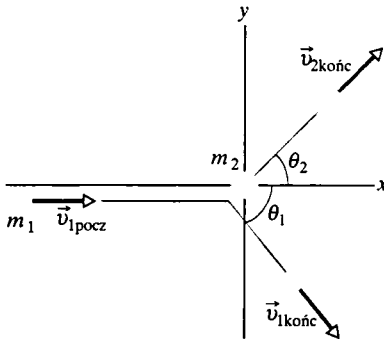
## 10.6. Zderzenia w dwóch wymiarach

Gdy dwa ciała zderzają się ze sobą, kierunki ich ruchu po zderzeniu zależą od popędów sił, jakimi działają na siebie te ciała. W przypadku, gdy zderzenie **nie** jest czołowe, kierunki ruchu ciał po zderzeniu są inne niż przed nim. Jeśli **takie** zderzenie w dwóch wymiarach zachodzi w układzie zamkniętym i izolowanym, to całkowity pęd układu musi być zachowany, tzn.:

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}. \quad (10.40)$$

W szczególnym przypadku zderzenia sprężystego zachowana musi być także energia kinetyczna układu, tzn.:

$$E_{k,1\text{pocz}} + E_{k,2\text{pocz}} = E_{k,1\text{końc}} + E_{k,2\text{końc}}. \quad (10.41)$$



Rys. 10.16. Sprężyste zderzenie niecentralne dwóch ciał. Ciało o masie  $m_2$  (tarcza) jest przed zderzeniem nieruchome

Do analizy zderzenia w dwóch wymiarach przy zastosowaniu równania (10.40) wygodnie jest zapisać to równanie dla składowych w układzie współrzędnych  $xy$ . Jako przykład na rysunku 10.16 przedstawiono zderzenie niecentralne (tzn. zderzenie, które nie jest czołowe) pocisku i tarczy, która przed zderzeniem się nie porusza. Popędy sił działających między tymi ciałami sprawiają, że po zderzeniu ciała poruszają się w kierunkach tworzących z osią  $x$ , tzn. osią wzdłuż której poruszała się przed zderzeniem pocisk, kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Równanie (10.40) dla składowych wzdłuż osi  $x$  postać:

$$m_1 v_{1\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} \cos \theta_1 + m_2 v_{2\text{końc}} \cos \theta_2, \quad (10.42)$$

a dla składowych wzdłuż osi  $y$ :

$$0 = -m_1 v_{1\text{końc}} \sin \theta_1 + m_2 v_{2\text{końc}} \sin \theta_2. \quad (10.43)$$

Równanie (10.41) obowiązujące w szczególnym przypadku zderzenia sprężystego możemy wyrazić przez prędkości ciał jako:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\text{pocz}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\text{końc}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\text{końc}}^2 \quad (\text{energia kinetyczna}). \quad (10.44)$$

W równaniach od (10.42) do (10.44) występuje siedem zmiennych: dwie masy  $m_1$  i  $m_2$ , trzy prędkości  $v_{1\text{pocz}}$ ,  $v_{1\text{końc}}$  i  $v_{2\text{końc}}$  oraz dwa kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Jeśli znamy **przy-** najmniej cztery z tych wielkości, to pozostałe możemy wyznaczyć, **rozwiązując** układ trzech wspomnianych równań.

**SPRAWDZIAN 5:** Przyjmij, że w sytuacji z rysunku 10.16 pęd pocisku przed zderzeniem wynosi  $6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , a po zderzeniu ma składowe, równe  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  wzdłuż osi  $x$  i  $-3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  wzdłuż osi  $y$ . Ile wynoszą po zderzeniu składowe: a)  $x$ , b)  $y$  pędu tarczy?

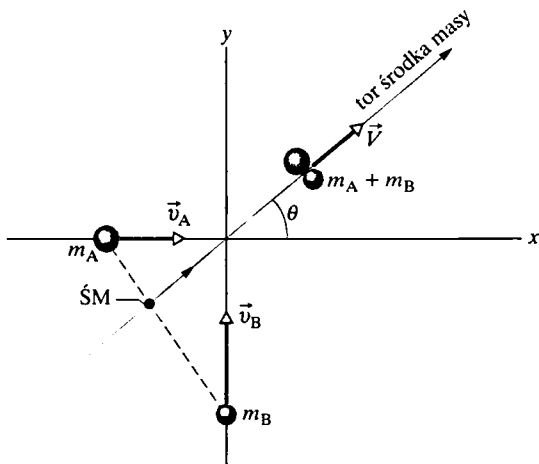
### Przykład 10.5

Dwoje łyżwiarzy, Artur i Bożena, zderza się ze sobą i łączy się w uścisku, w wyniku czego zderzenie jest całkowicie niesprężyste. Po zderzeniu poruszają się oni zatem razem, jak pokazano na rysunku 10.17, na którym początek układu współrzędnych umieszczono w punkcie zderzenia. Artur, którego masa  $m_A$  wynosi  $83 \text{ kg}$ , porusza się początkowo na wschód, z prędkością  $v_A = 6,2 \text{ km/h}$ . Bożena, której masa  $m_B$  jest równa  $55 \text{ kg}$ , porusza się początkowo w kierunku północnym z prędkością  $v_B = 7,8 \text{ km/h}$ .

a) Ile wynosi prędkość  $\vec{V}$  pary łyżwiarzy po zderzeniu?

**ROZWIĄZANIE:**

1. Możemy przyjąć, że para łyżwiarzy tworzy układ zamknięty i izolowany, tzn. wypadkowa działających na nich sił zewnętrznych jest równa zero. W szczególności oznacza to, że pomijamy wszelkie siły tarcia działające na łyżwiarzy ze stron



Rys. 10.17. Przykład 10.5. Dwoje łyżwiarzy, Artur (A) i Bożena (B), doznaje całkowite niesprężyste zderzenia. Na rysunku przedstawiono widok z góry, a łyżwiarzy zaznaczono dla prostoty jako kulki. Po zderzeniu poruszają się oni razem z prędkością o wartości  $V$ , w kierunku tworzącym z osią  $x$  kąt  $\theta$ . Pokazano również tor środka masy łyżwiarzy oraz położenie środka masy w chwili, w której łyżwiarze zajmują przed zderzeniem położenia zaznaczone na rysunku

łodu. Przy tym założeniu możemy skorzystać z zasady zachowania pędu układu ( $\vec{P}_{\text{pocz}} = \vec{P}_{\text{końc}}$ ), co daje:

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{V}. \quad (10.45)$$

Rozwiązując to równanie względem  $\vec{V}$  otrzymujemy:

$$\vec{V} = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B}.$$

Aby wyznaczyć wartość i kierunek prędkości łyżwiarzy po zderzeniu, skorzystamy (jak to już robiliśmy w poprzednim rozdziale) z faktu, że:

1. Pęd jest zachowany z osobna dla składowych wzdłuż każdej osi, tzn. wzdłuż osi  $x$  i  $y$  z rysunku 10.17. Zapisując

równanie (10.45) dla składowych wzdłuż osi  $x$ , otrzymujemy:

$$m_A v_A + m_B(0) = (m_A + m_B)V \cos \theta, \quad (10.46)$$

a dla składowych wzdłuż osi  $y$ :

$$m_A(0) + m_B v_B = (m_A + m_B)V \sin \theta. \quad (10.47)$$

Nie możemy rozwiązać żadnego z tych równań z osobna, gdyż każde zawiera dwie niewiadome ( $V$  i  $\theta$ ), ale możemy je rozwiązać łącznie jako układ równań. Dzieliąc stronami równanie (10.47) przez równanie (10.46), dostajemy:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55 \text{ kg})(7.8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg})(6.2 \text{ km/h})} = 0.834,$$

a stąd:

$$\theta = \operatorname{arctg} 0.834 = 39.8^\circ \approx 40^\circ. \quad (\text{odpowieź})$$

Wartość prędkości możemy teraz wyznaczyć z równania (10.47), do którego podstawiamy  $m_A + m_B = 138 \text{ kg}$ . Otrzymujemy:

$$V = \frac{m_B v_B}{(m_A + m_B) \sin \theta} = \frac{(55 \text{ kg})(7.8 \text{ km/h})}{(138 \text{ kg})(\sin 39.8^\circ)} = 4.86 \text{ km/h} \approx 4.9 \text{ km/h}. \quad (\text{odpowieź})$$

b) Ile wynosi prędkość  $\vec{v}_{\text{ŚM}}$  środka masy łyżwiarzy przed zderzeniem i po zderzeniu?

#### ROZWIĄZANIE:

1. Po zderzeniu łyżwiarze poruszają się razem, a więc ich środek masy porusza się wraz z nimi, jak pokazano na rysunku 10.17. Zatem prędkość  $\vec{v}_{\text{ŚM}}$  środka masy jest równa wektorowi  $\vec{V}$  obliczonemu w punkcie (a).

2. Aby wyznaczyć prędkość  $\vec{v}_{\text{ŚM}}$  środka masy przed zderzeniem, zauważ, że: prędkość ta mogłaby ulec zmianie tylko pod wpływem sił zewnętrznych. Założyliśmy jednak, że łyżwiarze tworzą układ izolowany (tzn. że wypadkowa działających na nich sił zewnętrznych jest równa zero). Wobec tego prędkość  $\vec{v}_{\text{ŚM}}$  nie może zmienić się w czasie zderzenia (w czasie którego na ciała działają tylko siły wewnętrzne). Zatem i przed zderzeniem, i po zderzeniu mamy:

$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \vec{V}. \quad (\text{odpowieź})$$

## Podsumowanie

**Zderzenia** W czasie zderzenia dwa ciała działają na siebie dużymi siłami w stosunkowo krótkim czasie. Z punktu widzenia układu zderzających się ciał są to siły wewnętrzne, które w czasie zderzenia są znacznie większe od wszelkich sił zewnętrznych.

**Popęd siły i pęd** Z drugiej zasady dynamiki Newtona dla cząstki biorącej udział w zderzeniu zapisanej przy użyciu jej pędu wynika związek popędu siły ze zmianą pędu cząstki:

$$\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta \vec{p} = \vec{J}, \quad (10.4)$$

w którym  $\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta \vec{p}$  jest zmianą pędu cząstki w czasie zderzenia, a  $\vec{J}$  — popędem siły  $\vec{F}(t)$  działającej w czasie zderzenia na tę cząstkę ze strony drugiej zderzającej się cząstki:

$$\vec{J} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t) dt. \quad (10.3)$$

Jeśli  $F_{\text{sr}}$  jest średnią wartością siły  $\vec{F}(t)$ , a  $\Delta t$  — czasem trwania zderzenia, to w przypadku jednowymiarowym:

$$J = F_{\text{sr}} \Delta t. \quad (10.8)$$

Jeśli na ciało, które jest unieruchomione pada stały strumień cząstek, z których każda ma masę  $m$  i prędkość  $v$ , to na ciało działa średnia siła:

$$F_{sr} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \quad (10.10)$$

przy czym  $n/\Delta t$  jest częstością zderzeń cząstek z ciałem unieruchomionym, a  $\Delta v$  — zmianą prędkości każdej cząstki przy zderzeniu. Siłę tę można również wyrazić jako:

$$F_{sr} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v, \quad (10.13)$$

gdzie  $\Delta m/\Delta t$  jest szybkością, z jaką masa cząstek dociera do celu. W równaniach (10.10) i (10.13)  $\Delta v = -v$ , jeśli przy zderzeniu cząstki zostają zatrzymane, a  $\Delta v = -2v$ , jeśli cząstki odbijają się od celu do tyłu bez zmiany wartości ich prędkości.

**Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze** W zderzeniach niesprężystych dwóch ciał energia kinetyczna układu nie jest zachowana. Jeśli jednak układ jest zamknięty i izolowany, to całkowity pęd układu *musi* być zachowany, co można zapisać w postaci równania wektorowego:

$$\vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz} = \vec{p}_{1końc} + \vec{p}_{2końc}, \quad (10.15)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do chwil tuż przed oraz tuż po zderzeniu.

Jeśli ciała poruszają się wzdłuż jednej prostej, czyli zderzenie zachodzi w jednym wymiarze, to równanie (10.15) można wyrazić za pomocą składowych prędkości ciał wzdłuż tej prostej:

$$m_1 v_{1pocz} + m_2 v_{2pocz} = m_1 v_{1końc} + m_2 v_{2końc}. \quad (10.16)$$

Jeśli ciała stykają się ze sobą po zderzeniu, to zderzenie nazywamy *całkowicie niesprężystym*. W tym przypadku ciała poruszają się po zderzeniu z tą samą prędkością  $V$  (gdyż poruszają się razem).

**Ruch środka masy** Jeśli zderzające się ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, to zderzenie nie ma wpływu na ruch środka masy tych ciał. W szczególności, prędkość  $\vec{v}_{SM}$  środka masy nie ulega zmianie w wyniku zderzenia i jest związana ze stałym pędem  $\vec{P}$  układu zależnością:

$$\vec{v}_{SM} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz}}{m_1 + m_2}. \quad (10.21)$$

**Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze** Zderzenie sprężyste jest szczególnym rodzajem zderzenia, w którym zachowana jest całkowita energia kinetyczna układu zderzających się ciał. Wiele rodzajów zderzeń, z jakimi spotykamy się w życiu codziennym można uważać w przybliżeniu za zderzenia sprężyste. Jeśli ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, to zachowany jest również pęd tego układu. Gdy zderzenie w jednym wymiarze polega na zderzeniu cząstki ruchomej 1 (pocisku) z nieruchomą tarczą 2, z zachowania energii kinetycznej i pędu układu wynikają następujące wyrażenia na prędkości ciał zaraz po zderzeniu:

$$v_{1końc} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1pocz} \quad (10.30)$$

oraz

$$v_{2końc} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1pocz}. \quad (10.31)$$

Jeśli przed zderzeniem poruszają się obydwa ciała, to ich prędkości tuż po zderzeniu są równe:

$$v_{1końc} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1pocz} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2pocz} \quad (10.38)$$

oraz

$$v_{2końc} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1pocz} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2pocz}. \quad (10.39)$$

Zwróć uwagę, że równania (10.38) i (10.39) nie zmieniają się, jeśli zamienimy w nich miejscami wskaźniki 1 i 2.

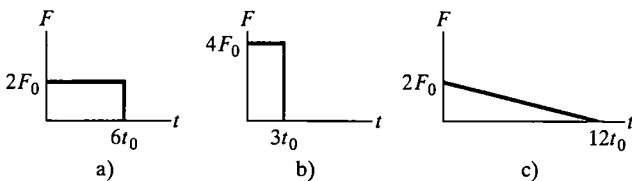
**Zderzenia w dwóch wymiarach** Jeśli dwa ciała zderzają się, ale ich ruch nie odbywa się wzdłuż jednej prostej (tzn. zderzenie nie jest czołowe), to mamy do czynienia ze zderzeniem w dwóch wymiarach. Dla zamkniętego i izolowanego układu zderzających się ciał w zderzeniu zachowany jest całkowity pęd układu, co daje:

$$\vec{p}_{1pocz} + \vec{p}_{2pocz} = \vec{p}_{1końc} + \vec{p}_{2końc}. \quad (10.40)$$

Równanie to można zapisać w postaci dwóch równań dla składowych (po jednym dla każdego z dwóch wymiarów). W szczególnym przypadku zderzenia sprężystego zachowana musi być także energia kinetyczna układu, co daje trzecie równanie:

$$E_{k,1pocz} + E_{k,2pocz} = E_{k,1końc} + E_{k,2końc}. \quad (10.41)$$

## Pytania



Rys. 10.18. Pytanie 1

1. Na rysunku 10.18 przedstawiono trzy wykresy zależności wartości siły od czasu dla ciała biorącego udział w zderzeniu. Uszereguj te przypadki według wartości popędu działającej na to ciało siły, od największej do najmniejszej.

2. Dwa ciała poruszają się bez tarcia po podłożu w płaszczyźnie  $xy$  i zderzają się ze sobą. Załóż, że tworzą one układ zamknięty i izolowany. W tabeli podano niektóre ze składowych pędu tych

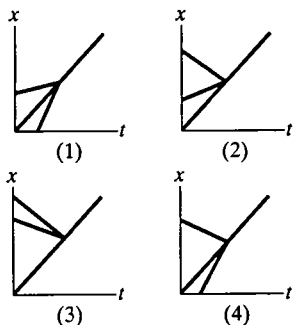
ciał przed zderzeniem oraz po zderzeniu (w kilogramach razy metr na sekundę). Uzupełnij brakujące miejsca w tabeli.

Przypadek	Ciało	Przed zderzeniem		Po zderzeniu	
		$p_x$	$p_y$	$p_x$	$p_y$
1	A	3	4	7	2
	B	2	2		
2	C	-4	5	3	
	D		-2	4	2
3	E	-6			3
	F	6	2	-4	-3

3. W tabeli podano dla trzech przypadków wartości masy (w kilogramach) i prędkości (w metrach na sekundę) dwóch ciał z rysunku 10.14. W których z tych przypadków środek masy układu ciał się nie porusza?

Przypadek	$m_1$	$v_1$	$m_2$	$v_2$
a	2	3	4	-3
b	6	2	3	-4
c	4	3	4	-3

4. Na rysunku 10.19 przedstawiono cztery wykresy położenia dwóch ciał oraz ich środka masy w zależności od czasu. Ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, w którym zachodzi całkowicie niesprężyste zderzenie w jednym wymiarze, wzdłuż osi  $x$ . Czy w sytuacji z rysunku 1: a) dwa ciała, b) ich środek masy poruszają się w dodatnim czy ujemnym kierunku osi  $x$ ? c) Które wykresy odpowiadają sytuacji niemożliwej z fizycznego punktu widzenia? Uzasadnij odpowiedź.



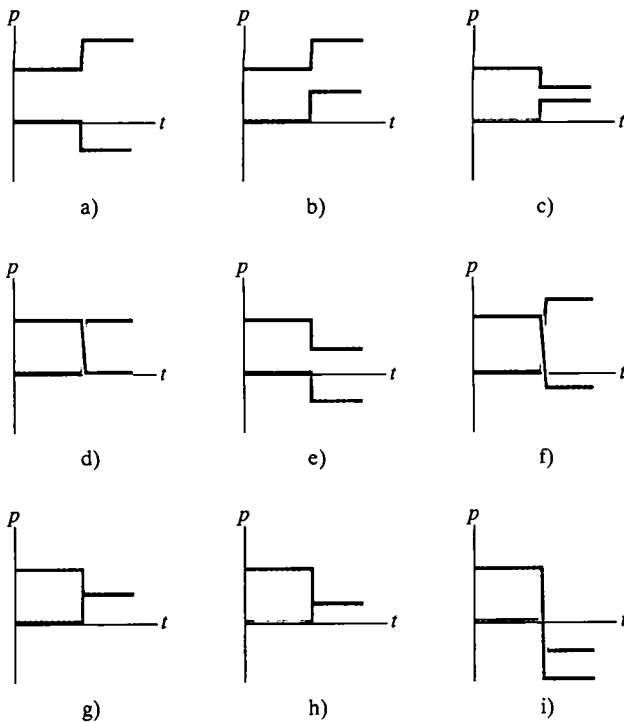
Rys. 10.19. Pytanie 4

5. Klocki A i B przedstawione na rysunku 10.20 mają pędy o wartościach odpowiednio  $9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i  $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  oraz o kierunku, który pokazuje strzałka. a) W jakim kierunku porusza się środek masy układu tych klocków przy założeniu, że ślizgają się one po podłożu bez tarcia? b) Jaki będzie kierunek ruchu klocków, jeśli po zderzeniu będą poruszać się razem? c) Czy pęd klocka A będzie co do wartości bezwzględnej mniejszy, większy, czy taki sam, jak pęd klocka B, jeśli po zderzeniu kłoczek A będzie się poruszał w lewo?



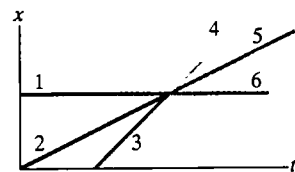
Rys. 10.20. Pytanie 5

6. Pocisk poruszający się bez tarcia w dodatnim kierunku osi  $x$  wpada na nieruchome początkowo inne ciało (jak na rysunku 10.13). Zderzenie ciał przebiega w jednym wymiarze. Załóż, że zderzające się ciała tworzą układ zamknięty i izolowany. Na rysunku 10.21 przedstawiono wykresy pędów tych ciał jako funkcji czasu (przed zderzeniem i po zderzeniu), w dziewięciu przypadkach. Które z tych wykresów odpowiadają sytuacji niemożliwej z fizycznego punktu widzenia? Dlaczego tak uważasz?



Rys. 10.21. Pytanie 6

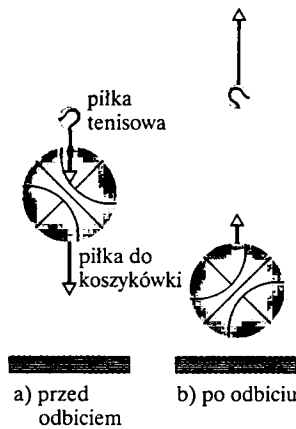
7. Dwa ciała doznają zderzenia sprężystego w jednym wymiarze, wzdłuż osi  $x$ . Na rysunku 10.22 przedstawiono wykresy położenia tych ciał oraz ich środka masy jako funkcji czasu. a) Czy przed zderzeniem poruszają się obydwa ciała, czy też jedno z nich jest nieruchome? Które odcinki na rysunku odpowiadają ruchowi środka masy: b) przed zderzeniem, c) po zderzeniu? d) Czy masa ciała, które porusza się przed zderzeniem szybciej, jest większa, mniejsza, czy może równa masie drugiego ciała?



Rys. 10.22. Pytanie 7

8. Upuść na twardą podłogę, mniej więcej z wysokości ramion, najpierw piłkę do koszykówki, a potem piłkę tenisową i zaobserwuj, na jaką wysokość każda z nich się odbije. Następnie ustaw piłkę tenisową nad piłką do koszykówki (w niewielkiej odległości od siebie, jak na rysunku 10.23a), po

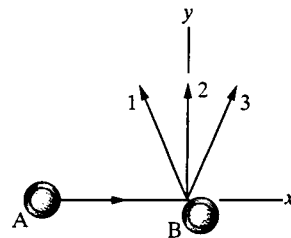
czym upuść je jednocześnie (bądź przygotowany na to, że będziesz musiał odskoczyć i uważaj, aby żadna z piłek nie uderzyła cię w twarz). a) Czy wysokość, na jaką odbije się piłka do koszykówki, będzie teraz mniejsza czy większa niż poprzednio (rys. 10.23b)? b) Czy wysokość, na jaką wzniesie się po odbiciu piłka tenisowa będzie większa czy mniejsza od sumy wysokości, na jaką wzniosły się obie piłki, upuszczone z osobna (patrz także zadanie 45)?



Rys. 10.23. Pytanie 8 i zadanie 45

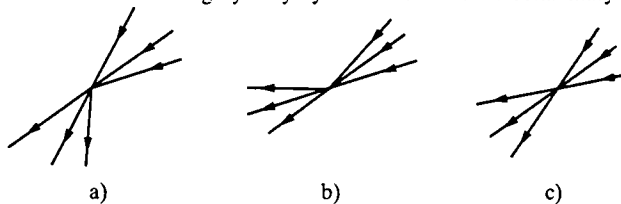
9. Krążek hokejowy A, poruszający się wzdłuż osi  $x$  z pędem  $5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  zderza się z nieruchomym krążkiem B. Krążki, których widok z góry przedstawiono na rysunku 10.24, poruszają się po lodzie bez tarcia. Na rysunku zaznaczono również

trzy możliwe kierunki ruchu krążka A po zderzeniu. Który z tych kierunków odpowiada sytuacji, gdy składowa  $x$  pędu krążka B po zderzeniu: a) jest równa  $5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , b) jest większa niż  $5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , c) jest mniejsza niż  $5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ? Czy ta składowa może być równa: d)  $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , e)  $-1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ?



Rys. 10.24. Pytanie 9

10. Dwa ciała, tworzące układ zamknięty i izolowany, zderzają się ze sobą na podłożu, po którym mogą poruszać się bez tarcia. Na której z trzech części rysunku 10.25 najlepiej przedstawiono widziane z góry tory tych ciał oraz ich środka masy?



Rys. 10.25. Pytanie 10

## Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

### 10.2. Popęd siły i pęd

1. Spoczywająca początkowo bila zostaje uderzona kijem bilardowym, który działa na nią średnią siłą o wartości  $50 \text{ N}$  w czasie  $10 \text{ ms}$ . Prędkość o jakiej wartości zostaje nadana bili, jeśli jej masa wynosi  $0.2 \text{ kg}$ ?

2. W czasie testów nowego modelu samochodu bada się jego odporność na zderzenia. Podczas jednego z takich sprawdzianów pojazd o masie  $2300 \text{ kg}$  poruszający się z prędkością  $15 \text{ m/s}$  uderza w podporę mostu i zatrzymuje się po  $0,56 \text{ s}$  od początku zderzenia. Jaką średnią siłą działa podpora na samochód w czasie tego zderzenia?

3. Piłka baseballowa o masie  $150 \text{ g}$  wyrzucona z prędkością  $40 \text{ m/s}$  ma po odbiciu prędkość o wartości  $60 \text{ m/s}$  skierowaną dokładnie w stronę gracza, który ją wyrzucił. Ile wynosiła średnia wartość siły, jaką działał na piłkę kij, jeśli zderzenie kija z piłką trwało  $5 \text{ ms}$ ?

4. Przez długie lata, aż do osiągnięcia wieku 70 lat Henri LaMothe zachwycał publiczność cyrkową skokami na brzuch z wysokości  $12 \text{ m}$  do zbiornika z wodą o głębokości  $30 \text{ cm}$ . Zakładając, że prędkość skoczka malała do zera w chwili jego dotarcia do dna naczynia z wodą, oszacuj jego masę i wyznacz: a) średnią wartość siły działającej na skoczka ze strony wody, b) średni popęd tej siły.

5. Kula stalowa o masie  $0,4 \text{ kg}$  poruszająca się z prędkością  $14 \text{ m/s}$  doznaje zderzenia, w czasie którego przez  $27 \text{ ms}$  działa na nią siła o średniej wartości  $1200 \text{ N}$ . Wyznacz wartość i kierunek prędkości kuli po zderzeniu, jeśli kierunek działania siły jest przeciwny do kierunku początkowej prędkości kuli.

6. W lutym 1955 roku spadochroniarz, który wyskoczył z samolotu na wysokości  $370 \text{ m}$  nad ziemią nie zdołał otworzyć spadochronu, lecz szczęśliwie wylądował na śniegu, dzięki czemu doznał tylko nieznacznych obrażeń. Załóż, że jego prędkość w chwili upadku wynosiła  $56 \text{ m/s}$  (była to jego prędkość graniczna), masa skoczka (wraz z kombinezonem i spadochronem) była równa  $85 \text{ kg}$ , a wartość działającej na niego siły była równa  $1,2 \cdot 10^5 \text{ N}$ , co jest największą siłą, nie powodującą jeszcze obrażeń śmiertelnych. Wyznacz: a) minimalną grubość warstwy śniegu, która umożliwi skoczkiwi przeżycie lądowania, b) wartość popędu siły, działającej na skoczka ze strony śniegu.

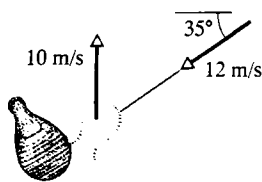


7. Kula o masie 1.2 kg spada pionowo na podłoże i ma w chwili zetknięcia z podłożem prędkość 25 m/s. Prędkość kuli tuż po odbiciu ma wartość 10 m/s. a) Ile wynosi popęd siły działającej na kulę w czasie jej zetknięcia z podłożem? b) Ile wynosi średnią wartość siły działającej na podłoże ze strony kuli, jeśli czas zetknięcia się kuli z podłożem wynosi 0.02 s?

8. Jak wszyscy wiedzą, kule i inne pociski, wystrzelone w kierunku Supermana po prostu odbijają się od niego. Załóż, że gangster ostrzeliwuje Supermana z pistoletu automatycznego, który wystrzeliwuje pociski o masie 3 g i prędkości 500 m/s. z częstotliwością 100 kul na minutę. Przyjmij ponadto, że wszystkie pociski odbijają się od piersi Supermana dokładnie w kierunku ich padania, a wartość bezwzględna ich prędkości nie ulega przy tym zmianie. Jaka jest wartość średniej siły działającej na pierś Supermana ze strony strumienia kul?

9. Samochód o masie 1400 kg jedzie z prędkością 5,3 m/s. Początkowo kieruje się na północ, czyli w dodatnim kierunku osi  $y$ . Następnie pokonuje zakręt pod kątem prostym ( $90^\circ$ ) w prawo, co zajmuje mu 4.6 s, po czym kierunek jego ruchu jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi  $x$ . Niedługo potem nieostrożny kierowca wpada na drzewo, które zatrzymuje pojazd w czasie 350 ms. Wyznacz popęd siły działającej na samochód: a) podczas pokonywania zakrętu, b) w czasie zderzenia z drzewem, wyrażając je za pomocą wektorów jednostkowych. Wyznacz średnią wartość siły działającej na pojazd: c) podczas pokonywania zakrętu, d) w czasie zderzenia. e) Jaki kąt tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $x$  średnia siła, o której mowa w pytaniu (c)? [www](#)

10. Piłka o masie 0.3 kg ma tuż przed odbiciem jej za pomocą kija prędkość o wartości 12 m/s i porusza się w dół pod kątem  $35^\circ$  do poziomu. Piłka styka się z kijem przez 2 ms, po czym odbija się pionowo w górę i w chwili utraty kontaktu z kijem ma prędkość o wartości 10 m/s, jak pokazano na rysunku 10.26. Wyznacz średnią wartość siły, działającej na kij ze strony piłki w czasie ich zetknięcia się ze sobą.



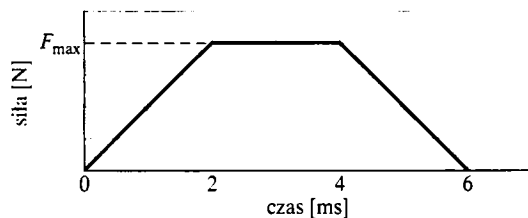
Rys. 10.26. Zadanie 10

11. Wartość siły wypadkowej działającej na ciało o masie 10 kg rośnie jednostajnie od zera do 50 N przez 4 s. Pod wpływem tej siły ciało pozostające początkowo w spoczynku, zostaje wprawione w ruch. Ile wynosi prędkość ciała po 4 s?

12. W czasie gwałtownej burzy gradowej gradziny o średnicy 1 cm i prędkości 25 m/s spadają pionowo w dół. Oszacowano, że  $1 \text{ m}^3$  powietrza zawiera średnio 120 gradzin. a) Ile wynosi masa gradzin (o gęstości równej  $0.92 \text{ g/cm}^3$ )? b) Wyznacz średnią wartość siły działającej ze strony gradzin na płaski dach o rozmiarach  $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$  przy założeniu, że gradziny nie odbijają się od dachu. Wskazówka: siła działająca ze strony dachu na gradziny jest w przybliżeniu równa sile wypadkowej działającej na gradzinę, gdyż działająca na nią siła ciężkości jest bardzo mała.

13. Strzelba śrutówka wystrzeliwuje w ciągu 1 s 10 ziaren śrutu o masie 2 g każde, nadając im prędkość 500 m/s. Śrut grzęźnie w sztywnej ścianie. Wyznacz: a) pęd, b) energię kinetyczną każdego ziarna, c) średnią wartość siły działającej na ścianę ze strony strumienia tych ziaren, d) Załóż, że czas zatrzymania każdego ziarna w ścianie wynosi 0.6 ms i wyznacz średnią wartość siły działającej na ścianę ze strony ziarna w czasie jego zatrzymania. e) Dlaczego ta średnia wartość siły jest tak bardzo różna od średniej wartości siły, otrzymanej w punkcie (c)?

14. Na rysunku 10.27 przedstawiono schematyczny wykres zależności wartości siły od czasu, odnoszący się do zderzenia bardzo sprężystej kuli o masie 58 g ze ścianą. Początkowa prędkość kuli wynosi 34 m/s i jest prostopadła do ściany. Po odbiciu kula porusza się w kierunku przeciwnym do kierunku padania, czyli znów prostopadłym do ściany i ma prędkość, o wartości w przybliżeniu takiej samej, jak przed zderzeniem. Wyznacz maksymalną wartość siły  $F_{\text{max}}$ , działającej na kulę ze strony ściany w czasie zderzenia.

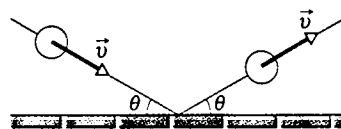


Rys. 10.27. Zadanie 14

15. Pojazd kosmiczny rozpada się na dwie części w wyniku odpalenia materiału wybuchowego zawartego w łączących je sworzniach. Masy części wynoszą 1200 kg i 1800 kg, a popęd siły, z jaką sworznią działa na każdą z nich, jest równy  $300 \text{ N} \cdot \text{s}$ . Z jaką względną prędkością oddalają się od siebie części po wybuchu?

16. Piłka o masie 150 g uderza w ścianę z prędkością 5.2 m/s, a po odbiciu od ściany ma energię kinetyczną stanowiącą tylko 50% swej początkowej energii kinetycznej. a) Jaka jest wartość prędkości piłki tuż po odbiciu? b) Jaka jest wartość popędu siły działającej na ścianę ze strony piłki? c) Jaką średnią siłą działała piłka na ścianę w czasie odbicia, jeśli stykały się one przez 7.6 ms?

17. Piłka o masie 300 g i prędkości 6 m/s pada na ścianę pod kątem  $\theta$  równym  $30^\circ$ . Po odbiciu ma ona prędkość o takiej samej wartości, a jej tor tworzy ze ścianą taki sam kąt (patrz widok z góry na rysunku 10.28). W czasie odbicia piłka styka się ze ścianą przez 10 ms. a) Ile wynosi popęd siły działającej na ścianę ze strony piłki? b) Jaką średnią siłą działała piłka na ścianę?



Rys. 10.28. Zadanie 17

18. Bezzałogowy pojazd kosmiczny o masie 2500 kg porusza się po linii prostej ze stałą prędkością równą 300 m/s. W pewnej chwili na krótko włączają się silniki raketowe. dzięki czemu na pojazd działa siła o wartości 3000 N w ciągu 65 s. a) Jakiej zmianie ulega wartość pędu pojazdu, jeśli siła ta działa zgodnie z kierunkiem ruchu pojazdu, przeciwnie do tego kierunku oraz dokładnie prostopadle do tego kierunku? b) Jakiej zmianie ulega energia kinetyczna pojazdu w każdym z tych przypadków? Przyjmij, że masa wyrzuconych przez silniki gazów spalinyowych jest znikomo mała w porównaniu z masą statku.

19. Piłkarz wybija z rzutu wolnego piłkę o masie 0,45 kg. But piłkarza styka się z piłką przez  $3 \cdot 10^{-3}$  s, działając na nią w tym czasie siłą daną wyrażeniem:

$$F(t) = [(6 \cdot 10^6)t - (2 \cdot 10^9)t^2] \text{ N,}$$

gdzie czas  $t$  z przedziału  $0 \leq t \leq 3 \cdot 10^{-3}$  s jest wyrażony w sekundach. Wyznacz wartości: a) popędu siły działającej na piłkę w czasie wykopu, b) średniej siły działającej na piłkę ze strony buta piłkarza w czasie ich stykania się ze sobą, c) maksymalnej siły działającej na piłkę ze strony buta piłkarza w czasie ich stykania się ze sobą, d) prędkości piłki zaraz po oderwaniu się jej od buta piłkarza.

#### 10.4. Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze

20. Pocisk o masie 5,2 g poruszający się z prędkością 672 m/s uderza w drewniany klocek o masie 700 g spoczywający na podłożu, po którym może się poruszać bez tarcia. Pocisk przebija klocek i po wyjściu z niego porusza się w tym samym kierunku, lecz z prędkością zmniejszoną do wartości 428 m/s. a) Jaka prędkość została przy tym nadana klocekowi? b) Z jaką prędkością porusza się środek masy układu pocisk-klocek?

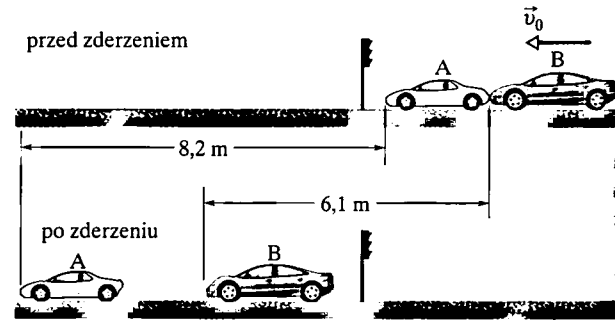
21. Sanie w postaci skrzynki zaopatrzonej w płoży ślizgają się bez tarcia po lodzie z prędkością 9 m/s. W pewnej chwili do skrzynki zostaje z góry wrzucona paczka o masie 12 kg. Z jaką prędkością poruszają się teraz sanie?

22. Pocisk o masie 10 g uderza w wahadło balistyczne o masie 2 kg i grzęźnie w nim, w wyniku czego środek masy wahadła wznosi się w pionie o 12 cm. Oblicz wartość prędkości początkowej pocisku.

23. Uważa się, że krater w Arizonie (rys. 10.1a) powstał w wyniku uderzenia meteoroidu w Ziemię przed mniej więcej 20 tysiącami lat. Szacuje się, że meteoroid ten miał masę około  $5 \cdot 10^{10}$  kg i prędkość około 7200 m/s. Jaką prędkość nadałby Ziemi taki meteoroid w zderzeniu czołowym?

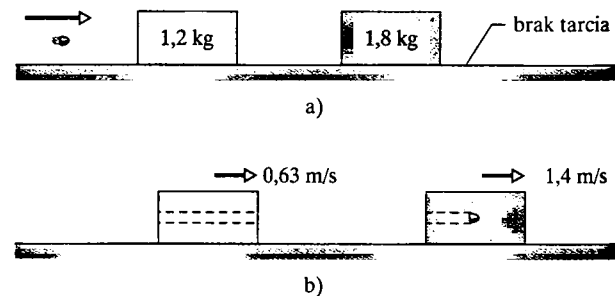
24. Pocisk o masie 4,5 g uderza poziomo w klocek drewniany o masie 2,4 kg spoczywający na poziomym podłożu i grzęźnie w nim. Współczynnik tarcia kinetycznego między klokiem a podłożem wynosi 0,2. W wyniku uderzenia pocisku klocek przesuwają się po podłożu o 1,8 m (nie obracając się). a) Wyznacz prędkość kloca w chwili, gdy pocisk przestaje się poruszać względem niego. b) Wyznacz prędkość początkową pocisku.

25. Dwa samochody A i B ślizgają się po oblodzonej jezdni, starając się zatrzymać przed czerwonym światłem na skrzyżowaniu ulic. Masa samochodu A wynosi 1100 kg, a masa samochodu B jest równa 1400 kg. Współczynnik tarcia kinetycznego między zablokowanymi kołami każdego z samochodów a jezdnią wynosi 0,13. Samochodowi A udaje się zatrzymać przed sygnalizatorem, a samochodowi B nie udaje się to i uderza on z tyłu w samochód A. Po zderzeniu samochód A przejeżdża po lodzie 8,2 m, a samochód B — 6,1 m, po czym obydwaj się zatrzymują (patrz rysunek 10.29). Przez cały czas hamulce obydwu samochodów są zablokowane. Na podstawie dróg przebytych przez każdy z samochodów od chwili ich zderzenia wyznacz prędkość: a) samochodu A, b) samochodu B tuż po ich zderzeniu się ze sobą. c) Korzystając z zasady zachowania pędu wyznacz prędkość, jaką miał samochód B w chwili uderzenia w samochód A. Dlaczego skorzystanie tu z zasady zachowania pędu można uważać za dyskusyjne?



Rys. 10.29. Zadanie 25

26. Jak pokazano na rysunku 10.30a, pocisk o masie 3,5 g uderza w klocek o masie 1,2 kg, przebija go, uderza w drugi klocek o masie 1,8 kg, i grzęźnie w nim. Klocki pozostające początkowo w spoczynku na podłożu, po którym mogą się poruszać bez tarcia uzyskują przy tym prędkość, równą odpowiednio 0,63 m/s i 1,4 m/s (rys. 10.30b). Pomiń masę materiału wybitego przez pocisk z pierwszego klocka i wyznacz: a) prędkość pocisku tuż po wyjściu z pierwszego klocka, b) prędkość początkową pocisku.



Rys. 10.30. Zadanie 26

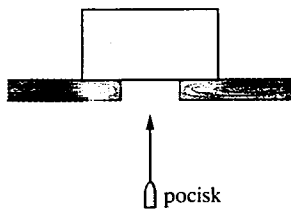
27. Pudełko umieszczono na wadze wyskalowanej w jednostkach masy, którą wytarowano tak, aby wskazywała zero, gdy pudełko

jest puste. Następnie do pudełka wrzucano kulki kamienne z wysokości  $h$  nad dnem pudełka, z częstością  $R$  kulek na sekundę. Każda z kulek miała masę  $m$ . a) Wyznacz wskazanie wagi po czasie  $t$  od początku wsypywania kulek, zakładając, że zderzenia kulek z pudełkiem były całkowicie niesprężyste. b) Wykonaj obliczenia dla  $R = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $h = 7.6 \text{ m}$ ,  $m = 4.5 \text{ g}$  oraz  $t = 10 \text{ s}$ .

28. Klocek o masie  $5 \text{ kg}$  i prędkości  $3 \text{ m/s}$  zderza się z klokiem o masie  $10 \text{ kg}$  poruszającym się w tym samym kierunku z prędkością  $2 \text{ m/s}$ . Po zderzeniu klocek o masie  $10 \text{ kg}$  porusza się z prędkością  $2.5 \text{ m/s}$  w tym samym kierunku, co przed zderzeniem. a) Ile wynosi tuż po zderzeniu prędkość klocka o masie  $5 \text{ kg}$ ? b) O ile zmieniła się całkowita energia kinetyczna układu obydwu klocek w wyniku ich zderzenia? c) Załóż następnie, że prędkość klocka o masie  $10 \text{ kg}$  po zderzeniu wynosiła  $4 \text{ m/s}$ . Ile wynosiła w tym przypadku zmiana energii kinetycznej układu klocek? d) Uzasadnij wynik otrzymany w punkcie (c). ilw

29. Wagon towarowy o masie  $3,18 \cdot 10^4 \text{ kg}$  zderza się ze znajdującym się początkowo w spoczynku wagonem mieszkalnym. Po zderzeniu poruszają się one razem, a 27% początkowej energii kinetycznej zamienia się na energię termiczną, akustyczną, ruchu drgającego itp. Wyznacz masę wagonu mieszkalnego. www

30. Pocisk o masie  $10 \text{ g}$  poruszający się pionowo do góry z prędkością  $1000 \text{ m/s}$  uderza w spoczywający początkowo klocek o masie  $5 \text{ kg}$ , przebija go i po wyjściu z niego porusza się nadal pionowo do góry, lecz teraz z prędkością  $400 \text{ m/s}$  (rys. 10.31). Oblicz maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się klocek, licząc od jego położenia początkowego?



Rys. 10.31. Zadanie 30

31. Jak pokazano na rysunku 10.32, kulka o masie  $m_1$  wpada z prędkością  $v_{\text{pocz}}$  w luźną sprężynową, znajdującą się początkowo w spoczynku na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia. Kulka zostaje uwięziona w luźnej, w położeniu największego ściśnięcia sprężyny. Przyjmij, że wzrost energii termicznej w wyniku tarcia kulki o ściany lufy jest znikomo mały. a) Ile wynosi prędkość wyrzutni sprężynowej po zatrzymaniu się kulki w lufie? b) Jaka część początkowej energii kinetycznej kulki zamienia się w energię sprężystości sprężyny?

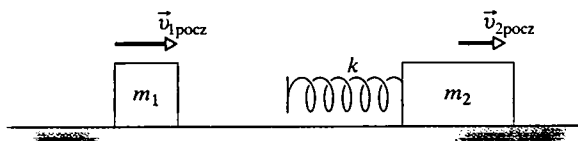


Rys. 10.32. Zadanie 31

32. Podręcznik fizyki o masie  $4 \text{ kg}$  i podręcznik matematyki o masie  $6 \text{ kg}$  są ze sobą połączone sprężyną i spoczywają na poziomej powierzchni, po której mogą poruszać się bez tarcia. Sprężyna ma stałą sprężystości równą  $8000 \text{ N/m}$ . Następnie książki zostają

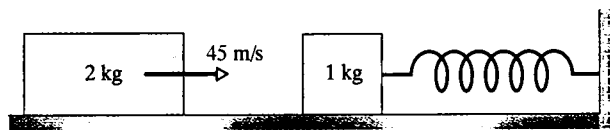
zbliżone do siebie, czemu towarzyszy ściśnięcie sprężyny, a potem puszczone swobodnie, gdy pozostają w spoczynku. W chwili, gdy sprężyna powraca do położenia, w którym ma długość odpowiadającą brakowi odkształcenia, podręcznik matematyki porusza się z prędkością  $4 \text{ m/s}$ . Ile wynosi energia potencjalna sprężystości sprężyny w chwili jej największego ściśnięcia?

33. Klocek o masie  $m_1 = 2 \text{ kg}$  ślizga się bez tarcia po stole z prędkością  $10 \text{ m/s}$ , a przed nim znajduje się klocek o masie  $m_2 = 5 \text{ kg}$  poruszający się w tym samym kierunku z prędkością  $3 \text{ m/s}$ . Do klocka o masie  $m_2$  przymocowana jest od strony klocka o masie  $m_1$  sprężyna o stałej sprężystości  $k = 1120 \text{ N/m}$ , jak pokazano na rysunku 10.33. Wyznacz maksymalne ściśnięcie sprężyny w trakcie zderzenia klocek. Wskazówka: W chwili maksymalnego ściśnięcia sprężyny obydwie klocki poruszają się razem; wyznacz ich prędkość zauważając, że w tej fazie ich zderzenie jest całkowicie niesprężyste. ilw



Rys. 10.33. Zadanie 33

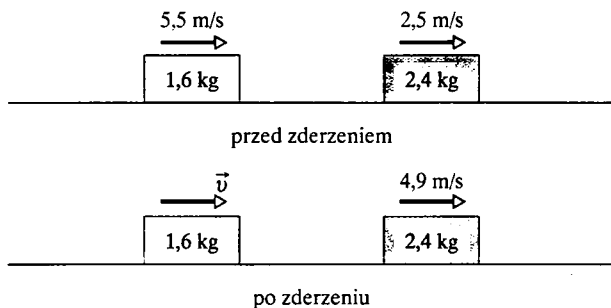
34. Klocek o masie  $1 \text{ kg}$  znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia. Klocek ten jest przymocowany do jednego końca sprężyny o stałej sprężystości  $k = 200 \text{ N/m}$ . Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a sprężyna jest nieodkształcona (rys. 10.34). W pewnej chwili z klokiem tym zderza się drugi klocek o masie  $2 \text{ kg}$ , poruszający się z prędkością  $4 \text{ m/s}$ . Wyznacz maksymalne ściśnięcie sprężyny odpowiadające chwili, w której prędkość klocek jest równa zero, jeśli w trakcie zderzenia w jednym wymiarze klocki poruszają się razem.



Rys. 10.34. Zadanie 34

## 10.5. Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze

35. Na rysunku 10.35 przedstawiono dwa klocki ślizgające się po podłożu bez tarcia oraz ich masy i prędkości. a) Wyznacz prędkość  $\bar{v}$ , jaką ma po zderzeniu klocek o masie  $1,6 \text{ kg}$ . b) Czy zderzenie klocek jest sprężyste? c) Czy prędkość  $\bar{v}$  klocka o masie  $1,6 \text{ kg}$  mogłaby mieć kierunek zaznaczony na rysunku, gdyby prędkość początkowa klocka o masie  $2,4 \text{ kg}$  miała kierunek przeciwny do zaznaczonego na rysunku?

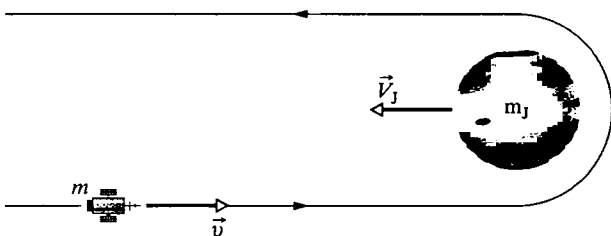


Rys. 10.35. Zadanie 35

36. Elektron doznaje zderzenia sprężystego w jednym wymiarze z nieruchomym początkowo atomem wodoru. Jaki procent początkowej energii kinetycznej elektronu zostaje zamieniony na energię kinetyczną atomu wodoru (masa atomu wodoru jest 1840 razy większa od masy elektronu)?

37. Wózek o masie 340 g poruszający się bez tarcia po liniowym torze z poduszką powietrzną z prędkością początkową 1,2 m/s ulega zderzeniu sprężystemu z nieruchomym początkowo wózkiem o nieznannej masie. Po zderzeniu pierwszy wózek porusza się w tym samym kierunku co początkowo, z prędkością o wartości 0,66 m/s. a) Wyznacz masę drugiego wózka. b) Jaką prędkość ma on po zderzeniu? c) Ile wynosi prędkość środka masy układu tych dwóch wózków?

38. Pojazd kosmiczny *Voyager 2* (o masie  $m$  i prędkości  $v$  względem Słońca) zbliża się do Jowisza (o masie  $m_J$  i prędkości  $V_J$  względem Słońca), jak pokazano na rysunku 10.36. Pojazd okrąża planetę i oddala się od niej w kierunku, z którego nadleciał. Wyznacz prędkość pojazdu (względem Słońca) po tym manewrze, który można rozpatrywać jako zderzenie. Przyjmij, że  $v = 12$  km/s, a  $V_J = 13$  km/s (prędkość orbitalna Jowisza). Masa Jowisza jest znacznie większa od masy pojazdu ( $m_J \gg m$ ).

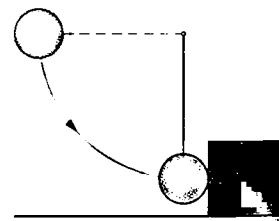


Rys. 10.36. Zadanie 38

39. Cząstka  $\alpha$  (o masie 4 u) ulega czołowemu zderzeniu sprężystemu z jądrem złota (o masie 197 u), pozostającym początkowo w spoczynku. Jaki procent swej początkowej energii kinetycznej traci przy tym zderzeniu cząstka  $\alpha$ ? Symbol  $u$  oznacza atomową jednostkę masy. ilw

40. Kula stalowa o masie 0,5 kg jest przymocowana do liny o długości 70 cm, nieruchomej na drugim końcu. Kula zostaje puszczona swobodnie, gdy lina jest pozioma (rys. 10.37).

W najniższym punkcie toru swego ruchu kula uderza w nieruchomy klocek stalowy o masie 2,5 kg, spoczywający na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia. Zderzenie jest sprężyste. Wyznacz prędkość: a) kuli, b) klocka tuż po zderzeniu.



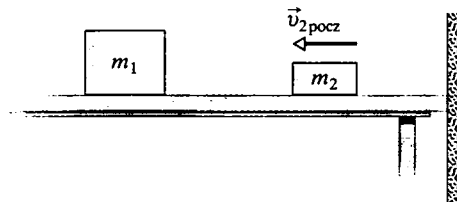
Rys. 10.37. Zadanie 40

41. Ciało o masie 2 kg zderza się z innym ciałem, które przed zderzeniem znajdowało się w spoczynku i po zderzeniu porusza się w tym samym kierunku z prędkością czterokrotnie mniejszą od swej prędkości początkowej. a) Wyznacz masę drugiego ciała. b) Wyznacz prędkość środka masy tych ciał, jeśli prędkość początkowa ciała o masie 2 kg wynosi 4 m/s. www

42. Przeanalizuj układ dwóch kul, którego dotyczył przykład 10.4. Załóż, że kula 1 ma masę 50 g i wysokość początkową 9 cm, a kula 2 ma masę 85 g. Wyznacz największą wysokość po zderzeniu: a) kuli 1, b) kuli 2. Następnie wyznacz największą wysokość: c) kuli 1, d) kuli 2 po ich kolejnym zderzeniu sprężystym. Wskazówka: Nie zaokrąglaj otrzymanych wartości.

43. Dwie kule tytanowe zbliżają się do siebie czołowo z jednakowymi prędkościami i zderzają się sprężystie. Jedna z kul, której masa wynosi 300 g jest po zderzeniu nieruchoma. a) Wyznacz masę drugiej kuli. b) Wyznacz prędkość środka masy tych kul, jeśli ich prędkości początkowe (o takiej samej wartości) wynoszą 2 m/s.

44. Jak pokazano na rysunku 10.38, klocek 1 o masie  $m_1$  pozostaje w spoczynku na długim stole, na końcu którego znajduje się pionowa ściana. Między tym klokiem a ścianą umieszczono drugi klocek o masie  $m_2$ , który następnie wprowadzono w ruch w lewą stronę, tzn. w kierunku klocka 1, ze stałą prędkością  $v_{2pocz}$ . Jaką musi być masa  $m_2$  (w jednostkach masy  $m_1$ ), aby po jednym zderzeniu klocka 2 z klockiem 1 i jego jednym zderzeniu ze ścianą obydwa klocki poruszały się z jednakowymi prędkościami? Załóż, że obydwa klocki ślizgają się po stole bez tarcia, wszystkie zderzenia są sprężyste, a ściana ma nieskończoną masę.



Rys. 10.38. Zadanie 44

45. Małą piłkę o masie  $m_1$  ustawiono nad większą piłką o masie  $m_2$  (w niewielkiej odległości od niej, jak na rysunku 10.23a), po czym obie piłki jednocześnie puszczono swobodnie z wysokości

$h$  nad podłogą (wysokość ta jest znacznie większa od promieni obydwu piłek). a) Jaki musi być stosunek mas  $m_1/m_2$ , aby po zderzeniu sprężystym dużej piłki z podłogą, a następnie zderzeniu sprężystym obydwu piłek duża piłka miała prędkość równą zeru? Powinieneś otrzymać w przybliżeniu stosunek mas piłki tenisowej i piłki do koszykówki, jak w pytaniu 8. b) Na jaką największą wysokość wzniesie się potem mniejsza piłka?

## 10.6. Zderzenia w dwóch wymiarach

46. Dwa ciała A i B o jednakowych masach równych 2 kg zderzają się ze sobą. Ich prędkości przed zderzeniem wynoszą:  $\vec{v}_A = 15\hat{i} + 30\hat{j}$  i  $\vec{v}_B = -10\hat{i} + 5\hat{j}$ . Po zderzeniu:  $\vec{v}'_A = -5\hat{i} + 20\hat{j}$  (wszystkie prędkości wyrażone są w metrach na sekundę). a) Wyznacz prędkość końcową ciała B. b) Wyznacz zysk lub stratę energii kinetycznej w tym zderzeniu.

47. Cząstka  $\alpha$  zderza się z nieruchomym początkowo jądrem tlenu i zostaje rozproszona pod kątem  $64^\circ$  względem kierunku jej padania. Jądro doznaje odrzutu pod kątem  $51^\circ$ , w przeciwną stronę, niż zostaje rozproszona cząstka. Prędkość jądra po zderzeniu ma wartość  $1,2 \cdot 10^5$  m/s. Wyznacz: a) prędkość końcową, b) prędkość początkową cząstki  $\alpha$  (masa cząstki  $\alpha$  jest równa 4 u, a masa jądra tlenu — 16 u, gdzie u jest atomową jednostką masy). ilw

48. Proton o prędkości 500 m/s zderza się sprężysto z innym protonem, pozostającym początkowo w spoczynku. Tory protonów po zderzeniu są prostopadłe do siebie, a tor protonu, który przed zderzeniem się poruszał, tworzy kąt  $60^\circ$  z kierunkiem jego prędkości początkowej. Jaka wartość ma po zderzeniu prędkość: a) protonu, który był przed zderzeniem nieruchomy, b) protonu, który był przed zderzeniem w ruchu?

49. Kula bilardowa uderzona kijem przez gracza zderza się następnie z inną kulą o takiej samej masie, pozostającą początkowo w bezruchu. Pierwsza kula porusza się po zderzeniu z prędkością 3,5 m/s w kierunku tworzącym kąt  $22^\circ$  z kierunkiem jej ruchu przed zderzeniem, a druga kula ma prędkość 2 m/s. a) Jaki kąt tworzy kierunek ruchu drugiej kuli z kierunkiem ruchu pierwszej kuli przed zderzeniem? b) Jaka prędkość miała pierwsza kula przed zderzeniem? c) Czy energia kinetyczna (środek masy układu tych kul — nie rozważaj ruchu obrotowego kul) jest zachowana w tym zderzeniu?

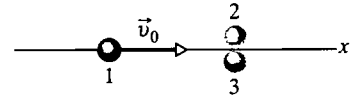
50. Dwie kule A i B, których masy są różne od siebie, ale żadnej z nich nie znamy, zderzają się ze sobą. Przed zderzeniem kula A jest nieruchoma, a kula B ma prędkość o wartości  $v$ . Po zderzeniu kula B porusza się z prędkością o wartości  $v/2$  w kierunku prostopadłym do kierunku jej ruchu przed zderzeniem. a) W jakim kierunku porusza się po zderzeniu kula A? b) Wykaż, że na podstawie danych tego zadania nie można wyznaczyć prędkości kuli A po zderzeniu.

51. Stwierdzono, że dwa ciała o jednakowych masach i jednakowych wartościach prędkości początkowej poruszają się po ich

całkowicie niesprężystym zderzeniu z prędkościami o wartości równej połowie wartości ich prędkości przed zderzeniem. Wyznacz kąt między wektorami prędkości tych ciał przed zderzeniem.

52. Kula bilardowa poruszająca się z prędkością 2.2 m/s zderza się niecentralnie z taką samą kulą nieruchomą. Stwierdzono, że po zderzeniu jedna z nich porusza się z prędkością 1.1 m/s w kierunku tworzącym kąt  $60^\circ$  z kierunkiem ruchu pierwszej kuli przed zderzeniem. a) Ile wynosi prędkość drugiej kuli? b) Czy dane tego zadania dopuszczają możliwość, że zderzenie było niesprężyste?

53. Jak pokazano na rysunku 10.39, kula 1 poruszająca się z prędkością 10 m/s zderza się sprężysto z dwiema nieruchomymi kulami 2 i 3, których środki leżą na prostej prostopadłej do kierunku ruchu kuli 1. Kule 2 i 3 stykają się ze sobą w punkcie leżącym na prostej, wzdłuż której porusza się kula 1. Wszystkie kule są jednakowe, a ich ruch odbywa się bez tarcia. Jaka prędkość ma po zderzeniu: a) kula 2, b) kula 3, c) kula 1? *Wskazówka:* Ponieważ nie ma tarcia, to wszystkie popędy sił są skierowane wzdłuż prostej łączącej środki zderzających się kul, przechodzącej w chwili zderzenia przez punkt zetknięcia się kul.



Rys. 10.39. Zadanie 53

54. Dwójka dzieci ślizga się na zamrożonym stawie. Każde z nich ma masę 30 kg i prędkość 4 m/s. Dzieci zderzają się ze sobą i po zderzeniu poruszają się razem, gdyż łączą je ze sobą zapięcia rzepowe ich kurtek. Następnie dzieci wpadają na mężczyznę o masie 75 kg, poruszającego się z prędkością 2 m/s, który chwyta je w objęcia. Po tym zderzeniu cała trójka się nie porusza. Jaki kąt tworzyły ze sobą wektory początkowych prędkości obojga dzieci?

55. Wykaż, że jeśli w zderzeniu sprężystym z nieruchomym deuteronom neutron zostaje rozproszony pod kątem  $90^\circ$ , to traci on na rzecz deuteronu  $2/3$  swojej początkowej energii kinetycznej. Masa neutronu wynosi 1 u, a masa deuteronu — 2 u, gdzie u jest atomową jednostką masy.

## Zadania dodatkowe

56. Małe jaszczurki zwane bazylijskami potrafią biegać po powierzchni wody. W każdym kroku jaszczurka najpierw uderza stopą w wodę, a następnie wciska ją w wodę tak szybko, że nad stopą tworzy się pęcherz powietrza. Aby nie pokonywać siły oporu cieczy przy wyciąganiu stopy z wody, jaszczurka podnosi stopę, zanim woda wyprze znad niej powietrze. Aby jaszczurka nie wpadła do wody, w czasie pełnej fazy kontaktu jej stopy z wodą (złożonej z uderzenia w powierzchnię wody, pchnięcia stopy w dół i wysunięcia stopy z wody) średni popęd siły, działającej na jaszczurkę w górę, musi równoważyć popęd pochodzący od siły ciężkości. Załóż, że masa jaszczurki wynosi 90 g, masa każdej jej stopy jest równa 3 g, prędkość stopy w chwili uderzenia nią w wodę wynosi 1.5 m/s, a cała faza kontaktu stopy z wodą trwa 0,6 s. a) Jaka jest wartość popędu siły działającej na

jaszczurkę w czasie każdego jej kroku (załóż, że jest on skierowany pionowo w górę)? b) Ile wynosi w czasie każdej (trwającej 0,6 s) fazy kontaktu stopy jaszczurki z wodą skierowany w dół popęd siły, związany z siłą ciężkości? c) Która faza kroku jaszczurki, uderzenie stopą w wodę, czy pchnięcie stopy pod wodę, jest głównym czynnikiem, umożliwiającym jaszczurce utrzymanie się na powierzchni wody? A może znaczenie obydwu tych czynności jest mniej więcej jednakowe?

57. Tyranozaury wiedziały zapewne z doświadczenia, że nie powinny biegać zbyt szybko, z uwagi na niebezpieczeństwo potknięcia się, gdyż ich krótkie przedramiona nie byłyby wówczas w stanie zamortyzować upadku. Wyobraź sobie, że w czasie marszu tyranozaur potyka się i przewraca, przy czym jego środek masy spada swobodnie z wysokości 1,5 m, a następnie przemieszcza się w dół o dalsze 0,3 m przy ugięciu się ciała dinozaura i gruntu.

a) Jaka jest wartość średniej siły wyrażonej w jednostkach ciężaru tyranozaura, działającej w pionie na dinozaura w czasie jego zderzenia z ziemią (tzn. w czasie, gdy jego środek masy opada o 0,3 m)? Wyobraź sobie następnie, że tyranozaur biegnie z prędkością 19 m/s (czyli bardzo szybko), potyka się, upada, po czym ślizga się po powierzchni ziemi aż do zatrzymania się, a współczynnik tarcia kinetycznego między nim a gruntem wynosi 0,6. Przyjmij, że średnia siła działająca na tyranozaura w czasie zderzenia z ziemią i poślizgu jest równa wartości, obliczonej w punkcie (a). Wyznacz w przybliżeniu: b) wartość całkowitej średniej siły działającej na tyranozaura ze strony ziemi (jak poprzednio w jednostkach ciężaru dinozaura), c) drogę przebytą przez niego w czasie poślizgu. Wartości sił otrzymane w punktach (a) i (b) wskazują na to, że w czasie upadku dinozaura jego korpus doznałby poważnych obrażeń. Jeszcze większe byłyby przy upadku obrażenia zwierzęcia, który upada z jeszcze większej wysokości.

# 11 Obroty

Zawodnik mniejszy i słabszy, który zna prawa fizyki, może pokonać w džudo zawodnika większego i silniejszego, który tych praw nie zna. Widać to szczególnie wyraźnie na przykładzie klasycznego „rzutu przez biodro”, podczas którego zawodnik powoduje obrót przeciwnika wokół swego biodra i — jeśli rzut jest wykonany poprawnie — jego upadek na matę. Bez właściwego zastosowania praw fizyki taki rzut przeciwnika wymaga użycia znacznie większej siły, a zatem może się łatwo nie udać.

Na czym polega tu korzyść ze znajomości praw fizyki?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 11.1. Ruch postępowy a ruch obrotowy

Pełen wdzięku ruch łyżwiarzy figurowych umożliwia zilustrowanie dwóch rodzajów ruchu ciała. Na rysunku 11.1a przedstawiono łyżwiarzkę, ślizgającą się po lodzie wzdłuż linii prostej ze stałą prędkością. Jej ruch jest czystym ruchem postępowym. Na zdjęciu z rysunku 11.1b łyżwiarzka wykonuje piruet, czyli obraca się ze stałą szybkością wokół osi pionowej. Jest to czysty ruch obrotowy.

Dotychczas zajmowaliśmy się przede wszystkim ruchem postępowym wzdłuż linii prostej. Ruch obrotowy, o którym będziemy mówić w tym rozdziale to ruch jaki wykonują koła pojazdów, koła zębate, silniki, planety, wskazówki zegarów, wirniki silników odrzutowych i śmigła helikopterów.

## 11.2. Zmienne obrotowe

Chcemy opisać obrót ciała sztywnego wokół stałej osi. Ciało sztywne to ciało, które obraca się w taki sposób, że wszystkie jego części są związane ze sobą, dzięki czemu kształt ciała nie ulega zmianie. Termin **stała oś** oznacza, że obrót zachodzi wokół osi, której położenie nie zmienia się w czasie ruchu ciała. Nie będziemy zatem badać ruchu takich ciał jak Słońce, którego części (Słońce jest kulą gazu) nie obracają się razem. Nie będziemy się też zajmować na przykład ruchem kuli do kręgli w czasie jej ruchu wzdłuż toru kręgielni, gdyż obraca się ona wokół osi, która zmienia swoje położenie (ruch kuli do kręgli jest złożeniem ruchu obrotowego i postępowego).

Na rysunku 11.2 przedstawiono ciało sztywne o dowolnym kształcie, obracające się wokół stałej osi, którą będziemy nazywać **osią obrotu**. Każdy punkt tego ciała porusza się po okręgu, którego środek leży na osi obrotu i każdy punkt zakreśla w ustalonym czasie taki sam kąt. W ruchu postępowym każdy punkt ciała porusza się po linii prostej i doznaje w ustalonym czasie takiego samego **przemieszczenia liniowego** (wielokrotnie w tym rozdziale będziemy porównywać ruch obrotowy z postępowym).

Omówimy teraz po kolei odpowiedniki wielkości, związanych z ruchem postępowym — położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia — służące do opisu ruchu obrotowego.

### Położenie kątowe

Na rysunku 11.2 pokazano **linię odniesienia** prostopadłą do osi obrotu, związaną z ciałem i obracającą się wraz z nim. **Położeniem kątowym** tej linii nazywamy kąt, jaki tworzy ona z pewnym stałym kierunkiem, wybranym za kierunek o **zerowym położeniu kątowym**. Na rysunku 11.3 położenie kątowe  $\theta$  jest mierzone względem dodatniego kierunku osi  $x$ . Wiemy z geometrii, że:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{miara łukowa kąta}). \quad (11.1)$$

We wzorze tym  $s$  jest długością łuku okręgu, zawartego między osią  $x$  (wyznaczającą zerowe położenie kątowe) a linią odniesienia;  $r$  jest promieniem okręgu.



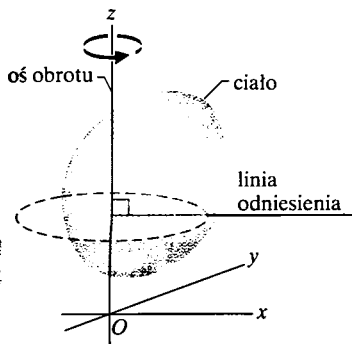
a)



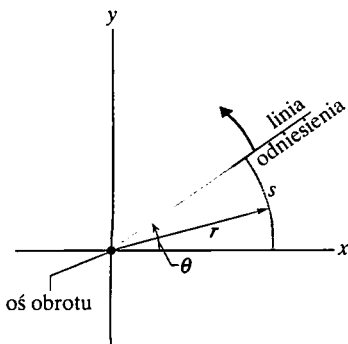
b)

Rys. 11.1. łyżwiarzka figurowa Michelle Kwan, poruszająca się: a) ruchem postępowym wzdłuż stałego kierunku, b) ruchem obrotowym wokół osi pionowej





Rys. 11.2. Ciało sztywne o dowolnym kształcie, obracające się wokół osi z układu współrzędnych. Linia odniesienia została wybrana w obrębie ciała dowolnie, z tym że jest prostopadła do osi obrotu. Jest ona związana z ciałem i obraca się wraz z nim



Rys. 11.3. Przekrój płaszczyzną  $xy$  obracającego się ciała z rysunku 11.2 (czyli jego „widok z góry”). Płaszczyzna przekroju jest prostopadła do osi obrotu, która jest teraz skierowana prostopadle do kartki, w twoim kierunku. Położenie ciała jest określone przez kąt  $\theta$ , jaki tworzy linia odniesienia z osią  $x$

Kąt jest tu mierzony w **radianach** (rad), a nie w stopniach, czy liczbie pełnych obrotów. Radian jest równy stosunkowi dwóch wielkości o wymiarze długości, jest zatem liczbą bezwymiarową. Obwód okręgu o promieniu  $r$  jest równy  $2\pi r$ , więc kąt pełny ma  $2\pi$  radianów:

$$1 \text{ pełny obrót} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad.} \quad (11.2)$$

czyli

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ pełnego obrotu.} \quad (11.3)$$

Kąt  $\theta$  nie przybiera znów wartości zero po każdym pełnym obrocie linii odniesienia wokół osi obrotu. Mówimy, że po dwóch pełnych obrotach linii odniesienia, od zerowego położenia kąтового, położenie kątowe  $\theta$  jest równe  $\theta = 4\pi$  rad.

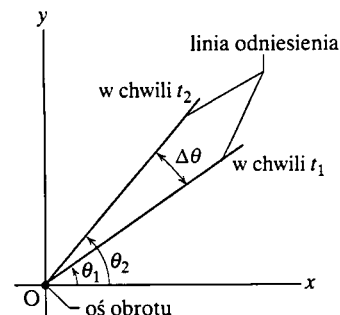
W przypadku ruchu postępowego wzdłuż osi  $x$  wiodliśmy wszystko o ruchu ciała, jeśli znaleźliśmy funkcję  $x(t)$ , wyrażającą zależność położenia ciała od czasu. Podobnie, w przypadku ruchu obrotowego pełna informacja o ruchu ciała jest zawarta w funkcji  $\theta(t)$ , czyli zależności położenia kąowego linii odniesienia ciała od czasu.

### Premieszczenie kątowe

Jeśli ciało z rysunku 11.3 obróci się wokół osi obrotu, jak na rysunku 11.4, czyli położenie kąowe jego linii odniesienia zmieni się z  $\theta_1$  na  $\theta_2$ , to **premieszczenie kąowe** ciała  $\Delta\theta$  wyniesie:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (11.4)$$

Ta definicja przemieszczenia kąowego odnosi się równie dobrze do ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*, gdyż te cząstki są ze sobą sztywno związane.



Rys. 11.4. Linia odniesienia ciała sztywnego z rysunków 11.2 i 11.3 ma w chwili  $t_1$  położenie kąowe  $\theta_1$ , a w pewnej późniejszej chwili  $t_2$  położenie kąowe  $\theta_2$ . Wielkość  $\Delta\theta$  ( $= \theta_2 - \theta_1$ ) jest przemieszczeniem kąowym ciała w przedziale czasu  $\Delta t$  ( $= t_2 - t_1$ ). Samo ciało sztywne nie zostało narysowane

W przypadku ruchu postępowego ciała wzdłuż osi  $x$  jego przemieszczenie  $\Delta x$  może być dodatnie lub ujemne, w zależności od tego, czy ciało porusza się w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi. Podobnie, przemieszczenie kąto- ciała może być dodatnie lub ujemne w zależności od tego, w którą stronę zachodzi jego obrót.

➤ Przesunięcie kątowe jest dodatnie, jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jest ujemne, jeśli obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Stwierdzenie, że „zegar jest ujemny” może ci pomóc w skutecznym zapamiętaniu tej reguły.

## Prędkość kątowa

Założmy (patrz rysunek 11.4), że położenie kątowe ciała w chwili  $t_1$  wynosi  $\theta_1$ , a w chwili  $t_2$  wynosi ono  $\theta_2$ . Średnią prędkość kątową ciała w przedziale czasu  $\Delta t$  od  $t_1$  do  $t_2$  definiujemy jako:

$$\omega_{sr} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (11.5)$$

przy czym  $\Delta\theta$  jest przemieszczeniem kątowym ciała w przedziale czasu  $\Delta t$  (mała litera grecka omega).

Prędkość kątowa (*chwilowa*), która będzie nam najbardziej przydatna, jest określona jako granica ilorazu w równaniu (11.5), przy  $\Delta t$  dążącym do zera. Zatem mamy:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11.6)$$

Jeśli znamy funkcję  $\theta(t)$ , to prędkość kątową  $\omega$  możemy obliczyć jako pochodną tej funkcji.

Wzory (11.5) i (11.6) odnoszą się zarówno do obracającego się ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*, gdyż te cząstki są ze sobą sztywno związane. Najczęściej stosowanymi jednostkami prędkości kątowej są radian na sekundę (rad/s) i obrót na sekundę. Jeszcze innej jednostki prędkości kątowej używano przez ponad trzydzieści lat istnienia muzyki rockowej: muzykę zapisywano wówczas na płytach winylowych, a do ich odtwarzania stosowano gramofony (adaptery), których talerz obracał się z prędkością „ $33\frac{1}{3}$  rpm” lub „45 rpm”, co oznacza  $33\frac{1}{3}$  lub 45 obrotów na minutę.

W przypadku ruchu postępowego cząstki wzdłuż osi  $x$  jej prędkość liniowa może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, czy cząstka ta porusza się w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi. Podobnie, prędkość kątowa  $\omega$  obracającego się ciała sztywnego może być dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (wtedy jest dodatnia), czy w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (wtedy jest ujemna — jak poprzednio: „zegar jest ujemny”). Wartość bezwzględną prędkości kątowej oznaczamy także literą  $\omega$ .

## Przyspieszenie kątowe

Jeśli prędkość kątowa obracającego się ciała nie jest stała, to ciało ma przyspieszenie kątowe. Załóżmy, że prędkość kątowa ciała wynosi  $\omega_1$  w chwili  $t_1$  i  $\omega_2$  w chwili  $t_2$ . Średnie przyspieszenie kątowe obracającego się ciała, w przedziale czasu od  $t_1$  do  $t_2$ , jest zdefiniowane jako:

$$\alpha_{sr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (11.7)$$

przy czym  $\Delta\omega$  jest zmianą prędkości kątowej ciała w przedziale czasu  $\Delta t$ . Przyspieszenie kątowe  $\alpha$  (chwilowe), które będzie nam najbardziej przydatne, jest określone jako granica ilorazu w równaniu (11.7) przy  $\Delta t$  dążącym do zera. Zatem mamy

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11.8)$$

Wzory (11.7) i (11.8) odnoszą się zarówno do obracającego się ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*. Najczęściej stosowanymi jednostkami przyspieszenia kątowego są radian na sekundę kwadrat ( $\text{rad/s}^2$ ) i obrót na sekundę kwadrat.

### Przykład 11.1

Krażek przedstawiony na rysunku 11.5a obraca się jak karuzela wokół osi, przechodzącej przez jego środek. Położenie kątowe  $\theta(t)$  jego linii odniesienia zależy od czasu, zgodnie z wyrażeniem:

$$\theta(t) = -1 - 0,6t + 0,25t^2, \quad (11.9)$$

przy czym  $t$  jest wyrażone w sekundach,  $\theta$  — w radianach, a zerowe położenie kątowe pokazano na rysunku.

a) Sporządź wykres położenia kątowego krażka jako funkcji czasu, w przedziale czasu od  $t = -3$  s do  $t = 6$  s. N szkicuj krażek i położenie kątowe jego linii odniesienia w chwilach  $t = -2$  s, 0 s i 4 s oraz w chwilach, dla których otrzymana krzywa przecina oś  $t$ .

#### ROZWIĄZANIE:

➡ Położenie kątowe krażka jest to położenie kątowe jego linii odniesienia  $\theta(t)$ , które zależy od czasu zgodnie z równaniem (11.9). Wobec tego musimy sporządzić wykres funkcji danej równaniem (11.9). Wynik przedstawiono na rysunku 11.5b.

Aby sporządzić rysunki krażka i jego linii odniesienia w określonej chwili, musimy wyznaczyć wartość  $\theta$  w tej chwili. W tym celu podstawiamy do wzoru (11.9) odpowiednią wartość czasu. Dla  $t = -2$  s otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -1 - (0,6)(-2) + (0,25)(-2)^2 = 1,2 \text{ rad} \\ &= 1,2 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 69^\circ. \end{aligned}$$

Wynik ten oznacza, że w chwili  $t = -2$  s linia odniesienia krażka

jest obrócona w stosunku do kierunku zerowego położenia kątowego o  $1,2$  rad, czyli  $69^\circ$ , w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przeciwnym, gdyż  $\theta$  jest dodatnie). To położenie kątowe linii odniesienia przedstawiono na szkicu 1 z rysunku 11.5a.

W taki sam sposób dla  $t = 0$  otrzymujemy  $\theta = -1$  rad =  $-57^\circ$ , co oznacza, że linia odniesienia krażka jest obrócona w stosunku do zerowego położenia kątowego o  $1$  rad, czyli  $57^\circ$ , w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co przedstawiono na szkicu 3. Dla  $t = 4$  s otrzymujemy  $\theta = 0,6$  rad =  $34^\circ$  (szkic 5). Wykonanie rysunków dla punktów przecięcia krzywej z osią  $t$  jest łatwe, bo wtedy  $\theta = 0$ , a więc w takiej chwili linia odniesienia pokrywa się chwilowo z kierunkiem zerowego położenia kątowego (szkice 2 i 4).

b) W jakiej chwili, którą oznaczymy przez  $t_{\min}$  funkcja  $\theta(t)$  przybiera wartość minimalną, widoczną na rysunku 11.5b? Ile wynosi ta najmniejsza wartość  $\theta$ ?

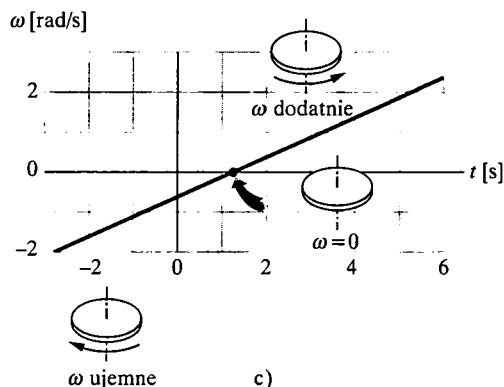
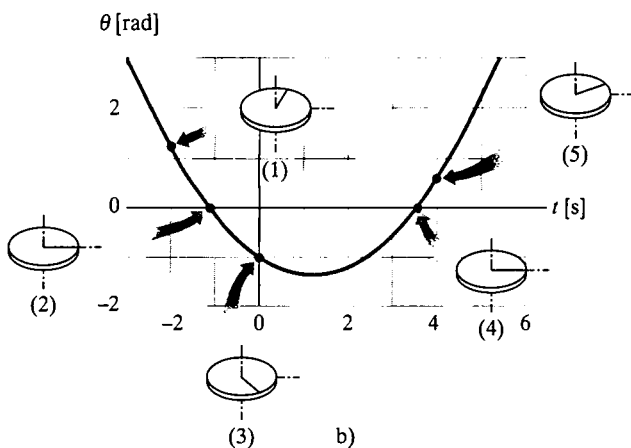
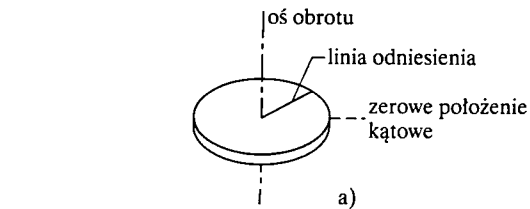
#### ROZWIĄZANIE:

➡ Aby wyznaczyć ekstremum funkcji (w naszym przypadku minimum), należy obliczyć pierwszą pochodną tej funkcji i przyrównać ją do zera. Pierwsza pochodna  $\theta(t)$  jest równa:

$$\frac{d\theta}{dt} = -0,6 + 0,5t. \quad (11.10)$$

Przyrównując ją do zera i rozwiązując otrzymane równanie względem  $t$ , znajdujemy czas odpowiadający minimum  $\theta(t)$ :

$$t_{\min} = 1,2 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 11.5. Przykład 11.1. a) Obracający się krążek. b) Wykres  $\theta(t)$  — położenia kąтового krążka jako funkcji czasu. Na pięciu małych rysunczkach przedstawiono położenie kątowe linii odniesienia krążka dla pięciu punktów krzywej  $\theta(t)$ . c) Wykres  $\omega(t)$  — prędkości kątowej krążka jako funkcji czasu. Dodatnia wartość  $\omega$  odpowiada obrotowi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jej wartość ujemna — obrotowi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara

Aby wyznaczyć minimalną wartość  $\theta$ , podstawiamy  $t_{\min}$  do równania (11.9) i otrzymujemy:

$$\theta = -1,36 \text{ rad} \approx -77,9^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta minimalna wartość  $\theta(t)$  (najniższy punkt krzywej z rysunku

11.5b) odpowiada *maksymalnemu* obrotowi krążka w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara względem zerowego położenia kątowego, nieco większemu niż na szkicu 3.

c) Sporządź wykres prędkości kątowej krążka  $\omega$ , jako funkcji czasu, w przedziale czasu od  $t = -3$  s do  $t = 6$  s. Naszkicuj krążek i wskaż kierunek jego obrotu oraz znak  $\omega$  w chwilach  $t = -2$  s i 4 s oraz w chwili  $t_{\min}$ .

ROZWIĄZANIE:

Prędkość kątowa  $\omega$  jest równa  $d\theta/dt$ . Dla zależności  $\theta(t)$  danej wzorem (11.6) obliczyliśmy już tę pochodną w równaniu (11.10). Mamy zatem:

$$\omega = -0,6 + 0,5t. \quad (11.11)$$

Wykres funkcji  $\omega(t)$  przedstawiono na rysunku 11.5c.

Aby naszkicować krążek w chwili  $t = -2$  s, podstawiamy tę wartość do wzoru (11.11) i otrzymujemy:

$$\omega = -1,6 \text{ rad/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Znak minus oznacza, że w chwili  $t = -2$  s krążek obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co zaznaczyliśmy na rysunku 11.5c na dolnym szkicu.

Podstawiając do wzoru (11.11)  $t = 4$  s, otrzymujemy:

$$\omega = 1,4 \text{ rad/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to prędkość dodatnia, a zatem w chwili  $t = 4$  s krążek obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (górny szkic na rysunku 11.5c).

Wiemy już, że w chwili  $t_{\min}$  mamy:  $d\theta/dt = 0$ , skąd wynika, że  $\omega = 0$ . Zatem w tej chwili, w której linia odniesienia krążka osiąga położenie, odpowiadające najmniejszej wartości  $\theta$  na rysunku 11.5b, prędkość kątowa krążka przybiera wartość zero, co pokazano na środkowym szkicu na rysunku 11.5c.

d) Korzystając z uzyskanych dotąd informacji, opisz ruch krążka w przedziale czasu od  $t = -3$  s do  $t = 6$  s.

ROZWIĄZANIE:

W pierwszej chwili, w której badamy ruch krążka, tzn. w chwili  $t = -3$  s, położenie kątowe krążka jest dodatnie i obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, lecz z coraz mniejszą prędkością. W chwili, gdy jego położenie kątowe jest równe  $\theta = -1,36$  rad prędkość kątowa krążka przybiera wartość zero, a następnie zaczyna się on obracać w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jego położenie kątowe staje się po pewnym czasie ponownie dodatnie.

**SPRAWDZIAN 1:** Krążek może się obracać wokół osi przechodzącej przez jego środek, jak na rysunku 11.5a. Które z podanych niżej par wartości jego kątowego położenia początkowego i końcowego odpowiadają ujemnemu przemieszczeniu kątowemu: a)  $-3$  rad,  $+5$  rad, b)  $-3$  rad,  $-7$  rad, c)  $7$  rad,  $-3$  rad?

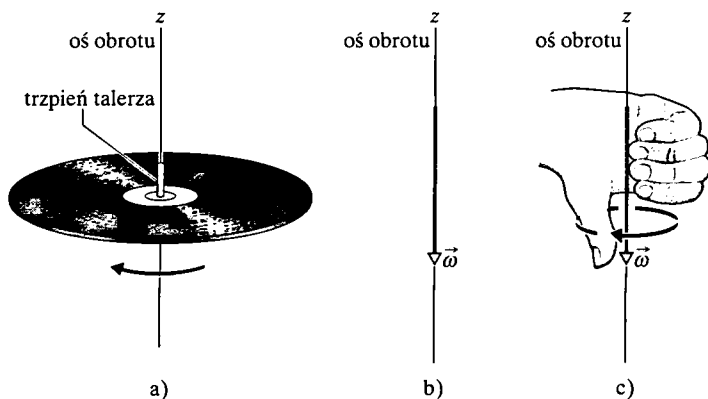
### 11.3. Czy wielkości kątowe są wektorami?

Przesunięcie, prędkość i przyspieszenie pojedynczej cząstki można opisać za pomocą wektorów. Jeśli jednak cząstka porusza się po linii prostej, to zapis wektorowy nie jest nam naprawdę potrzebny. Taka cząstka ma bowiem do wyboru jedynie dwa kierunki ruchu, do których rozróżnienia wystarczą nam znaki plus i minus.

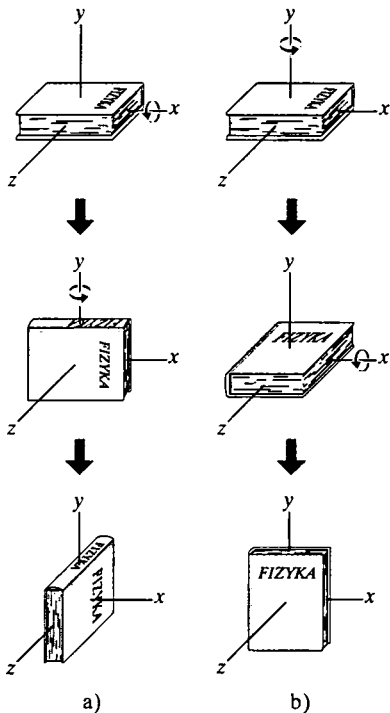
Podobnie ciało sztywne obracające się wokół stałej osi może obracać się względem tej osi jedynie w kierunku zgodnym lub przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a te kierunki możemy znów rozróżnić, korzystając ze znaków plus i minus. Nasuwa się jednak pytanie: czy przesunięcie, prędkość i przyspieszenie kątowe obracającego się ciała sztywnego można opisać za pomocą wektorów? Odpowiedź brzmi: tak, choć z jednym zastrzeżeniem, o którym powiemy za chwilę, gdy dojdziemy do przemieszczeń kątowych.

Rozważmy najpierw prędkość kątową. Na rysunku 11.6a przedstawiono płytę gramofonową, obracającą się na talerzu gramofonu. Ma ona stałą prędkość kątową  $\omega$  ( $= 33\frac{1}{3}$  obrotów na minutę) o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Tej prędkości kątowej możemy przypisać wektor prędkości kątowej  $\vec{\omega}$ , skierowany wzdłuż osi obrotu, jak na rysunku 11.6b. Robimy to tak: ustalamy długość wektora w pewnej dogodnej skali, na przykład przyjmując, że 1 cm odpowiada 10 obrotom na minutę, a następnie ustalamy kierunek wektora  $\vec{\omega}$ , korzystając z **reguły prawej dłoni**. W tym celu, jak pokazano na rysunku 11.6c, otaczamy palcami prawej ręki oś obrotu płyty tak, aby końce palców wskazywały *kierunek obrotu*. Odchylony kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora prędkości kątowej. Gdyby płyta obracała się w przeciwną stronę, reguła prawej dłoni wskazałaby, że wektor prędkości kątowej powinien być skierowany przeciwnie.

Nie jest łatwo przyzwyczać się do faktu, że wielkości kątowe są wektorami. Instynktownie czujemy, że coś powinno się poruszać *w kierunku* wektora. W tym przypadku nic takiego nie ma miejsca. Natomiast coś (ciało sztywne) obraca się *wokół* kierunku wektora. W czystym ruchu obrotowym wektor definiuje oś obrotu, a nie kierunek, w którym coś się porusza. Niemniej jednak, wektor ten daje informacje o ruchu obracającego się ciała. Ponadto spełnia on wszystkie prawa działań na wektorach omówione w rozdziale 3. Przyspieszenie kątowe  $\vec{\alpha}$  też jest wektorem i też spełnia te prawa działań.



Rys. 11.6. a) Płyta obracająca się wokół osi pionowej zgodnej z kierunkiem trzpienia talerza gramofonu. b) Prędkość kątową obracającej się płyty można opisać za pomocą wektora  $\vec{\omega}$ , leżącego na osi obrotu i skierowanego w dół, jak na rysunku. c) Ustaliliśmy, że kierunek wektora prędkości kątowej to kierunek w dół, korzystając z reguły prawej dłoni. Gdy palce zwiniętej prawej dłoni otaczają oś obrotu tak, że końce palców wskazują kierunek obrotu, odchylony kciuk wskazuje kierunek wektora  $\vec{\omega}$



Rys. 11.7. a) Książka zostaje poddana dwóm kolejnym obrotom o  $90^\circ$ , najpierw wokół osi  $x$  (poziomej), a potem wokół osi  $y$  (pionowej). b) Książka zostaje poddana tym samym dwóm obrotom, lecz w odwrotnej kolejności

W tym rozdziale będziemy zajmować się jedynie obrotami wokół stałej osi. W tych warunkach wielkości wektorowe nie będą nam potrzebne. Do oznaczenia kierunku prędkości kątowej  $\omega$  i przyspieszenia kątowego  $\alpha$  wystarczy nam ich znak: plus dla kierunku przeciwnego do kierunku ruchu wskazówek zegara oraz minus dla kierunku zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

A teraz zastrzeżenie, o którym wspomnieliśmy na początku tego paragrafu: *przemieszczeniom* kątowym (o ile nie są bardzo małe) *nie można* przypisać wektorów. Dlaczego? Przecież bez trudu możemy im przypisać wartość i kierunek, tak samo jak określiliśmy wektor prędkości kątowej na rysunku 11.6. To jednak nie wystarczy — aby pewną wielkość można było uważać za wektor, muszą być dla niej *ponadto* spełnione prawa działań na wektorach, które między innymi mówią, że suma dwóch wektorów nie zależy od kolejności, w jakiej je do siebie dodajemy. Przesunięcia kątowe nie spełniają tego kryterium.

Pokażemy to na przykładzie przedstawionym na rysunku 11.7. Książka, która jest początkowo w pozycji poziomej zostaje poddana dwóm przesunięciom kątowym o  $90^\circ$ , najpierw w kolejności z rysunku 11.7a, a następnie w kolejności z rysunku 11.7b. Choć przesunięcia kątowe są w obydwu przypadkach takie same, to ich kolejność jest inna i ustawienia końcowe książki są różne. Suma dwóch przesunięć kątowych zależy zatem od kolejności ich dodawania, a więc nie można ich opisać za pomocą wektorów.

## 11.4. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

Przy omawianiu ruchu postępowego ruch *ze stałym przyspieszeniem liniowym* (na przykład ruch spadającego ciała) traktowaliśmy jako ważny przypadek szczególny. W tabeli 2.1 przedstawiliśmy równania opisujące taki ruch.

Podobnie postąpimy omawiając ruch wyłącznie obrotowy: obrót *ze stałym przyspieszeniem kątowym* jest też ważnym przypadkiem szczególnym, opisywanym przez analogiczny zestaw równań. Nie będziemy ich tu wyprowadzać, lecz po prostu wypiszemy je przez analogię do odpowiednich równań dla ruchu postępowego, zastępując w nich wielkości liniowe wielkościami kątowymi. Wynik przedstawiono w tabeli 11.1, w której podano obydwa zestawy równań (równania (2.11) i (2.15)–(2.18) oraz (11.12)–(11.16)).

Przypomnij sobie, że równania (2.11) i (2.15) są podstawowymi równaniami ruchu postępowego ze stałym przyspieszeniem — pozostałe można z nich wyprowadzić. Podobnie równania (11.12) i (11.13) są podstawowymi równaniami ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym — pozostałe można z nich wyprowadzić. Aby rozwiązać proste zadanie dotyczące ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym, wystarczy zwykle znaleźć stosowne równanie w zestawie z tabeli 11.1 (*jeśli* oczywiście jest ona pod ręką). Należy wybrać równanie, w którym jedyną wielkością nieznaną jest wielkość szukana w zadaniu. Jeszcze wygodniej jest pamiętać tylko równania (11.12) oraz (11.13) i rozwiązywać je jako układ równań, gdy zachodzi taka potrzeba. Takie podejście przedstawimy w przykładzie 11.3.

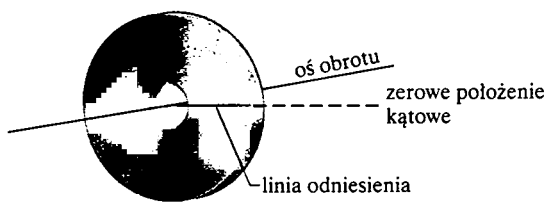
**SPRAWDZIAN 2:** Rozważ cztery przypadki, w których położenie katowe obracającego się ciała jest dane wyrażeniami: a)  $\theta = 3t - 4$ , b)  $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$ , c)  $\theta = 2/t^2 - 4/t$ , d)  $\theta = 5t^2 - 3$ . W którym z tych przypadków można zastosować równania dla wielkości katowych z tabeli 11.1?

Tabela 11.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem liniowym oraz ze stałym przyspieszeniem kątowym

Numer równania	Równanie (ruch postępowy)	„Brakująca” wielkość	Równanie (ruch obrotowy)	Numer równania
(2.11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(11.12)
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$v$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(11.13)
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(11.14)
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(11.15)
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2} a t^2$	$v_0$	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$	(11.16)

### Przykład 11.2

Tarcza szlifierska (rys. 11.8) obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym  $\alpha = 0,35 \text{ rad/s}^2$ . W chwili  $t = 0$  jej prędkość katowa wynosi  $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$ , a linia odniesienia jest pozioma, co odpowiada położeniu katowemu  $\theta_0 = 0$ .



Rys. 11.8. Przykład 11.2. Tarcza szlifierska. W chwili  $t = 0$  linia odniesienia (którą zaznaczyliśmy w wyobraźni na tarczy) jest pozioma

a) Po jakim czasie od chwili  $t = 0$  linia odniesienia znajdzie się w położeniu  $\theta$ , odpowiadającym 5 pełnym obrotom?

**ROZWIĄZANIE:**

➡ Ruch tarczy odbywa się ze stałym przyspieszeniem kątowym, a zatem możemy skorzystać z równań ruchu obrotowego z tabeli 11.1. Wybieramy równanie (11.13):

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

gdź jedyną wielkością niewiadomą jest w nim szukany przez nas czas  $t$ . Podstawiając do niego wartości dane i przyjmując, że:  $\theta_0 = 0$  oraz  $\theta = 5$  pełnych obrotów  $= 10\pi \text{ rad}$ , otrzymujemy:

$$10\pi \text{ rad} = (-4,6 \text{ rad/s})t + \frac{1}{2}(0,35 \text{ rad/s}^2)t^2$$

(w celu uzyskania jednolitych jednostek zamieniliśmy 5 pełnych obrotów na  $10\pi \text{ rad}$ ). Rozwiązaniem równania kwadratowego jest:

$$t = 32 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Opisz ruch obrotowy tarczy od chwili  $t=0$  do chwili  $t=32 \text{ s}$ .

**ROZWIĄZANIE:**

Tarcza obraca się w chwili początkowej w kierunku ujemnym (tzn. zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara), z prędkością katową  $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$ , lecz jej przyspieszenie katowe  $\alpha$  jest dodatnie. W wyniku tego, że znaki prędkości katowej i przyspieszenia katowego są przeciwne, tarcza porusza się w kierunku ujemnym coraz wolniej, aż do osiągnięcia prędkości katowej równej zero, po czym zaczyna obracać się w kierunku dodatnim. W pewnej chwili linia odniesienia przyjmuje znów położenie  $\theta = 0$ , a do chwili  $t = 32 \text{ s}$  tarcza wykonuje jeszcze dalsze 5 obrotów w kierunku dodatnim.

c) W jakiej chwili  $t$  tarcza osiąga prędkość katową równą zero?

**ROZWIĄZANIE:**

Ponownie sięgamy do tabeli z równaniami dla ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym, aby wybrać z niej równanie, które nie zawiera jedynie wielkości szukanej. Musimy jednak pamiętać o tym, że: ➡ równanie to powinno zawierać także zmienną  $\omega$ , abyśmy mogli przyrównać ją do zera i rozwiązać otrzymane równanie względem  $t$ . Warunki te spełnia równanie (11.12), z którego otrzymujemy:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{(0) - (-4,6 \text{ rad/s})}{(0,35 \text{ rad/s}^2)} = 13 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 11.3

Wyobraź sobie, że kierujesz Rotorem (obracającym się walcem, omówionym w przykładzie 6.8) i spostrzegasz, że jeden z pasażerów zdradza oznaki paniki (wskazujące na to, że znacznie bardziej odpowiada mu ruch postępowy niż obrotowy). Wobec tego zmniejszasz prędkość kątową walca z 3,4 rad/s do 2 rad/s w ciągu 20 pełnych obrotów walca, w czasie których walec obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym.

a) Ile wynosi przyspieszenie kątowe podczas zmniejszania prędkości kątowej walca?

### ROZWIĄZANIE:

Założmy, że obrót walca zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara i że hamowanie walca rozpoczyna się w chwili  $t = 0$ , gdy jego położenie kątowe jest równe  $\theta_0$ . Przyspieszenie kątowe jest stałe, a więc możemy powiązać przyspieszenie kątowe walca z jego prędkością kątową i przemieszczeniem kątowym za pomocą podstawowych równań ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym, czyli równań (11.12) i (11.13). Początkowa prędkość kątowa jest równa  $\omega_0 = 3,4$  rad/s, przemieszczenie kątowe wynosi  $\theta - \theta_0 = 20$  obrotów, a prędkość kątowa na końcu tego przemieszczenia jest równa  $\omega = 2$  rad/s. Nie znamy jednak przyspieszenia kątowego  $\alpha$  ani czasu  $t$ , a obie te wielkości występują w obydwu podstawowych równaniach ruchu.

W celu wyeliminowania zmiennej  $t$  wyznaczamy ją z równania (11.12), co daje:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

a następnie podstawiamy to wyrażenie do wzoru (11.13). Otrzymujemy w ten sposób równanie:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2.$$

Rozwiązując je względem  $\alpha$ , podstawiając wartości liczbowe danych i zamieniając 20 obrotów na 125,7 rad, dostajemy:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2 \text{ rad/s})^2 - (3,4 \text{ rad/s})^2}{2(125,7 \text{ rad})} = -0,0301 \text{ rad/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile czasu trwało to zmniejszenie prędkości kątowej walca?

### ROZWIĄZANIE:

Teraz, gdy znamy już wartość  $\alpha$ , możemy wyznaczyć  $t$  z równania (11.12), co daje:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{(2 \text{ rad/s}) - (3,4 \text{ rad/s})}{(-0,0301 \text{ rad/s}^2)} = 46,5 \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

To zadanie jest w istocie rzeczą kątową wersją przykładu 2.5. Wartości danych i symbole są inne, lecz metoda rozwiązania jest w obydwu zadaniach taka sama.

## 11.5. Związek zmiennych liniowych z kątowymi

W paragrafie 4.7 omówiliśmy ruch jednostajny po okręgu, w którym cząstka porusza się z prędkością o stałej wartości bezwzględnej  $v$  po okręgu, a więc wokół pewnej osi. Gdy ciało sztywne, na przykład karuzela, obraca się wokół osi, każda jego cząstka zatacza okrąg wokół tej osi. Ciało jest sztywne, a więc każda z tych cząstek dokonuje pełnego obiegu w takim samym czasie, tzn. każda porusza się z taką samą prędkością kątową  $\omega$ .

Jednak im dalej cząstka jest od osi obrotu, tym większy jest obwód zakreślonego przez nią okręgu, a zatem tym większa musi być jej prędkość liniowa  $v$ . Możesz to łatwo zauważyć na karuzeli. Niezależnie od tego, jak daleko jesteś od osi obrotu, poruszasz się z taką samą prędkością kątową  $\omega$ , lecz twoja prędkość liniowa wyraźnie wzrasta, jeśli przesuwasz się w stronę zewnętrznego skraju karuzeli.

Często potrzebny jest związek wielkości liniowych  $s$ ,  $v$  i  $a$  dla pewnego punktu obracającego się ciała z wielkościami kątowymi  $\theta$ ,  $\omega$  i  $\alpha$  dla ciała sztywnego jako całości. Te dwa zestawy zmiennych wiąże ze sobą wielkość  $r$ , czyli odległość punktu od osi obrotu. Ta odległość to długość odcinka prostopadłego do osi obrotu, łączącego dany punkt z osią. Jest to również promień okręgu  $r$ , po którym porusza się dany punkt przy obrocie ciała wokół tej osi.



## Położenie

Gdy linia odniesienia ciała sztywnego obraca się o kąt  $\theta$ , punkt tego ciała odległy od osi obrotu o  $r$  przebywa łuk okręgu o długości  $s$ , danej wzorem (11.1):

$$s = \theta r \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.17)$$

Jest to pierwszy z poszukiwanych przez nas związków między wielkościami liniowymi i kątowymi. Uwaga: kąt  $\theta$  musi tu być mierzony w radianach — równanie (11.17) jest inną postacią definicji miary łukowej kąta (11.1).

## Prędkość

Różniczkując równanie (11.17) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r,$$

ponieważ  $r$  nie zależy od czasu. Wielkość  $ds/dt$  nie jest niczym innym, jak wartością bezwzględną prędkości liniowej rozważanego punktu, a  $d\theta/dt$  — prędkością kątową  $\omega$  obracającego się ciała. Wobec tego:

$$v = \omega r \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.18)$$

*Uwaga:* prędkość kątową  $\omega$  musi odnosić się do kąta, który jest wyrażony w mierze łukowej.

Równanie (11.18) ilustruje fakt, że choć wszystkie punkty ciała sztywnego mają taką samą prędkość kątową  $\omega$ , to punkty o większej odległości  $r$  od osi obrotu mają prędkość liniową  $v$  o większej wartości. Rysunek 11.9a przypomina nam, że wektor prędkości liniowej jest zawsze styczny do toru cząstki, którym jest w naszym przypadku okrąg.

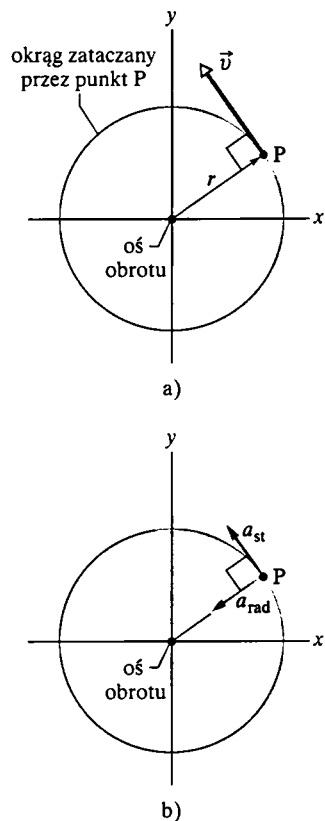
Z równania (11.18) wynika, że jeśli prędkość kątową  $\omega$  ciała sztywnego jest stała, to stała jest także prędkość liniowa  $v$  każdego punktu tego ciała. Każdy punkt ciała porusza się więc w tym przypadku ruchem jednostajnym po okręgu. Okres obrotu  $T$ , odnoszący się zarówno do ruchu każdego punktu ciała, jak i do ciała sztywnego jako całości, jest dany wzorem (4.33), tzn.:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (11.19)$$

Równanie to ilustruje fakt, że czas pełnego obrotu ciała jest równy ilorazowi drogi przebytej przy tym przez dowolny punkt ciała, tzn.  $2\pi r$  i prędkości  $v$ , z jaką ta droga została przebyta. Podstawiając do tego równania wyrażenie na  $v$  ze wzoru (11.18), otrzymujemy:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.20)$$

gdyż  $r$  się skraca. Z równania tego wynika, że czas pełnego obrotu ciała jest także równy ilorazowi doznanego w tym czasie przez ciało przemieszczenia kątowego, tzn.  $2\pi$  rad i prędkości kątowej  $\omega$  (nazywanej również częstością kołową), z jaką odbywał się ruch obrotowy ciała.



Rys. 11.9. Widok z góry obracającego się ciała sztywnego z rysunku 11.2. Każdy punkt tego ciała, np. punkt P porusza się wokół osi obrotu po okręgu. a) Wektor prędkości liniowej  $\vec{v}$  każdego punktu ciała jest styczny do okręgu, po którym ten punkt się porusza. b) Przyspieszenie liniowe  $\vec{a}$  dowolnego punktu ciała ma — w przypadku ogólnym — dwie składowe: składową styczną  $a_{st}$  i składową radialną  $a_{rad}$

## Przyspieszenie

Różniczkując równanie (11.18) względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}r, \quad (11.21)$$

ponieważ  $r$  — jak poprzednio — nie zależy od czasu. Tu jednak napotykamy pewną komplikację. Wielkość  $dv/dt$ , dana wzorem (11.21) stanowi tylko część przyspieszenia liniowego — tę część, która jest związana ze zmianą wartości bezwzględnej  $v$  wektora prędkości liniowej  $\vec{v}$ . Ta część (składowa) przyspieszenia liniowego jest — podobnie jak  $\vec{v}$  — styczna do toru rozważanego punktu. Będziemy ją nazywać *składową styczną* przyspieszenia liniowego  $a_{st}$  punktu. Jest ona równa:

$$a_{st} = \alpha r \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.22)$$

przy czym  $\alpha = d\omega/dt$ . *Uwaga:* przyspieszenie kątowe  $\alpha$  w równaniu (11.22) musi odnosić się do kąta wyrażonego w mierze łukowej.

Jest jednak i druga składowa przyspieszenia liniowego, gdyż — jak wiemy z równania (4.32) — cząstka poruszająca się po okręgu doznaje przyspieszenia skierowanego radialnie (tzn. wzdłuż promienia) do środka okręgu. Tę składową równą  $a_{rad} = v^2/r$  nazywamy *składową radialną* przyspieszenia liniowego; powoduje ona zmianę kierunku wektora prędkości liniowej  $\vec{v}$ . Podstawiając do powyższego równania wyrażenie na  $v$  ze wzoru (11.18), otrzymujemy:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.23)$$

Tak więc przyspieszenie liniowe dowolnego punktu obracającego się ciału sztywnego ma w przypadku ogólnym dwie składowe. Składowa skierowana do środka okręgu wzdłuż jego promienia ( $a_{rad}$  — równanie (11.23)) występuje zawsze wtedy, gdy prędkość kąтова ciała jest różna od zera. Składowa styczną do okręgu ( $a_{st}$  — równanie (11.22)) występuje zawsze wtedy, gdy przyspieszenie kątowe ciała jest różne od zera.

**SPRAWDZIAN 3:** Na zewnętrznym skraju karuzeli siedzi karaluch. Czy ten karaluch ma: a) przyspieszenie radialne, b) przyspieszenie styczne, jeśli prędkość kąтова układu karuzela–karaluch jest stała? Czy karaluch ma: c) przyspieszenie radialne, d) przyspieszenie styczne, jeśli ta prędkość kąтова się zmniejsza?

### Przykład 11.4

Na rysunku 11.10 przedstawiono wirówkę, używaną podczas treningu dla astronautów w celu przyzwyczajania ich do pracy w warunkach dużego przyspieszenia. Promień  $r$  okręgu, po którym porusza się astronauta wynosi 15 m.

a) Z jaką stałą prędkością kątową musi obracać się wirówka, aby astronauta miał przyspieszenie liniowe o wartości  $11g$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Prędkość kąтова wirówki jest stała, dlatego też jej przyspieszenie kątowe  $\alpha$  ( $= d\omega/dt$ ) jest równe zero, a zatem równe zero jest też składowa styczną przyspieszenia liniowego astronauty ( $a_{st} = \alpha r$ ). Ma on zatem tylko przyspieszenie radialne. Podstawiając do równania (11.23) ( $a_{rad} = \omega^2 r$ ) wartość  $a_{rad} = 11g$  otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\text{rad}}}{r}} = \sqrt{\frac{(11)(9.8 \text{ m/s}^2)}{(15 \text{ m})}}$$

$$= 2.68 \text{ rad/s} \approx 26 \text{ obrotów/min. (odpowiedź)}$$

b) Ile wynosi przyspieszenie styczne astronauty, gdy wirówka rozpędza się ze stałą szybkością, w ciągu 120 s od stanu spoczynku do obrotu z prędkością kątową o wartości obliczonej w punkcie (a)?

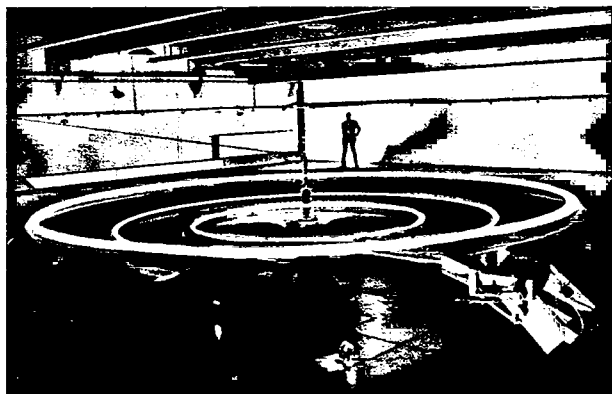
#### ROZWIĄZANIE:

➔ Przyspieszenie styczne  $a_{\text{st}}$ , które jest składową przyspieszenia liniowego wzdłuż toru kołowego, jest związane z przyspieszeniem kątowym  $\alpha$  równaniem (11.21) ( $a_{\text{st}} = \alpha r$ ). Ponadto, ponieważ przyspieszenie kątowe jest stałe, zatem w celu wyznaczenia  $\alpha$  na podstawie początkowej i końcowej wartości prędkości kątowej możemy zastosować równanie (11.12) z tabeli 11.1 ( $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ). Łącząc te dwa równania, otrzymujemy:

$$a_{\text{st}} = \alpha r = \frac{\omega - \omega_0}{t} r = \frac{(2.68 \text{ rad/s}) - (0)}{(120 \text{ s})} (15 \text{ m})$$

$$= 0.34 \text{ m/s}^2 = 0.034g. \quad (\text{odpowiedź})$$

Choć końcowe przyspieszenie radialne astronauty  $a_{\text{rad}} = 11g$  jest bardzo (a nawet zatrważająco) duże, to jego przyspieszenie styczne  $a_{\text{st}}$  w czasie rozpędzania się wirówki jest niewielkie.



Rys. 11.10. Przykład 11.4. Wirówka używana podczas treningu dla astronautów w celu przyzwyczajania ich do pracy w warunkach dużego przyspieszenia, jakiego doświadczają podczas startu rakiety

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Jednostki zmiennych kątowych

Począwszy od równania (11.1) ( $\theta = s/r$ ) wszystkie zmienne kątowe wyrażamy, używając miary łukowej kąta, tzn. radianów, gdy równania zawierają zarówno zmienne kątowe, jak i liniowe. Tak więc przemieszczenie kątowe wyrażamy w radianach, prędkość kątową w radianach na sekundę lub minutę, a przyspieszenie kątowe w radianach na sekundę do kwadratu lub na minutę do kwadratu. Zaznaczyliśmy to w komentarzu słownym do równań (11.17), (11.18), (11.20), (11.22) i (11.23). Jedynym wyjątkiem od tej zasady są wzory, w których występują *jedynie* zmienne kątowe,

takie jak równania ruchu obrotowego z tabeli 11.1. W tym przypadku kąty można wyrażać w dowolnych jednostkach — mogą to być radiany, stopnie, czy pełne obroty. Muszą być one tylko spójne ze sobą.

W równaniach, w których kąty muszą być wyrażane w radianach nie musisz zawsze zapisywać tej jednostki jako symbolu algebraicznego (rad), co obowiązuje dla innych jednostek. Możesz ją podawać lub nie, zależnie od wygody. W przykładzie 11.4a odpowiedź zawiera tę jednostkę zapisaną jako symbol rad, a w przykładzie 11.4b opuściliśmy ten symbol.

## 11.6. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Szybko obracająca się tarcza stolarskiej piły stołowej z pewnością ma energię kinetyczną związaną ze swoim ruchem obrotowym. Jak ją jednak wyrazić? Nie możemy skorzystać ze znanego nam już wzoru:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , aby podać energię kinetyczną tarczy jako całości, gdyż odnosi się on jedynie do energii kinetycznej środka masy tarczy, a ta jest równa zero.

Właściwym podejściem jest potraktowanie tarczy (i każdego innego obracającego się ciała sztywnego) jako zbioru cząstek o różnych prędkościach liniowych i dodanie do siebie energii kinetycznych tych wszystkich cząstek, co daje

całkowitą energię kinetyczną całego ciała. Postępując w taki sposób, obliczamy energię kinetyczną obracającego się ciała jako:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2, \quad (11.24)$$

przy czym  $m_i$  jest masą  $i$ -tej cząstki, a  $v_i$  jej prędkością. Sumowanie dotyczy wszystkich cząstek, z jakich składa się ciało.

Kłopot z obliczeniem sumy w równaniu (11.24) polega na tym, że  $v_i$  nie jest takie samo dla wszystkich cząstek. Aby sobie z tym poradzić, podstawmy do tego równania  $v$  ze wzoru (11.18) ( $v = \omega r$ ), co daje:

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum m_i r_i^2 \right) \omega^2, \quad (11.25)$$

gdyż  $\omega$  jest jednakowe dla wszystkich cząstek.

Wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równania (11.25) informuje nas, jak rozłożona jest masa obracającego się ciała wokół osi jego obrotu. Wielkość tę nazywamy **momentem bezwładności** ciała względem danej osi obrotu i oznaczamy ją symbolem  $I$ . Jest to wielkość stała dla danego ciała sztywnego i określonej osi obrotu (oś tę musimy zawsze podać, gdy podajemy wartość momentu bezwładności ciała, gdyż inaczej wartość  $I$  na nic się nikomu nie przyda).

Możemy teraz napisać:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{moment bezwładności}), \quad (11.26)$$

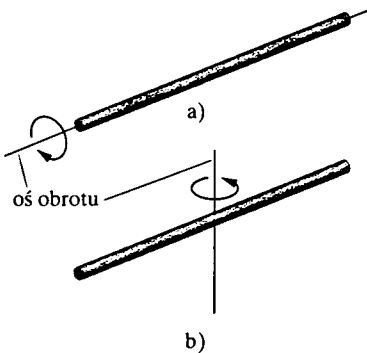
a następnie podstawić to wyrażenie do równania (11.25), co daje

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.27)$$

a zatem jest to poszukiwane przez nas wyrażenie na energię kinetyczną. Przy wyprowadzeniu równania (11.27) korzystaliśmy ze związku  $v = \omega r$ , tak więc  $\omega$  musimy tu wyrażać w radianach. Jednostką momentu bezwładności  $I$  w układzie SI, jest kilogram razy metr do kwadratu ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

Równanie (11.27) wyrażające energię kinetyczną ciała sztywnego, wykonującego wyłącznie ruch obrotowy jest kątowym odpowiednikiem równania  $E_k = \frac{1}{2}mv_{SM}^2$ , które opisuje energię kinetyczną ciała sztywnego, wykonującego ruch wyłącznie postępowy. Obydwa wzory zawierają czynnik  $\frac{1}{2}$ ; odpowiednikiem masy  $m$  w jednym z nich jest  $I$  (zawierające informacje zarówno o masie, jak i o jej rozkładzie) w drugim; wreszcie, w każdym z nich występuje czynnik równy kwadratowi prędkości — ruchu postępowego w jednym, a obrotowego w drugim. Energia kinetyczna ruchu postępowego i ruchu obrotowego nie są różnymi rodzajami energii. Obie są energią kinetyczną, która jest po prostu wyrażona przez inne zmienne, stosownie do rozważanego rodzaju ruchu ciała.

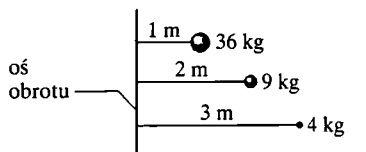
Jak już stwierdziliśmy, moment bezwładności zależy nie tylko od masy obracającego się ciała, lecz i od rozkładu tej masy. Oto przykład pokazujący, jak ten rozkład masy można odczuć dosłownie. Spróbuj wprawić długi i dość ciężki pręt (drąg, długą żerdź lub coś w tym rodzaju) w ruch obrotowy najpierw wzdłuż jego osi podłużnej (jak na rysunku 11.11a), a potem wzdłuż osi prostopadłej do pręta.



Rys. 11.11. Długi pręt znacznie łatwiej wprawić w ruch obrotowy wokół jego a) osi podłużnej: niż wokół b) osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek, gdyż w przypadku (a) masa pręta jest skupiona znacznie bliżej osi obrotu niż w przypadku (b)

przechodzącej przez jego środek (jak na rysunku 11.11b). W obydwu przypadkach obracasz przedmiot o tej samej masie, ale w pierwszym przypadku jest to znacznie łatwiejsze niż w drugim. Powodem tego jest różny rozkład masy ciała względem osi obrotu — w pierwszym przypadku masa jest znacznie bardziej skupiona w pobliżu osi niż w drugim. W wyniku tego moment bezwładności pręta jest znacznie mniejszy w przypadku z rysunku 11.11a, niż w przypadku z rysunku 11.11b. Jest to reguła ogólna — im mniejszy jest moment bezwładności ciała, tym łatwiej wprawić je w ruch obrotowy.

**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku pokazano trzy niewielkie kule obracające się wokół osi pionowej. Dla każdej kuli podano jej masę i odległość jej środka od osi obrotu. Uszereguj te kule ze względu na ich moment bezwładności względem tej osi, od największego do najmniejszego.



## 11.7. Jak obliczyć moment bezwładności?

Jeśli ciało sztywne składa się z kilku cząstek, to jego moment bezwładności względem pewnej osi obrotu możemy obliczyć ze wzoru (11.26) ( $I = \sum m_i r_i^2$ ), wyznaczając iloczyn  $mr^2$  dla każdej cząstki, a następnie dodając te iloczyny do siebie (przypomnijmy, że  $r$  jest to odległość każdej z cząstek od danej osi obrotu).

Jeśli ciało sztywne składa się z wielu blisko siebie położonych cząstek (czyli jest ciałem *rozciąglwym*, jak zabawka frisbee), to do obliczenia sumy we wzorze (11.26) potrzebny jest komputer. Można też postąpić inaczej — sumę w równaniu (11.26) zastąpić całką, tzn. zdefiniować moment bezwładności ciała jako:

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{moment bezwładności, ciało rozciąglwe}). \quad (11.28)$$

W tabeli 11.2 podano wynik, jaki otrzymuje się, obliczając tę całkę dla dziewięciu ciał o prostym kształcie i zaznaczonej na rysunkach osi obrotu.

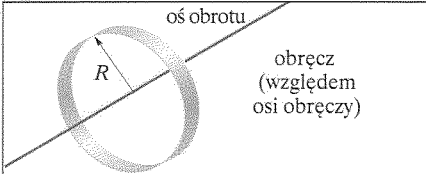
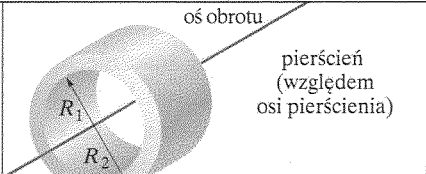
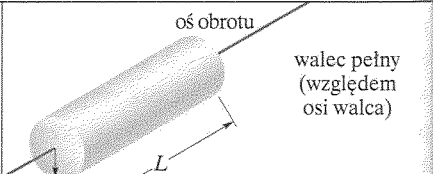
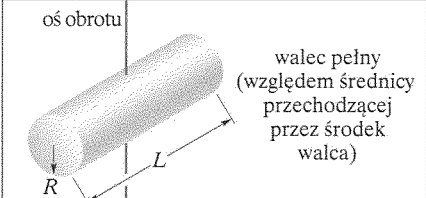
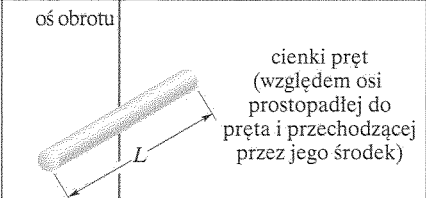
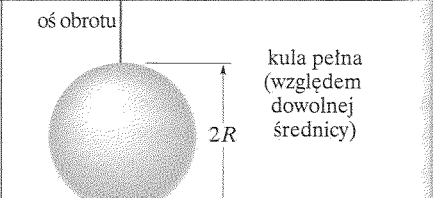
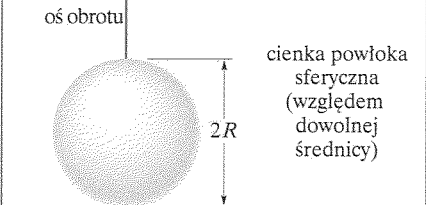
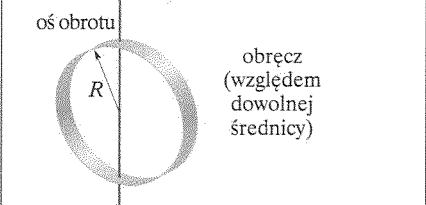
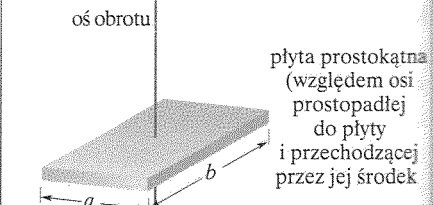
### Twierdzenie Steinera

Żałujemy, że chcemy wyznaczyć moment bezwładności  $I$  ciała o masie  $m$  względem pewnej osi. Oczywiście zawsze możemy obliczyć  $I$  na drodze całkowania zgodnie z równaniem (11.28). Możemy to jednak zrobić znacznie prościej, jeśli znamy moment bezwładności  $I_{\text{SM}}$  tego ciała względem osi *równoległej* do danej osi i przechodzącej przez środek masy ciała. Oznaczmy przez  $h$  odległość tych osi (tzn. osi danej i osi do niej równoległej przechodzącej przez środek masy). Moment bezwładności względem osi danej jest równy:

$$I = I_{\text{SM}} + mh^2 \quad (\text{twierdzenie Steinera}). \quad (11.29)$$

Równanie to ilustruje tak zwane **twierdzenie Steinera**. W następnym punkcie udowodnimy je, a następnie skorzystamy z niego w sprawdzianie 5 i w przykładzie 11.5.

Tabela 11.2. Momenty bezwładności niektórych ciał

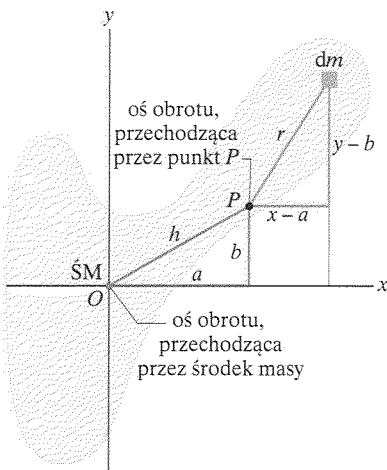
 <p>oś obrotu</p> <p>obręcz (względem osi obręczy)</p> <p><math>I = mR^2</math></p> <p>a)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p>pierścień (względem osi pierścienia)</p> <p><math>I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>b)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p>walec pełny (względem osi walca)</p> <p><math>I = \frac{1}{2}mR^2</math></p> <p>c)</p>
 <p>oś obrotu</p> <p>walec pełny (względem średnicy przechodzącej przez środek walca)</p> <p><math>I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2</math></p> <p>d)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p> cienki pręt (względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek)</p> <p><math>I = \frac{1}{12}mL^2</math></p> <p>e)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p>kula pełna (względem dowolnej średnicy)</p> <p><math>I = \frac{2}{5}mR^2</math></p> <p>f)</p>
 <p>oś obrotu</p> <p> cienka powłoka sferyczna (względem dowolnej średnicy)</p> <p><math>I = \frac{2}{3}mR^2</math></p> <p>g)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p>obręcz (względem dowolnej średnicy)</p> <p><math>I = \frac{1}{2}mR^2</math></p> <p>h)</p>	 <p>oś obrotu</p> <p> płyta prostokątna (względem osi prostopadłej do płyty i przechodzącej przez jej środek)</p> <p><math>I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)</math></p> <p>i)</p>

## Dowód twierdzenia Steinera

Oznaczmy przez  $O$  środek masy ciała o dowolnym kształcie, pokazanego w przekroju na rysunku 11.12. Umieścimy początek układu współrzędnych w punkcie  $O$ . Rozważmy oś przechodzącą przez punkt  $O$  i prostopadłą do płaszczyzny rysunku oraz inną oś, przechodzącą przez punkt  $P$  i równoległą do pierwszej. Współrzędne  $x$  i  $y$  punktu  $P$  oznaczmy przez  $a$  i  $b$ . Oznaczmy przez  $dm$  element masy ciała o współrzędnych  $x$  i  $y$ . Jak wynika z równania (11.28), moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt  $P$  jest równy:

$$I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm.$$

Rys 11.12. Przekrój ciała sztywnego o środku masy w punkcie  $O$ . Twierdzenie Steinera (równanie (11.29)) opisuje związek momentu bezwładności ciała względem osi, przechodzącej przez punkt  $O$ , z momentem bezwładności tego ciała względem osi do niej równoległej, na przykład przechodzącej przez punkt  $P$ , odległej od pierwszej osi o  $h$ . Obie osie są prostopadłe do płaszczyzny rysunku

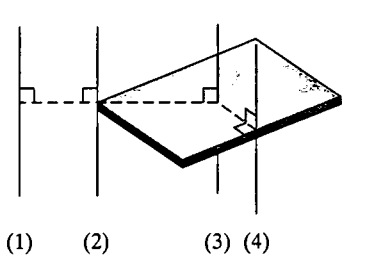


Równanie to można przekształcić do postaci:

$$I = \int (x^2 + y^2)dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2)dm. \quad (11.30)$$

Z definicji środka masy (równanie (9.9)) wynika, że druga i trzecia całka po prawej stronie równania (11.30) wyznaczają współrzędne środka masy ciała (pomnożone przez wartości stałe), a zatem są w naszym przypadku równe zero. Ponieważ  $x^2 + y^2$  jest równe  $R$ , gdzie  $R$  jest odległością elementu  $dm$  od punktu  $O$ , zatem pierwsza całka jest po prostu równa  $I_{\text{ŚM}}$ , tzn. momentowi bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek masy ciała. Z rysunku 11.12 widać, że ostatnia całka po prawej stronie równania (11.30) jest równa  $mh^2$ , gdzie  $m$  jest całkowitą masą ciała. Równanie (11.30) sprowadza się zatem do równania (11.29), które mieliśmy zamiar udowodnić.

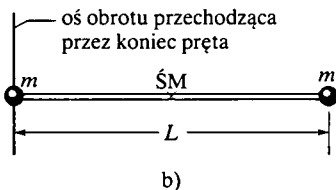
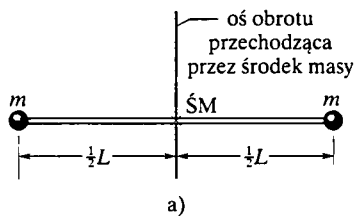
**SPRAWDZIAN 5:** Na rysunku przedstawiono przedmiot w kształcie książki (jeden bok jest dłuższy niż drugi) i cztery możliwe osie jego obrotu, wszystkie prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Usheruj te osie ze względu na moment bezwładności ciała względem każdej z nich, od największego do najmniejszego.



### Przykład 11.5

Na rysunku 11.13a przedstawiono ciało sztywne, złożone z dwóch cząstek o masie  $m$  połączonych prętem o długości  $L$  i znikomo małej masie.

a) Jaki jest moment bezwładności  $I_{\text{ŚM}}$  tego ciała, względem pokazanej na rysunku osi, przechodzącej przez środek masy ciała i prostopadłej do pręta?



Rys. 11.13. Przykład 11.5. Ciało sztywne, złożone z dwóch cząstek o masie  $m$ , połączonych prętem o znikomo małej masie

### ROZWIĄZANIE:

Cała masa ciała jest skupiona w dwóch cząstkach, tak więc wyznaczenie momentu bezwładności  $I_{\text{ŚM}}$  nie wymaga całkowania, a jedynie skorzystania ze wzoru (11.26). Dla dwóch cząstek, odległych od osi obrotu o  $\frac{1}{2}L$  otrzymujemy

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\frac{1}{2}L)^2 + (m)(\frac{1}{2}L)^2 = \frac{1}{2}mL^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaki jest moment bezwładności  $I$  tego ciała względem osi, przechodzącej przez lewy koniec pręta i równoległej do pierwszej osi (rys. 11.13b)?

### ROZWIĄZANIE:

Rozważane ciało ma tak prostą budowę, że szukany moment bezwładności możemy obliczyć na dwa sposoby.

1. Pierwszy z nich polega na zastosowaniu takiego samego podejścia, jak w punkcie (a). Tym razem odległość jednej cząstki od osi obrotu jest równa zero (cząstka lewa), a drugiej (prawej) — jest równa  $L$ . Z równania (11.26) otrzymujemy zatem:

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

2. Druga metoda opiera się na podejściu bardziej ogólnym: ponieważ znamy już moment bezwładności  $I_{\text{ŚM}}$  względem osi, przechodzącej przez środek masy i równoległej do danej osi, możemy zastosować twierdzenie Steinera (równanie (11.29)). Otrzymujemy z niego:

$$I = I_{\text{ŚM}} + mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)(\frac{1}{2}L)^2 = mL^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 11.6

Duże części maszyn przeznaczone do pracy w warunkach długotrwałego obracania się z dużą prędkością sprawdza się uprzednio w specjalnych wirówkach pod kątem możliwości wystąpienia ich awarii. Badana część rozpędzana jest do dużej prędkości obrotowej w zamkniętym pokrywą cylindrze stalowym, który w środku jest wyłożony okładziną ochronną i cegłami ołowianymi. Jeśli badana część nie wytrzyma szybkiego obrotu i rozpada się, to jej kawałki wbijają się w miękkie cegły ołowiane, co umożliwia analizę sposobu rozerwania się badanego elementu.

Na początku 1985 roku w firmie Test Devices, Inc. ([www.testdevices.com](http://www.testdevices.com)) badano stalowy wirnik w kształcie krążka o masie  $m = 272 \text{ kg}$  i promieniu  $R = 38 \text{ cm}$ . Po rozpędzeniu wirnika do prędkości kątowej  $\omega$  równej 14 000 obrotów na minutę technicy usłyszeli głuchy łomot dochodzący od strony stanowiska testowego, znajdującego się piętro niżej, pod pomieszczeniem sąsiadującym z zajmowaną przez nich salą. Badając skutki wybuchu, stwierdzili, że cegły ołowiane porzucane są po całym korytarzu, drzwi od pomieszczenia testowego zostały wyrzucone na pobliski parking, jedna z cegieł ołowianych, wystrzelonych z budynku firmy wpadła przez ścianę do kuchni w sąsiednim domu, pręty nośne budynku zostały uszkodzone, strop betonowy pod stanowiskiem testowym obniżył się o około 0,5 cm, a pokrywa o masie 900 kg została wystrzelona w górę i przebiła sufit, po czym spadła na stanowisko testowe (patrz rysunek 11.14). To, że żadne odłamki nie dostały się do sali, w której znajdowali się technicy nadzorujący badania można uznać za czyste zrzączenie losu.

Jak duża energia została wyzwolona przy wybuchu wirnika?

### ROZWIĄZANIE:

➔ Energia uwolniona w czasie wybuchu była równa energii kinetycznej ruchu obrotowego wirnika w chwili osiągnięcia przez wirówkę prędkości kątowej 14 000 obrotów na minutę. Aby wyznaczyć tę energię  $E_k$  skorzystamy z równania (11.27) ( $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ ),

lecz najpierw musimy obliczyć moment bezwładności  $I$ . Wirnik miał kształt krążka, czyli walca pełnego, obracającego się jak karuzela, a więc jego moment bezwładności możemy obliczyć ze wzoru podanego w tabeli 11.2c ( $I = \frac{1}{2}mR^2$ ). Mamy zatem:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(272 \text{ kg})(0,38 \text{ m})^2 = 19,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Prędkość kątowa wirnika wynosiła:

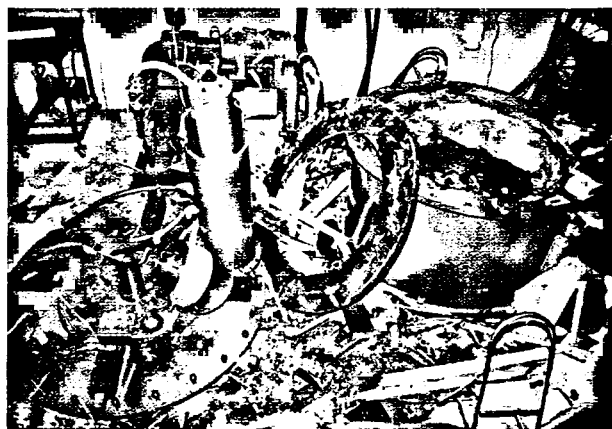
$$\begin{aligned}\omega &= (14\,000 \text{ obrotów/min})(2\pi \text{ rad/obrot}) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \\ &= 1,466 \cdot 10^3 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z równania (11.27), co daje:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(19,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(1,466 \cdot 10^3 \text{ rad/s})^2 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

(odpowiedź)

Przebywanie w pobliżu tego wybuchu było równie niebezpieczne, jak przebywanie tuż obok eksplodującej bomby.



Rys. 11.14. Przykład 11.6. Zniszczenia powstałe w wyniku rozerwania się krążka stalowego obracającego się z dużą prędkością

## 11.8. Moment siły

Nie bez powodu klamkę w drzwiach umieszcza się możliwie jak najdalej od linii zawiasów. Jeśli chcesz otworzyć ciężkie drzwi, to z pewnością musisz działać na nie siłą. Sama siła to jednak nie wszystko — ważne jest też, gdzie przyłożysz tę siłę i w jakim kierunku. Jeśli przyłożysz ją niezbyt daleko od linii zawiasów i jeśli jej kierunek będzie tworzył z płaszczyzną drzwi kąt inny niż  $90^\circ$ , to będziesz musiał użyć większej siły niż w przypadku, gdy przyłożysz ją w pobliżu klamki i w kierunku prostopadłym do płaszczyzny drzwi.

Na rysunku 11.15a przedstawiono przekrój ciała, które może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$  i prostopadłej do tego przekroju ciała. Siła  $\vec{F}$  jest przyłożona do ciała w punkcie  $P$ , którego położenie względem punktu  $O$



jest dane przez wektor położenia  $\vec{r}$ . Kierunki wektorów  $\vec{F}$  i  $\vec{r}$  tworzą ze sobą kąt  $\phi$  (dla prostoty rozważamy tylko siły, które nie mają składowej równoległej do osi obrotu; wektor  $\vec{F}$  leży zatem w płaszczyźnie rysunku).

Aby stwierdzić, jaki obrót ciała wokół danej osi powoduje siła  $\vec{F}$ , rozkładamy  $\vec{F}$  na dwie składowe (rys. 11.15b). Jedna z tych składowych, nazywana *składową radialną*  $F_{\text{rad}}$ , ma kierunek wektora  $\vec{r}$ . Nie powoduje ona obrotu ciała, gdyż działa wzdłuż prostej, na której leży punkt  $O$  (ciągnąc drzwi na zawiasach, równoległe do ich płaszczyzny nie obrócisz ich). Druga składowa wektora  $\vec{F}$ , nazywana *składową styczną*  $F_{\text{st}}$ , jest prostopadła do  $\vec{r}$  i ma wartość bezwzględna, równą:  $F_{\text{st}} = F \sin \phi$ . Ta składowa *powoduje* obrót ciała (ciągnąc drzwi prostopadle do ich płaszczyzny możesz spowodować ich obrót).

Zdolność siły  $\vec{F}$  do wprawiania ciała w ruch obrotowy zależy nie tylko od wartości jej składowej stycznej  $F_{\text{st}}$ , lecz także od tego, jak daleko od punktu  $O$  jest ona przyłożona. Aby uwzględnić obydwa te czynniki, definiujemy wielkość  $M$  zwaną **momentem siły**, jako iloczyn:

$$M = (r)(F \sin \phi). \quad (11.31)$$

Do obliczenia momentu siły możemy zastosować dwa równoważne sobie związki:

$$M = (r)(F \sin \phi) = r F_{\text{st}} \quad (11.32)$$

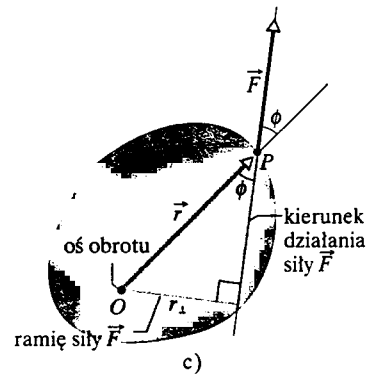
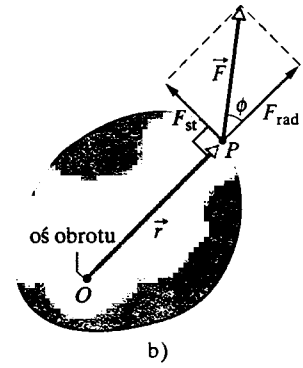
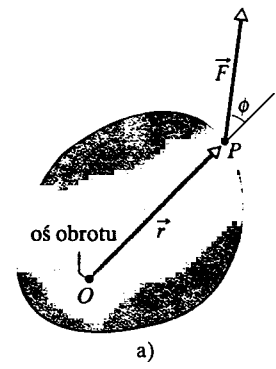
oraz

$$M = (r \sin \phi)(F) = r_{\perp} F, \quad (11.33)$$

przy czym  $r_{\perp}$  jest odległością punktu  $O$ , przez który przechodzi oś obrotu, od prostej, wzdłuż której leży wektor  $\vec{F}$  (rys. 11.15c). Kierunek tej prostej nazywamy **kierunkiem działania siły  $\vec{F}$** , a  $r_{\perp}$  — **ramieniem tej siły**. Jak widać z rysunku 11.15b, ramieniem siły składowej  $F_{\text{st}}$  jest wartość bezwzględna wektora  $\vec{r}$ , tzn.  $r$ .

Moment siły można rozumieć jako miarę zdolności siły  $\vec{F}$  do skręcania ciała. Gdy za pomocą pewnego narzędzia — jak wkrętak lub klucz maszynowy — działasz na ciało siłą, aby je skrócić, przykładasz do tego ciała moment siły. Jednostką momentu siły w układzie SI jest niuton razy metr ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ). Uwaga: niuton razy metr jest również jednostką pracy; moment siły i praca są to jednak zupełnie różne wielkości, których nie wolno ze sobą mylić — pracę wyraża się często w dżulach ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ), czego nigdy nie robi się w odniesieniu do momentu siły.

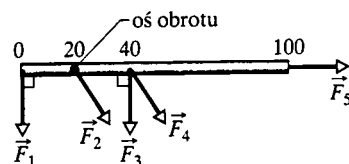
W następnym rozdziale przekonasz się, że w przypadku ogólnym moment siły należy uważać za wielkość wektorową. Teraz jednak, gdy zajmujemy się tylko obrotami wokół jednej osi, nie musimy korzystać z zapisu wektorowego. Wystarczy, że będziemy uważali moment siły za dodatni lub ujemny, w zależności od tego, w jakim kierunku odbywa się pod jego wpływem obrót ciała, pozostającego początkowo w spoczynku. Jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest dodatni, a jeśli ciało obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchem wskazówek zegara, to moment siły jest ujemny (czyli nadal obowiązuje reguła „zegar jest ujemny” z paragrafu 11.2).



Rys. 11.15. Siła  $\vec{F}$  działa w punkcie  $P$  ciała sztywnego, które może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$ ; oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny przedstawionego na rysunku przekroju ciała. Moment tej siły jest równy  $(r)(F \sin \phi)$ . Można go także wyrazić jako  $r F_{\text{st}}$ , gdzie  $F_{\text{st}}$  jest składową styczną siły  $\vec{F}$ . Moment siły można również wyrazić jako  $r_{\perp} F$ , gdzie  $r_{\perp}$  jest ramieniem siły  $\vec{F}$

Dla momentów sił spełniona jest zasada superpozycji, o której mówiliśmy w rozdziale 5, w odniesieniu do sił. Gdy na ciało działa kilka momentów siły, wypadkowy moment siły, oznaczany jako  $M_{wyp}$ , jest sumą poszczególnych momentów siły.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono widok z góry pręta mierniczego o długości 1 m, mogącego obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt, oznaczony kropką i symbolem 20 (od 20 cm). Wszystkie siły zaznaczone na rysunku mają takie same wartości bezwzględne i działają w poziomie. Uszereguj te siły w zależności od wartości momentu siły, jaki wywierają one na pręt, od wartości największej do najmniejszej.



## 11.9. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Moment siły może spowodować obrót ciała sztywnego. Tak właśnie otwierasz drzwi. Chcemy teraz znaleźć związek wypadkowego momentu siły  $M_{wyp}$ , działającej na ciało sztywne, z wywoływanym przez ten moment przyspieszeniem kątowym ciała  $\alpha$ . Skorzystamy z analogii do drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu ciała wzdłuż linii prostej ( $F_{wyp} = ma$ ), która wiąże przyspieszenie  $a$  ciała o masie  $m$  z działającą na to ciało siłą wypadkową  $F_{wyp}$ . Zastępując  $F_{wyp}$  przez  $M_{wyp}$ ,  $m$  przez  $I$ , a  $a$  przez  $\alpha$  otrzymujemy:

$$M_{wyp} = I\alpha \quad (\text{druga zasada dynamiki — ruch obrotowy}), \quad (11.34)$$

przy czym  $\alpha$  musi być wyrażone w mierze łukowej.

### Uzasadnienie wzoru (11.34)

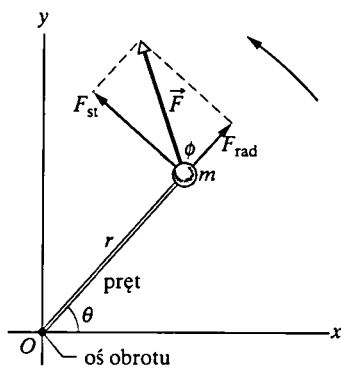
Aby wykazać słuszność wzoru (11.34), rozważmy na początek prostą sytuację przedstawioną na rysunku 11.16. Ciałem sztywnym jest tu cząstka o masie  $m$ , umocowana na jednym z końców pręta o długości  $r$ , którego masę można pominąć. Jedynym rodzajem ruchu pręta jest jego obrót wokół osi, przechodzącej przez jego drugi koniec i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Zatem cząstka może poruszać się tylko po torze kołowym, którego środkiem jest drugi koniec pręta.

Na cząstkę działa siła  $\vec{F}$ . Cząstka może poruszać się jedynie po okręgu, dlatego też jej przyspieszenie wzdłuż toru pochodzi tylko od składowej stycznej  $F_{st}$  siły (tzn. składowej, która jest styczna do toru cząstki). Składowa  $F_{st}$  jest związana z przyspieszeniem  $a_{st}$  cząstki wzdłuż toru (przyspieszeniem stycznym), a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona, która w tym przypadku ma postać:

$$F_{st} = ma_{st}.$$

Moment siły działającej na cząstkę jest dany wzorem (11.32):

$$M = F_{st}r = ma_{st}r.$$



Rys. 11.16. Proste ciało sztywne, które może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$  składa się z cząstki o masie  $m$  oraz pręta o długości  $r$  i znikomo małej masie, do którego końca cząstka jest przymocowana. Ruch obrotowy ciała odbywa się pod wpływem siły  $\vec{F}$

Korzystając z równania (11.22) ( $a_{st} = \alpha r$ ), możemy ten wzór zapisać jako:

$$M = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \quad (11.35)$$

Wielkość w nawiasie po prawej stronie równania (11.35) jest to moment bezwładności cząstki względem danej osi obrotu (patrz równanie (11.26)). Tak więc równanie (11.35) możemy zapisać w postaci:

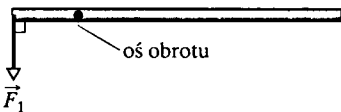
$$M = I\alpha \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.36)$$

Równanie (11.36) można uogólnić na przypadek, gdy na cząstkę działa więcej niż jedna siła. Otrzymujemy wtedy:

$$M_{wyp} = I\alpha \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.37)$$

co zamierzaliśmy wykazać. Równanie to jest słuszne także dla dowolnego ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi, gdyż każde takie ciało można uważać za zbiór pojedynczych cząstek.

**SPRAWDZIAN 7:** Na rysunku przedstawiono widziany z góry pręt mierniczy, który może obracać się wokół zaznaczonej na rysunku osi przecinającej pręt na lewo od jego środka. Na pręt działają dwie siły poziome  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Na rysunku pokazano tylko siłę  $\vec{F}_1$ . Siła  $\vec{F}_2$  jest prostopadła do pręta i przyłożona do prawego końca pręta. Pręt nie porusza się. a) W jakim kierunku działa siła  $\vec{F}_2$ ? b) Czy wartość siły 2 jest większa, mniejsza, czy równa wartości siły 1?



## Przykład 11.7

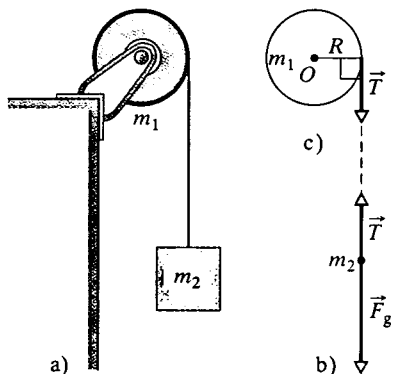
Na rysunku 11.17a przedstawiono jednorodny krążek o masie  $m_1 = 2,5 \text{ kg}$  i promieniu  $R = 20 \text{ cm}$ , osadzony na stałej osi poziomej. Na obrzeże krążka nawinięta jest lina o znikomо małej masie, a na jej końcu jest zawieszony klocek o masie  $m_2 = 1,2 \text{ kg}$ . Wyznacz przyspieszenie opadającego klocka, przyspieszenie kątowe krążka oraz naprężenie liny. Przyjmij, że lina nie ślizga się po obrzeżu krążka, a ośka, na której osadzony jest krążek obraca się bez tarcia.

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Przyspieszenie  $a$  klocka jest związane z działającymi na niego siłami, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona ( $\vec{F}_{wyp} = m_2\vec{a}$ ). Siły działające na klocek przedstawione są na diagramie sił na rysunku 11.17b. Są to: siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , której wartość wynosi  $m_2g$  i siła  $\vec{T}$  działająca na klocek ze strony liny. Druga zasada dynamiki zapisana dla składowych wzdłuż osi pionowej  $y$  ( $F_{wyp,y} = m_2a_y$ ), ma zatem postać:

$$T - m_2g = m_2a. \quad (11.38)$$

Z równania tego nie możemy jednak wyznaczyć  $a$ , gdyż zawiera ono także niewiadomą  $T$ .



Rys. 11.17. Przykłady 11.7 i 11.9. a) Opadający klocek wprawia krążek w ruch obrotowy. b) Diagram sił działających na klocek. c) Niepełny diagram sił działających na krążek

Poprzednio, gdy nie mogliśmy rozwiązać równania dla składowych  $y$ , pomocą mogło być zastosowanie równania dla składowych  $x$ . Obecnie pomoże nam rozważenie ruchu obrotowego krążka.

➔ 2. Przyspieszenie kątowe krążka jest związane z działającym na niego momentem siły, a związek ten opisuje druga zasada

dynamiki dla ruchu obrotowego ( $M_{\text{wyp}} = I\alpha$ ). Obliczając moment siły oraz moment bezwładności  $I$  zauważ, że oś obrotu jest prostopadła do krążka i przechodzi przez jego środek, tzn. punkt  $O$  z rysunku 11.17c.

Moment siły jest dany wzorem (11.32) ( $M = rF_{\text{st}}$ ). Działająca na krążek siła ciężkości oraz siła działająca na niego ze strony osi są przyłożone do środka krążka, a zatem w odległości  $r = 0$  od osi jego obrotu. Wobec tego związane z nimi momenty sił są równe zeru. Siła  $\vec{T}$  działająca na krążek ze strony liny jest przyłożona w odległości  $r = R$  od osi obrotu i jest styczna do obrzeża krążka. Związany z nią moment siły jest zatem równy  $-RT$ , przy czym znak minus oznacza, że jeśli krążek jest początkowo nieruchomy, to pod wpływem tego momentu siły obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jak wynika z tabeli 11.2c moment bezwładności  $I$  krążka jest równy  $\frac{1}{2}m_1R^2$ . Równanie  $M_{\text{wyp}} = I\alpha$  możemy więc zapisać w postaci:

$$-RT = \frac{1}{2}m_1R^2\alpha. \quad (11.39)$$

To równanie również wygląda na nieużyteczne, gdyż zawiera dwie niewiadome  $\alpha$  i  $T$ , a nie zawiera szukanej wielkości  $a$ .

➔ 3. Z właściwym fizykiem zacięciem próbujemy dalej, nie załamujemy się i dostrzegamy, że skoro lina nie ślizga się po krążku, to przyspieszenie liniowe  $a$  klocka oraz przyspieszenie liniowe  $a_{\text{st}}$  (styczne) obrzeża krążka muszą być sobie równe. Korzystając z równania (11.22) ( $a_{\text{st}} = \alpha R$ ) wnioskujemy, że w na-

szym przypadku  $\alpha = a/R$ . Podstawiając ten związek do równania (11.39), mamy:

$$T = -\frac{1}{2}m_1a. \quad (11.40)$$

Łącząc ze sobą równania (11.38) i (11.40), dostajemy:

$$\begin{aligned} a &= -g \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} = -(9,8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1,2 \text{ kg})}{(2,5 \text{ kg}) + (2)(1,2 \text{ kg})} \\ &= -4,8 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Następnie z równania (11.40) wyznaczamy  $T$ :

$$T = -\frac{1}{2}m_1a = -\frac{1}{2}(2,5 \text{ kg})(-4,8 \text{ m/s}^2) = 6 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z tym, czego oczekujemy, przyspieszenie opadającego klocka jest mniejsze od  $g$ , a naprężenie liny ( $= 6 \text{ N}$ ) jest mniejsze od siły ciężkości, działającej na klocek ( $= m_2g = 11,8 \text{ N}$ ). Widzimy też, że przyspieszenie klocka i naprężenie liny zależą od masy krążka, lecz nie od jego promienia. Poprawność rozwiązania możemy dodatkowo sprawdzić, podstawiając do otrzymanych wzorów  $a = -g$  i  $T = 0$ , co odpowiada przypadkowi, gdy krążek ma znikomą małą masę ( $m_1 = 0$ ). Wynik jest zgodny z oczekiwaniem: klocek po prostu spada swobodnie, ciągnąc za sobą linę.

Przyspieszenie kątowe krążka obliczamy ze wzoru (11.22):

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{(-4,8 \text{ m/s}^2)}{(0,2 \text{ m})} = -24 \text{ rad/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 11.8

Jeżeli chcesz w walce dżudo przerzucić przeciwnika przez biodro, ciągniesz jego strój siłą  $\vec{F}$  przyłożoną w odległości  $d_1 = 0,3 \text{ m}$  od osi obrotu, czyli twój jego prawego biodra (rys. 11.18). Chcesz obrócić go wokół tej osi z przyspieszeniem kątowym równym  $-6 \text{ rad/s}^2$ , tzn. wykonać obrót w kierunku ruchu wskazówek zegara na tym rysunku. Przyjmij, że twój przeciwnik ma masę  $80 \text{ kg}$  i moment bezwładności względem wspomnianej osi równy  $15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

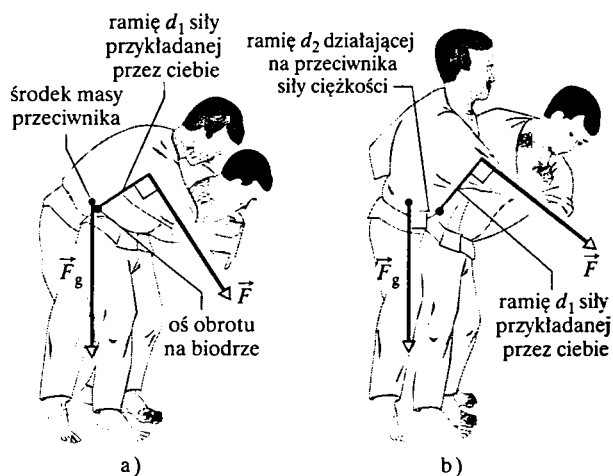
a) Jaka musi być wartość siły  $\vec{F}$ , jeśli przed rzutem przegiąłeś przeciwnika do przodu, tak aby jego środek masy zbliżyć do swojego biodra (jak na rysunku 11.18a)?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że:

➔ 1. Wartość siły  $\vec{F}$ , jaką musisz działać na przeciwnika, aby nadać mu określone przyspieszenie kątowe  $\alpha$  jest związana z  $\alpha$ , a związek ten opisuje druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ( $M_{\text{wyp}} = I\alpha$ ). Możemy przyjąć, że po utracie przez stopy przeciwnika kontaktu z matą działają na niego tylko trzy siły: siła  $\vec{F}$ , jaką ty go ciągniesz, siła normalna  $\vec{N}$ , jaką działasz na niego w punkcie, wokół którego go obracasz (tej siły nie zaznaczono na rysunku 11.18) oraz działająca na niego siła ciężkości  $\vec{F}_g$ . Aby móc skorzystać ze wzoru  $M_{\text{wyp}} = I\alpha$ , powinieneś wyznaczyć momenty tych trzech sił względem rozważanej osi obrotu.

Z równania (11.33) ( $M = r_{\perp}F$ ) wynika, że moment siły  $\vec{F}$  jest równy  $-d_1F$ , gdzie  $d_1$  jest ramieniem  $r_{\perp}$ , a znak wskazuje, że pod działaniem tego momentu siły zachodzi obrót w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment siły  $\vec{N}$  jest równy zeru, gdyż działa ona w punkcie podparcia, a zatem ramię jej działania jest równe zeru:  $r_{\perp} = 0$ .



Rys. 11.18. Przykład 11.8. Rzut przez biodro w walce judo wykonany: a) poprawnie, b) niepoprawnie

➡ 2. Aby wyznaczyć moment siły ciężkości  $\vec{F}_g$ , musisz przypomnieć sobie stwierdzenie z rozdziału 9, które w naszym przypadku mówi, że siła  $\vec{F}_g$  działa na twojego przeciwnika w jego środku masy. Gdy ten środek masy leży na osi obrotu, ramię siły  $\vec{F}_g$  wynosi  $r_{\perp} = 0$ , a zatem moment tej siły jest równy zeru. Tak więc jedynym momentem siły, jaki działa na twojego przeciwnika, jest moment siły  $\vec{F}$ , a zatem równanie  $M_{\text{wyp}} = I\alpha$  możemy zapisać w postaci:

$$-d_1 F = I\alpha.$$

Otrzymujemy stąd:

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(-6 \text{ rad/s}^2)}{(0.3 \text{ m})} = 300 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

b) Jaka musi być wartość siły  $\vec{F}$ , jeśli przed rzutem twój przeciwnik pozostaje w pozycji pionowej, tak że ramię siły  $\vec{F}_g$  względem osi obrotu wynosi  $d_2 = 0.12 \text{ m}$  (jak na rysunku 11.18b)?

#### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z rozwiązania w pierwszej części zadania, zauważając jednak, że: ➡ obecnie ramię siły  $\vec{F}_g$  nie jest już równe zeru. Zatem moment siły ciężkości przeciwnika wynosi  $d_2 mg$

i jest dodatni, gdyż dąży on do obrócenia przeciwnika w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Równanie  $M_{\text{wyp}} = I\alpha$  przybiera więc teraz postać:

$$-d_1 F + d_2 mg = I\alpha,$$

z którego otrzymujemy:

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

Z punktu (a) wiemy, że pierwszy wyraz po prawej stronie równania wynosi 300 N, wobec czego mamy:

$$F = (300 \text{ N}) + \frac{(0.12 \text{ m})(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(0.3 \text{ m})} = 613.6 \text{ N} \approx 610 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Wynik ten pokazuje, że jeśli nie przygniesz początkowo przeciwnika, tak aby przyciągnąć jego środek masy do swojego biodra, to będziesz musiał ciągnąć go ze znacznie większą siłą. Dobry przykład o tym z praw fizyki (zastosowanie praw fizyki w walkach dżudo i aikido jest omówione przez J. Walkera w rubryce „The Amateur Scientist” w *Scientific American*, tom 243, lipiec 1980, s. 150–161).

## 11.10. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego

W rozdziale 7 stwierdziliśmy, że gdy siła  $F$  nadaje ciału sztywnemu o masie  $m$  przyspieszenie wzdłuż pewnej prostej, wykonuje ona nad tym ciałem pracę  $W$ . W wyniku tego może ulec zmianie energia kinetyczna ciała ( $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ). Załóżmy, że jest to jedyna postać energii, jaka może ulec zmianie. W tych warunkach związek zmiany energii kinetycznej  $\Delta E_k$  ciała z pracą  $W$ , wykonaną nad układem jest dany przez równanie (7.10), które w naszym przypadku ma postać:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2}mv_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2 = W. \quad (11.41)$$

Gdy ruch zachodzi jedynie wzdłuż osi  $x$ , pracę możemy obliczyć ze wzoru (7.32), co daje:

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F dx \quad (\text{praca — ruch w jednym wymiarze}). \quad (11.42)$$

Jeśli siła  $F$  jest stała, to powyższe równanie daje  $W = Fd$ , gdzie  $d$  jest przemieszczeniem ciała. Szybkość, z jaką jest wykonywana praca jest to moc; zgodnie z równaniami (7.43) i (7.48) wynosi ona:

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad (\text{moc — ruch w jednym wymiarze}). \quad (11.43)$$

Przeanalizujmy teraz podobną sytuację dla ruchu obrotowego. Gdy moment siły wprowadza ciało sztywne w ruch obrotowy wokół stałej osi, wykonuje on nad ciałem

pracę  $W$ . W związku z tym może zmieniać się energia kinetyczna, związana z ruchem obrotowym ciała ( $E_k = \frac{1}{2}I\alpha^2$ ). Załóżmy — jak poprzednio — że jest to jedyna postać energii, która może ulec zmianie. Związek zmiany energii kinetycznej  $\Delta E_k$  ciała z pracą  $W$ , wykonaną nad układem, dotyczy teraz ruchu obrotowego i ma postać:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2}I\omega_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\text{pocz}}^2 = W, \quad (11.44)$$

przy czym  $I$  jest momentem bezwładności ciała względem stałej osi, a przez  $\omega_{\text{pocz}}$  i  $\omega_{\text{końc}}$  oznaczyliśmy prędkości kątowe ciała przed wykonaniem pracy i po wykonaniu pracy nad układem.

Pracę możemy wyznaczyć z równania, które jest odpowiednikiem równania (11.42) dla ruchu obrotowego:

$$W = \int_{\theta_{\text{pocz}}}^{\theta_{\text{końc}}} M d\theta \quad (\text{praca — ruch obrotowy wokół stałej osi}), \quad (11.45)$$

przy czym  $M$  jest momentem siły, który wykonuje pracę  $W$ , a przez  $\theta_{\text{pocz}}$  i  $\theta_{\text{końc}}$  oznaczyliśmy położenia kątowe ciała przed wykonaniem pracy i po wykonaniu pracy nad układem. Gdy  $M$  jest stałe, równanie (11.45) upraszcza się do postaci:

$$W = M(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}) \quad (\text{praca — stały moment siły}), \quad (11.46)$$

Szybkość, z jaką wykonywana jest praca, czyli moc, jest teraz dana wzorem, który jest odpowiednikiem równania (11.43) dla ruchu obrotowego:

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega \quad (\text{moc — ruch obrotowy wokół stałej osi}). \quad (11.47)$$

W tabeli 11.3 podano równania, odnoszące się do ruchu obrotowego ciała sztywnego wokół stałej osi i ich odpowiedniki dla ruchu postępowego.

Tabela 11.3. Niektóre równania dla ruchu postępowego i obrotowego

Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś)	
położenie	$x$	położenie kątowe	$\theta$
prędkość	$v = dx/dt$	prędkość kątowa	$\omega = d\theta/dt$
przyspieszenie	$a = dv/dt$	przyspieszenie kątowe	$\alpha = d\omega/dt$
masa	$m$	moment bezwładności	$I$
druga zasada dynamiki	$F_{\text{wyp}} = ma$	druga zasada dynamiki	$M_{\text{wyp}} = I\omega$
praca	$W = \int F dx$	praca	$W = \int M d\theta$
energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
moc (stała siła)	$P = Fv$	moc (stały moment siły)	$P = M\omega$
związek pracy z energią	$W = \Delta E_k$	związek pracy z energią	$W = \Delta E_k$

## Uzasadnienie równań (11.44)–(11.47)

Przeanalizujmy jeszcze raz sytuację z rysunku 11.16, w której siła  $\vec{F}$  wprawia w ruch obrotowy ciało sztywne, złożone z pojedynczej cząstki o masie  $m$  i pręta o znikomym małej masie, do którego końca przymocowana jest ta cząstka. W czasie obrotu siła  $\vec{F}$  wykonuje nad ciałem pracę. Załóżmy, że w wyniku działania siły zmienia się tylko jeden rodzaj energii ciała — jego energia kinetyczna. Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej (równanie (11.41)) daje zatem:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W. \quad (11.48)$$

Korzystając ze związku:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  oraz z równania (11.18) ( $v = \omega r$ ), możemy zapisać równanie (11.48) jako:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mr^2\omega_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega_{\text{pocz}}^2 = W. \quad (11.49)$$

Z równania (11.26) wynika, że moment bezwładności naszego ciała, składającego się tylko z jednej cząstki, wynosi  $I = mr^2$ . Podstawienie tego związku do równania (11.49) daje:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega_{\text{końc}}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\text{pocz}}^2 = W,$$

czyli równanie (11.44). Wyprowadziliśmy je dla ciała sztywnego w postaci jednej cząstki, lecz jest ono słuszne dla dowolnego ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi.

Następnie znajdziemy związek między pracą  $W$ , wykonaną nad ciałem z rysunku 11.16 i momentem siły  $M$ , związanym z działaniem na to ciało siły  $\vec{F}$ . Gdy cząstka przebywa wzdłuż swego toru kołowego drogę  $ds$ , przyspieszenie jej ruchu wzdłuż tego toru pochodzi jedynie od składowej stycznej siły  $F_{st}$ . Zatem tylko ta składowa  $F_{st}$  wykonuje nad cząstką pracę. Tę pracę  $dW$  możemy zapisać jako  $F_{st}ds$ . Drogę  $ds$  możemy jednak zastąpić przez  $r d\theta$ , gdzie  $d\theta$  jest kątem, zakreślonym przez cząstkę. Mamy wobec tego:

$$dW = F_{st}r d\theta. \quad (11.50)$$

Z równania (11.32) wynika, że iloczyn  $F_{st}r$  jest równy momentowi siły  $M$ , a zatem równanie (11.50) możemy zapisać jako:

$$dW = M d\theta. \quad (11.51)$$

Praca, wykonana przy skończonym przemieszczeniu kątowym od  $\theta_{\text{pocz}}$  do  $\theta_{\text{końc}}$ , wynosi wobec tego:

$$W = \int_{\theta_{\text{pocz}}}^{\theta_{\text{końc}}} M d\theta,$$

a to jest równanie (11.45). Jest ono prawdziwe dla dowolnego ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi. Równanie (11.46) wynika natychmiast z równania (11.45).

Z równania (11.51) możemy również wyznaczyć moc  $P$  w ruchu obrotowym:

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega,$$

otrzymując równanie (11.47).

## Przykład 11.9

Przypuśćmy, że krążek z przykładu 11.7 i rysunku 11.17 zaczyna obracać się w chwili  $t = 0$ , przy czym do tej chwili znajdował się w spoczynku. Ile będzie wynosiła energia kinetyczna ruchu obrotowego  $E_k$  krążka w chwili  $t = 2,5$  s?

### ROZWIĄZANIE:

Energię kinetyczną  $E_k$  możemy wyznaczyć ze wzoru (11.27) ( $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ ). Wiemy już, że  $I$  jest równe  $\frac{1}{2}mR^2$ , ale nie znamy wartości  $\omega$  w chwili  $t = 2,5$  s. Zauważ jednak, że:

➤ 1. Skoro przyspieszenie kątowe  $\alpha$  ma wartość stałą, równą  $-24 \text{ rad/s}^2$ , to możemy skorzystać z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym z tabeli 11.1. Szukamy wartości  $\omega$ , znamy  $\alpha$  i  $\omega_0 (= 0)$ , dlatego też zastosujemy równanie (11.12), co daje:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Podstawiając do równania (11.27) związki  $\omega = \alpha t$  oraz  $I = \frac{1}{2}mR^2$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)(\alpha t)^2 = \frac{1}{4}m(R\alpha t)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2,5 \text{ kg})(0,2 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten mogliśmy też otrzymać w inny sposób.

➤ 2. Energię kinetyczną krążka można wyznaczyć z pracy wykonanej nad krążkiem. Jak wiemy z równania (11.44) ( $E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W$ ) zmiana energii kinetycznej krążka jest równa całkowitej pracy  $W$  wykonanej nad krążkiem. Podstawiając  $E_k$  za

$E_{k \text{ końc}}$  oraz 0 za  $E_{k \text{ pocz}}$ , otrzymujemy:

$$E_k = E_{k \text{ pocz}} + W = 0 + W = W. \quad (11.52)$$

Musimy teraz znaleźć pracę  $W$ . Korzystając z równań (11.45) i (11.46), możemy ją powiązać z działającym na krążek momentem siły. Jedyny moment siły, który powoduje przyspieszenie kątowne krążka, a więc wykonuje nad nim pracę, to moment siły  $T$  działającej na krążek ze strony liny. Z przykładu 11.7 wiemy, że moment ten jest równy  $-TR$ .

➤ 3. Zauważ teraz, że skoro  $\alpha$  jest stałe, to moment ten też musi być stały. Możemy zatem skorzystać z równania (11.46) i napisać:

$$W = M(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}) = -TR(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}). \quad (11.53)$$

Potrzebny nam jeszcze jeden pomysł:

➤ 4. skoro  $\alpha$  jest stałe, to do wyznaczenia  $\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}$  może nam posłużyć wzór (11.13). Podstawiając w nim  $\omega_{\text{pocz}} = 0$ , dostajemy:

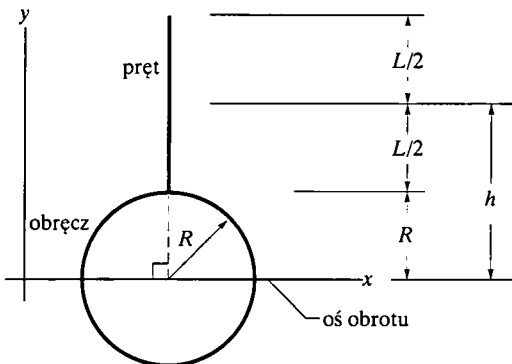
$$\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}} = \omega_{\text{pocz}}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Tę wartość podstawiamy do równania (11.53), a otrzymany wynik wstawiamy do równania (11.52). Korzystając z tego, że  $T = 6 \text{ N}$ , a  $\alpha = -24 \text{ rad/s}^2$ , co wiemy z przykładu 11.7, otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} E_k &= W = -TR(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}) = -TR\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}TR\alpha t^2 \\ &= -\frac{1}{2}(6 \text{ N})(0,2 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 11.10

Sztynna rzeźba składa się z cienkiej obręczy (o masie  $m$  i promieniu  $R = 0,15 \text{ m}$ ) oraz cienkiego pręta (o masie  $m$  i długości  $L = 2R$ ), połączonych ze sobą w sposób pokazany na rysunku 11.19. Rzeźba ta może obracać się wokół osi poziomej, leżącej w płaszczyźnie obręczy, przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do pręta.



Rys. 11.19. Przykład 11.10. Sztynna rzeźba złożona z obręczy i pręta, może obracać się wokół osi poziomej

a) Wyznacz moment bezwładności  $I$  rzeźby względem danej osi obrotu, wyrażając go przez  $m$  i  $R$ .

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że: ➤ aby wyznaczyć moment bezwładności  $I$  całej rzeźby, możemy obliczyć osobno momenty bezwładności obręczy i pręta, a następnie dodać je do siebie. Jak wynika z tabeli 11.2h, moment bezwładności obręczy względem jej średnicy jest równy:  $I_{\text{ob}} = \frac{1}{2}mR^2$ . Natomiast z tabeli 11.2e wynika, że moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek i równoległej do osi obrotu rzeźby wynosi:  $I_{\text{SM}} = mL^2/12$ . Aby wyznaczyć moment bezwładności  $I_{\text{pr}}$  pręta względem danej osi obrotu, skorzystamy z twierdzenia Steinera, czyli równania (11.29), które daje:

$$I_{\text{pr}} = I_{\text{SM}} + mh_{\text{SM}}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = 4,33mR^2.$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że odległość środka masy pręta od osi obrotu wynosi  $h = R + L/2$  oraz że  $L = 2R$ . Moment bezwładności  $I$  rzeźby względem danej osi obrotu jest zatem równy:

$$I = I_{\text{ob}} + I_{\text{pr}} = \frac{1}{2}mR^2 + 4,33mR^2 = 4,83mR^2 \approx 4,8mR^2. \quad (\text{odpowiedź})$$



b) Rzeźba, spoczywająca początkowo w położeniu przedstawionym na rysunku 11.19, zaczyna obracać się wokół danej osi obrotu. Jaka będzie jej prędkość kątowa  $\omega$  wokół tej osi w chwili, gdy pręt będzie skierowany pionowo w dół?

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z trzech spostrzeżeń.

➔ 1. Prędkość kątową  $\omega$  rzeźby możemy powiązać z jej energią kinetyczną  $E_k$  za pomocą równania (11.27) ( $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ ).

➔ 2. Energia kinetyczna  $E_k$  jest związana z grawitacyjną energią potencjalną  $E_p$  rzeźby, a związek ten opisuje zasada zachowania energii mechanicznej  $E_{\text{mech}}$  rzeźby podczas jej obrotu. Przy danym obrocie rzeźby energia ta nie zmienia się (tzn.  $\Delta E_{\text{mech}} = 0$ ), następuje jedynie zamiana  $E_p$  na  $E_k$ .

➔ 3. W celu wyznaczenia energii potencjalnej rzeźby możemy ją potraktować jak cząstkę o całkowitej masie rzeźby, czyli  $2m$ , umieszczoną w jej środku masy.

Zasadę zachowania energii mechanicznej ( $\Delta E_{\text{mech}} = 0$ ) możemy zapisać w postaci:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (11.54)$$

W chwili początkowej rzeźba spoczywa, a w chwili końcowej ma prędkość kątową  $\omega$ , zatem jej energia kinetyczna zmienia się w tym czasie o:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (11.55)$$

Zmianę grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  rzeźby w tym cza-

się możemy wyznaczyć ze wzoru (8.7) ( $\Delta E_p = mg\Delta y$ ), otrzymujemy zatem:

$$\Delta E_p = (2m)g\Delta y_{\text{SM}}. \quad (11.56)$$

gdzie  $2m$  jest całkowitą masą rzeźby, a  $\Delta y_{\text{SM}}$  — zmianą położenia w pionie środka masy rzeźby w czasie obrotu.

W celu wyznaczenia wartości  $\Delta y_{\text{SM}}$  znajdziemy najpierw położenie początkowe środka masy  $y_{\text{SM}}$ , korzystając z rysunku 11.19. Środek masy obręczy (o masie  $m$ ) znajduje się w punkcie  $y = 0$ , a środek masy pręta (też o masie  $m$ ) znajduje się w punkcie  $y = R + L/2$ . Położenie środka masy rzeźby wyznaczamy z równania (9.5), co daje:

$$y_{\text{SM}} = \frac{m(0) + m(R + L/2)}{2m} = \frac{0 + m(R + 2R/2)}{2m} = R.$$

Po obróceniu rzeźby o  $180^\circ$  jej środek masy znajduje się w takiej samej odległości od osi obrotu, lecz teraz leży on *poniżej* osi. Wobec tego zmiana położenia w pionie środka ciężkości rzeźby w czasie tego obrotu wynosi  $\Delta y_{\text{SM}} = -2R$ .

Zbierzmy teraz wszystkie wyniki razem. Podstawiając związki (11.55) i (11.56) do równania (11.54), otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + (2m)g\Delta y_{\text{SM}} = 0.$$

Następnie do równania wstawiamy  $I = 4,83mR^2$  (co stwierdziliśmy w punkcie (a) oraz  $\Delta y_{\text{SM}} = -2R$  (co otrzymaliśmy przed chwilą). Rozwiązanie otrzymanego w ten sposób równania względem  $\omega$  daje:

$$\omega = \sqrt{\frac{8g}{4,83R}} = \sqrt{\frac{(8)(9,8 \text{ m/s}^2)}{(4,83)(0,15 \text{ m})}} = 10 \text{ rad/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Podsumowanie

**Położenie kątowe** Aby opisać ruch obrotowy ciała sztywnego wokół ustalonej osi zwanej **osią obrotu**, wyobrażamy sobie pewną **linię odniesienia** związaną z ciałem, która jest prostopadła do osi obrotu i obraca się wraz z nim. Położeniem kątowym ciała  $\theta$  nazywamy kąt, jaki tworzy linia odniesienia z pewnym stałym kierunkiem. Jeśli ten kąt jest wyrażony w mierze łukowej (tzn. w radianach), to:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.1)$$

przy czym  $s$  jest długością odpowiadającego kątowi  $\theta$  łuku okręgu o promieniu  $r$ . Różne jednostki kąta wiążą się ze sobą w następujący sposób:

$$1 \text{ pełny obrót} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.} \quad (11.2)$$

**Przemieszczenie kątowe** Jeśli ciało obracające się wokół osi zmienia swoje położenie kątowe z  $\theta_1$  na  $\theta_2$ , to doznaje ono **przemieszczenia kątowego**:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \quad (11.4)$$

przy czym  $\Delta\theta$  jest dodatnie, jeśli obrót odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemne, jeśli

obróć zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

**Prędkość kątowa** Jeśli ciało doznaje przemieszczenia kątowego  $\Delta\theta$  w przedziale czasu  $\Delta t$ , to jego **średnia prędkość kątowa**  $\omega_{\text{sr}}$  wynosi:

$$\omega_{\text{sr}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (11.5)$$

**Prędkość kątowa (chwilowa)**  $\omega$  tego ciała jest równa:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11.6)$$

Obie te wielkości  $\omega_{\text{sr}}$  i  $\omega$  są wektorami, których kierunek jest wyznaczony z **reguły prawej dłoni** przedstawionej na rysunku 11.6. Jest on dodatni, gdy obrót odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara oraz ujemny, gdy obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

**Przyspieszenie kątowe** Jeśli prędkość kątowa ciała zmienia się z  $\omega_1$  na  $\omega_2$  w przedziale czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$ , to **średnie**

przyspieszenie kątowe  $\alpha_{sr}$  tego ciała wynosi:

$$\alpha_{sr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (11.7)$$

Przyspieszenie kątowe (chwilowe)  $\alpha$  ciała jest równe:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11.8)$$

Obie te wielkości  $\alpha_{sr}$  i  $\alpha$  są wektorami.

**Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym** Przypadek, gdy ciało obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym ( $\alpha = \text{const}$ ) jest ważnym przypadkiem szczególnym ruchu obrotowego. Obowiązują w nim równania podane w tabeli 11.1:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \quad (11.12)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (11.13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \quad (11.14)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t. \quad (11.15)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (11.16)$$

**Związek zmiennych liniowych z kątowymi** Punkt obracającego się ciała sztywnego, znajdujący się w odległości  $r$  od osi obrotu, porusza się po okręgu o promieniu  $r$ . Przy obrocie ciała o kąt  $\theta$  zatacza on łuk o długości  $s$  równej:

$$s = \theta r \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.17)$$

przy czym  $\theta$  jest wyrażone w radianach.

Prędkość liniowa  $\vec{v}$  tego punktu jest styczna do łuku, po którym porusza się punkt, a jej wartość  $v$  wynosi:

$$v = \omega r \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.18)$$

przy czym  $\omega$  jest wartością prędkości kątowej ciała (wyrażoną w radianach na sekundę).

Przyspieszenie liniowe  $\vec{a}$  punktu ciała sztywnego ma składową styczną i radialną. Składowa styczna jest równa:

$$a_{st} = \alpha r \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.22)$$

przy czym  $\alpha$  jest wartością przyspieszenia kątowego ciała (w radianach na sekundę do kwadratu). Składowa radialna  $\vec{a}$  wynosi:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.23)$$

Jeśli punkt ciała porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to okres ruchu (punktu i całego ciała sztywnego) wynosi:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{miara łukowa}). \quad (11.19, 11.20)$$

**Energia kinetyczna ruchu obrotowego i moment bezwładności** Energia kinetyczna  $E_k$  ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi jest równa:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{miara łukowa}), \quad (11.27)$$

przy czym  $I$  jest to moment bezwładności ciała. Jest on zdefiniowany jako:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (11.26)$$

dla układu oddzielnych cząstek oraz jako:

$$I = \int r^2 dm \quad (11.28)$$

dla ciała o ciągłym rozkładzie masy. Wielkości  $r$  i  $r_i$  są odległościami elementów ciała od osi obrotu.

**Twierdzenie Steinera** Twierdzenie Steinera podaje związek między momentem bezwładności  $I$  ciała względem dowolnej osi a jego momentem bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy ciała:

$$I = I_{SM} + mh^2, \quad (11.29)$$

przy czym  $h$  jest odległością tych dwóch osi.

**Moment siły** Moment siły jest to wielkość odpowiedzialna za obrót lub skręcenie ciała wokół pewnej osi obrotu, gdy na to ciało działa siła  $\vec{F}$ . Jeśli ta siła jest przyłożona w punkcie, którego położenie względem osi jest dane przez wektor położenia  $\vec{r}$ , to wartość momentu siły wynosi:

$$M = r F_{st} = r_{\perp} F = r F \sin \phi, \quad (11.32, 11.33, 11.31)$$

przy czym  $F_{st}$  jest składową  $\vec{F}$ , prostopadłą do  $\vec{r}$ ,  $\phi$  — kątem między  $\vec{F}$  a  $\vec{r}$ , a  $r_{\perp}$  — odległością osi obrotu od prostej, wzdłuż której leży wektor  $\vec{F}$ . Kierunek tej prostej nazywamy **kierunkiem działania siły  $\vec{F}$** , a  $r_{\perp}$  — **ramieniem** tej siły. Ramieniem siły składowej  $F_{st}$  jest  $r$ . Jednostką momentu siły w układzie SI jest niuton razy metr ( $\text{N}\cdot\text{m}$ ). Jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest dodatni, a jeśli ciało obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest ujemny.

**Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego** Odpowiednikiem drugiej zasady dynamiki Newtona, odnoszącym się do ruchu obrotowego jest związek:

$$M_{wyp} = I \alpha, \quad (11.37)$$

gdzie  $M_{wyp}$  jest wypadkowym momentem siły działającym na ciało sztywne,  $I$  — momentem bezwładności ciała względem osi obrotu, a  $\alpha$  — przyspieszeniem kątowym ruchu obrotowego ciała wokół tej osi.

**Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego** Wzory, z których można obliczyć pracę i moc w ruchu obrotowym, są analogiczne do odpowiednich równań dla ruchu postępowego,

$$W = \int_{\theta_{pocz}}^{\theta_{końc}} M d\theta \quad (11.45)$$

oraz

$$P = \frac{dW}{dt} = M \omega. \quad (11.47)$$

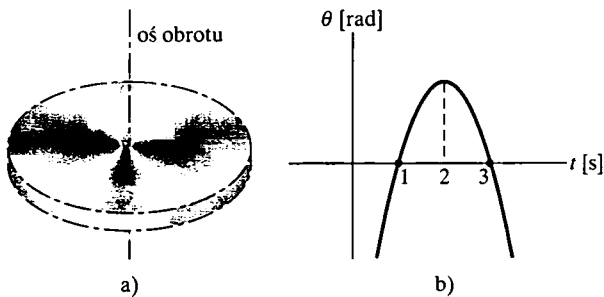
Gdy  $M$  jest stałe, równanie (11.45) upraszcza się do postaci:

$$W = M(\theta_{końc} - \theta_{pocz}). \quad (11.46)$$

Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej obracającego się ciała jest następujący:

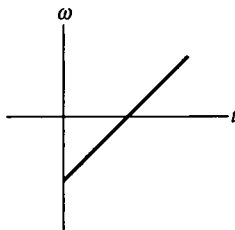
$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = \frac{1}{2} I \omega_{końc}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{pocz}^2 = W. \quad (11.44)$$

1. Na rysunku 11.20b przedstawiono wykres zależności położenia kąowego obracającego się krążka z rysunku 11.20a od czasu. Czy prędkość kątowa krążka jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru w chwili: a)  $t = 1$  s, b)  $t = 2$  s, c)  $t = 3$  s? d) Czy przyspieszenie kątowe krążka jest dodatnie, czy ujemne?



Rys. 11.20. Pytanie 1

2. Na rysunku 11.21 przedstawiono wykres zależności prędkości kątowej obracającego się krążka z rysunku 11.20a od czasu. W jakim kierunku obraca się krążek w chwili: a) początkowej, b) końcowej? c) Czy w którejś chwili krążek się nie obraca? d) Czy przyspieszenie kątowe krążka jest dodatnie, czy ujemne? e) Czy to przyspieszenie jest stałe czy zmienne?

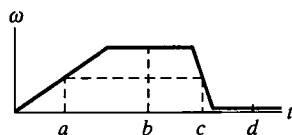


Rys. 11.21. Pytanie 2

3. Opuść prawą rękę wzdłuż ciała, a dłoń ustaw tak, aby jej wewnętrzna strona była skierowana w stronę biodra. Trzymając sztywno nadgarstek: 1) podnieś rękę przed siebie do poziomu, 2) przesuń ją w poziomie w prawo, 3) opuść do biodra. Wnętrze dłoni skierowane jest do przodu, prawda? Zaczniij od początku, ale teraz wykonaj wskazane ruchy w odwrotnej kolejności. Dlaczego tym razem wnętrze dłoni *nie jest* skierowane do przodu?

4. Oto cztery równania, opisujące zależność  $\omega(t)$  w ruchu obrotowym pewnego ciała ( $\omega$  jest wyrażone w radianach, a  $t$  w sekundach): a)  $\omega = 3$ , b)  $\omega = 4t^2 + 2t - 6$ , c)  $\omega = 3t - 4$ , d)  $\omega = 5t^2 - 3$ . W którym z tych przypadków można zastosować równania z tabeli 11.1?

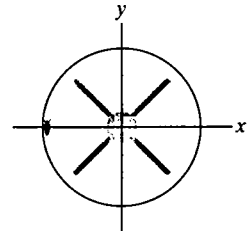
5. Na rysunku 11.22 przedstawiono wykres zależności prędkości kątowej obracającego się krążka z rysunku 11.20a od czasu. Uszereguj chwile  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  w zależności od wartości: a) przyspieszenia stycznego



Rys. 11.22. Pytanie 5

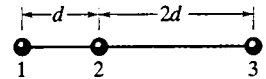
nego, b) przyspieszenia radialnego punktu na obrzeżu krążka, od największej do najmniejszej.

6. Na rysunku 11.23 pokazano wykonane z góry zdjęcie migawkowe krążka, obracającego się jak karuzela, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Prędkość kątowa krążka  $\omega$  malała (tzn. krążek obracał się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, coraz wolniej). Na rysunku widać też położenie karalucha siedzącego na brzegu krążka. Jaki kierunek miało: a) radialne, b) styczne przyspieszenie karalucha w chwili, w której zrobiono to zdjęcie?



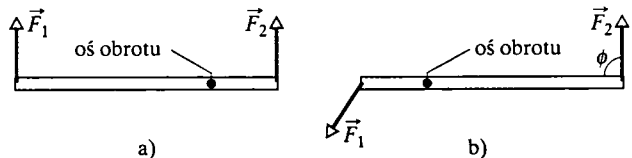
Rys. 11.23. Pytanie 6

7. Na rysunku 11.24 przedstawiono układ trzech kulek o jednakowych masach przymocowanych do pręta o znikomo małej masie, w podanych odległościach od siebie. Zastanów się, jak duże są momenty bezwładności układu względem osi, przechodzących przez każdą z kulek i prostopadłych do pręta. Uszereguj kulki ze względu na wartość momentu bezwładności układu względem osi, przechodzącej przez każdą z nich, od największej do najmniejszej.



Rys. 11.24. Pytanie 7

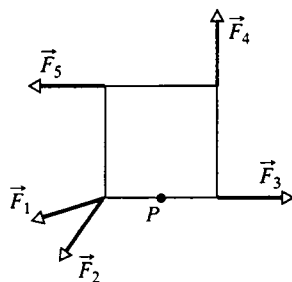
8. Na rysunku 11.25a przedstawiono widok z góry na poziomy pręt mogący się obracać wokół wskazanej osi. Na końce pręta działają dwie siły poziome, lecz pozostaje on w spoczynku. Wyobraź sobie, że kąt utworzony z prętem przez siłę  $\vec{F}_2$  zostaje zmniejszony w stosunku do pokazanej na rysunku wartości  $90^\circ$ . Czy wartość siły  $\vec{F}_2$  trzeba zwiększyć, zmniejszyć, czy pozostawić bez zmiany, jeśli pręt ma się nadal nie obracać?



Rys. 11.25. Pytania 8 i 9

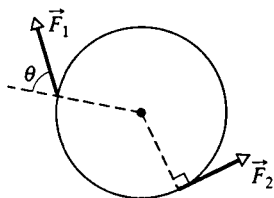
9. Na rysunku 11.25b przedstawiono widok z góry na poziomy pręt obracający się wokół wskazanej osi, w wyniku działania na jego końce dwóch sił poziomych  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Siła  $\vec{F}_2$  działa w kierunku tworzącym z prętem kąt  $\phi$ . Rozważ przypadki, gdy  $\phi$  jest równe  $90^\circ$ ,  $70^\circ$  i  $110^\circ$  oraz uszereguj je pod względem wartości przyspieszenia kątowego pręta, od największej do najmniejszej.

10. Na rysunku 11.26 przedstawiono widok z góry na karuzelę dla prawdziwych dziwaków — ma ona kształt kwadratu, obracającego się wokół osi, przechodzącej przez środek  $P$  jednego z boków tego kwadratu. Na karuzelę może działać pięć sił o jednakowych wartościach, których kierunki i punkty przyłożenia pokazano na rysunku. Uszereguj te siły w zależności od wartości momentu siły, jaki wytwarzają one względem wskazanej osi, od największej do najmniejszej.



Rys. 11.26. Pytanie 10

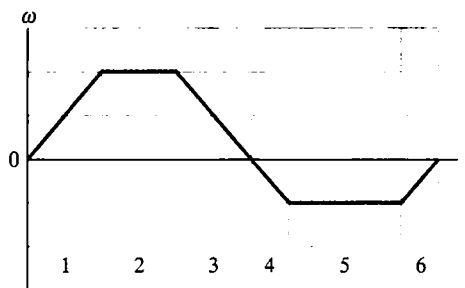
11. Jak pokazano na rysunku 11.27, na krążek działają dwie siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Krążek obraca się jak karuzela — wokół osi, przechodzącej przez jego środek — w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Prędkość obrotu jest stała, a siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  działają przez cały czas na krążek, pod kątami wskazanymi na rysunku. Z jakiegoś powodu musimy jednak zmniejszyć kąt  $\theta$  bez zmiany wartości siły  $\vec{F}_1$ . a) Czy wartość siły  $\vec{F}_2$  musimy zwiększyć, zmniejszyć, czy pozostawić bez



Rys. 11.27. Pytanie 11

zmiany, jeśli chcemy, aby prędkość kątową krążka pozostała taka sama, jak poprzednio? Czy siły: b)  $\vec{F}_1$  i c)  $\vec{F}_2$  działając z osobna, powodują obrót krążka w kierunku zgodnym, czy przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara?

12. Na rysunku 11.28 przedstawiono zależność prędkości kątowej  $\omega$  od czasu  $t$  dla karuzeli obracanej siłą zmieniającą się w czasie. Wartości bezwzględne nachylenia pokazanej krzywej są takie same w przedziałach czasu 1, 3, 4 i 6. a) W których przedziałach czasu siła przyłożona do karuzeli *odbiera* od niej energię? b) Uszereguj wskazane na rysunku przedziały czasu pod względem pracy wykonanej w danym przedziale nad karuzelą, przez przyłożoną do niej siłę, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej). c) Uszereguj te przedziały pod względem szybkości, z jaką siła przyłożona do karuzeli dostarcza jej energię lub odbiera ją od niej, od największej szybkości dostarczania karuzeli energii do największej szybkości odbierania jej od niej.



Rys. 11.28. Pytanie 12

## Zadania

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
 ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

### 11.2. Zmienne obrotowe

1. W przedziale czasu  $t$  koło zamachowe prądnicy obraca się o kąt:  $\theta = at + bt^3 - ct^4$ , przy czym  $a$ ,  $b$  i  $c$  są stałymi. Jak zależy od czasu: a) prędkość kątową, b) przyspieszenie kątowe tego koła? Podaj odpowiednie wyrażenia.
2. Ile wynosi prędkość kątowa wskazówki: a) sekundowej, b) minutowej, c) godzinowej zegara analogowego o ciągłym ruchu wskazówek? Podaj odpowiedź w radianach na sekundę.
3. Nasze Słońce znajduje się w odległości  $2,3 \cdot 10^4$  lat świetlnych od środka Drogi Mlecznej (czyli naszej Galaktyki) i porusza się wokół tego środka po okręgu, z prędkością 250 km/s. a) Ile czasu zajmuje Słońcu wykonanie pełnego obiegu środka Drogi Mlecz-

nej? b) Ile takich obrotów wykonało już Słońce od chwili, gdy powstało około  $4,5 \cdot 10^9$  lat temu?

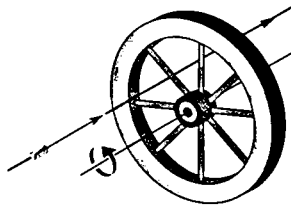
4. Położenie kątowe punktu na obrzeżu obracającego się koła jest dane wyrażeniem:  $\theta = 4t - 3t^2 + t^3$ , gdzie  $\theta$  jest wyrażone w radianach, a  $t$  w sekundach. Ile wynosi prędkość kątowa tego koła w chwili: a)  $t = 2$  s, b)  $t = 4$  s? c) Ile wynosi średnie przyspieszenie kątowe koła w przedziale czasu od  $t = 2$  s do  $t = 4$  s? Ile wynosi chwilowe przyspieszenie kątowe koła: d) na początku, e) na końcu tego przedziału czasu?

5. Położenie kątowe pewnego punktu obracającego się koła jest dane wyrażeniem:  $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$ , gdzie  $\theta$  jest wyrażone w radianach, a  $t$  w sekundach. Ile wynosi: a) położenie kątowe, b) prędkość kątowa tego punktu w chwili  $t = 0$ ? c) Ile wynosi jego prędkość kątowa w chwili  $t = 4$  s? d) Oblicz przyspieszenie kątowe tego punktu w chwili  $t = 2$  s. e) Czy przyspieszenie kątowe tego punktu jest stałe?

6. Na rysunku 11.29 przedstawiono koło o promieniu 30 cm, które ma osiem równo od siebie odległych szprych. Koło obraca się na

osi z szybkością 2,5 obrotów na sekundę. Wyobraź sobie, że masz wyrzucić strzałę o długości 20 cm, równoległe do osi obrotu koła, tak aby przeszła ona przez nie i nie dotknęła żadnej ze szprych.

a) Jaką minimalną prędkość musi mieć strzała, aby ci się to udało? b) Czy ma znaczenie, w które miejsce między osią a obręczą będziesz celował? Jeśli tak, to gdzie najlepiej celować? Przyjmij, że strzała i szprychy są bardzo cienkie.



Rys. 11.29. Zadanie 6

7. Skoczek do wody wykonuje podczas skoku z trampoliny, położonej 10 m nad wodą, 2,5 obrotu w powietrzu. Wyznacz średnią prędkość kątową skoczka podczas tego skoku, zakładając, że w chwili początkowej ma on prędkość pionową równą zeru. ilw

#### 11.4. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

8. Prędkość kątową silnika samochodu wzrasta ze stałą szybkością, od wartości 1200 obrotów/min do 3000 obrotów/min w czasie 12 s. a) Ile wynosi jego przyspieszenie kątowe w obrotach na minutę do kwadratu? b) Ile obrotów wykona silnik w czasie tych 12 sekund?

9. Talerz gramofonu obracającego się normalnie z prędkością kątową  $33\frac{1}{3}$  obrotu/min zwalnia i zatrzymuje się po 30 s od wyłączenia silniczka. a) Wyznacz przyspieszenie kątowe talerza w tym czasie. Przyjmij, że jest ono stałe i podaj wynik w obrotach na minutę do kwadratu. b) Ile obrotów wykona talerz w tym czasie?

10. Krążek, obracający się początkowo z prędkością 120 rad/s, w pewnej chwili zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem kątowym o wartości 4 rad/s<sup>2</sup>. a) Po jakim czasie krążek się zatrzyma? b) O jaki kąt obróci się on w tym czasie?

11. Ciężkie koło zamachowe, obracające się wokół swej osi, zwalnia w wyniku tarcia w jego łożysku. Po upływie minuty od chwili, w której koło zaczęło zwalniać, jego prędkość kątowa wynosi 0,9 prędkości początkowej, która była równa 250 obrotów/min. Oblicz prędkość kątową koła po upływie następnej minuty, zakładając, że jego przyspieszenie kątowe jest stałe.

12. Nieruchomy początkowo krążek zaczyna obracać się wokół swej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. W ciągu pierwszych 5 s ruchu krążek obraca się o 25 rad. Wyznacz wartość: a) przyspieszenia kątowego, b) średniej prędkości kątowej krążka w tym czasie. c) Ile wynosi chwilowa prędkość kątowa krążka po 5 s? d) O jaki kąt obróci się krążek w ciągu następnych 5 s, jeśli będzie się nadal poruszał z takim samym przyspieszeniem kątowym?

13. Koło obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym równym 3 rad/s<sup>2</sup>. W pewnym przedziale czasu o długości 4 s obróciło się ono o 120 rad. Przyjmij, że ruch koła rozpoczął się od stanu spoczynku i odpowiedz, ile czasu upłynęło od początku ruchu, do początku wspomnianego przedziału czasu o długości 4 s. www

14. Nieruchome początkowo koło zaczyna obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym, równym 2 rad/s<sup>2</sup>. W pewnym przedziale czasu o długości 3 s obróciło się ono o 90 rad. a) Ile czasu upłynęło od początku ruchu koła, do początku wspomnianego przedziału czasu o długości 3 s? b) Ile wynosiła prędkość kątowa koła na początku tego przedziału czasu o długości 3 s?

15. W chwili  $t = 0$  koło zamachowe ma prędkość kątową równą 4,7 rad/s i przyspieszenie kątowe, wynoszące  $-0,25$  rad/s<sup>2</sup>, a jego linia odniesienia wskazuje kąt  $\theta_0 = 0$ . a) O jaki maksymalny kąt  $\theta_{\max}$  obróci się linia odniesienia koła w dodatnim kierunku obrotu? W jakiej chwili (lub chwilach) linia odniesienia zajmie położenie kątowe: b)  $\theta = \frac{1}{2}\theta_{\max}$ , c)  $\theta = -10,5$  rad (uwzględnij zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości  $t$ )? d) Sporządź wykres  $\theta$  jako funkcji  $t$  i wskaż na nim odpowiedzi na pytania (a), (b) i (c).

16. Nieruchomy początkowo krążek zaczyna obracać się wokół swej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. W pewnej chwili jego prędkość kątowa wynosi 10 obrotów/s, a po wykonaniu przez krążek dalszych 60 obrotów jest równa 15 obrotów/s. Oblicz: a) przyspieszenie kątowe krążka, b) czas, w jakim wykonał on wspomniane 60 obrotów, c) czas, w jakim krążek osiągnął prędkość kątową równą 10 obrotów/s, d) liczbę obrotów, jakie wykonał krążek od początku ruchu do chwili, gdy osiągnął prędkość kątową równą 10 obrotów/s.

17. Koło zamachowe zaczyna zwalniać w chwili, gdy obraca się z prędkością kątową równą 1,5 rad/s i zatrzymuje się po wykonaniu 40 obrotów. a) Wyznacz czas, w jakim wykonało ono 40 obrotów, zakładając, że ruch odbywał się ze stałym przyspieszeniem kątowym. b) Ile wynosiło to przyspieszenie kątowe? c) W jakim czasie koło wykonało pierwsze 20 z tych 40 obrotów? ilw

18. Koło obraca się wokół swej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym, wynoszącym 4 rad/s<sup>2</sup>. W pewnym przedziale czasu o długości 4 s koło obraca się o kąt równy 80 rad. a) Jaką prędkość kątową ma koło na początku tego przedziału czasu? Ile czasu upłynęło od początku ruchu obrotowego koła do chwili, odpowiadającej początkowi wspomnianego przedziału czasu, jeśli w chwili rozpoczęcia ruchu koło znajdowało się w spoczynku?

#### 11.5. Związek zmiennych liniowych z kątowymi

19. Ile wynosi przyspieszenie liniowe punktu na obrzeżu płyty gramofonowej o średnicy 30 cm, obracającej się ze stałą prędkością kątową, równą  $33\frac{1}{3}$  obrotu/min?

20. Płyta gramofonowa obraca się na talerzu gramofonu z prędkością  $33\frac{1}{3}$  obrotu/min. a) Ile wynosi prędkość kątowa płyty w radianach na sekundę? Ile wynosi prędkość liniowa punktu płyty, w którym dotyka jej igła, gdy igła ta znajduje się w odległości: b) 15 cm, c) 7,4 cm od osi talerza?

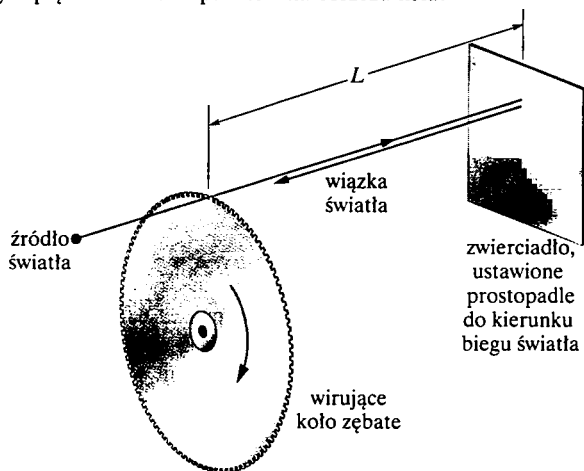
21. Ile wynosi prędkość kątowa samochodu, pokonującego z prędkością 50 km/h zakręt, stanowiący łuk okręgu o promieniu 110 m?

22. Koło zamachowe o średnicy 1,2 m obraca się z prędkością kątową, równą 200 obrotów/min. a) Ile wynosi prędkość kątowa koła w radianach na sekundę? b) Ile wynosi prędkość liniowa punktu na obrzeżu koła? c) Jakie stałe przyspieszenie kątowe należy nadać temu kołu, aby zwiększyć jego prędkość kątową do wartości 1000 obrotów/min w czasie 60 s? Podaj odpowiedź w obrotach na minutę do kwadratu. d) Ile obrotów wykona koło w czasie 60 sekund?

23. Astronauta odbywa trening na wirówce o promieniu 10 m, której ruch odbywa się zgodnie z równaniem:  $\theta = 0,3t^2$ , gdzie  $t$  jest wyrażone w sekundach, a  $\theta$  w radianach. Wyznacz wartość: a) prędkości kątowej, b) prędkości liniowej, c) przyspieszenia stycznego, d) przyspieszenia radialnego astronauty w chwili  $t = 5$  s.

24. Statek kosmiczny pokonuje łuk okręgu o promieniu 3220 km, poruszając się z prędkością 29 000 km/h. Jaka jest wartość jego: a) prędkości kątowej, b) przyspieszenia radialnego, c) przyspieszenia stycznego?

25. Jedną z dawniejszych metod pomiaru prędkości światła polega na zastosowaniu wirującego koła zębatego. Wiązka światła przechodzi przez wycięcie na skraju koła, jak pokazano na rysunku 11.30, biegnie do zwierciadła, umieszczonego w dużej odległości od koła, a po odbiciu od tego zwierciadła dociera do koła w chwili, w której może przejść przez następne wycięcie na jego brzegu. W jednym z takich doświadczeń użyto koła zębatego o promieniu 5 cm, mającego na brzegu 500 wycięć, a zwierciadło umieszczono w odległości  $L = 500$  m od koła. Zmierzona wartość prędkości światła była równa  $3 \cdot 10^5$  km/h. a) Z jaką (stałą) prędkością kątową obracało się koło zębate? b) Ile wynosiła przy tym prędkość liniowa punktów na obrzeżu koła?



Rys. 11.30. Zadanie 25

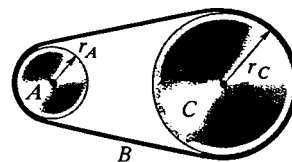
26. Koło zamachowe silnika parowego obraca się ze stałą prędkością kątową, równą 150 obrotów/min. Po zamknięciu strumienia pary tarcie w łożyskach koła oraz opór powietrza powodują zatrzymanie się koła po upływie 2,2 h. a) Ile wynosi przy tym stałe

przyspieszenie kątowe koła, w obrotach na minutę do kwadratu? b) Ile obrotów wykona to koło od chwili odcięcia dopływu pary do zatrzymania się koła? c) Ile wynosi składowa styczna przyspieszenia liniowego punktu koła, znajdującego się w odległości 50 cm od osi obrotu w chwili, gdy koło obraca się z prędkością kątową równą 75 obrotów/min? d) Ile wynosi wówczas wartość całkowitego (wypadkowego) przyspieszenia liniowego tego punktu?

27. Ziemia obraca się wokół osi, łączącej jej bieguny. a) Ile wynosi przy tym prędkość kątowa  $\omega$  punktu na powierzchni Ziemi, na szerokości geograficznej  $40^\circ$  N? b) Ile wynosi prędkość liniowa  $v$  tego punktu? c) Ile wynoszą wartości: c)  $\omega$ , d)  $v$  dla punktu na równiku?

28. Znajdujące się początkowo w spoczynku koło zamachowe żyroskopu o promieniu 2,83 cm jest rozpędzane z przyspieszeniem kątowym  $14,2$  rad/s<sup>2</sup>, aż do osiągnięcia prędkości kątowej 2760 obrotów/min. a) Ile wynosi w tym czasie przyspieszenie styczne punktu, znajdującego się na obrzeżu koła? b) Ile wynosi przyspieszenie radialne tego punktu, po osiągnięciu przez koło pełnej prędkości obrotu? c) Jaką drogę przebywa punkt na obrzeżu koła podczas jego rozpędzania?

29. Jak pokazano na rysunku 11.31, koło A o promieniu  $r_A = 10$  cm jest połączone za pomocą pasa B z kołem C o promieniu  $r_C = 25$  cm. Prędkość kątowa koła A, równa zero w chwili początkowej, wzrasta ze stałą szybkością równą  $1,6$  rad/s<sup>2</sup>. Po jakim czasie (od początku ruchu) prędkość kątowa koła C osiągnie wartość 100 obrotów/min? Załóż, że pas porusza się bez poślizgu. Wskazówka: Jeśli pas się nie ślizga, to prędkości liniowe punktów na obrzeżach obydwu kół muszą być sobie równe. www

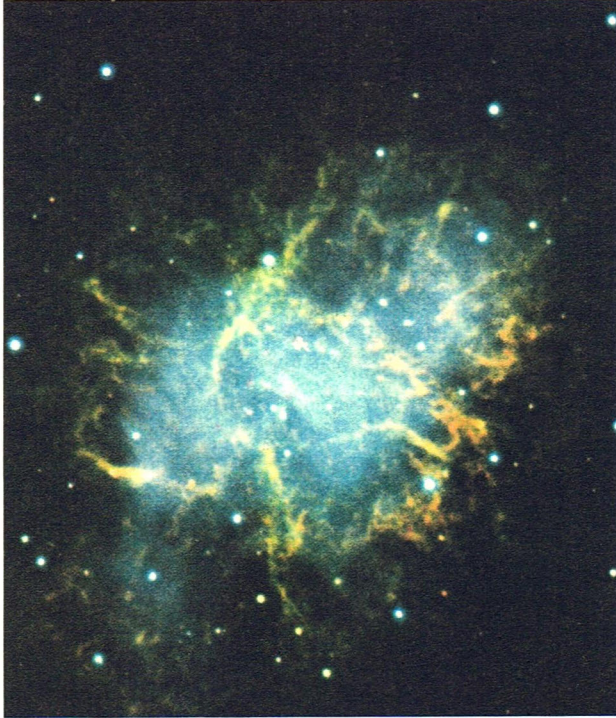


Rys. 11.31. Zadanie 29

30. Pewne ciało obraca się wokół stałej osi, przy czym położenie kątowe jego linii odniesienia jest dane zależnością:  $\theta = 0,4e^{2t}$ , w której  $\theta$  jest wyrażone w radianach, a  $t$  w sekundach. Rozważ punkt tego ciała, znajdujący się w odległości 4 cm od osi obrotu. Jaka jest wartość: a) składowej stycznej, b) składowej radialnej przyspieszenia tego punktu w chwili  $t = 0$ ?

31. Pulsar jest to bardzo szybko wirująca gwiazda neutronowa, która wysyła fale radiowe tak, jak latarnia morska wysyła światło. Na Ziemi odbieramy jeden impuls radiowy podczas każdego obrotu gwiazdy. Okres obrotu  $T$  pulsara wyznaczamy, mierząc odstęp w czasie między kolejnymi impulsami. Pulsar w mgławicy Kraba (rys. 11.32) ma okres obrotu  $T = 0,033$  s, rosnący w czasie z szybkością  $1,26 \cdot 10^{-5}$  sekundy na rok. a) Ile wynosi przyspieszenie kątowe pulsara? b) Jeśli to przyspieszenie kątowe

będzie stałe, to po ilu latach od chwili obecnej pulsar przestanie się obracać? c) Pulsar ten powstał w wyniku wybuchu supernowej, obserwowanej z Ziemi w roku 1054. Jaki był początkowy okres obrotu pulsara (załóż, że przyspieszenie kątowe pulsara było stałe przez cały czas od jego powstania)?



Rys. 11.32. Zadanie 31. Mgławica Kraba powstała z gwiazdy, której wybuch był widoczny z Ziemi w roku 1054. Prócz widocznych na zdjęciu gazowych pozostałości po tym wybuchu, powstała przy tym także wirująca gwiazda neutronowa w środku mgławicy. Średnica tej gwiazdy wynosi zaledwie 30 km

32. Talerz gramofonu obraca się z prędkością  $33\frac{1}{3}$  obrotu/min. Na talerzu, w odległości 6 cm od osi obrotu, znajduje się pestka arbuza. a) Oblicz przyspieszenie pestki, zakładając, że nie ześlizguje się ona po talerzu. b) Ile wynosi minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego między pestką a talerzem, przy której pestka nie ślizga się po talerzu? c) Przyjmij, że talerz uzyskuje swoją stałą prędkość kątową po 0,25 s od chwili włączenia silniczka, obracając się w tym czasie ze stałym przyspieszeniem kątowym. Oblicz minimalną wartość współczynnika tarcia statycznego, przy której pestka nie ślizga się po talerzu podczas jego rozpędzania.

## 11.6. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

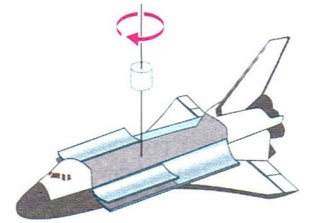
33. Oblicz moment bezwładności koła, które ma energię kinetyczną równą 24 400 J, gdy obraca się z prędkością kątową 602 obrotów/min.

34. Cząsteczka tlenu  $O_2$  ma masę  $5,3 \cdot 10^{-26}$  kg, a jej moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek odcinka, łączącego atomy tlenu i prostopadłej do tego odcinka, wynosi  $1,94 \cdot 10^{-46}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>. Przyjmij, że środek masy cząsteczki  $O_2$  ma w gazie prędkość ruchu postępowego równą 500 m/s, oraz że energia kinetyczna ruchu obrotowego cząsteczki stanowi  $\frac{2}{3}$  energii kinetycznej ruchu postępowego jej środka masy. Ile wynosi prędkość kąтова obrotu cząsteczki wokół osi przechodzącej przez jej środek masy?

## 11.7. Jak obliczyć moment bezwładności?

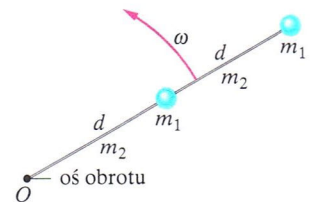
35. Dwa jednorodne walce o takich samych masach, równych 1,25 kg, lecz o różnych promieniach podstawy, zostały wprowadzone — każdy z osobna — w ruch obrotowy wokół swej osi z prędkością kątową 235 rad/s. Ile wynosi energia kinetyczna ruchu obrotowego: a) walca o mniejszym promieniu podstawy równym 0,25 m, b) walca o większym promieniu podstawy równym 0,75 m?

36. Satelita komunikacyjny o masie 1210 kg ma kształt walca o średnicy podstawy 1,21 m i wysokości 1,75 m. Przed wyrzuceniem go z pokładu kosmicznego statku transportowego wprowadza się go w ruch obrotowy wokół osi walca, z prędkością kątową 1,52 obrotu/s (rys. 11.33). Oblicz: a) moment bezwładności satelity względem jego osi obrotu, b) energię kinetyczną jego ruchu obrotowego.



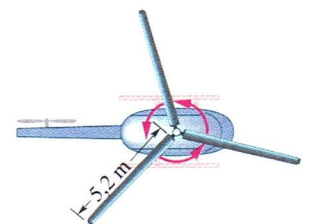
Rys. 11.33. Zadanie 36

37. Na rysunku 11.34 przedstawiono dwie cząstki o masach  $m_1$  każda, połączone ze sobą cienkim prętem o długości  $d$  i masie  $m_2$ . Drugi taki sam pręt łączy jedną z cząstek z punktem  $O$ . Układ obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi, przechodzącej przez punkt  $O$  i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Wyznacz: a) moment bezwładności układu względem tej osi, b) energię kinetyczną ruchu obrotowego układu, wyrażając te wielkości przez wielkości dane.



Rys. 11.34. Zadanie 37

38. Każda z trzech łopat śmigła helikoptera ma długość 5,2 m i masę 240 kg (rysunek 11.35). Śmigło obraca się z prędkością kątową 350 obrotów/min. a) Ile wynosi moment bezwładności całego śmigła względem osi jego obrotu (przyjmij, że każdą



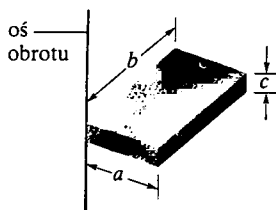
Rys. 11.35. Zadanie 38

łopatę śmigła można uważać za cienki pręt, obracający się wokół osi, przechodzącej przez jeden z jego końców)? b) Ile wynosi całkowita energia kinetyczna ruchu obrotowego śmigła?

39. Oblicz moment bezwładności przymiaru metrowego o masie 0,56 kg, względem osi prostopadłej do przymiaru i przechodzącej przez kreskę, oznaczoną jako 20 cm (przyjmij, że przymiar można uważać za cienki pręt).

40. Cztery jednakowe cząstki o masie 0,5 kg każda umieszczone w wierzchołkach kwadratu o boku 2 m i połączone je czterema prętami o znikomo małych masach, tworzącymi boki tego kwadratu. Wyznacz moment bezwładności utworzonego w ten sposób ciała względem osi: a) leżącej w płaszczyźnie kwadratu i przechodzącej przez środki jego przeciwległych boków, b) prostopadłej do płaszczyzny kwadratu i przechodzącej przez środek jednego z boków, c) leżącej w płaszczyźnie kwadratu i przechodzącej przez dwa jego przeciwległe wierzchołki.

41. Jednorodna płyta w kształcie prostokąta przedstawiona na rysunku 11.36 ma masę  $m$  oraz długości krawędzi  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Oblicz moment bezwładności tej płyty względem osi przechodzącej przez jej wierzchołek i prostopadłej do dwóch dłuższych krawędzi.



Rys. 11.36. Zadanie 41

42. Przeanalizuj układ czterech cząstek o następujących masach i współrzędnych: 50 g,  $x = 2$  cm,  $y = 2$  cm; 25 g,  $x = 0$ ,  $y = 4$  cm; 25 g,  $x = -3$  cm,  $y = -3$  cm; 30 g,  $x = -2$  cm,  $y = 4$  cm. Wyznacz moment bezwładności tego układu względem osi: a)  $x$ , b)  $y$ , c)  $z$ . d) Oznacz wyniki, otrzymane w punktach (a) i (b) przez  $A$  i  $B$ . Jak wyraża się wynik, otrzymany w punkcie (c) przez wartości  $A$  i  $B$ ?

43. a) Wykaż, że moment bezwładności walca o masie  $m_1$  i promieniu podstawy  $R$  względem jego osi jest równy momentowi bezwładności cienkiej obręczy o masie  $m_1$  i promieniu  $R/\sqrt{2}$  względem jej osi. b) Wykaż, że moment bezwładności  $I$  dowolnego ciała o masie  $m_1$  względem dowolnej osi jest równy momentowi bezwładności obręczy o masie  $m_1$  i promieniu:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m_1}}$$

względem tej osi. Promień tej obręczy nazywa się *ramieniem bezwładności* danego ciała.

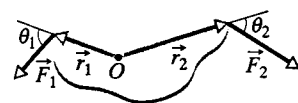
44. W Europie stosowano swego czasu wózki dostawcze, do napędu których używano energii ruchu obrotowego koła zamachowego. Za pomocą silnika elektrycznego rozpędzano koło zamachowe do jego maksymalnej prędkości kątowej równej  $200\pi$  rad/s. Jednym z takich kół zamachowych był jednorodny walec o masie 500 kg i promieniu podstawy 1 m. a) Jaką energię kinetyczną miało takie koło po jego rozpędzeniu? b) Jak długo mógł być w ruchu taki wózek, jeśli jego średnia moc robocza wynosiła 8 kW?

## 11.8. Moment siły

45. Niewielką kulkę o masie 0,75 kg przymocowano do końca pręta o długości 1,25 m i znikomo małej masie, a drugi koniec pręta zawieszono na osi. Wyznacz moment siły, działający na utworzone w ten sposób wahadło, gdy jest ono odchylone od pionu o kąt  $30^\circ$ .

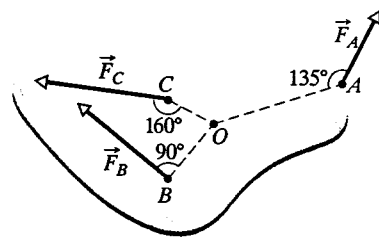
46. Ramię pedału roweru ma długość 0,152 m, a rowerzysta działa na pedał skierowaną pionowo w dół siłą o wartości 111 N. Jaką wartość ma moment siły, działający na pedał, gdy ramię tworzy z pionem kąt: a)  $30^\circ$ , b)  $90^\circ$ , c)  $180^\circ$ ?

47. Ciało, przedstawione na rysunku 11.37, może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$ . Na to ciało działają dwie siły, jak pokazano na rysunku. a) Podaj wyrażenie na wypadkowy moment siły działający na to ciało. b) Ile wynosi moment siły, jeśli  $r_1 = 1,30$  m,  $r_2 = 2,15$  m,  $F_1 = 4,2$  N,  $F_2 = 4,9$  N,  $\theta_1 = 75^\circ$ , a  $\theta_2 = 60^\circ$ ? ilw



Rys. 11.37. Zadanie 47

48. Ciało, przedstawione na rysunku 11.38, może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$ . Na to ciało działają trzy siły, których kierunki pokazano na rysunku; siła  $F_A = 10$  N jest przyłożona w punkcie  $A$ , odległym od  $O$  o 8 m, siła  $F_B = 16$  N jest przyłożona w punkcie  $B$ , odległym od  $O$  o 4 m, a siła  $F_C = 19$  N jest przyłożona w punkcie  $C$ , odległym od  $O$  o 3 m. Ile wynosi działający na to ciało wypadkowy moment siły względem punktu  $O$ ?



Rys. 11.38. Zadanie 48

## 11.9. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

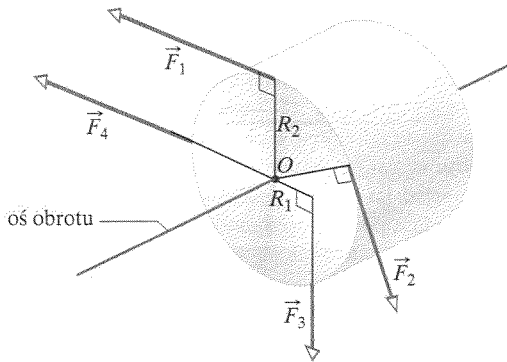
49. Podczas odbicia się skoczka od trampoliny prędkość kątowa jego obrotu wokół środka masy wzrasta od zera do 6,2 rad/s w czasie 220 ms. Wyznacz wartość: a) średniego przyspieszenia kątowego skoczka, b) średniego momentu siły, działającego na niego ze strony trampoliny, jeśli moment bezwładności skoczka względem jego środka masy wynosi  $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . ilw



50. Moment siły o wartości  $32 \text{ N} \cdot \text{m}$  nadaje pewnemu kołu przyspieszenie kątowe, równe  $25 \text{ rad/s}$ . Ile wynosi moment bezwładności tego koła?

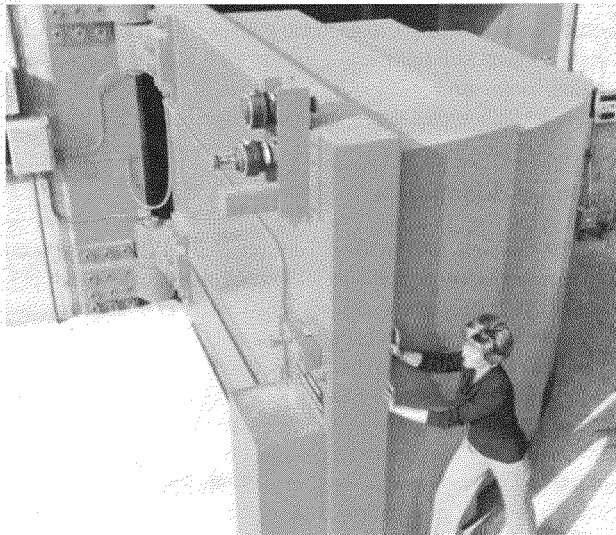
51. Cienka powłoka sferyczna ma promień równy  $1,9 \text{ m}$ . Zewnętrzny moment siły o wartości  $960 \text{ N} \cdot \text{m}$  nadaje tej powłoce przyspieszenie kątowe  $6,2 \text{ rad/s}$  wokół osi, przechodzącej przez środek powłoki. Wyznacz: a) moment bezwładności powłoki względem tej osi, b) masę powłoki.

52. Jak pokazano na rysunku 11.39, walec o masie  $2 \text{ kg}$  może obracać się wokół swej osi. Wartości działających na walec sił są równe:  $F_1 = 6 \text{ N}$ ,  $F_2 = 4 \text{ N}$ ,  $F_3 = 2 \text{ N}$  i  $F_4 = 5 \text{ N}$ , a  $R_1 = 5 \text{ cm}$ , oraz  $R_2 = 12 \text{ cm}$ . Wyznacz wartość i kierunek przyspieszenia kątowego walca (załóż, że w czasie obrotu kierunki sił względem walca się nie zmieniają).



Rys. 11.39. Zadanie 52

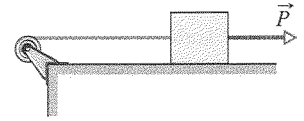
53. Na rysunku 11.40 pokazano najcięższe na świecie drzwi na zawiasach, którymi są stanowiące osłonę przed promieniowaniem drzwi do sali badań neutronowych w ośrodku Lawrence Livermore



Rys. 11.40. Zadanie 53

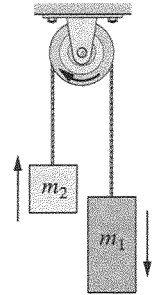
Laboratory. Mają one masę  $44\,000 \text{ kg}$ , ich moment bezwładności względem osi zawiasów wynosi  $8,7 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , a ich szerokość jest równa  $2,4 \text{ m}$ . Jaką stałą siłą, przyłożoną do zewnętrznej ramy i prostopadłą do płaszczyzny drzwi, trzeba na nie działać, aby obrócić je o  $90^\circ$  w ciągu  $30 \text{ s}$ ? Pomiń tarcie i załóż, że drzwi pozostają początkowo w spoczynku.

54. Koło o promieniu  $0,2 \text{ m}$  zamocowano na poziomej osi, wokół której może się ono obracać bez tarcia. Moment bezwładności koła względem tej osi jest równy  $0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Na koło nawinięto linę o znikomo małej masie, a jej koniec połączono z klockiem o masie  $2 \text{ kg}$ , ślizgającym się bez tarcia po powierzchni poziomej. Do klocka przyłożono poziomo siłę o wartości  $P = 3 \text{ N}$  (rys. 11.41). Wyznacz wartość przyspieszenia kątowego koła. Przyjmij, że lina nie ślizga się po powierzchni koła.



Rys. 11.41. Zadanie 54

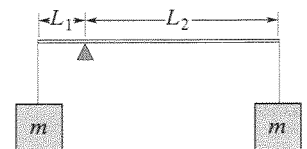
55. Na rysunku 11.42 przedstawiono układ, złożony z dwóch klocków o masach  $m_1 = 500 \text{ g}$  i  $m_2 = 460 \text{ g}$  oraz krążka o promieniu  $5 \text{ cm}$ , mogącego obracać się na łożyskach bez tarcia, wokół osi poziomej. Gdy temu układowi, pozostającemu początkowo w spoczynku, umożliwiono ruch swobodny, cięższy klocek opadł o  $75 \text{ cm}$  w czasie  $5 \text{ s}$  (przy czym linka nie ślizgała się po krążku). a) Wyznacz wartość przyspieszenia klocków. Oblicz naprężenie tej części linki, na której końcu zawieszony jest: b) klocek cięższy, c) klocek lżejszy. Wyznacz: d) wartość przyspieszenia kątowego krążka, e) jego moment bezwładności. [www](http://www).



Rys. 11.42. Zadanie 55

56. Na krążek o promieniu  $10 \text{ cm}$  i momencie bezwładności względem jego osi równym  $1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  działa siła, przyłożona stycznie do jego obwodu. Wielkość tej siły zmienia się w czasie, zgodnie z równaniem:  $F = 0,5t + 0,3t^2$ , w którym  $F$  jest wyrażone w niutonach, a  $t$  w sekundach. W chwili początkowej krążek się nie porusza. Ile wynosi: a) przyspieszenie kątowe, b) prędkość kątowa krążka w chwili  $t = 3 \text{ s}$ ?

57. Na rysunku 11.43 pokazano dwa klocki, każdy o masie  $m$ , zawieszony na dwóch końcach sztywnego pręta o znikomo małej masie oraz długości  $L_1 + L_2$ , przy czym  $L_1 = 20 \text{ cm}$ ,



Rys. 11.43. Zadanie 57

a  $L_2 = 80$  cm. Pręt podtrzymano w położeniu poziomym, a następnie puszczono swobodnie. Jaka była początkowa wartość przyspieszenia: a) klocka bliższego ostrza, na którym jest podparty pręt, b) klocka dalszego od tego ostrza?

### 11.10. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego

58. Kłoczek z rysunku 11.17 został przytrzymany, a następnie puszczony swobodnie. a) Wyznacz jego prędkość po przebyciu drogi 50 cm, zakładając, że  $R = 12$  cm,  $m_1 = 400$  g oraz  $m_2 = 50$  g. Rozwiąż zadanie, korzystając z zasady zachowania energii. b) Powtórz obliczenia dla  $R = 5$  cm.

59. Wał korbowy samochodu przenosi energię z silnika na oś, z szybkością 100 KM (= 74,6 kW), obracając się z prędkością 1800 obrotów/min. Jakim momentem siły (w niutonach razy metr) działa on na oś?

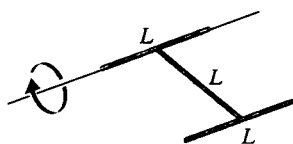
60. Koło o masie 32 kg, które można uważać za cienką obręcz o promieniu 1,2 m, obraca się z prędkością 280 obrotów/min. Trzeba je zatrzymać w czasie 15 s. a) Jaką pracę należy przy tym wykonać? b) Jaka średnia moc jest do tego potrzebna?

61. Cienki pręt o długości  $L$  i masie  $m$  zawieszono swobodnie na jednym z jego końców. Drugi koniec odchyłono w bok, po czym puszczono, umożliwiając prętowi ruch wahadłowy. Pręt przechodzi przez położenie pionowe z prędkością kątową  $\omega$ . Wyznacz: a) energię kinetyczną pręta w położeniu pionowym, b) maksymalne wzniesienie środka masy pręta, wyrażając odpowiedzi przez podane wielkości oraz  $g$ . Pomiń tarcie i opór powietrza.

62. Oblicz: a) moment siły, b) energię, c) średnią moc, jakie byłyby potrzebne, aby w ciągu 1 dnia rozpędzić Ziemię od stanu spoczynku do jej obecnej prędkości kątowej obrotu wokół jej osi.

63. Przymiar metrowy ustawiono pionowo, z jednym końcem opartym o podłogę, a następnie umożliwiono mu upadek. Wyznacz prędkość drugiego końca przymiaru w chwili, gdy dociera on do podłogi. Załóż, że koniec oparty o podłogę nie ślizga się po niej. *Wskazówka:* Potraktuj przymiar jak cienki pręt i skorzystaj z zasady zachowania energii.  $ilw$

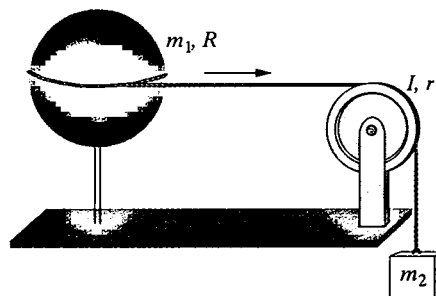
64. Jednorodny walec o promieniu 10 cm i masie 20 kg umocowano tak, aby mógł się obracać swobodnie wokół osi poziomej, która jest równoległa do osi walca i odległa od niej o 5 cm. a) Ile wynosi moment bezwładności walca względem takiej osi? b) Wyobraź sobie, że walec ustawiono w takim położeniu, że oś walca znajduje się na tej samej wysokości, co podana oś obrotu, a następnie puszczono go swobodnie. Jaka będzie prędkość kątowa walca, gdy jego środek masy będzie miał najniższe położenie?



Rys. 11.44. Zadanie 65

kie pręty, każdy o długości  $L$ , połączone w kształt litery H (rys. 11.44). Ciało to może obracać się wokół osi poziomej, na której leży jeden z równoległych prętów. Ciało jest podtrzymane tak, że leży w płaszczyźnie poziomej, po czym zostaje puszczono swobodnie. Ile wynosi jego prędkość kątowa w chwili, gdy ciało znajduje się w płaszczyźnie pionowej?  $www$

66. Jednorodna powłoka sferyczna o masie  $m_1$  i promieniu  $R$  obraca się na łożyskach bez tarcia, wokół swej osi pionowej (rys. 11.45). Linka o znikomo małej masie jest owinięta wokół powłoki w jej płaszczyźnie równikowej, a następnie przełożona przez krążek o momencie bezwładności  $I$  oraz promieniu  $r$  i przymocowana do obciążnika o masie  $m_2$ . Krążek może obracać się bez tarcia, a linka nie ślizga się po krążku. Obciążnik przytrzymujemy, a potem puszczamy swobodnie. Jaka będzie prędkość obciążnika po przebyciu drogi  $h$ ? Skorzystaj z zasady zachowania energii.



Rys. 11.45. Zadanie 66

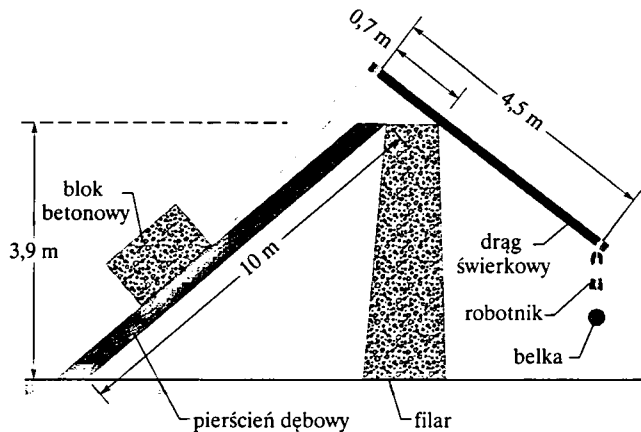
67. Wysoki, cylindryczny komin przewraca się z powodu pęknięcia u podstawy. Uznaj komin za cienki pręt o długości  $H$  i oznacz kąt, utworzony przez komin z pionem jako  $\theta$ . Wyznacz: a) prędkość kątową komina, b) przyspieszenie radialne górnego końca komina, c) przyspieszenie styczne tego końca, wyrażając odpowiedzi przez wielkości dane oraz  $g$ . *Wskazówka:* Nie obliczaj momentu siły, lecz skorzystaj z zasady zachowania energii; przypomnij sobie, że  $\alpha = d\omega/dt$ , co przyda ci się w punkcie (c). d) Dla jakiej wartości  $\theta$  przyspieszenie styczne jest równe  $g$ ?

### Zadania dodatkowe

68. 30 czerwca 1908 roku o godzinie 7.30 nad odległym zakątkiem środkowej Syberii, na 61° szerokości geograficznej północnej i 102° długości wschodniej miał miejsce gigantyczny wybuch, któremu towarzyszyła kula ognista, stanowiąca najjaśniejszy błysk, jaki ktokolwiek mógł zobaczyć przed zbudowaniem bomby atomowej. Zjawisko to, według jednego ze świadków „obejmujące olbrzymią część nieba” było najprawdopodobniej eksplozją meteoroidu skalnego o średnicy około 140 m, którego pozostałości nazwano *meteoritem tunguskim*. a) Biorąc pod uwagę jedynie ruch obrotowy Ziemi oblicz, o ile później musiałby dotrzeć do Ziemi ten meteoroid, aby wybuch nastąpił nad Helsinkami, tzn. na 25° długości geograficznej wschodniej. Wybuch taki stałby z po-

wierzchni Ziemi całe to miasto. b) Gdyby ten meteoroid nie był skalny, lecz *metaliczny*, to mógłby nie wybuchnąć w atmosferze, lecz dotrzeć w całości do powierzchni Ziemi. Oblicz, o ile później musiałby on dotrzeć do Ziemi, aby wpaść do Oceanu Atlantyckiego na  $20^\circ$  długości geograficznej zachodniej. Powstałe przy tym fale tsunami (jak te, które są skutkiem podwodnych trzęsień Ziemi i wybuchów wulkanów) zniszczyłyby zapewne wszelkie ślady cywilizacji w rejonach przybrzeżnych po obydwu stronach Oceanu Atlantyckiego.

69. Od lat badacze spierają się o to, w jaki sposób zbudowano słynne kamienne słupy w Stonehenge, tzn. w jaki sposób na szczycie kolumn wzniesiono potężne kamienne poprzeczki. W pewnym miasteczku w Czechach próbowano sprawdzić, jak jedna z proponowanych hipotez wytrzymała konfrontację z rzeczywistością. Betonowe bloki o masie 5124 kg wciągano na szczyt filarów po dwóch dębowych pniach, których górną powierzchnię odarto z kory i nasmarowano tłuszczem (rys. 11.46). Pnie miały długość 10 m i sięgały od podłoża do szczytu jednego z filarów o wysokości 3,9 m. Współczynnik tarcia statycznego między pniami a blokami z betonu był równy 0,22. Blok wciągany był za pomocą liny, którą owiązano blok, a jej końce przymocowano do dwóch drągów świerkowych o długości 4,5 m. Na drugim końcu każdego drąga zawieszono belkę. Gdy na tej belce stanęło lub siedło dostatecznie wielu robotników, drąg obracał się wokół osi, przechodzącej przez punkt jego oparcia o brzeg kolumny i podciągał nieco blok po pniu. Liny były z grubsza prostopadłe do drągów i były do nich przywiązane w odległości 0,7 m od punktu oparcia drąga o filar. Załóż, że masa każdego robotnika wynosiła 85 kg i oblicz, ilu co najmniej robotników musiało obciążyć dwie belki, aby ruszyć blok w górę po pniach. W praktyce wystarczy nawet połowa tej liczby robotników, gdyż można najpierw nieco podciągnąć jeden, a potem drugi skraj bloku.



Rys. 11.46. Zadanie 69

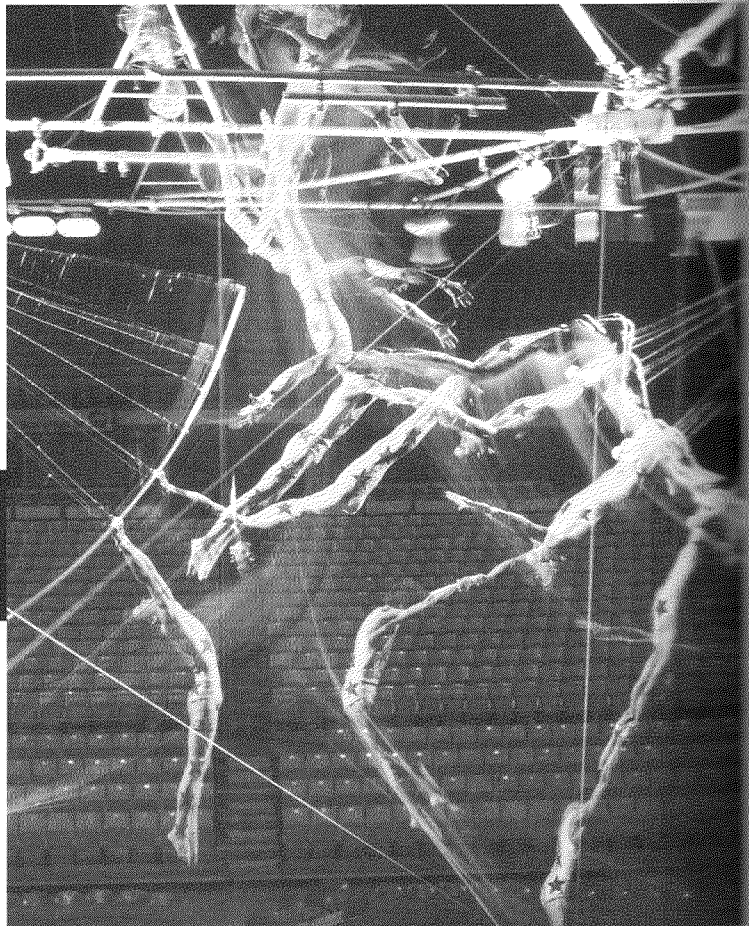
70. Jak stwierdzili obserwatorzy jadący samochodem terenowym obok biegnącego geparda, może on osiągnąć w pełnym biegu imponującą prędkość 114 km/h. Wyobraź sobie, że starasz się zmierzyć prędkość geparda, jadąc jeepem równo z biegnącym zwierzęciem i obserwując wskazania szybkościomierza. Jedziesz w stałej odległości od geparda, równej 8 m, lecz hałas silnika płoszy zwierzę, które przez cały czas stara się oddalić od samochodu, w wyniku czego będzie po torze kołowym o promieniu 92 m. Ty wobec tego poruszasz się po okręgu o promieniu 100 m. Załóż, że szybkościomierz wskazuje prędkość 114 km/h i oblicz: a) prędkość kątową geparda i twojego samochodu, b) prędkość liniową geparda wzdłuż jego toru. Jeśli nie wziębyś pod uwagę, że gepard będzie biegł po torze kołowym, mógłbyś dojść do wniosku — błędnego — że prędkość geparda wynosi 114 km/h; taki właśnie błąd popełnili autorzy tych obserwacji, publikując ich wynik.

# 12 Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

W 1897 roku pewien europejski akrobata wykonał po raz pierwszy potrójne salto podczas lotu z trapezu do rąk partnera. Przez następne 85 lat akrobaci cyrkowi starali się wykonać w locie poczwórne salto, lecz w czasie publicznego występu udało się to dopiero w 1982 roku: Miguel Vazquez z cyrku Ringling Brothers and Barnum & Bailey Circus wykonał w locie cztery pełne obroty, po czym został pochwycony przez swego brata Juana. Obaj byli oszołomieni swym sukcesem.

**Dlaczego ich wyczyn był tak trudny i dzięki jakim prawom fizyki stał się on w końcu możliwy?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 12.1. Toczenie się ciał



Rys. 12.1. Zdjęcie toczącego się krążka, wykonane dla długiego czasu naświetlania. Do krążka przymocowano dwie lampki, jedną w jego środku, a drugą na obrzeżu. Krzywa zakreślana przez punkt znajdujący się na skrajku krążka nosi nazwę *cykloidy*

Gdy rower jedzie po prostym torze, środek każdego koła porusza się ruchem wyłącznie postępowym. Punkt na obręczy koła zakreśla jednak znacznie bardziej skomplikowany tor — pokazano to na rysunku 12.1. Omówimy teraz ruch toczącego się koła, traktując go najpierw jako złożenie ruchu wyłącznie postępowego i ruchu wyłącznie obrotowego, a następnie jako sam ruch obrotowy.

### Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego

Wyobraź sobie, że patrzysz na koło roweru przejeżdżającego obok ciebie po ścieżce ze stałą prędkością i *nie doznającego poślizgu*. Jak pokazano na rysunku 12.2, środek masy koła  $O$  przemieszcza się do przodu ze stałą prędkością  $v_{\text{SM}}$ . Punkt  $P$ , w którym koło styka się z jezdnią również przemieszcza się do przodu z prędkością  $v_{\text{SM}}$ , tak że zawsze znajduje się dokładnie pod punktem  $O$ .

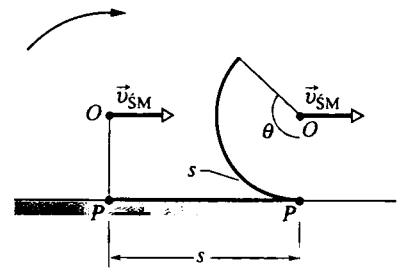
Obserwując koło przez pewien czas  $t$  stwierdzisz, że obydwa te punkty  $O$  i  $P$  przemieściły się do przodu, pokonując jednakową drogę  $d$ . Rowerzysta widzi zaś, że koło obróciło się w tym czasie wokół swej osi o kąt  $\theta$ , a punkt na oponie, w którym koło stykało się początkowo z jezdnią zakreślił łuk o długości  $s$ . Ta długość łuku  $s$  jest związana z kątem obrotu  $\theta$ , a związek ten opisuje równanie (11.17):

$$s = \theta R, \quad (12.1)$$

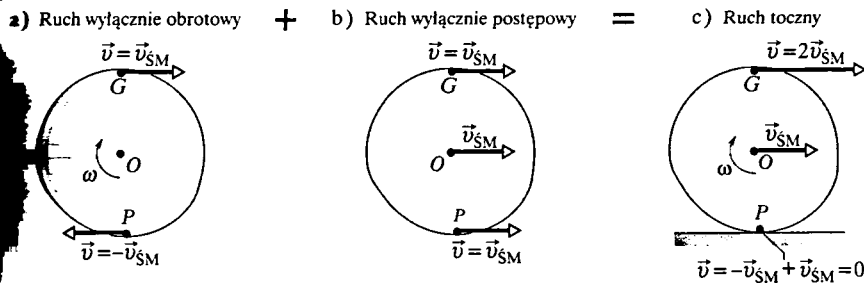
w którym  $R$  jest promieniem koła. Prędkość liniowa  $v_{\text{SM}}$  środka koła (tzn. środka jego masy, o ile koło jest jednorodne) jest równa  $ds/dt$ . Prędkość kątową  $\omega$  koła wokół jego osi wynosi  $d\theta/dt$ . Różniczkując równanie (12.1) względem czasu, otrzymujemy ( $R$  jest stałe):

$$v_{\text{SM}} = \omega R \quad (\text{toczenie się bez poślizgu}). \quad (12.2)$$

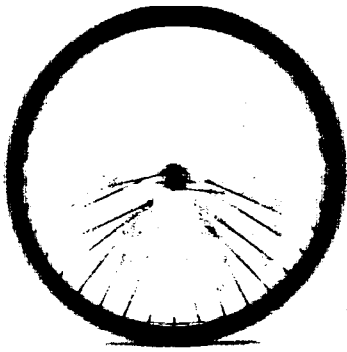
Jak widać z rysunku 12.3, toczenie się koła można uważać za połączenie ruchu wyłącznie postępowego i ruchu wyłącznie obrotowego. Na rysunku 12.3a



Rys. 12.2. Środek masy  $O$  toczącego się koła porusza się z prędkością  $v_{\text{SM}}$  i pokonuje drogę  $s$  w czasie, gdy koło obraca się o kąt  $\theta$ . Punkt, w którym koło styka się z podłożem także przebywa w tym czasie drogę  $s$



Rys. 12.3. Toczenie się koła jako złożenie ruchu wyłącznie obrotowego i ruchu wyłącznie postępowego. a) Ruch wyłącznie obrotowy: wszystkie punkty koła wykonują ruch obrotowy z jednakową prędkością kątową  $\omega$ . Wszystkie punkty na obrzeżu koła poruszają się z prędkością liniową o takiej samej wartości bezwzględnej  $v = v_{\text{SM}}$ . Na rysunku zaznaczono wektory prędkości liniowej  $\vec{v}$  dwóch takich punktów — znajdujących się na górze ( $G$ ) i na dole ( $P$ ) koła. b) Ruch wyłącznie postępowy: wszystkie punkty koła poruszają się w prawo, z taką samą prędkością jak jego środek masy, tzn.  $v_{\text{SM}}$ . c) Ruch koła przy jego toczeniu się jest złożeniem ruchów z rysunków (a) i (b)



Rys. 12.4. Zdjęcie toczącego się koła rowerowego. Obraz szprych jest bardziej rozmyty w górnej części niż w dolnej, gdyż górna część koła porusza się szybciej niż dolna, jak wynika z rysunku 12.3c

przedstawiono sam ruch obrotowy (jak gdyby koło obracało się jedynie wokół swej osi) — każdy punkt koła wykonuje ruch obrotowy wokół osi koła, z prędkością kątową  $\omega$  (takim właśnie ruchem zajmowaliśmy się w rozdziale 11). Każdy punkt na obrzeżu koła porusza się z prędkością liniową, o wartości bezwzględnej  $v_{\Sigma M}$ , danej równaniem (12.2). Na rysunku 12.3b pokazano sam ruch postępowy koła (jak gdyby koło w ogóle się nie obracało). Każdy punkt koła porusza się przy tym w prawo z prędkością  $v_{\Sigma M}$ .

Połączenie ruchów z rysunków 12.3a i 12.3b daje rzeczywisty ruch toczącego się koła, jak na rysunku 12.3c. Zauważ, że w tym łącznym ruchu punkt znajdujący się na dole koła (punkt  $P$ ) ma prędkość liniową równą zeru, a punkt znajdujący się na górze (punkt  $G$ ) porusza się z prędkością liniową  $2v_{\Sigma M}$ , czyli najszybciej spośród wszystkich punktów koła. Widać to na rysunku 12.4, na którym przedstawiono zdjęcie toczącego się koła, wykonane dla długiego czasu naświetlania — obraz szprych jest znacznie bardziej rozmyty na górze niż na dole koła co świadczy o tym, że górna część koła porusza się szybciej niż dolna.

Ruch każdego ciała okrągłego, toczącego się po podłożu bez poślizgu, można rozłożyć na ruch wyłącznie obrotowy i ruch wyłącznie postępowy, tak jak na rysunkach 12.3a i 12.3b.

### Toczenie się jako sam ruch obrotowy

Na rysunku 12.5 przedstawiono inny obraz ruchu toczącego się koła, w którym rozważany jest on jako ruch wyłącznie obrotowy wokół osi przechodzącej w każdej chwili przez punkt styczności koła z podłożem. Jest to oś, przechodząca przez punkt  $P$  z rysunku 12.3c i prostopadła do płaszczyzny rysunku. Wektory zaznaczone na rysunku 12.5 są to wektory prędkości chwilowej różnych punktów koła.

**Pytanie:** Ile wynosi prędkość kątowna koła wokół tej nowej osi, rejestrowana przez nieruchomego obserwatora?

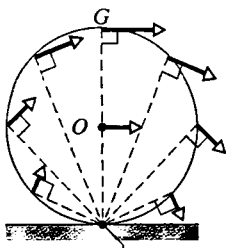
**Odpowiedź:** Jest to ta sama prędkość kątowna  $\omega$ , którą rejestruje rowerzysta, obserwując obrót koła wokół osi, przechodzącej przez jego środek masy.

Aby przekonać się, że ta odpowiedź jest poprawna, obliczmy prędkość liniową najwyższego punktu toczącego się koła, rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora. Promień koła oznaczyliśmy przez  $R$ , dlatego też najwyższy punkt koła jest odległy od osi obrotu, przechodzącej przez punkt  $P$ , o  $2R$  (patrz rysunek 12.5), a zatem prędkość liniowa punktu na górze koła wynosi (jak wynika z równania (12.2)):

$$v_G = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\Sigma M}.$$

co jest w pełni zgodne z rysunkiem 12.3c. W ten sam sposób możesz sprawdzić, że prędkości liniowe punktów  $O$  i  $P$  z rysunku 12.3c są takie, jak pokazano na tym rysunku.

**SPRAWDZIAN 1:** Tylne koło roweru klauna ma promień dwukrotnie większy niż przednie. a) Czy w czasie jazdy tego roweru prędkość liniowa górnego punktu tylnego koła jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak prędkość górnego punktu koła przedniego? b) Czy prędkość kątowna tylnego koła jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak prędkość kątowna koła przedniego?



oś obrotu przechodząca przez punkt  $P$

Rys. 12.5. Toczenie się można uważać za ruch wyłącznie obrotowy, z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi, która w każdej chwili przechodzi przez punkt  $P$ . Wektory zaznaczone na rysunku są to wektory chwilowej prędkości liniowej kilku punktów toczącego się koła. Można je wyznaczyć, dokonując złożenia ruchu postępowego i obrotowego, jak na rysunku 12.3

## 12.2. Energia kinetyczna ruchu tocznego

Obliczmy teraz energię kinetyczną toczącego się koła, rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora. Jeśli potraktujemy ruch koła jako ruch wyłącznie obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt  $P$ , jak na rysunku 12.5, to z równania (11.27) otrzymamy:

$$E_k = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (12.3)$$

przy czym  $\omega$  jest prędkością kątową koła, a  $I_P$  — momentem bezwładności koła względem osi, przechodzącej przez punkt  $P$ . Z twierdzenia Steinera, czyli równania (11.29) ( $I = I_{SM} + mh^2$ ) dostajemy:

$$I_P = I_{SM} + mR^2, \quad (12.4)$$

gdzie  $m$  jest masą koła,  $I_{SM}$  — jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy koła, a  $R$  (promień koła) jest odległością tych dwóch osi obrotu ( $h$ ). Podstawiając  $I_P$  z równania (12.4) do wzoru (12.3), otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{SM} \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

Korzystając następnie ze związku  $v_{SM} = \omega R$  (równanie (12.2)), dostajemy:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{SM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{SM}^2. \quad (12.5)$$

Wyraz  $\frac{1}{2} I_{SM} \omega^2$  możemy interpretować jako energię kinetyczną ruchu obrotowego koła wokół osi przechodzącej przez jego środek masy (rys. 12.3a), a wyraz  $\frac{1}{2} m v_{SM}^2$  — jako energię kinetyczną ruchu postępowego środka masy koła (rys. 12.3b). Otrzymujemy zatem następującą zasadę:

➤ **Toczące się ciało ma dwa rodzaje energii kinetycznej: energię kinetyczną ruchu obrotowego ( $\frac{1}{2} I_{SM} \omega^2$ ) związaną z jego ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy, oraz energię kinetyczną ruchu postępowego ( $\frac{1}{2} m v_{SM}^2$ ) związaną z ruchem postępowym środka masy.**

### Przykład 12.1

Jednorodny krążek walcowy o masie  $m = 1,4$  kg i promieniu  $R = 15$  cm toczy się bez poślizgu po poziomym stole z prędkością  $15$  cm/s. Ile wynosi jego energia kinetyczna  $E_k$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Energię kinetyczną toczącego się ciała możemy wyznaczyć ze wzoru (12.5). Musimy jednak zdać sobie sprawę z istnienia trzech faktów.

➤ 1. Gdy mówimy o prędkości toczącego się ciała, mamy na myśli prędkość jego środka masy. Wobec tego  $v_{SM} = 15$  cm/s.

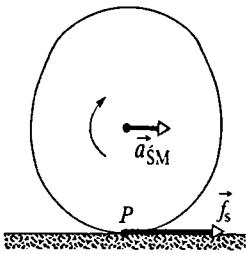
➤ 2. We wzorze (12.5) występuje prędkość kątowa  $\omega$  toczącego się ciała, którą możemy powiązać z  $v_{SM}$  równaniem (12.2) co daje  $\omega = v_{SM}/R$ .

➤ 3. We wzorze (12.5) występuje także moment bezwładności  $I_{SM}$  ciała względem osi, przechodzącej przez jego środek masy. W tabeli 11.2c znajdujemy moment bezwładności walca, równy:  $I_{SM} = \frac{1}{2} m R^2$ .

Ze wzoru (12.5) mamy zatem:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I_{SM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{SM}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} m R^2\right) (v_{SM}/R)^2 + \frac{1}{2} m v_{SM}^2 = \frac{3}{4} m v_{SM}^2 \\ &= \frac{3}{4} (1,4 \text{ kg}) (0,15 \text{ m/s})^2 = 0,024 \text{ J} \\ &= 24 \text{ mJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 12.3. Siły działające przy toczeniu



Rys. 12.6. Koło toczy się poziomo bez poślizgu, z przyspieszeniem liniowym  $\vec{a}_{\zeta M}$  środka masy. W punkcie  $P$  działa wtedy na koło siła tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  przeciwdziałająca jego poślizgowi

### Tarcie a toczenie się ciał

Gdy koło toczy się ze stałą prędkością, jak na rysunku 12.2, nie ma żadnego powodu, aby w punkcie jego zetknięcia się z podłożem  $P$  miał następować poślizg, a zatem nie działa w tym punkcie siła tarcia. Jeśli jednak na to koło działa jakaś siła wypadkowa, dzięki której koło przyspiesza lub zwalnia, to skutkiem jej działania jest przyspieszenie  $\vec{a}_{\zeta M}$  środka masy koła, mające kierunek ruchu koła. Towarzyszy temu przyspieszenie lub spowolnienie ruchu obrotowego koła, a więc pojawienie się przyspieszenia kąowego  $\alpha$  tego ruchu. Istnienie obydwu tych przyspieszeń jest powodem skłonności koła do poślizgu w punkcie  $P$ . Musi zatem wystąpić w tym punkcie siła tarcia, przeciwdziałająca temu poślizgowi.

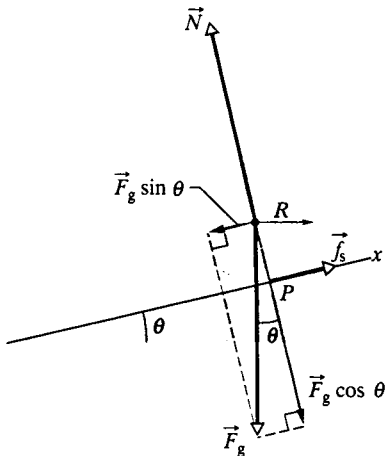
Jeśli koło *nie ślizga się* jednak, to siłą tą jest siła tarcia *statycznego*  $\vec{f}_s$  i koło toczy się bez poślizgu. Aby otrzymać związek wartości przyspieszenia liniowego  $\vec{a}_{\zeta M}$  i przyspieszenia kąowego  $\alpha$ , zróżniczkujemy stronami równanie (12.2) względem czasu ( $R$  jest stałe). Po lewej stronie dostajemy  $dv_{\zeta M}/dt$ , czyli  $a_{\zeta M}$ , a po prawej —  $d\omega/dt$ , czyli  $\alpha$ . Zatem w ruchu tocznym bez poślizgu:

$$a_{\zeta M} = \alpha R \quad (\text{toczenie się bez poślizgu}). \quad (12.6)$$

Jeśli koło *ślizga się* pod wpływem działania na nie siły wypadkowej, to siła tarcia, działająca na nie w punkcie  $P$  (rys. 12.2) jest siłą tarcia *kinetycznego*  $\vec{f}_k$ . Koło toczy się z poślizgiem, przy czym równanie (12.6) nie jest spełnione. W tym rozdziale będziemy zajmować się tylko toczeniem się ciał bez poślizgu.

Na rysunku 12.6 przedstawiono koło toczące się po płaskim podłożu i zmuszane do obracania się coraz szybciej, jak koło roweru na starcie wyścigu. Zwiększanie szybkości obrotu powoduje skłonność dolnej części koła do poślizgu, w lewo, w punkcie  $P$ . Działająca w tym punkcie siła tarcia przeciwdziałająca poślizgowi jest zatem skierowana w prawo. Jeśli koło nie ślizga się, to jest to siła tarcia statycznego  $\vec{f}_s$  (zaznaczona na rysunku) i koło toczy się bez poślizgu, a zatem obowiązuje równanie (12.6). Na marginesie: gdyby tej siły tarcia nie było, rowerowi nie można byłoby przyspieszyć, a zatem wyścigi kolarskie nie byłyby zbyt ciekawe.

Gdyby koło z rysunku 12.6 obracało się coraz wolniej, jak koło roweru zwalnającego, musielibyśmy dokonać dwóch zmian na tym rysunku: wektory przyspieszenia  $\vec{a}_{\zeta M}$  środka masy i siły tarcia  $\vec{f}_s$  działającej w punkcie  $P$  skierowane byłyby w lewo.



Rys. 12.7. Jednorodne ciało okrągłe o promieniu  $R$  stacza się po równi pochyłej. Na ciało to działają: siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , siła normalna  $\vec{N}$  oraz siła tarcia  $\vec{f}_s$ , skierowana wzdłuż równi w górę. Dla przejrzystości rysunku wektor  $\vec{N}$  przesunięto wzdłuż jego kierunku, tak aby jego początek znajdował się w środku masy ciała

### Toczenie się po równi pochyłej

Na rysunku 12.7 przedstawiono jednorodne ciało okrągłe o masie  $m$  i promieniu  $R$ , staczające się bez poślizgu po równi pochyłej wzdłuż osi  $x$ , tworzącej kąt  $\theta$  z poziomem. Chcemy wyznaczyć przyspieszenie  $a_{\zeta M, x}$  ruchu ciała wzdłuż równi. W tym celu skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona i to zarówno dla ruchu postępowego ( $F_{\text{wyp}} = ma$ ), jak i dla ruchu obrotowego ( $M_{\text{wyp}} = I\alpha$ ).



Zasady wszystkim narzysujemy siły działające na to ciało, jak na rysunku 12.7. Są to:

1. Działająca na ciało siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , skierowana pionowo w dół. Koniec jej wektora umieszczamy w środku masy ciała. Jej składowa wzdłuż równi wynosi  $F_g \sin \theta$ , czyli  $mg \sin \theta$ .

2. Siła normalna  $\vec{N}$ , działająca prostopadle do równi. Działa ona na ciało w punkcie jego styczności z podłożem  $P$ , lecz na rysunku 12.7 przesunięto jej wektor wzdłuż jego kierunku, tak aby jego początek znajdował się w środku masy ciała.

3. Siła tarcia statycznego  $\vec{f}_s$ , która działa na ciało w punkcie styczności z podłożem  $P$  i jest skierowana wzdłuż równi w górę. (Czy rozumiesz, dlaczego ma ona właśnie ten kierunek? Gdyby ciało ślizgało się w punkcie  $P$ , to ześlizgiwałoby się w dół równi — zatem przeciwdziałająca poślizgowi siła tarcia musi być skierowana wzdłuż równi w górę).

Zapiszmy teraz drugą zasadę dynamiki dla składowych wzdłuż osi  $x$  z rysunku 12.7 ( $F_{\text{wyp.}x} = ma_x$ ) w postaci:

$$f_s - mg \sin \theta = ma_{\text{śM},x}. \quad (12.7)$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome:  $f_s$  i  $a_{\text{śM},x}$ . (Zauważ, że nie zakładamy, iż  $f_s$  przybiera swą wartość maksymalną  $f_{s,\text{max}}$  — o wartości siły  $f_s$  wiemy tylko tyle, że jest ona taka, iż ciało stacza się po równi bez poślizgu).

Następnie zapiszemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego ciała wokół osi przechodzącej przez jego środek masy. Skorzystamy w tym celu z równania (11.33) ( $M = r_{\perp} F$ ), wyznaczającego moment siły działający na ciało w tym punkcie. Ramię siły tarcia  $\vec{f}_s$  wynosi  $R$ , co daje moment siły o wartości  $Rf_s$ ; jest on dodatni, bo dąży do obrotu ciała w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (spójrz na rysunek 12.7). Ramiona sił  $\vec{F}_g$  i  $\vec{N}$  względem środka masy są równe zero, a zatem nie są z nimi związane żadne momenty siły. Drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego ( $M_{\text{wyp}} = I\alpha$ ) możemy zatem zapisać dla ruchu wokół osi, przechodzącej przez środek masy ciała w postaci:

$$Rf_s = I_{\text{śM}}\alpha. \quad (12.8)$$

To równanie także zawiera dwie niewiadome:  $f_s$  i  $\alpha$ .

Ciało toczy się bez poślizgu, a więc możemy skorzystać z równania (12.6) ( $a_{\text{śM}} = \alpha R$ ), wiążącego ze sobą niewiadome  $a_{\text{śM},x}$  i  $\alpha$ . Musimy tu zachować ostrożność, ponieważ  $a_{\text{śM},x}$  jest ujemne (wektor przyspieszenia ma kierunek ujemny osi  $x$ ), a  $\alpha$  jest dodatnie (obróć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Zatem w równaniu (12.8) za  $\alpha$  musimy podstawić  $-a_{\text{śM},x}/R$ . Rozwiązując następnie to równanie względem  $f_s$ , otrzymujemy:

$$f_s = -I_{\text{śM}} \frac{a_{\text{śM},x}}{R^2}. \quad (12.9)$$

Podstawiając potem za  $f_s$  w równaniu (12.7) prawą stronę równania (12.9), dostajemy ostatecznie:

$$a_{\text{śM},x} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{śM}}/mR^2}. \quad (12.10)$$

Z równania tego możemy obliczyć przyspieszenie liniowe  $a_{\text{śM},x}$  każdego ciała staczającego się po równi pochyłej, nachylonej pod kątem  $\theta$  do poziomu.

**SPRAWDZIAN 2:** Dwa jednakowe krążki A i B toczą się po poziomym podłożu z jednakowymi prędkościami. Krążek A wtacza się następnie wzdłuż równi pochyłej, osiągnąwszy maksymalne wzniesienie  $h$ , a krążek B napotyka równię o takim samym nachyleniu, lecz tak gładką, że ruchowi po niej nie towarzyszy tarcie. Czy maksymalne wzniesienie krążka B będzie większe, mniejsze, czy równe  $h$ ?

## Przykład 12.2

Jednorodna kula o masie  $m = 6 \text{ kg}$  i promieniu  $R$  stacza się bez poślizgu wzdłuż równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem  $\theta = 30^\circ$  (patrz rysunek 12.7). W chwili początkowej kula była nieruchoma.

a) Punkt, z którego kula zaczęła się staczać, jest wzniesiony w pionie o  $h = 1.2 \text{ m}$  nad poziom końca równi. Ile wynosi prędkość kuli na dole równi?

### ROZWIĄZANIE:

Weźmy pod uwagę, że:

➤ 1. Prędkość kuli na końcu równi możemy powiązać z jej energią kinetyczną  $E_{k \text{ końc}}$  w chwili, gdy dotrze do tego punktu.

➤ 2. W czasie staczania się kuli po równi energia mechaniczna układu kula–Ziemia jest zachowana. Dzieje się tak dlatego, że siła ciężkości, która jest jedyną siłą wykonującą pracę nad kulą jest siłą zachowawczą. Siła normalna, która działa na kulę ze strony równi jest prostopadła do kierunku ruchu kuli, a zatem nie wykonuje nad nią pracy. Siła tarcia, która też działa na kulę ze strony równi nie przekazuje kuli żadnej energii, gdyż kula toczy się po równi bez poślizgu.

Zasada zachowania energii mechanicznej ( $E_{\text{mech} \text{ końc}} = E_{\text{mech} \text{ pocz}}$ ) ma postać:

$$E_{k \text{ końc}} + E_{p \text{ końc}} = E_{k \text{ pocz}} + E_{p \text{ pocz}}, \quad (12.11)$$

przy czym wskaźniki końc i pocz odnoszą się do chwili, gdy kula jest na dole równi i do chwili początkowej, gdy kula zaczyna się poruszać. Grawitacyjna energia potencjalna wynosi w chwili początkowej:  $E_{p \text{ pocz}} = mgh$  ( $m$  — masa kuli), a w chwili końcowej:  $E_{p \text{ końc}} = 0$ . Energia kinetyczna kuli w chwili początkowej jest równa zeru:  $E_{k \text{ pocz}} = 0$ .

➤ 3. Aby wyznaczyć energię kinetyczną w chwili końcowej  $E_{k \text{ końc}}$ , musimy skorzystać z jeszcze jednego ważnego spostrzeżenia: ponieważ kula się toczy, ma ona energię kinetyczną zarówno ruchu postępowego, jak i obrotowego, a zatem musimy je obie uwzględnić. Możemy to zrobić, korzystając z równania (12.5). Podstawiając te wszystkie wartości do równania (12.11), otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{2} I_{\text{śM}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{\text{śM}}^2\right) + 0 = 0 + mgh. \quad (12.12)$$

przy czym  $I_{\text{śM}}$  jest momentem bezwładności kuli względem osi,

przechodzącej przez jej środek masy,  $v_{\text{śM}}$  — szukaną prędkością kuli, a  $\omega$  — jej prędkością kątową na końcu równi.

Kula toczy się bez poślizgu, a zatem możemy skorzystać ze wzoru (12.2) i podstawić  $v_{\text{śM}}/R$  za  $\omega$  w równaniu (12.12), co zmniejsza liczbę niewiadomych w tym równaniu. Podstawiając następnie  $\frac{2}{5}mR^2$  za  $I_{\text{śM}}$  (na podstawie tabeli 11.2f) oraz rozwiązując równanie względem  $v_{\text{śM}}$ , otrzymujemy:

$$v_{\text{śM}} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)gh} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)(9.8 \text{ m/s}^2)(1.2 \text{ m})} = 4.1 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że wynik nie zależy ani od masy  $m$  kuli, ani od jej promienia  $R$ .

b) Jaka jest wartość i kierunek siły tarcia działającej na kulę podczas jej staczania się równi?

### ROZWIĄZANIE:

➤ Kula stacza się z równi bez poślizgu, zatem działająca na nią siła tarcia jest dana wzorem (12.9). Aby ją wyznaczyć, musimy jednak najpierw obliczyć przyspieszenie  $a_{\text{śM},x}$  kuli z równania (12.10), co daje:

$$\begin{aligned} a_{\text{śM},x} &= -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{śM}}/mR^2} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}mR^2/mR^2} \\ &= -\frac{(9.8 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ}{1 + \frac{2}{5}} = -3.5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Zauważ, że do wyznaczenia  $a_{\text{śM},x}$  znów nie potrzebowaliśmy znać ani masy  $m$ , ani promienia  $R$ . Wobec tego każda jednorodna kula porusza się po równi, nachylonej do poziomu pod kątem  $30^\circ$ , z przyspieszeniem o takiej wartości pod warunkiem, że toczy się bez poślizgu. Teraz możemy już rozwiązać równanie (12.9). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_s &= -I_{\text{śM}} \frac{a_{\text{śM},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}mR^2 \frac{a_{\text{śM},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}ma_{\text{śM},x} \\ &= -\frac{2}{5}(6 \text{ kg})(-3.5 \text{ m/s}^2) = 8.4 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Zauważ, że aby otrzymać tę wartość potrzebowaliśmy znać masę  $m$  kuli, lecz nie jej promień  $R$ . Wobec tego na każdą — dowolnej wielkości — jednorodną kulę o masie  $6 \text{ kg}$  staczającą się bez poślizgu po równi, nachylonej do poziomu pod kątem  $30^\circ$  działa siła tarcia o wartości  $8.4 \text{ N}$ .

## 12.4. Jo-jo

Zabawka jo-jo to małe laboratorium fizyczne, które możesz zmieścić w kieszeni. Gdy jo-jo opuszcza się na sznurku o odcinek o długości  $h$ , traci energię potencjalną o wartości  $mhg$ , a zyskuje energię kinetyczną zarówno ruchu postępowego ( $\frac{1}{2}mv_{\text{SM}}^2$ ), jak i obrotowego ( $\frac{1}{2}I_{\text{SM}}\omega^2$ ). Gdy wspina się potem w górę po sznurku, traci energię kinetyczną, a zyskuje potencjalną.

W produkowanych obecnie zabawkach jo-jo sznurek nie jest przywiązany do osi kółka, lecz ma na końcu pętelkę, przez którą ta ośka jest przełożona. Gdy kółko dociera do końca sznurka, siła działająca na ośkę ze strony sznurka uniemożliwia dalszy ruch kółka w dół. Kółko obraca się wówczas, mając tylko energię kinetyczną ruchu obrotowego, a jego oś obraca się w pętli sznurka. Jo-jo obraca się tak (jakby „uśpione”), dopóki nie „obudzisz” go, szarpnąwszy w górę za sznurek. Sznurek owija się wtedy wokół oski i kółko zaczyna się wspinać po sznurku. Energię kinetyczną ruchu obrotowego kółka na dole sznurka (a zatem i czas, jaki może ono przetrwać w stanie uśpionia) można znacznie zwiększyć, rzucając jo-jo w dół, tak aby ruch w dół nie rozpoczął się od stanu spoczynku kółka, lecz miał różne od zera prędkości początkowe  $v_{\text{SM}}$  i  $\omega$ .

Aby wyznaczyć przyspieszenie liniowe  $a_{\text{SM}}$  kółka podczas jego ruchu w dół po sznurku, skorzystamy z drugiej zasady dynamiki, postępując tak samo, jak przy wyznaczaniu przyspieszenia ciała staczającego się po równi pochyłej z rysunku 12.7. Różnice między tymi dwoma przypadkami są następujące:

1. Jo-jo nie stacza się po równi nachylonej do poziomu pod kątem  $\theta$ , lecz toczy się po sznurku tworzącym z poziomem kąt  $\theta = 90^\circ$ .
2. Kółko zabawki jo-jo nie toczy się na swej zewnętrznej powierzchni o promieniu  $R$ , lecz na ośce o promieniu  $R_0$  (rys. 12.8a).
3. Ruch kółka nie jest spowalniany przez siłę tarcia  $\vec{f}_s$ , lecz przez siłę  $\vec{T}$ , działającą na nie ze strony sznurka (rys. 12.8b).

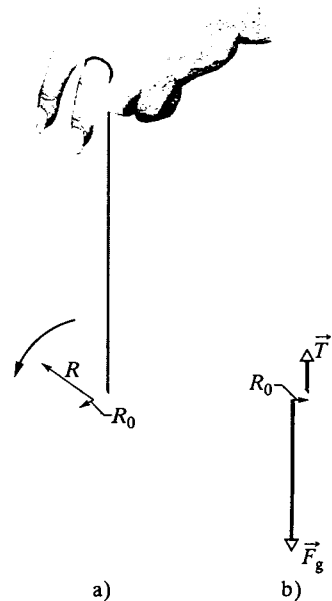
Postępując jak poprzednio, otrzymujemy znów równanie (12.10). Zmieniając w nim niektóre oznaczenia i podstawiając  $\theta = 90^\circ$ , dostajemy:

$$a_{\text{SM}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{SM}}/mR_0^2}, \quad (12.13)$$

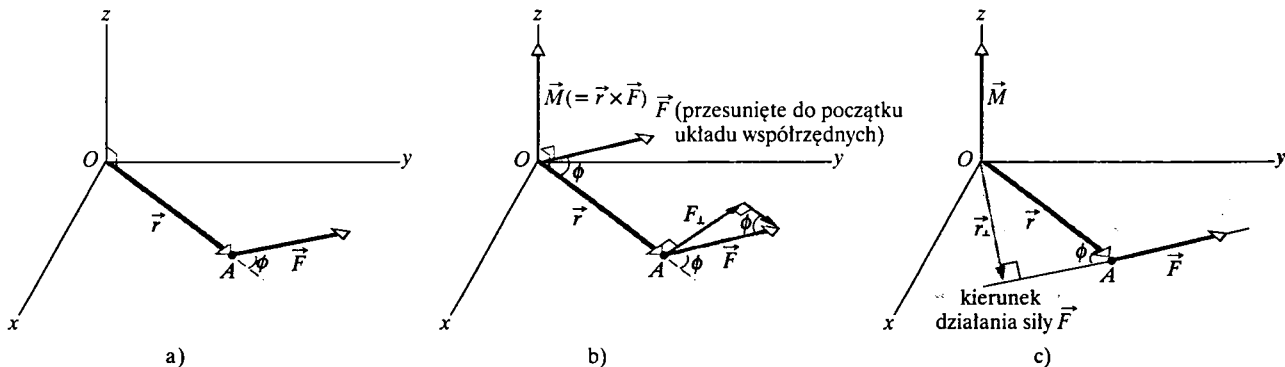
przy czym  $I_{\text{SM}}$  jest momentem bezwładności kółka względem jego osi, a  $m$  — masą zabawki. Gdy kółko wspina się po sznurku, ma ono takie samo przyspieszenie, również skierowane w dół, gdyż i wówczas działają na nie siły przedstawione na rysunku 12.8b.

## 12.5. Moment siły raz jeszcze

W rozdziale 11 zdefiniowaliśmy moment siły  $M$  dla ciała sztywnego, które obraca się wokół pewnej stałej osi, przy czym wszystkie cząstki ciała poruszają się po torach kołowych wokół tej osi. Obecnie rozszerzymy definicję momentu siły na przypadek pojedynczej cząstki poruszającej się po dowolnym torze względem pewnego ustalonego punktu (a nie ustalonej osi). Nie będziemy zakładać, że tor



Rys. 12.8. a) Przekrój zabawki jo-jo. Wokół osi o promieniu  $R_0$  nawinięty jest sznurek, którego grubość pomijamy. b) Diagram sił działających na opadające kółko (pokazano tylko jego ośkę)



Rys. 12.9. Definicja momentu siły.  
 a) Siła  $\vec{F}$ , leżąca w płaszczyźnie  $xy$ , działa na cząstkę, znajdującą się w punkcie  $A$ . b) Z siłą tą związany jest moment siły względem początku układu współrzędnych  $O$ , równy  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Zgodnie z regułą prawej dłoni dla iloczynu wektorowego, wektor momentu siły ma kierunek dodatni osi  $z$ . Długość tego wektora można wyrazić jako  $rF_{\perp}$  (b) lub jako  $r_{\perp}F$  (c)

cząstki jest kołowy, a zatem wektor momentu siły  $\vec{M}$  będzie mógł przybrać dowolny kierunek.

Na rysunku 12.9a przedstawiono taką cząstkę, znajdującą się w punkcie  $A$  na płaszczyźnie  $xy$ . Działa na nią jedna siła  $\vec{F}$ , leżąca w tej płaszczyźnie, a położenie cząstki względem początku układu współrzędnych  $O$  jest wyznaczone przez wektor położenia  $\vec{r}$ . Działający na cząstkę moment siły  $\vec{M}$  względem punktu  $O$  jest zdefiniowany jako:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{definicja momentu siły}). \quad (12.14)$$

Aby wyznaczyć zawarty w tym równaniu iloczyn wektorowy, korzystamy z reguł, podanych w paragrafie 3.7. W celu wyznaczenia kierunku wektora  $\vec{M}$  przesuwamy wektor  $\vec{F}$  (bez zmiany jego kierunku), tak aby jego początek znalazł się w początku układu współrzędnych, a zatem aby obydwa wektory, których iloczyn wektorowy mamy obliczyć miały wspólny początek (rys. 12.9b). Możemy wtedy skorzystać z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego (porównaj rysunek 3.20a), czyli ułożyć palce prawej dłoni wzdłuż łuku łączącego  $\vec{r}$  (pierwszy wektor iloczynu) z  $\vec{F}$  (drugim wektorem tego iloczynu). Odgięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora  $\vec{M}$ . W przypadku przedstawionym na rysunku 12.9b wektor  $\vec{M}$  ma kierunek dodatni osi  $z$ .

Do wyznaczenia długości wektora  $\vec{M}$  możemy zastosować ogólny związek (3.27) ( $c = ab \sin \phi$ ), co w naszym przypadku daje:

$$M = rF \sin \phi, \quad (12.15)$$

przy czym  $\phi$  jest kątem, utworzonym przez wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ , gdy ustawimy je tak, że mają wspólny początek. Jak widać z rysunku 12.9b, równanie (12.15) można też zapisać w postaci:

$$M = rF_{\perp}, \quad (12.16)$$

gdzie  $F_{\perp} (= F \sin \phi)$  jest składową wektora  $\vec{F}$  w kierunku prostopadłym do kierunku wektora  $\vec{r}$ . Z rysunku 12.9c widać natomiast, że równanie (12.15) można zapisać jeszcze inaczej:

$$M = r_{\perp}F, \quad (12.17)$$

przy czym  $r_{\perp} (= r \sin \phi)$  jest ramieniem siły  $\vec{F}$ , czyli odległością punktu  $O$  od prostej, wzdłuż której działa siła  $\vec{F}$ .

## Przykład 12.3

Na rysunku 12.10a przedstawiono cząstkę, na którą działają trzy siły o wartości 2 N każda. Cząstka znajduje się w punkcie A, leżącym na płaszczyźnie  $xz$ , a wektor jej położenia  $\vec{r}$  jest dany przez wartości  $r = 3\text{ m}$  i  $\theta = 30^\circ$ . Siła  $\vec{F}_1$  jest równoległa do osi  $x$ , siła  $\vec{F}_2$  jest równoległa do osi  $z$ , a siła  $\vec{F}_3$  jest równoległa do osi  $y$ . Wyznacz moment siły względem początku układu współrzędnych, pochodzący od każdej z tych sił.

### ROZWIĄZANIE:

Trzy działające na cząstkę siły nie leżą w jednej płaszczyźnie, dlatego też nie możemy wyznaczać momentów siły jak w rozdziale 11. Musimy zatem skorzystać z definicji momentu siły jako iloczynu wektorowego, wyznaczając ich wartości z równania (12.15) ( $M = rF \sin \phi$ ), a kierunki za pomocą reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Mamy wyznaczyć momenty siły względem początku układu współrzędnych  $O$ , a zatem wektorem  $\vec{r}$  występującym w definicji iloczynu wektorowego, jest dany wektor położenia cząstki. Aby wyznaczyć kąt  $\phi$  między kierunkiem wektora  $\vec{r}$  a kierunkiem każdej z sił, przesuwamy po kolei wszystkie wektory sił do początku układu współrzędnych. Przesunięte w ten sposób wektory  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  przedstawiono na rysunkach 12.10b, c i d, na płaszczyźnie  $xz$  (zwróć uwagę na to, jak dobrze widoczne są teraz kąty). Jak pokazano na rysunku 12.10d kąt między wektorami  $\vec{r}$  i  $\vec{F}_3$  wynosi

$90^\circ$ ; symbol  $\otimes$  oznacza, że wektor  $\vec{F}_3$  jest skierowany za kartkę (gdy wektor jest skierowany za kartki, oznaczamy go symbolem  $\odot$ ). Korzystając z równania (12.15), możemy teraz wyznaczyć wartości momentów siły, związanych z każdą z sił. Otrzymujemy:

$$M_1 = r F_1 \sin \phi_1 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 150^\circ) = 3\text{ N} \cdot \text{m},$$

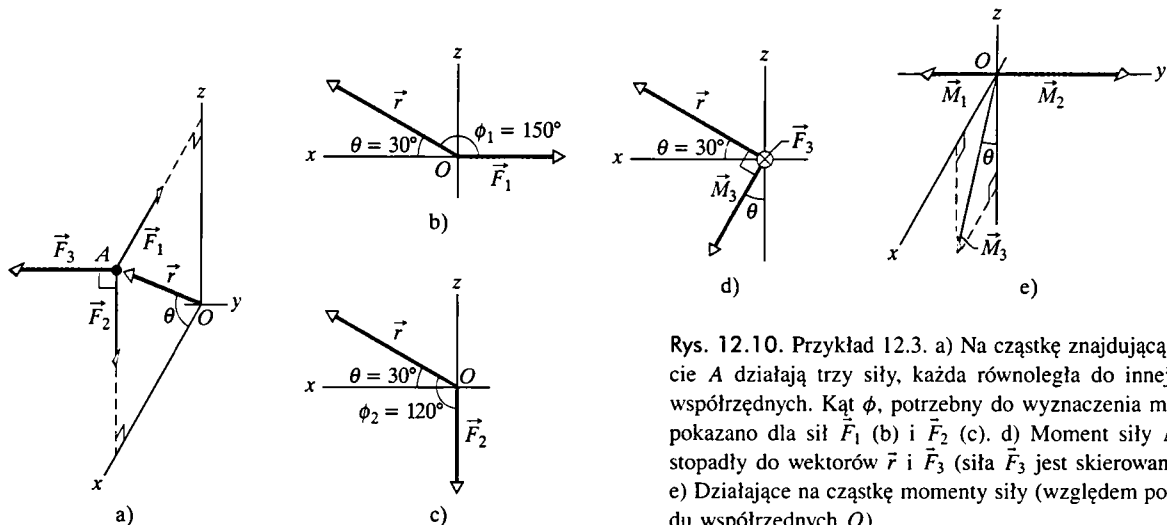
$$M_2 = r F_2 \sin \phi_2 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 120^\circ) = 5.2\text{ N} \cdot \text{m}$$

oraz

$$M_3 = r F_3 \sin \phi_3 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 90^\circ) = 6\text{ N} \cdot \text{m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W celu wyznaczenia kierunków tych momentów sił korzystamy z reguły prawej dłoni, tzn. ustawiamy palce prawej ręki wzdłuż łuku, jaki trzeba zatoczyć, aby nałożyć wektor  $\vec{r}$  na wektor  $\vec{F}$ , zakreślając przy tym *mniejszy* z dwóch kątów między ich kierunkami. Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora momentu siły. Moment siły  $\vec{M}_1$  jest skierowany za kartkę na rysunku 12.10b, moment siły  $\vec{M}_2$  jest skierowany zza kartki na rysunku 12.10c, a kierunek momentu siły  $\vec{M}_3$  jest pokazany na rysunku 12.10d. Wszystkie te trzy wektory przedstawiono na rysunku 12.10e.

**SPRAWDZIAN 3:** Wektor położenia  $\vec{r}$  cząstki ma dodatni kierunek osi  $z$ . Jaki jest kierunek działającej na tę cząstkę siły, jeśli pochodzący od niej moment siły: a) jest równy zeru, b) jest skierowany w ujemnym kierunku osi  $x$ , c) jest skierowany w ujemnym kierunku osi  $y$ ?



Rys. 12.10. Przykład 12.3. a) Na cząstkę znajdującą się w punkcie A działają trzy siły, każda równoległa do innej osi układu współrzędnych. Kąt  $\phi$ , potrzebny do wyznaczenia momentu siły, pokazano dla sił  $\vec{F}_1$  (b) i  $\vec{F}_2$  (c). d) Moment siły  $\vec{M}_3$  jest prostopadły do wektorów  $\vec{r}$  i  $\vec{F}_3$  (siła  $\vec{F}_3$  jest skierowana za kartkę) e) Działające na cząstkę momenty siły (względem początku układu współrzędnych  $O$ )

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Iloczyn wektorowy i moment siły

Równanie (12.15) dla momentu siły to pierwsze równanie, w którym korzystamy z iloczynu wektorowego. Być może warto, abyś przypomniał sobie teraz właściwości iloczynu wektorowego,

opisane w paragrafie 3.7. Szczególną uwagę zwróć na podaną tam poradę 5, w której wymieniliśmy wiele typowych błędów, popełnianych przy wyznaczaniu kierunku iloczynu wektorowego.

Pamiętaj, że moment siły jest zawsze wyznaczony *względem* (lub *wokół*) pewnego punktu, który trzeba podać, aby znajomość momentu siły była w jakikolwiek sposób przydatna. Dla innego punktu odniesienia moment siły może mieć inną wartość i inny kierunek. W przykładzie 12.3 obliczyliśmy momenty siły zwią-

zane z trzema siłami względem początku układu współrzędnych. Możesz się łatwo przekonać, że jeśli dla tych samych trzech sił obliczylibyśmy momenty sił względem punktu  $A$  (czyli punktu, w którym znajduje się cząstka), to dla wszystkich trzech sił otrzymalibyśmy moment siły równy zeru, gdyż dla każdej z nich  $r = 0$ .

## 12.6. Moment pędu

Przekonaliśmy się już — co warto teraz przypomnieć — że pojęcie pędu  $\vec{p}$  oraz zasada zachowania pędu są bardzo skutecznymi narzędziami do badania ruchu ciał. Umożliwiły nam one na przykład przewidywanie wyniku zderzenia dwóch samochodów, bez wchodzenia w szczegóły samego zderzenia. Wprowadzimy teraz wielkość, która jest odpowiednikiem pędu dla ruchu obrotowego, a w końcowej części rozdziału zajmiemy się zasadą zachowania, która jest odpowiednikiem zasady zachowania pędu dla ruchu obrotowego.

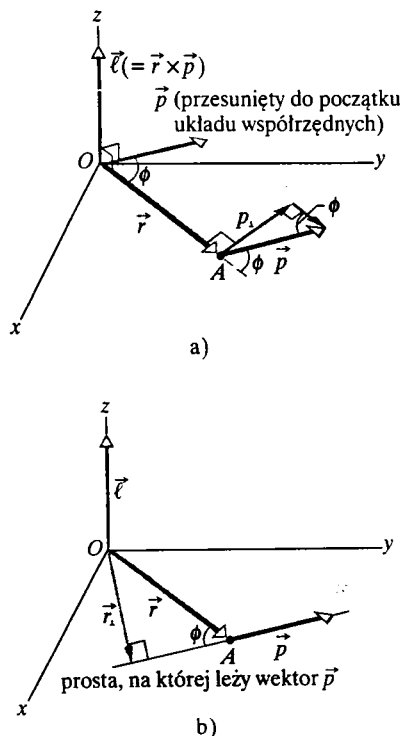
Na rysunku 12.11 przedstawiono cząstkę o masie  $m$  i pędzie  $\vec{p} (= m\vec{v})$ , znajdującą się w danej chwili w punkcie  $A$  na płaszczyźnie  $xy$ . **Moment pędu**  $\vec{\ell}$  tej cząstki względem początku układu współrzędnych jest wielkością wektorową, zdefiniowaną jako:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\text{definicja momentu pędu}), \quad (12.18)$$

przy czym  $\vec{r}$  jest wektorem położenia cząstki względem punktu  $O$ . Gdy cząstka porusza się względem punktu  $O$  — w kierunku wyznaczonym przez kierunek jej pędu  $\vec{p} (= m\vec{v})$  — wektor  $\vec{r}$  obraca się wokół punktu  $O$ . Zwróć uwagę na to, że aby cząstka miała moment pędu względem punktu  $O$  wcale *nie potrzeba*, aby sama cząstka poruszała się ruchem obrotowym względem tego punktu. Porównując ze sobą równania (12.14) i (12.18) można się przekonać, że moment pędu tak się wiąże z pędem, jak moment siły z siłą. Jednostką momentu pędu w układzie SI jest kilogram razy metr do kwadratu na sekundę ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ), co jest równoważne iloczynowi dżula i sekundy ( $\text{J} \cdot \text{s}$ ).

Aby wyznaczyć kierunek wektora momentu pędu  $\vec{\ell}$  na rysunku 12.11, przesuwamy wektor  $\vec{p}$  tak, aby jego początek znalazł się w początku układu współrzędnych  $O$ . Następnie korzystamy z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego, ustawiając jej palce tak, aby wskazywały od  $\vec{r}$  do  $\vec{p}$ . Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora  $\vec{\ell}$ , zgodny w naszym przypadku z dodatnim kierunkiem osi  $x$  (patrz rysunek 12.11). Ten dodatni kierunek jest zgodny z tym, czego powinniśmy oczekiwać na podstawie kierunku obrotu wektora położenia  $\vec{r}$  cząstki wokół osi  $z$ , w czasie ruchu cząstki — jest on przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy obrocie  $\vec{r}$  wokół osi  $z$  zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara powinniśmy otrzymać ujemny kierunek wektora  $\vec{\ell}$ ).

Rys. 12.11. Definicja momentu pędu. Cząstka znajdująca się w danej chwili w punkcie  $A$  ma pęd  $\vec{p} (= m\vec{v})$ , przy czym wektor  $\vec{p}$  leży w płaszczyźnie  $xy$ . Cząstka ta ma moment pędu  $\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$  względem początku układu współrzędnych  $O$ . Zgodnie z regułą prawej dłoni wektor momentu pędu ma dodatni kierunek osi  $z$ . a) Długość wektora  $\vec{\ell}$  wynosi  $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$ . b) Długość wektora  $\vec{\ell}$  można również wyrazić jako  $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$



W celu wyznaczenia długości wektora  $\vec{\ell}$  korzystamy ze wzoru (3.27), co daje:

$$\ell = rmv \sin \phi, \quad (12.19)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem między wektorami  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ , gdy są one ustawione tak, że mają wspólny początek. Na podstawie rysunku 12.11a możemy stwierdzić, że równanie (12.19) można przekształcić do postaci:

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (12.20)$$

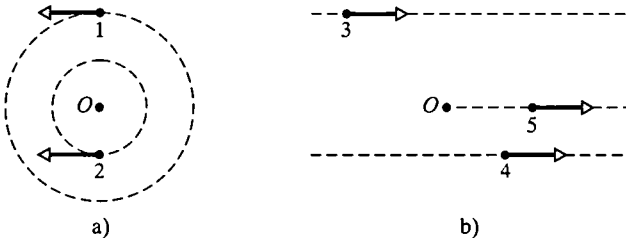
przy czym  $p_{\perp}$  jest składową  $\vec{p}$ , prostopadłą do  $\vec{r}$ , a  $v_{\perp}$  jest składową  $\vec{v}$ , prostopadłą do  $\vec{r}$ . Natomiast z rysunku 12.11b widać, że równanie (12.19) można także zapisać jako:

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \quad (12.21)$$

gdzie  $r_{\perp}$  jest odległością punktu  $O$  od prostej, na której leży wektor  $\vec{p}$ .

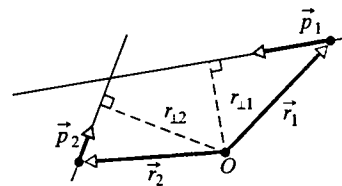
Moment pędu — jak moment siły — ma znaczenie tylko wtedy, gdy wiadomo, względem którego punktu jest wyznaczony. Zauważ ponadto, że gdyby cząstka z rysunku 12.11 nie znajdowała się w płaszczyźnie  $xy$  lub gdyby pęd  $\vec{p}$  tej cząstki nie leżał także w tej płaszczyźnie, to wektor momentu pędu  $\vec{\ell}$  nie byłby równoległy do osi  $z$ . Wektor momentu pędu jest zawsze prostopadły do płaszczyzny, wyznaczonej przez wektory położenia i pędu cząstki  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ .

**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku (a) przedstawiono dwie cząstki, 1 i 2, okrążające punkt  $O$  w przeciwnych kierunkach po okręgach o promieniach 2 m i 4 m. Na rysunku (b) pokazano cząstki 3 i 4, poruszające się w tym samym kierunku po liniach prostych, odległych od punktu  $O$  o 4 m i 2 m. Cząstka 5 porusza się wzdłuż prostej, przechodzącej przez punkt  $O$ . Wszystkie te cząstki mają jednakowe masy i takie same wartości prędkości, które są stałe. a) Uszereguj te cząstki w zależności od wartości bezwzględnej ich momentu pędu względem punktu  $O$ , od największej do najmniejszej. b) Dla których cząstek moment pędu względem punktu  $O$  jest ujemny?



## Przykład 12.4

Na rysunku 12.12 przedstawiono widok z góry dwóch cząstek, poruszających się ze stałym pędem po poziomych torach. Cząstka 1, która ma pęd o wartości  $p_1 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i wektor położenia  $\vec{r}_1$ , porusza się wzdłuż prostej odległej od punktu  $O$  o 2 m. Cząstka 2, która ma pęd o wartości  $p_2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  i wektor położenia  $\vec{r}_2$ , porusza się wzdłuż prostej, odległej od punktu  $O$  o 4 m. Ile wynosi całkowity moment pędu  $\vec{L}$  układu tych dwóch cząstek względem punktu  $O$ ?



Rys. 12.12. Przykład 12.4. Dwie cząstki przemieszczają się w pobliżu punktu  $O$

## ROZWIĄZANIE:

☛ Aby wyznaczyć wektor  $\vec{L}$ , wyznaczmy najpierw momenty pędu obydwu cząstek  $\vec{\ell}_1$  i  $\vec{\ell}_2$ , a następnie dodamy je do siebie. Aby obliczyć długości tych wektorów, możemy skorzystać z dowolnego z równań (12.18)–(12.21). Najłatwiej jednak będzie zastosować równanie (12.21), gdyż znamy odległości  $r_{\perp 1}$  ( $= 2$  m) i  $r_{\perp 2}$  ( $= 4$  m) oraz wartości pędów  $p_1$  i  $p_2$  cząstek, a nie znamy wszystkich zmiennych, występujących w pozostałych równaniach.

Z równania (12.21) otrzymujemy dla cząstki 1:

$$\ell_1 = r_{\perp 1} p_1 = (2 \text{ m})(5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

W celu wyznaczenia kierunku wektora  $\vec{\ell}_1$  skorzystamy z równania (12.18) oraz z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego. Iloczyn  $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$  jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny rysunku 12.12 i jest skierowany zza kartki. Jest to kierunek dodatni, gdyż w czasie ruchu cząstki 1 jej wektor położenia  $\vec{r}_1$  obraca się wokół punktu  $O$ , w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek

zegara. Moment pędu cząstki 1 wynosi zatem:

$$\vec{\ell}_1 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

W taki sam sposób wyznaczamy długość wektora  $\vec{\ell}_2$ :

$$\ell_2 = r_{\perp 2} p_2 = (4 \text{ m})(2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Iloczyn  $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$  jest wektorem skierowanym za kartkę, co jest kierunkiem ujemnym, gdyż w czasie ruchu cząstki 2 wektor  $\vec{r}_2$  obraca się wokół punktu  $O$  w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment pędu cząstki 2 wynosi zatem:

$$\vec{\ell}_2 = -8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Całkowity moment pędu układu tych dwóch cząstek wynosi wobec tego:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (-8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) = +2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

(odpowiedź)

Znak plus oznacza, że całkowity moment pędu układu względem punktu  $O$  jest skierowany zza kartki.

## 12.7. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Druga zasada dynamiki Newtona, zapisana w postaci:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{pojedyncza cząstka}), \quad (12.22)$$

wyraża związek siły z pędem dla pojedynczej cząstki. Spotkaliśmy już tak wiele analogii między wielkościami liniowymi i kątowymi, że jesteśmy całkiem pewni, iż musi istnieć podobny związek między momentem siły i momentem pędu. Patrząc na równanie (12.22), możemy nawet zgadnąć, że ma on postać:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad (\text{pojedyncza cząstka}). \quad (12.23)$$

Równanie (12.23) jest istotnie zapisem drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

► Suma (wektorowa) wszystkich momentów siły działających na cząstkę jest równa szybkości zmiany momentu pędu tej cząstki.

Równanie (12.23) jest oczywiście słuszne tylko wtedy, gdy momenty siły  $\vec{M}$  i moment pędu  $\vec{\ell}$  są wyznaczone względem tego samego punktu odniesienia.

### Uzasadnienie wzoru (12.23)

Wyjdziemy od równania (12.18), czyli od definicji momentu pędu cząstki:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$



w którym  $\vec{r}$  jest wektorem położenia cząstki, a  $\vec{v}$  — jej prędkością. Różniczkując to równanie stronami\* względem  $t$ , otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right). \quad (12.24)$$

Zauważ jednak, że  $d\vec{v}/dt$  to przyspieszenie  $\vec{a}$  cząstki. a  $d\vec{r}/dt$  to prędkość  $\vec{v}$  cząstki. Równanie (12.24) można zatem zapisać w postaci:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

Ponieważ  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  (iloczyn wektorowy dowolnego wektora przez siebie jest równy zeru, gdyż w tym przypadku kąt między mnożonymi przez siebie wektorami jest zawsze równy zeru), otrzymujemy następnie:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki ( $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ ), do powyższego równania możemy wstawić za  $m\vec{a}$  sumę wektorową wszystkich sił, działających na cząstkę, co daje:

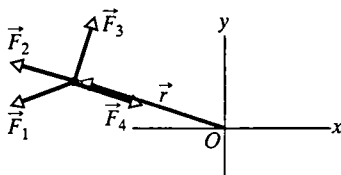
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{wyp}} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}). \quad (12.25)$$

Symbol  $\sum$  oznacza tu, że musimy dodać do siebie iloczyny wektorowe  $\vec{r} \times \vec{F}$  dla wszystkich sił. Wiemy jednak z równania (12.24), że każdy z tych iloczynów wektorowych to związany z każdą z sił moment siły. Równanie (12.25) oznacza więc, że:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt},$$

a to jest właśnie równanie (12.23), które mieliśmy wyprowadzić.

**SPRAWDZIAN 5:** Na rysunku przedstawiono wektor położenia  $\vec{r}$  cząstki w pewnej chwili oraz kierunek siły, powodującej ruch przyspieszony cząstki, w czterech możliwych przypadkach. We wszystkich przypadkach siła ma taką samą wartość i leży w płaszczyźnie  $xy$ . a) Uszereguj te siły w zależności od wartości wywoływanych przez nie szybkości zmiany momentu pędu cząstki ( $d\vec{\ell}/dt$ ) względem punktu  $O$ , od największej do najmniejszej. b) W których przypadkach ta szybkość zmiany jest ujemna?



## Przykład 12.5

Jak pokazano na rysunku 12.13, pingwin o masie  $m$  spada z punktu  $A$ , odległego w poziomie o  $D$  od początku  $O$  układu współrzędnych  $xyz$  (oś  $z$  jest prostopadła do płaszczyzny rysunku, a jej kierunek dodatni to kierunek zza kartki). W chwili początkowej pingwin pozostawał w punkcie  $A$  w spoczynku.

a) Wyznacz moment pędu  $\vec{\ell}$  spadającego pingwina względem punktu  $O$ .

**ROZWIĄZANIE:**

**➔ 1.** Ruch pingwina można uznać w przybliżeniu za ruch cząstki, a zatem uważać, że jego moment pędu  $\vec{\ell}$  jest dany wzorem

\*Różniczkując iloczyn wektorowy, musimy uważać, aby nie zmienić kolejności wektorów (tutaj wektorów  $\vec{r}$  i  $\vec{v}$ ), które są czynnikami tego iloczynu (patrz równanie (3.28)).

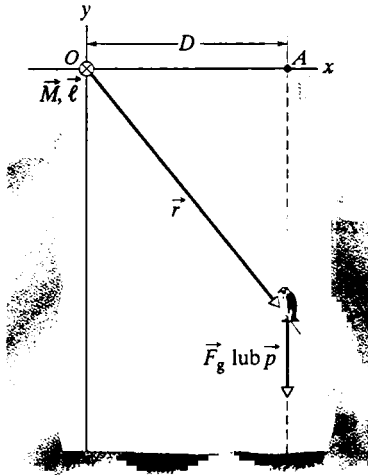
(12.18) ( $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ ), w którym  $\vec{r}$  jest wektorem położenia pingwina (łączącym punkt  $O$  z pingwinem), a  $\vec{p}$  — pędem pingwina.

➔ 2. Choć pingwin porusza się po linii prostej, ma on jednak moment pędu względem punktu  $O$ , gdyż w czasie jego spadku wektor  $\vec{r}$  obraca się względem punktu  $O$ .

Do wyznaczenia długości wektora  $\vec{\ell}$  możemy zastosować dowolne z równań skalarnych otrzymanych z równania (12.18), tzn. dowolne z równań (12.19)–(12.21). Najwygodniej będzie skorzystać z równania (12.21) ( $\ell = r_{\perp}mv$ ), ponieważ  $r_{\perp}$ , czyli odległość punktu  $O$  od prostej, na której leży wektor  $\vec{p}$ , jest równa danej odległości  $D$ . Zastosujemy też jeszcze jedno, od dawna nam już znane stwierdzenie:

➔ 3. Prędkość ciała spadającego swobodnie, od stanu spoczynku, przez czas  $t$  wynosi  $v = gt$ . Dzięki temu możemy zapisać równanie (12.21) tak, aby po jego prawej stronie występowały jedynie wielkości znane, tzn.:

$$\ell = r_{\perp}mv = Dmgt. \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 12.13. Przykład 12.5. Pingwin spada pionowo z punktu  $A$ . Moment siły  $\vec{M}$  oraz moment pędu pingwina  $\vec{\ell}$  względem początku układu współrzędnych  $O$  są prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane za kartkę

Aby wyznaczyć kierunek wektora  $\vec{\ell}$ , korzystamy z reguły prawej dłoni, stosując ją do iloczynu wektorowego  $\vec{r} \times \vec{p}$  w równaniu (12.18). W myśli przesuwamy wektor  $\vec{p}$  do początku układu współrzędnych, a następnie ustawiamy palce prawej dłoni tak, aby wskazywały kierunek obrotu od  $\vec{r}$  do  $\vec{p}$  wzdłuż mniejszego kąta między tymi wektorami. Odgięty kciuk jest wtedy prostopadły do

płaszczyzny rysunku i wskazuje za kartkę, co oznacza, że iloczyn  $\vec{r} \times \vec{p}$ , a zatem i wektor  $\vec{\ell}$  jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany za kartkę, czyli w ujemnym kierunku osi  $z$ . Wektor  $\vec{\ell}$  zaznaczamy więc na rysunku za pomocą symbolu kółka z krzyżykiem ( $\otimes$ ), umieszczonego w punkcie  $O$ . W miarę upływu czasu zmienia się tylko długość wektora  $\vec{\ell}$ , a jego kierunek nie ulega zmianie.

b) Wyznacz moment siły  $\vec{M}$  względem punktu  $O$  związany z działającą na pingwina siłą ciężkości  $\vec{F}_g$ .

### ROZWIĄZANIE:

Znów mamy dwa ważne spostrzeżenia.

➔ 1. Moment siły jest dany wzorem (12.14) ( $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ), a siłą jest w naszym przypadku siła ciężkości  $\vec{F}_g$ .

➔ 2. Z siłą  $\vec{F}_g$  związany jest moment siły, choć pingwin porusza się po linii prostej, gdyż w czasie jego spadku wektor  $\vec{r}$  obraca się względem punktu  $O$ .

Do wyznaczenia długości wektora  $\vec{M}$  możemy zastosować dowolne z równań skalarnych, otrzymanych z równania (12.14), tzn. dowolne z równań (12.15)–(12.17). Najwygodniej będzie skorzystać z równania (12.17) ( $M = r_{\perp}F$ ), ponieważ  $r_{\perp}$ , czyli odległość punktu  $O$  od kierunku działania siły  $\vec{F}_g$  jest równa danej odległości  $D$ . Z równania (12.17) otrzymujemy zatem, podstawiając do niego wartość  $D$  oraz wstawiając  $mg$  za długość siły  $\vec{F}_g$ :

$$M = DF_g = Dmg. \quad (\text{odpowiedź})$$

Korzystając z reguły prawej dłoni w odniesieniu do iloczynu wektorowego  $\vec{r} \times \vec{F}$  w równaniu (12.14), stwierdzamy, że wektor  $\vec{M}$  jest skierowany w ujemnym kierunku osi  $z$ , a zatem tak samo jak wektor  $\vec{\ell}$ .

Wyniki otrzymane w obydwu częściach zadania muszą być zgodne z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego, czyli z równaniem (12.23) ( $\dot{M}_{wyp} = d\ell/dt$ ). Aby sprawdzić poprawność naszego rozwiązania, zapiszemy równanie (12.23) dla składowych wzdłuż osi  $z$ , a następnie podstawimy do niego otrzymane przez nas wyniki, tzn.  $\ell = Dmgt$ . Otrzymamy wówczas:

$$M = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d(Dmgt)}{dt} = Dmg,$$

a to jest właśnie wartość momentu siły, jaką otrzymaliśmy w drugiej części zadania. Aby sprawdzić poprawność wyznaczenia kierunku wektorów zauważ, że z równania (12.23) wynika, iż wektory  $\vec{M}$  i  $d\ell/dt$  mają ten sam kierunek, a zatem ten sam kierunek mają też wektory  $\vec{M}$  i  $\vec{\ell}$ , co właśnie otrzymaliśmy, rozwiązując zadanie.

## 12.8. Moment pędu układu cząstek

Obecnie zajmiemy się momentem pędu układu cząstek względem pewnego punktu. Całkowity moment pędu  $\vec{L}$  układu jest równy sumie (wektorowej) momentów pędu  $\vec{\ell}$  poszczególnych cząstek:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \dots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i, \quad (12.26)$$

gdzie wskaźnik  $i$  ( $= 1, 2, 3, \dots$ ) numeruje cząstki.

Momenty pędu poszczególnych cząstek mogą zmieniać się wraz z upływem czasu, co może zachodzić pod wpływem oddziaływań w obrębie układu (tzn. między jego cząstkami) lub w wyniku oddziaływań z ciałami spoza układu. Zmianę  $\vec{L}$ , pochodzącą od zmian momentów pędu cząstek możemy obliczyć, obliczając pochodną równania (12.26) względem czasu. Daje to:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \quad (12.27)$$

Jak wiemy z równania (12.23),  $d\vec{\ell}_i/dt$  jest równe wypadkowemu momentowi siły  $\vec{M}_{\text{wyp},i}$  działającemu na  $i$ -tą cząstkę. Wobec tego równanie (12.27) możemy zapisać jako:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{\text{wyp},i}. \quad (12.28)$$

Oznacza to, że szybkość zmiany momentu pędu  $\vec{L}$  układu jest równa sumie wektorowej momentów sił, działających na wszystkie cząstki. Wśród tych momentów siły są *momenty sił wewnętrzne* (pochodzące od sił, działających między cząstkami) oraz *momenty sił zewnętrzne* (pochodzące od sił, działających na cząstki ze strony ciał nienależących do układu). Siły działające między cząstkami układu występują jednak zawsze parami, stanowiącymi pary akcja–reakcja (których dotyczy trzecia zasada dynamiki), a zatem suma związanych z nimi momentów sił jest równa zeru. Tak więc całkowity moment pędu  $\vec{L}$  układu cząstek może ulegać zmianie jedynie w wyniku działania na układ zewnętrznych w stosunku do układu momentów sił.

Oznaczmy przez  $\vec{M}_{\text{wyp}}$  wypadkowy zewnętrzny moment sił, który jest sumą wektorową wszystkich zewnętrznych momentów sił, działających na cząstki układu. Równanie (12.28) możemy teraz zapisać w postaci:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{układ cząstek}). \quad (12.29)$$

To równanie wyraża drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego układu cząstek. Jej treść jest następująca:

► Wypadkowy zewnętrzny moment siły  $\vec{M}_{\text{wyp}}$ , działający na układ cząstek jest równy szybkości zmiany całkowitego momentu pędu  $\vec{L}$  układu.

Równanie (12.29) ma taką samą postać, jak równanie (9.23),  $\vec{F}_{\text{wyp}} = d\vec{P}/dt$ , lecz jego zastosowanie wymaga pewnej ostrożności. Momenty siły i moment pędu układu muszą być obliczone względem tego samego punktu. Jeśli środek masy układu nie porusza się ruchem przyspieszonym względem jakiegoś układu inercjalnego, to może nim być dowolny punkt. Jeśli jednak środek masy układu porusza się ruchem przyspieszonym, to punktem odniesienia może być tylko śro-

dek masy układu. Rozważmy jako przykład układ cząstek stanowiący koło. Koło obraca się wokół osi, która ma stałe położenie względem ziemi, to punktem odniesienia w równaniu (12.29) może być dowolny punkt, którego położenie względem ziemi jest stałe. Jeśli jednak koło obraca się wokół osi, która porusza się ruchem przyspieszonym (jak wtedy, gdy koło stacza się po równi pochyłej), to tym punktem odniesienia może być tylko środek masy koła.

## 12.9. Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi

W tym paragrafie obliczymy moment pędu układu cząstek, stanowiącego ciało sztywne, obracające się wokół stałej osi. Takie ciało przedstawiono na rysunku 12.14a. Stałą osią jego obrotu jest oś  $z$ , a ciało obraca się wokół niej ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Chcemy wyznaczyć moment pędu ciała, związany z jego obrotem wokół tej osi.

Szukany moment pędu ciała możemy wyznaczyć, sumując składowe z momentów pędu poszczególnych elementów ciała. Na rysunku 12.14a zaznaczono przykładowy element ciała o masie  $\Delta m_i$ , poruszający się po torze kołowym wokół osi  $z$ . Jego wektor położenia względem początku układu współrzędnych oznaczono przez  $\vec{r}_i$ . Promień okręgu, po jakim porusza się ten element, jest równy jego odległości od osi  $z$  i wynosi  $r_{\perp i}$ .

Długość wektora momentu pędu  $\vec{\ell}_i$  elementu względem punktu  $O$  można otrzymać z równania (12.19):

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i),$$

przy czym  $p_i$  jest wartością pędu tego elementu, a  $v_i$  — wartością jego prędkości; wzięto również pod uwagę, że wektory  $\vec{r}_i$  i  $\vec{p}_i$  tworzą ze sobą kąt równy  $90^\circ$ . Wektor momentu pędu  $\vec{\ell}_i$  elementu masy z rysunku 12.14a przedstawiono na rysunku 12.14b; jest on oczywiście prostopadły do wektorów  $\vec{r}_i$  i  $\vec{p}_i$ .

Interesuje nas składowa wektora  $\vec{\ell}_i$  równoległa do osi obrotu, czyli do osi  $z$ . Ta składowa wynosi:

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta = (r_i \sin \theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i.$$

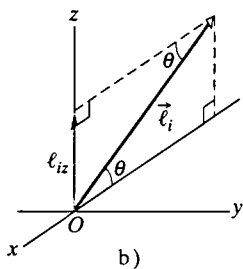
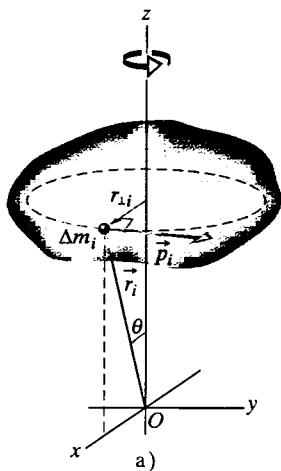
Składową  $z$  momentu pędu całego obracającego się ciała sztywnego wyznaczamy jako sumę wkładów, pochodzących od wszystkich elementów masy tego ciała. Zauważając ponadto, że  $v = \omega r_{\perp}$ , otrzymujemy:

$$L_z = \sum_{i=1}^n \ell_{iz} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} = \omega \left( \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right). \quad (12.30)$$

Wielkość  $\omega$  mogliśmy wynieść przed znak sumy, gdyż ma ona tę samą wartość dla wszystkich punktów ciała.

Występująca w równaniu (12.30) wielkość  $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$  jest momentem bezwładności  $I$  ciała względem stałej osi (patrz równanie (11.26)). Równanie (12.30) przybiera zatem postać:

$$L = I \omega \quad (\text{ciało sztywne, stała oś obrotu}). \quad (12.31)$$



Rys. 12.14. a) Ciało sztywne obraca się wokół osi  $z$  z prędkością kątową  $\omega$ . Element tego ciała o masie  $\Delta m_i$  zatacza przy tym wokół osi  $z$  okrąg o promieniu  $r_{\perp i}$ . Ten element masy ma pęd  $\vec{p}_i$ , a  $\vec{r}_i$  jest jego wektorem położenia względem początku układu współrzędnych  $O$ . Rysunek odpowiada chwili, w której  $r_{\perp i}$  ma kierunek osi  $x$ . b) Moment pędu  $\vec{\ell}_i$  elementu masy z rysunku (a) względem punktu  $O$ . Na rysunku zaznaczono również jego składową  $\ell_{iz}$  wzdłuż osi  $z$

W równaniu tym opuściliśmy wskaźnik  $z$ . Musisz jednak pamiętać, że moment pędu w równaniu (12.31) jest składową wzdłuż osi obrotu. Podobnie, wielkość  $I$  w tym równaniu jest momentem bezwładności względem tej samej osi.

W tabeli 12.1, stanowiącej uzupełnienie tabeli 11.3, zebrano dalsze równania, odnoszące się do ruchu obrotowego i ich odpowiedniki dla ruchu postępowego.

Tabela 12.1. Dalsze zmienne i równania dla ruchu postępowego i obrotowego<sup>1</sup>.

Ruch postępowy		Ruch obrotowy	
siła	$\vec{F}$	moment siły	$\vec{M} (= \vec{r} \times \vec{F})$
pęd	$\vec{p}$	moment pędu	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
pęd <sup>2</sup>	$\vec{P} (= \sum \vec{p}_i)$	moment pędu <sup>2</sup>	$\vec{L} (= \sum \vec{\ell}_i)$
pęd <sup>2</sup>	$\vec{P} = m_\mu \vec{v}_{\text{SM}}$	moment pędu <sup>3</sup>	$L = I\omega$
druga zasada dynamiki <sup>2</sup>	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	druga zasada dynamiki <sup>2</sup>	$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
zasada zachowania <sup>4</sup>	$\vec{P} = \text{const}$	zasada zachowania <sup>4</sup>	$\vec{L} = \text{const}$

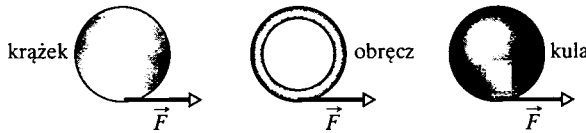
<sup>1</sup> Patrz także tabela 11.3.

<sup>2</sup> Dla układu cząstek, a także ciała sztywnego.

<sup>3</sup> Dla ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi;  $L$  jest składową momentu pędu wzdłuż tej osi.

<sup>4</sup> Dla układu zamkniętego i izolowanego.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono krążek, obręcz i kulę, które są wprawiane w ruch obrotowy wokół swej osi za pomocą linki, którą są owinięte (tak, jak wprawia się w ruch bąka). Wszystkie trzy ciała są początkowo w spoczynku, mają takie same masy i promienie oraz działa na nie taka sama siła styczna  $\vec{F}$ . Uszereguj te ciała pod względem ich: a) momentu pędu wzdłuż osi obrotu, b) prędkości kątowej, jakie mają po upływie pewnego czasu  $t$  od początku ciągnięcia za linkę, od największych do najmniejszych.



## Przykład 12.6

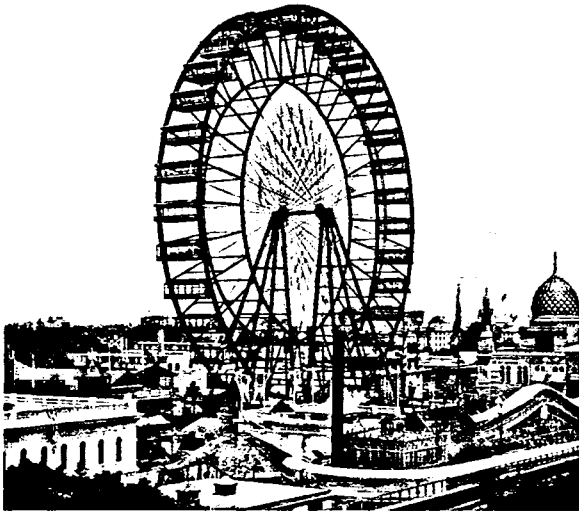
George Washington Gale Ferris, Jr., inżynier budownictwa, absolwent uczelni Rensselaer Polytechnic Institute, zbudował pierwszy diabelski młyn (rys. 12.15) w 1893 roku, aby zaprezentować go na Wystawie Światowej w Chicago. Urządzenie to, którego konstrukcja była w owym czasie niezwykłym osiągnięciem budowlanym, zawierało 36 drewnianych wagoników, z których każdy mógł pomieścić aż 60 pasażerów i miało promień  $R = 38$  m. Masa każdego wagonika wynosiła około  $1,1 \cdot 10^4$  kg, a masa metalowej konstrukcji karuzeli — około  $6 \cdot 10^5$  kg, na co składała się przede wszystkim masa pionowych kół, na których zawieszono były wagoniki. Pasażerowie wsiadali jednocześnie do 6 wagoników, a po zapełnieniu wszystkich 36 wagoników koło wprawiano w ruch obrotowy z prędkością kątową  $\omega_F$ , podczas którego wykonywało ono pełny obrót w czasie około 2 minut.

a) Oszacuj wartość momentu pędu  $L$  diabelskiego młyna wraz z pasażerami, gdy koło obracało się z prędkością kątową  $\omega_F$ .

### ROZWIĄZANIE:

➔ Koło diabelskiego młyna i jego wagoniki wraz z pasażerami możemy uważać za ciało sztywne, obracające się wokół stałej osi — poziomej osi karuzeli. Jego moment pędu możemy obliczyć z równania (12.31) ( $L = I\omega$ ). Musimy w tym celu wyznaczyć moment bezwładności  $I$  ciała oraz jego prędkość kątową  $\omega_F$ .

Aby obliczyć  $I$ , rozpoczniemy od wagoników z pasażerami. Możemy je uważać za cząstki, odległe o  $R$  od osi obrotu, a zatem na podstawie równania (11.26) możemy zapisać ich moment bezwładności jako:  $I_{\text{wp}} = m_{\text{wp}}R^2$ , gdzie  $m_{\text{wp}}$  jest całkowitą masą wagoników z pasażerami. Załóżmy, że w każdym z 36 wagoników znajduje się 60 pasażerów, z których każdy ma masę 70 kg.



Rys. 12.15. Przykład 12.6. Pierwszy diabelski młyn, zbudowany przez Ferrisa w 1893 roku w pobliżu Uniwersytetu w Chicago wznosił się wysoko nad otaczające go budynki

Całkowita masa wagoników z pasażerami wynosi zatem:

$$m_{wp} = 36[1,1 \cdot 10^4 \text{ kg} + 60(70 \text{ kg})] = 5,47 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

a ich moment bezwładności jest równy:

$$I_{wp} = m_{wp}R^2 = (5,47 \cdot 10^5 \text{ kg})(38 \text{ m})^2 = 7,9 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Następnie rozważmy metalową konstrukcję karuzeli. Przyjmijmy, że jej moment bezwładności pochodzi przede wszystkim od pionowych kół metalowych, na których zawieszane są wagoniki. Założmy ponadto, że stanowią one obręcz o promieniu  $R$  i masie  $m_{obr}$ , równej  $3 \cdot 10^5 \text{ kg}$  (czyli połowie masy karuzeli). W tabeli 11.2a znajdujemy moment bezwładności obręczy i otrzymujemy:

$$I_{obr} = m_{obr}R^2 = (3 \cdot 10^5 \text{ kg})(38 \text{ m})^2 = 4,33 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Całkowity moment bezwładności  $I$  wagoników, pasażerów i obręczy wynosi zatem:

$$\begin{aligned} I &= I_{wp} + I_{obr} = (7,9 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) + (4,33 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \\ &= 1,22 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia prędkości kątowej  $\omega_F$  korzystamy ze wzoru (11.5) ( $\omega_{sr} = \Delta\theta/\Delta t$ ). W naszym przypadku koło diabelskiego młyna doznaje przemieszczenia kątowego  $\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$  w czasie  $\Delta t = 2 \text{ min}$ . Zatem:

$$\omega_F = \frac{2\pi \text{ rad}}{(2 \text{ min})(60 \text{ s/min})} = 0,05242 \text{ rad/s}.$$

Teraz możemy już wyznaczyć wartość momentu pędu  $L$  z równania (12.31). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L &= I\omega_F = (1,22 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(0,05242 \text{ rad/s}) \\ &= 6,39 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ &\approx 6,4 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Przyjmij, że koło diabelskiego młyna, ze wszystkimi wagonikami wypełnionymi pasażerami, osiąga prędkość kątową  $\omega_F$  po czasie  $\Delta t_1 = 5 \text{ s}$  od startu. Ile wynosi wartość średnia zewnętrznego momentu siły  $\bar{M}_{sr}$ , działającego na koło w czasie  $\Delta t_1$ ?

**ROZWIĄZANIE:**

Średni zewnętrzny moment siły jest związany ze zmianą momentu pędu  $\Delta L$  koła, a związek ten opisuje równanie (12.29) ( $\bar{M}_{wyp} = d\bar{L}/dt$ ). Koło obraca się wokół stałej osi i osiąga prędkość kątową o wartości  $\omega_F$  w czasie  $\Delta t_1$ , a więc to równanie (12.29) można zapisać w postaci:  $\bar{M}_{sr} = \Delta L/\Delta t$ . Moment pędu  $L$  zmienia się od zera do wartości obliczonej w punkcie (a), mamy zatem:

$$\bar{M}_{sr} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{(6,39 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) - (0)}{(5 \text{ s})} \approx 1,3 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## 12.10. Zachowanie momentu pędu

Poznałeś dotąd dwie bardzo użyteczne zasady zachowania: zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu. Teraz podamy trzecie prawo tego rodzaju, mianowicie zasadę zachowania momentu pędu. Wyjdziemy z równania (12.29) ( $\bar{M}_{wyp} = d\bar{L}/dt$ ), które opisuje drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego. Jeśli na układ nie działa żaden wypadkowy moment siły, to równanie przybiera postać  $d\bar{L}/dt = 0$ , co oznacza, że:

$$\bar{L} = \text{const} \quad (\text{układ izolowany}). \quad (12.32)$$

Otrzymany wynik, noszący nazwę **zasady zachowania momentu pędu**, można też zapisać jako:

$$\left( \begin{array}{c} \text{całkowity moment pędu} \\ \text{(w pewnej chwili początkowej } t_{\text{pocz}}) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{całkowity moment pędu} \\ \text{(w pewnej chwili końcowej } t_{\text{końc}}) \end{array} \right).$$

czyli

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{końc}} \quad (\text{układ izolowany}). \quad (12.33)$$

Z równań (12.32) i (12.33) wynika, że:

- Jeśli działający na układ wypadkowy moment siły jest równy zeru, to całkowity moment pędu  $\vec{L}$  układu nie zmienia się niezależnie od tego, jakim zmianom podlega układ.

Równania (12.32) i (12.33) są równaniami wektorowymi; są one wobec tego równoważne trzem równaniom dla składowych wektorów, stwierdzających zachowanie momentu pędu w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. W zależności od tego, jakie momenty siły działają na układ, moment pędu może być zachowany dla jednego lub dwóch kierunków, a nie być zachowany dla wszystkich trzech.

- Jeśli wypadkowy *zewnątrzny* moment siły, działający na układ, ma składową wzdłuż pewnej osi równą zeru, to składowa całkowitego momentu pędu układu wzdłuż tej osi nie zmienia się, niezależnie od tego, jakim zmianom podlega układ.

Rozważmy tę zasadę w odniesieniu do izolowanego ciała z rysunku 12.14, obracającego się wokół osi  $z$ . Wyobraź sobie, że ciało, które jest początkowo sztywne, w jakiś sposób zmienia w czasie obrotu rozkład swej masy względem osi obrotu. przez co zmienia się jego moment bezwładności względem tej osi. Równania (12.32) i (12.33) wskazują, że moment pędu ciała nie może przy tym ulec zmianie. Podstawiając do równania (12.33) wyrażenie (12.31) na moment pędu ciała wzdłuż osi obrotu, otrzymujemy zasadę zachowania momentu pędu w postaci:

$$I_{\text{pocz}}\omega_{\text{pocz}} = I_{\text{końc}}\omega_{\text{końc}}. \quad (12.34)$$

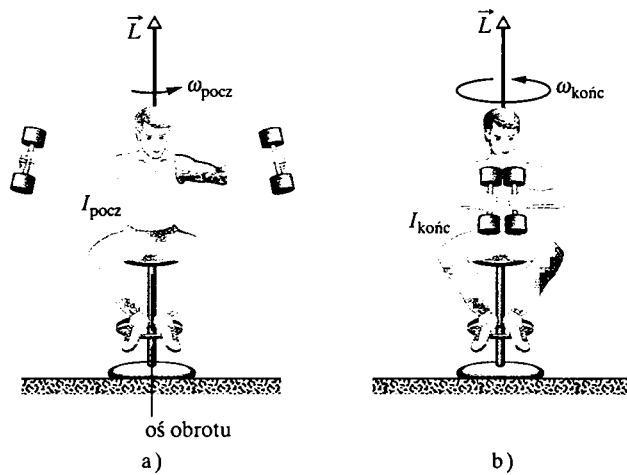
Wskaźniki w tym równaniu odnoszą się do wartości momentu bezwładności  $I$  oraz prędkości kątowej  $\omega$  przed wspomnianą zmianą rozkładu masy ciała i po niej.

Podobnie, jak dwie omówione wcześniej zasady zachowania, zasada zachowania momentu pędu, którą wyrażają równania (12.32) i (12.33), obowiązuje nie tylko w mechanice klasycznej. Jest ona słuszna także dla cząstek o prędkościach bliskich prędkości światła (dla których obowiązują prawa szczególnej teorii względności), a także w świecie cząstek mniejszych od atomów (do których stosują się prawa fizyki kwantowej). Nie stwierdzono dotychczas żadnych odstępstw od zasady zachowania momentu pędu.

Omówimy teraz cztery przypadki, w których ta zasada odgrywa ważną rolę.

1. **Ochotnik na karuzeli.** Na rysunku 12.16 przedstawiono studenta siedzącego na stołku, który może obracać się wokół osi pionowej. Student, który

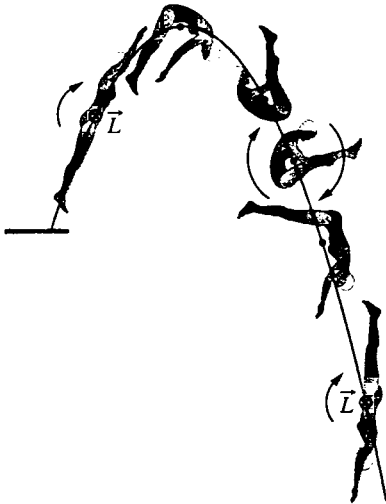
Rys. 12.16. a) Student ma stosunkowo duży moment bezwładności względem osi obrotu i stosunkowo małą prędkość kątową. b) Zmniejszając swój moment bezwładności, student zwiększa swą prędkość kątową. Moment pędu  $\vec{L}$  obracającego się układu pozostaje bez zmiany



trzyma hantle w wyciągniętych w bok rękach, zostaje wprowadzony w ruch obrotowy z pewną niezbyt dużą prędkością kątową  $\omega_{\text{pocz}}$ . Wektor jego momentu pędu  $\vec{L}$  jest skierowany wzdłuż pionowej osi obrotu w górę.

Wykładowca prosi teraz, aby student przyciągnął ramiona do siebie. Dzięki temu student zmniejsza swój moment bezwładności od pewnej wartości początkowej  $I_{\text{pocz}}$  do wartości końcowej  $I_{\text{końc}}$ , która jest mniejsza od tej pierwszej, gdyż część masy obracającego się ciała została zbliżona do osi obrotu. Towarzyszy temu bardzo widoczny wzrost prędkości kątowej, od wartości  $\omega_{\text{pocz}}$  do wartości  $\omega_{\text{końc}}$ . Student może w każdej chwili znów zwolnić swój obrót, wyciągając ponownie ręce w bok.

Na układ złożony ze studenta, hantli i stołka obrotowego nie działa żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły. Wobec tego moment pędu układu wzdłuż osi obrotu musi pozostawać stały, niezależnie od tego, gdzie znajdują się trzymane przez studenta hantle. W sytuacji przedstawionej na rysunku 12.16a prędkość kątowa studenta  $\omega_{\text{pocz}}$  jest stosunkowo mała, a jego moment bezwładności  $I_{\text{pocz}}$  — stosunkowo duży. Zgodnie z równaniem (12.34) jego prędkość kątowa, w sytuacji przedstawionej na rysunku 12.16b, musi być większa niż  $\omega_{\text{pocz}}$ , gdyż jego moment bezwładności się zmniejszył.



Rys. 12.17. Moment pędu  $\vec{L}$  skoczka jest stały w czasie całego skoku. Jego kierunek oznaczono symbolem  $\otimes$ , co oznacza, że jest on prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany za kartkę. Zauważ, że środek masy skoczka (oznaczony kropką) zakreśla w locie parabolę

2. **Skok z trampoliny.** Na rysunku 12.17 przedstawiono zawodniczkę skaczącą do wody z trampoliny, która wykonuje w czasie skoku półtora salta w przód. Jak się zapewne spodziewasz, jej środek masy zakreśla przy tym parabolę. Po odbiciu się od trampoliny zawodniczka ma pewien moment pędu  $\vec{L}$  względem swego środka masy, prostopadły do płaszczyzny rysunku 12.17 i skierowany za kartkę. Na zawodniczkę nie działa w czasie lotu żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły względem jej środka masy, a zatem jej moment pędu względem środka masy się nie zmienia. Przyciągając nogi do tułowia, zawodniczka znacznie zmniejsza swój moment bezwładności względem osi obrotu, a więc — zgodnie z równaniem (12.34) — znacznie zwiększa swą prędkość kątową. Gdy w końcowej fazie skoku zawodniczka prostuje się, zwiększa moment bezwładności i zmniejsza prędkość kątową, dzięki czemu wpada do basenu bez znacznego rozprysku wody. Nawet podczas bardziej



złożonych skoków, zawierających oprócz obrotów w przód lub w tył także obroty śrubowe ciała, moment pędu skoczka musi być zachowany zarówno co do wartości, jak i co do kierunku.

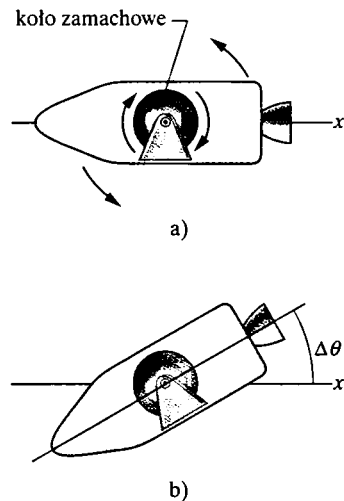
3. **Orientacja statku kosmicznego.** Patrząc na rysunek 12.18, na którym przedstawiono statek kosmiczny ze sztywno umocowanym w nim kołem zamachowym, można sobie wyobrazić bardzo prymitywną metodę sterowania statkiem. Układ *statek + koło zamachowe* jest izolowany. Wobec tego, jeśli całkowity moment pędu tego układu jest równy zero (ponieważ ani statek, ani koło nie obraca się), to pozostanie on przez cały czas równy zero (chyba że układ przestanie być izolowany).

Aby zmienić położenie statku, wprawiamy koło w ruch obrotowy (rysunek 12.18a). Statek zacznie wówczas obracać się w przeciwnym kierunku, gdyż całkowity moment pędu układu musi być równy zero. Gdy po pewnym czasie koło zostanie zatrzymane, statek również przestanie się obracać, lecz będzie miał wówczas inny niż poprzednio kierunek w przestrzeni (rysunek 12.18b). Przez cały czas moment pędu układu *statek + koło zamachowe* pozostaje równy zero.

Ciekawostką może być fakt, że sonda kosmiczna *Voyager 2*, odbywająca lot do Urana, doznawała w 1986 roku niepożądanych obrotów (związanych z opisanym wyżej zjawiskiem), gdy włączał się jej magnetofon, aby zapisać dane na taśmie magnetycznej. Naukowcy z Jet Propulsion Laboratory, sterujący z Ziemi lotem sondy, musieli dodatkowo zaprogramować komputer pokładowy sondy, tak aby za każdym razem, gdy włączał się magnetofon, silniczki odrzutowe przywracały poprzednią orientację pojazdu w przestrzeni.

4. **Niewiarygodnie kurcząca się gwiazda.** Gdy paliwo jądrowe we wnętrzu gwiazdy kończy się, może ona zacząć się zapadać, przy czym ciśnienie w jej wnętrzu gwałtownie rośnie. Proces ten może doprowadzić do tego, że promień gwiazdy o rozmiarze podobnym do Słońca może się zmniejszyć do wprost niewiarygodnej wartości kilku kilometrów. Gwiazda staje się wtedy *gwiazdą neutronową* — cała zawarta w niej materia zostaje ściśnięta do postaci niesłychanie gęstego gazu neutronowego.

W czasie procesu kurczenia się gwiazda pozostaje układem izolowanym, a zatem jej moment pędu  $\vec{L}$  się nie zmienia. Jednak jej moment bezwładności znacznie maleje, a więc odpowiednio wiele razy musi się zwiększyć jej prędkość kątowna, osiągając nawet wartość 600 do 800 obrotów *na sekundę*. Dla porównania, prędkość kątowna typowej gwiazdy, jaką jest Słońce, wynosi około jednego obrotu na miesiąc.

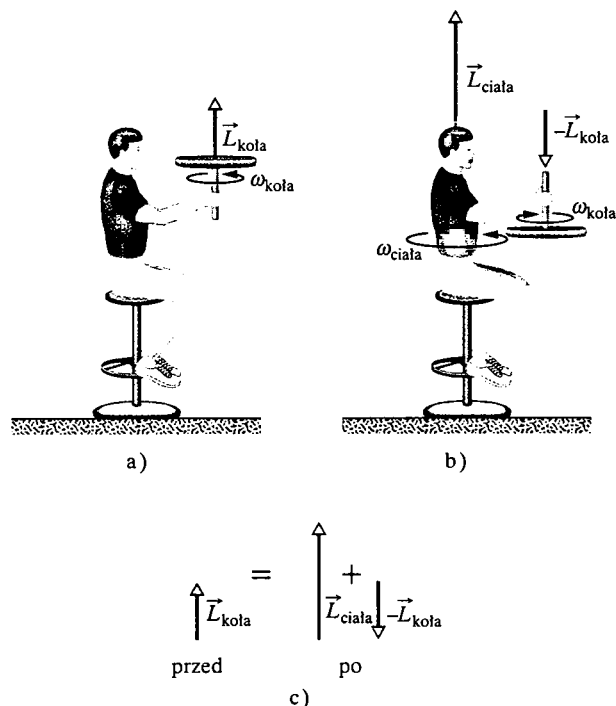


Rys. 12.18. a) Uproszczony obraz statku kosmicznego, zawierającego koło zamachowe. Jeśli koło zostanie wprawione w ruch w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (jak na rysunku), to statek będzie obracać się w kierunku przeciwnym. b) Gdy po pewnym czasie koło zostanie zatrzymane, statek także przestanie się obracać i pozostanie w położeniu skróconym w stosunku do pierwotnego o pewien kąt  $\Delta\theta$

✓ **SPRAWDZIAN 7:** Na skraju niewielkiego krążka, obracającego się jak karuzela, siedzi żuczek. Wyobraź sobie, że w pewnej chwili żuczek zaczyna iść ku środkowi krążka. Czy przy tym podane niżej wielkości (obliczone względem osi krążka) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany: a) moment bezwładności układu żuczek-krążek, b) moment pędu układu, c) prędkość kątowna żuczka i krążka?

## Przykład 12.7

Na rysunku 12.19a przedstawiono studenta, siedzącego — jak poprzednio — na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, którego obręcz jest obciążona ołowiem i ma moment bezwładności  $I_{\text{koła}}$  względem swej osi równy  $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Koło obraca się z prędkością kątową  $\omega_{\text{koła}}$  o wartości 3,9 obrotów/s; patrząc z góry, widzimy, że obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Oś koła jest pionowa, a zatem moment pędu  $\vec{L}_{\text{koła}}$  koła jest skierowany pionowo w górę. W pewnej chwili student obraca koło (rys. 12.19b), tak że teraz patrząc z góry widzimy, że koło obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment pędu koła jest teraz równy  $-\vec{L}_{\text{koła}}$ . W wyniku tego manewru student, stołek i środek masy koła zaczynają się łącznie obracać wokół osi obrotu stołka; moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi  $I_{\text{ciała}} = 6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (Fakt, że koło obraca się ponadto wokół swej osi nie ma wpływu na rozkład masy ciała złożonego, a zatem wartość  $I_{\text{ciała}}$  nie zależy od tego, czy koło się obraca, czy nie). Wyznacz prędkość kątową  $\omega_{\text{ciała}}$  i kierunek obrotu ciała złożonego (tzn. studenta, stołka i środka masy koła) po obróceniu koła.



Rys. 12.19. Przykład 12.7. a) Student trzyma koło rowerowe, obracające się wokół osi pionowej. b) Student obraca koło, dzięki czemu sam zostaje wprawiony w ruch obrotowy. c) Całkowity moment pędu układu musi pozostać stały, mimo że koło zostało obrócone

## ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z czterech spostrzeżeń:

1. Szukana prędkość kątowa  $\omega_{\text{ciała}}$  i moment pędu  $\vec{L}_{\text{ciała}}$  ciała złożonego względem osi obrotu stołka (po obróceniu koła) są ze sobą związane równaniem (12.31) ( $L = I\omega$ ).
2. Początkowa prędkość kątowa  $\omega_{\text{koła}}$  koła i jego moment pędu  $\vec{L}_{\text{koła}}$  względem osi koła są ze sobą związane tym samym równaniem.
3. Całkowity moment pędu  $\vec{L}_{\text{całk}}$  układu, zawierającego studenta, stołek i koło jest równy sumie wektorów  $\vec{L}_{\text{ciała}}$  i  $\vec{L}_{\text{koła}}$ .
4. Gdy student obraca koło, na układ nie działa żaden wypadkowy *zewnątrzny* moment siły, który mógłby zmienić  $\vec{L}_{\text{całk}}$  względem dowolnej osi pionowej (momenty siły, związane z siłami, działającymi w czasie manewru między studentem a kołem, są momentami siły, działającymi *wewnątrz* układu). Wobec tego całkowity moment pędu układu względem dowolnej osi pionowej jest zachowany.

Stałość (zachowanie)  $\vec{L}_{\text{całk}}$  zilustrowano na rysunku 12.19c. Możemy ją także zapisać dla składowych wzdłuż osi pionowej:

$$L_{\text{ciała,końc}} + L_{\text{koła,końc}} = L_{\text{ciała,pocz}} + L_{\text{koła,pocz}}, \quad (12.35)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do stanu początkowego (przed obróceniem koła) i końcowego (po jego obróceniu). Obrócenie koła spowodowało, że moment pędu obracającego się koła zmienił się na przeciwny, dlatego też za  $L_{\text{koła,końc}}$  możemy podstawić  $-L_{\text{koła,pocz}}$ . Biorąc ponadto  $L_{\text{ciała,pocz}} = 0$  (gdyż początkowo student, stołek i środek masy koła pozostawały w spoczynku), otrzymujemy z równania (12.35):

$$L_{\text{ciała,końc}} = 2L_{\text{koła,pocz}}$$

Korzystając z równania (12.31), podstawiamy następnie  $I_{\text{ciała}}\omega_{\text{ciała}}$  w miejsce  $L_{\text{ciała,końc}}$  oraz  $I_{\text{koła}}\omega_{\text{koła}}$  w miejsce  $L_{\text{koła,pocz}}$  i po rozwiązaniu otrzymanego równania względem  $\omega_{\text{ciała}}$  mamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ciała}} &= \frac{2I_{\text{koła}}}{I_{\text{ciała}}} \omega_{\text{koła}} \\ &= \frac{(2)(1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3,9 \text{ obrotów/s})}{6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 1,4 \text{ obrotów/s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymaliśmy w wyniku wartość dodatnią, co oznacza, że student (widziany z góry) obraca się wokół osi obrotu stołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Jeśli chciałby się on zatrzymać, to wystarczy, aby ponownie obrócił koło.

## Przykład 12.8

Akrobata wykonujący skok z poczwórnym saltem. musi zostać pochwycony przez partnera po czasie  $t = 1,87$  s od oderwania się od trapezu. Załóżmy, że pierwsze i ostatnie ćwierć obrotu wykonuje on w pozycji wyprostowanej (patrz rysunek 12.20), gdy jego moment bezwładności względem środka masy (oznaczanego kropką) jest równy  $I_1 = 19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , a pozostałą część lotu odbywa w pozycji skurczonej, gdy ma moment bezwładności  $I_2 = 3,93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Ile musi wynosić jego prędkość kątową  $\omega_2$  wokół środka masy, podczas lotu w pozycji skurczonej?

### ROZWIĄZANIE:

Oczywiście akrobata musi obracać się tak szybko, aby w wymaganym czasie 1,87 s wykonać cztery pełne obroty ciała. W tym celu zwiększa on swoją prędkość kątową do wartości  $\omega_2$ , przyjmując pozycję skurczoną. Aby znaleźć związek  $\omega_2$  z jego początkową prędkością kątową  $\omega_1$ , zastosujemy następujące spostrzeżenie:

➔ 1. W czasie całego lotu moment pędu akrobaty względem jego środka masy jest zachowany, ponieważ nie działa na niego żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły względem jego środka masy. Korzystając z równania (12.34), zasadę zachowania momentu pędu ( $L_1 = L_2$ ) możemy zapisać w postaci:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2,$$

czyli

$$\omega_1 = \frac{I_2}{I_1} \omega_2. \quad (12.36)$$

➔ 2. Prędkość kątową możemy wyrazić przez kąt obrotu i czas potrzebny na jego pokonanie. Na początku i na końcu skoku akro-

bata obraca się w pozycji wyprostowanej łącznie o kąt  $\theta_1 = 0,5$  obrotu (dwie ćwiartki obrotu) w czasie, który oznaczymy przez  $t_1$ . W pozycji skurczonej obraca się on więc o kąt  $\theta_2 = 3,5$  obrotu w czasie  $t_2$ . Na podstawie równania (11.5) ( $\omega_{sr} = \Delta\theta/\Delta t$ ) możemy napisać:

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{oraz} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}.$$

Całkowity czas lotu wynosi zatem:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2}{\omega_2}, \quad (12.37)$$

i jest — jak wiemy — równy 1,87 s. Podstawiając  $\omega_1$  z równania (12.36) do wzoru (12.37), otrzymujemy:

$$t = \frac{\theta_1 I_1}{\omega_2 I_2} + \frac{\theta_2}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_2} \left( \theta_1 \frac{I_1}{I_2} + \theta_2 \right).$$

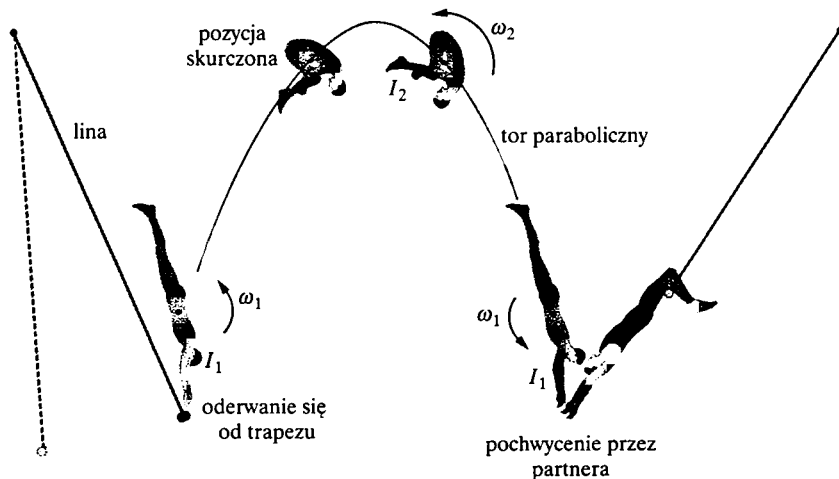
Po podstawieniu wartości liczbowych danych dostajemy:

$$1,87 \text{ s} = \frac{1}{\omega_2} \left( (0,5 \text{ obrotu}) \frac{(19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(3,93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} + (3,5 \text{ obrotu}) \right).$$

a stąd:

$$\omega_2 = 3,23 \text{ obrotów/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta wartość prędkości kątowej jest tak duża, że akrobata nie widzi ostro, co się wokół niego dzieje i nie może — gdyby zaszła taka potrzeba — korygować swej pozycji w locie. Wydaje się zatem, że niewielka jest szansa, aby komuś udało się wykonać w locie cztery i pół salta, do czego potrzebna jest jeszcze większa wartość  $\omega_2$ , a więc jeszcze mniejsza wartość  $I_2$ , czyli jeszcze większe zwinięcie ciała w locie.



Rys. 12.20. Przykład 12.8. Akrobata wykonujący skok z poczwórnym saltem do rąk partnera

## Przykład 12.9

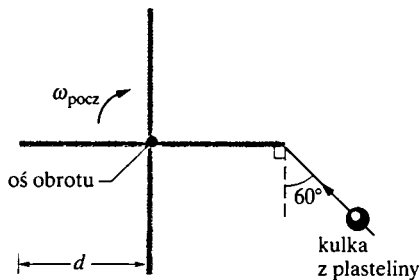
Ostatni przykład w tym rozdziale jest długi i dość trudny, lecz jego przeanalizowanie może być dla ciebie bardzo przydatne, gdyż

dotyczy on wielu pojęć z rozdziałów 11 i 12. Jak pokazano na rysunku 12.21, na którym widać układ z góry, cztery cienkie, jednorodnie pręty, każdy o masie  $m_1$  i długości  $d = 0,5$  m, połączone z pionową osią, tak że tworzą one kołowrót. Kołowrót ten obraca

się wokół przytwierdzonej do podłoża osi, w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, z początkową prędkością kątową  $\omega_{pocz} = -2 \text{ rad/s}$ . Kulka z plasteliny o masie  $m_2 = \frac{1}{3}m_1$  i prędkości początkowej  $v_{pocz} = 12 \text{ m/s}$ , rzucona wzdłuż toru, pokazanego na rysunku, trafia w koniec jednego z prętów i przykleja się do niego. Ile wynosi końcowa prędkość kątowna  $\omega_{końc}$  układu kołowrót–kulka?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Podstawowe informacje, potrzebne nam do rozwiązania tego zadania, przedstawimy w postaci odpowiedzi na wyjściowe pytanie: Czy w czasie zderzenia kulki z kołowrotem obowiązuje jakaś zasada zachowania, związana z prędkością kątową, której zastosowanie umożliwi nam wyznaczenie wartości  $\omega_{końc}$ ? Rozważmy po kolei różne możliwości.



Rys. 12.21. Przykład 12.9. Cztery sztywno ze sobą połączone pręty, które mogą obracać się wokół osi pionowej przechodzącej przez punkt ich złączenia oraz tor kulki z plasteliny, która trafia w koniec jednego z prętów i przykleja się do niego (widok z góry)

- Całkowita energia kinetyczna  $E_k$  *nie jest zachowana*, gdyż zderzenie kulki z prętem jest całkowicie niesprężyste (kulka przykleja się do pręta). Wobec tego jakaś część energii kinetycznej musi zostać zamieniona na inne rodzaje energii (na przykład na energię termiczną). Z tego samego względu nie jest zachowana całkowita energia mechaniczna.
- Całkowity pęd  $\vec{P}$  układu także *nie jest zachowany*, ponieważ w czasie zderzenia na kołowrót działa siła zewnętrzna, w punkcie styczności osi z podłożem (jest to siła, która umożliwia kołowrotowi przesunięcie się po podłożu, gdy zostaje on trafiony kulką z plasteliny).
- Całkowity moment pędu  $\vec{L}$  układu względem osi obrotu *jest zachowany*, gdyż nie występuje żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły, który mógłby zmienić wartość  $\vec{L}$  (siły, działające podczas zderzenia, są źródłem momentów sił, które działają w obrębie układu, a siła zewnętrzna działa na kołowrót na osi, ma więc zerowe ramię, a zatem nie jest z nią związany różny od zera moment siły).

Zasadę zachowania całkowitego momentu pędu układu względem osi obrotu ( $L_{końc} = L_{pocz}$ ) możemy zapisać w postaci:

$$L_{kol,końc} + L_{kulki,końc} = L_{kol,pocz} + L_{kulki,pocz}. \quad (12.38)$$

gdzie wskaźnik kol odnosi się do kołowrotu. Końcowa prędkość kątowna  $\omega_{końc}$  jest zawarta w wyrazach  $L_{kol,końc}$  i  $L_{kulki,końc}$ , gdyż wartości tych momentów pędu po zderzeniu zależą od tego, jak szybko obraca się kołowrót z kulką. Aby wyznaczyć  $\omega_{końc}$ , zajmijmy się najpierw osobno kołowrotem i kulką, a potem wrócimy do równania (12.38).

**Kołowrót.** ➡ Kołowrót jest obracającym się ciałem sztywnym, a zatem jego moment pędu jest dany wzorem (12.31) ( $L = I\omega$ ). Wobec tego moment pędu kołowrotu względem osi, w chwili początkowej i końcowej, możemy wyrazić jako:

$$L_{kol,końc} = I_{kol}\omega_{końc} \quad \text{oraz} \quad L_{kol,pocz} = I_{kol}\omega_{pocz}. \quad (12.39)$$

Kołowrót składa się z czterech prętów, z których każdy obraca się wokół jednego ze swych końców, a więc moment bezwładności kołowrotu  $I_{kol}$  jest równy momentowi bezwładności każdego z prętów względem jego końca  $I_{pręta}$ , pomnożonemu przez cztery. Z tabeli 12.2e wynika, że moment bezwładności pręta względem jego środka  $I_{SM}$  wynosi  $\frac{1}{12}m_1d^2$ , gdzie  $m_1$  jest masą, a  $d$  długością pręta. Wartość  $I_{pręta}$  możemy wyznaczyć z twierdzenia Steinera ( $I = I_{SM} + m_1h^2$ , równanie (11.29)). W naszym przypadku odległość osi  $h$  wynosi  $d/2$ . Wobec tego:

$$I_{pręta} = \frac{1}{12}m_1d^2 + m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_1d^2.$$

Dla kołowrotu o czterech prętach mamy zatem:

$$I_{kol} = \frac{4}{3}m_1d^2. \quad (12.40)$$

**Kulka.** Przed zderzeniem kulkę możemy uważać za cząstkę, poruszającą się po linii prostej, jak na rysunku 12.11. W celu wyznaczenia początkowego momentu pędu kulki  $L_{kulki,pocz}$  względem osi kołowrotu możemy skorzystać z któregośkolwiek z równań od (12.18) do (12.21). Najwygodniej będzie zastosować równanie (12.20) ( $\ell = rm_2v_{\perp}$ ). W naszym przypadku  $\ell$  to  $L_{kulki,pocz}$ , odległość kulki od osi obrotu  $r$  tuż przed zderzeniem to  $d$ , a składowa prędkości kulki  $v_{\perp}$ , prostopadła do  $r$  to  $v_{pocz} \cos 60^\circ$ .

Musimy jeszcze ustalić, jaki jest znak tego momentu pędu. Wyobraź sobie wektor położenia kulki względem osi. Gdy kulka zbliża się do kołowrotu, wektor ten obraca się wokół osi, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a zatem moment pędu kulki jest dodatni. Równanie  $\ell = rmv_{\perp}$  możemy więc zapisać jako:

$$L_{kulki,pocz} = m_2dv_{pocz} \cos 60^\circ. \quad (12.41)$$

Po zderzeniu kulkę możemy traktować jak cząstkę poruszającą się po okręgu o promieniu  $d$ . Z równania (11.26) ( $L = \sum m_i r_i^2 \dot{\theta}$ ) otrzymujemy więc jej moment bezwładności względem osi  $I_{kulki} = m_2d^2$ . Następnie z równania (12.31) ( $L = I\omega$ ) obliczamy moment pędu kulki po zderzeniu:

$$L_{kulki,końc} = I_{kulki}\omega_{końc} = m_2d^2\omega_{końc}. \quad (12.42)$$

**Powrót do równania (12.38).** Podstawiając do równania (12.38) wyrażenia otrzymane w równaniach od (12.39) do (12.42),

otrzymujemy:

$$\frac{1}{3}m_1d^2\omega_{\text{końc}} + m_2d^2\omega_{\text{końc}} = \frac{1}{3}m_1d^2\omega_{\text{pocz}} + m_2dv_{\text{pocz}} \cos 60^\circ.$$

Wstawiając do równania  $m_1 = 3m_2$  i rozwiązując je względem  $\omega_{\text{końc}}$ , dostajemy ostatecznie:

$$\omega_{\text{końc}} = \frac{1}{5d}(4d\omega_{\text{pocz}} + v_{\text{pocz}} \cos 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5(0,5 \text{ m})}[4(0,5 \text{ m})(-2 \text{ rad/s}) + (12 \text{ m/s})(\cos 60^\circ)] \\ &= 0,8 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać, kołowrót obraca się teraz w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

## Podsumowanie

**Toczenie się ciał** Dla koła o promieniu  $R$ , toczącego się bez poślizgu mamy:

$$v_{\text{SM}} = \omega R, \quad (12.2)$$

gdzie  $v_{\text{SM}}$  jest prędkością liniową środka koła, a  $\omega$  — prędkością kątową koła wokół osi, przechodzącej przez jego środek. Ruch koła można również uważać za ruch obrotowy wokół osi, przechodzącej przez punkt P, w którym koło styka się w danej chwili z podłożem. Prędkość kąтова koła względem tego punktu jest taka sama, jak prędkość kąтова koła względem jego środka. Energia kinetyczna toczącego się koła wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{\text{SM}}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{SM}}^2, \quad (12.5)$$

przy czym  $I_{\text{SM}}$  jest momentem bezwładności koła względem jego środka, a  $m$  — masą koła. Jeśli ruch obrotowy koła jest przyspieszony, lecz odbywa się nadal bez poślizgu, to przyspieszenie  $a_{\text{SM}}$  środka masy jest związane z przyspieszeniem kątowym  $\alpha$  względem środka koła zależnością:

$$a_{\text{SM}} = \alpha R. \quad (12.6)$$

Gdy koło toczy się bez poślizgu po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem  $\theta$ , jego przyspieszenie wzdłuż równi (wzdłuż której wybieramy oś  $x$ ) jest równe:

$$a_{\text{SM},x} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{SM}}/mR^2}. \quad (12.10)$$

**Moment siły jako wektor** W trzech wymiarach moment siły  $\vec{M}$  jest wielkością wektorową, definiowaną względem jakiegoś punktu odniesienia (zazwyczaj początku układu współrzędnych). Jest on równy:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (12.14)$$

przy czym  $\vec{F}$  jest siłą przyłożoną do cząstki, a  $\vec{r}$  — wektorem położenia cząstki względem punktu odniesienia (początku układu współrzędnych). Długość wektora  $\vec{M}$  wynosi:

$$M = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F, \quad (12.15, 12.16, 12.17)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem, jaki tworzą ze sobą wektory  $\vec{F}$  i  $\vec{r}$ ,  $F_{\perp}$  — składową  $\vec{F}$  prostopadłą do  $\vec{r}$ , a  $r_{\perp}$  — ramieniem siły  $\vec{F}$ . Kierunek wektora  $\vec{M}$  wyznaczamy z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

**Moment pędu cząstki** Moment pędu  $\vec{\ell}$  cząstki o pędzie  $\vec{p}$ , masie  $m$  i prędkości liniowej  $\vec{v}$  jest wielkością wektorową, definiowaną względem pewnego punktu odniesienia (zwykle początku

układu współrzędnych). Jest on równy:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \quad (12.18)$$

Długość wektora  $\vec{\ell}$  wynosi:

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (12.19)$$

$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (12.20)$$

$$= r_{\perp}p = r_{\perp}mv. \quad (12.21)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem między wektorami  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ ,  $p_{\perp}$  i  $v_{\perp}$  — składowymi  $\vec{p}$  i  $\vec{v}$ , prostopadłymi do  $\vec{r}$ , a  $r_{\perp}$  — odległością punktu odniesienia od prostej, na której leży wektor  $\vec{p}$ . Kierunek wektora  $\vec{\ell}$  wyznaczamy za pomocą reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

**Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego** Druga zasada dynamiki Newtona dla cząstki poruszającej się ruchem obrotowym ma postać:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}, \quad (12.23)$$

gdzie  $\vec{M}_{\text{wyp}}$  jest wypadkowym momentem siły, działającym na tę cząstkę, a  $\vec{\ell}$  — momentem pędu cząstki.

**Moment pędu układu cząstek** Moment pędu  $\vec{L}$  układu cząstek jest równy sumie wektorowej momentów pędu poszczególnych cząstek układu:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i. \quad (12.26)$$

Szybkość, z jaką zmienia się ten moment pędu jest równa wypadkowemu zewnętrznemu momentowi siły, jaki działa na układ (tzn. sumie wektorowej momentów siły, działających na cząstki układu, w wyniku ich oddziaływania z cząstkami spoza układu):

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{układ cząstek}). \quad (12.29)$$

**Moment pędu ciała sztywnego** Składowa momentu pędu ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi, równoległa do osi obrotu, jest równa:

$$L = I\omega \quad (\text{ciało sztywne, stała oś obrotu}). \quad (12.31)$$

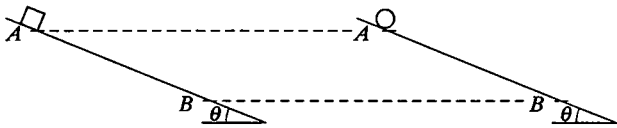
**Zachowanie momentu pędu** Moment pędu  $\vec{L}$  układu pozostaje stały, gdy wypadkowy zewnętrzny moment siły, działający na układ, jest równy zeru:

$$\vec{L} = \text{const} \quad (\text{układ izolowany}), \quad (12.32)$$

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{końc}} \quad (\text{układ izolowany}). \quad (12.33)$$

## Pytania

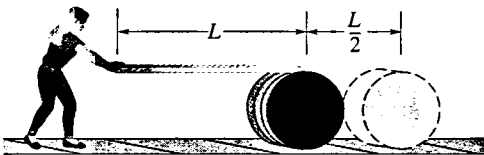
1. Jak pokazano na rysunku 12.22, klocek ześlizguje się bez tarcia po równi pochyłej, a po drugiej równi — o takim samym kącie nachylenia  $\theta$  — stacza się kula. Klocek i kula mają taką samą masę, rozpoczynają ruch od stanu spoczynku w punkcie  $A$  i docierają do punktu  $B$ . a) Czy praca, jaką wykonuje przy tym siła ciężkości nad klockiem jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak praca, wykonywana przez tę siłę nad kulą? Które z tych ciał ma w punkcie  $B$ : b) większą energię kinetyczną ruchu postępowego, c) większą składową prędkości wzdłuż równi?



Rys. 12.22. Pytanie 1

2. Po równi pochyłej stacza się bez poślizgu kula armatnia. Wyobraź sobie, że kula ta stacza się następnie po równi o mniejszym kącie nachylenia, lecz o takiej samej wysokości, jak pierwsza. Czy w tym przypadku: a) czas, potrzebny kuli na dotarcie do podstawy równi, b) energia kinetyczna ruchu postępowego kuli u podstawy równi będą większe, mniejsze, czy takie same, jak w pierwszym przypadku?

3. Jak pokazano na rysunku 12.23, kobieta toczy cylindryczną beczkę, pchając ją za pomocą deski, opartej o wierzch beczki. Wyobraź sobie, że beczka przemieściła się o  $L/2$ , czyli o połowę długości deski. a) Ile wynosi długość odcinka deski, który przetoczył się w tym czasie po powierzchni beczki? b) Jaką drogę przebyła przy tym kobieta? Przyjmij, że beczka toczyła się po podłożu gładko, tzn. bez poślizgu i podskoków, a deska nie ślizgała się po powierzchni beczki.



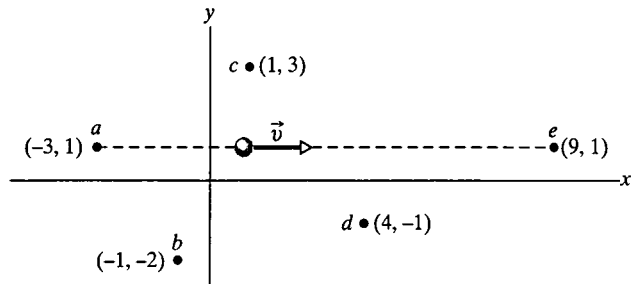
Rys. 12.23. Pytanie 3

4. Wektor położenia  $\vec{r}$  cząstki względem pewnego punktu ma długość równą 3 m. a) Działająca na tę cząstkę siła  $\vec{F}$  ma wartość

Stwierdzenie to nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**. Jest to jedna z podstawowych zasad zachowania w przyrodzie, której słuszność wykazano także w przypadkach, w których nie obowiązują zasady dynamiki Newtona (dla cząstek poruszających się z bardzo dużymi prędkościami oraz dla cząstek mniejszych od atomów).

4 N. Ile wynosi kąt utworzony przez wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ , gdy wartość związanej z tą siłą momentu siły jest równa: a) zero, b)  $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ ?

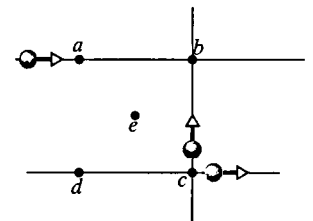
5. Na rysunku 12.24 przedstawiono cząstkę, poruszającą się ze stałą prędkością  $\vec{v}$  oraz pięć punktów i ich współrzędne  $x$  i  $y$ . Uszereguj te punkty według wartości momentu pędu cząstki względem każdego z nich, od największej do najmniejszej.



Rys. 12.24. Pytanie 5

6. Przypomnij sobie sytuację ze sprawdzianu 4. a) Oblicz moment siły względem punktu  $O$ , działający na cząstki 1 i 2, a pochodzący od siły dośrodkowej, która sprawia, że poruszają się one po okręgu ze stałą prędkością. b) Czy momenty pędu cząstek 3, 4 i 5 względem punktu  $O$  rosną, maleją, czy pozostają bez zmiany, gdy cząstki te poruszają się z lewa na prawo, jak na rysunku?

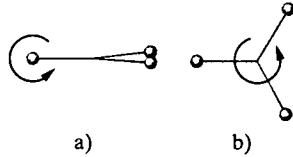
7. Na rysunku 12.25 pokazano trzy cząstki, o jednakowych masach oraz prędkościach o takich samych stałych wartościach, poruszające się w kierunkach wskazanych przez wektory ich prędkości. Punkty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  są wierzchołkami kwadratu, a punkt  $e$  jest środkiem tego kwadratu. Uszereguj punkty w zależności od wartości całkowitego momentu pędu układu cząstek względem każdego z nich, od największej do najmniejszej.



Rys. 12.25. Pytanie 7

8. Do chwytania zwierząt łownych używano kiedyś boli. Jest to długa lina z przywiązanymi na końcu, owiniętymi w skórę

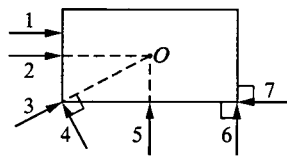
trzem ciężkimi kulami, połączonymi mocnymi sznurami o jednakowej długości. Przed jej wyrzuceniem bolę trzyma się nad głową za jedną z kul i wprawia w ruch obrotowy w płaszczyźnie poziomej. Po wyrzuceniu boli konfiguracja kul zmienia się szybko z układu pokazanego na rysunku 12.26a w ustawienie z rysunku 12.26b (na obydwu rysunkach przedstawiono widok układu kul z góry). Jak widać, kule obracają się początkowo wokół osi 1, przechodzącej przez kulę, za którą się trzyma, a potem — wokół osi 2, przechodzącej przez środek masy układu kul. Czy: a) moment pędu, b) prędkość kątowna układu są większe, mniejsze, czy takie same w przypadku obrotu wokół osi 2, jak w przypadku obrotu wokół osi 1?



Rys. 12.26. Pytanie 8

9. Poziomy krążek obraca się wokół osi pionowej (jak karuzela) w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a na jego brzegu siedzi żuczek. Wyobraź sobie, że żuczek zaczyna iść wzdłuż brzegu krążka, w kierunku zgodnym z kierunkiem jego obrotu. Czy wartości: a) momentu pędu układu żuczek–krążek, b) momentu pędu i prędkości kątowej żuczka, c) momentu pędu i prędkości kątowej krążka wzrastają przy tym, maleją, czy pozostają bez zmiany? d) Jakie będą odpowiedzi na powyższe pytania, gdy żuczek będzie szedł wzdłuż brzegu krążka, w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu krążka?

10. Na rysunku 12.27 przedstawiono widok z góry prostokątnej płyty, która może obracać się w płaszczyźnie poziomej (jak karuzela) wokół osi, przechodzącej przez jej środek  $O$ . Płyta znajduje się początkowo w spoczynku, lecz

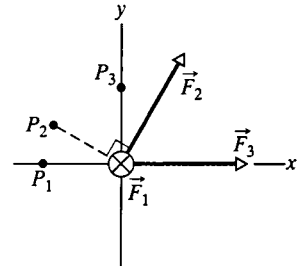


Rys. 12.27. Pytanie 10

w pewnej chwili rzucamy w nią gumą do żucia, która przykleja się do brzegu płyty. Na rysunku przedstawiono siedem przypadków, różniących się kierunkiem, w którym rzucamy tę gumę (we wszystkich przypadkach masa i prędkość gumy są jednakowe). a) Uszereguj te przypadki w zależności od wartości prędkości kątowej, jaką uzyska płyta (i guma) po przyklejeniu się do niej gumy, od największej do najmniejszej. b) W których z tych przypadków

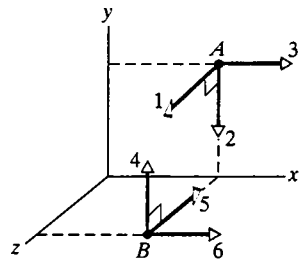
moment pędu płyty (i gumy) względem punktu  $O$  (patrzac na układ, jak na rysunku 12.27) będzie ujemny?

11. Na rysunku 12.28 pokazano trzy siły o jednakowych wartościach, przyłożone do cząstki, znajdującej się w początku układu współrzędnych (siła  $\vec{F}_1$  działa prostopadle do płaszczyzny rysunku i jest skierowana za kartkę). Uszereguj te siły w zależności od wartości związanego z nimi momentu siły względem: a) punktu  $P_1$ , b) punktu  $P_2$ , c) punktu  $P_3$ , od największej do najmniejszej.



Rys. 12.28. Pytanie 11

12. Na rysunku 12.29 przedstawiono dwie cząstki  $A$  i  $B$ , znajdujące się w punktach o współrzędnych  $xyz$  równych  $(1\text{ m}, 1\text{ m}, 0)$  oraz  $(1\text{ m}, 0, 1\text{ m})$ . Na każdą z cząstek działają trzy siły (oznaczone na rysunku cyframi), które mają jednakowe wartości i są równoległe do osi układu współrzędnych. a) Które z tych sił są źródłem równoległego do osi  $y$  momentu siły względem początku układu współrzędnych? b) Uszereguj te siły w zależności od wartości związanego z nimi momentu siły względem początku układu współrzędnych, działającego na cząstkę, od największej do najmniejszej.



Rys. 12.29. Pytanie 12

13. Na rysunku 11.24 z rozdziału 11 przedstawiono układ trzech kulek o jednakowej masie, przymocowanych do pręta o znikomym masie, w miejscach pokazanych na rysunku. Układ ten ma być wprawiony w ruch obrotowy z prędkością kątową  $3\text{ rad/s}$  wokół osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez jedną z kulek. Możliwe są oczywiście trzy przypadki, w których oś obrotu przechodzi przez inną z kulek. Uszereguj te przypadki w zależności od: a) wartości momentu pędu układu kulek względem aktualnej osi obrotu, b) energii kinetycznej ruchu obrotowego układu, od największych do najmniejszych.

## Zadania

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

### 12.1. Toczenie się ciał

1. Koła samochodu jadącego z prędkością  $80\text{ km/h}$  mają średnicę  $75\text{ cm}$ . a) Ile wynosi prędkość kątowna kół względem ich osi? Samochód ten hamuje następnie jednostajnie, bez poślizgu aż do zatrzymania się, przy czym koła wykonują  $30$  pełnych obrotów.

b) Jaką wartość ma przyspieszenie kątowe kół? c) Jaką drogę przebywa samochód w czasie hamowania?

2. Rozważ koło samochodu, jadącego z prędkością 80 km/h po poziomej drodze, w dodatnim kierunku osi  $x$ . Koło ma średnicę 66 cm. Ile wynosi: a) prędkość liniowa  $\vec{v}$ , b) wartość  $a$  przyspieszenia liniowego środka koła względem jadącego samochodem kobiety? Ile wynosi: c)  $\vec{v}$ , d)  $a$  najwyższego punktu koła? Ile wynosi: e)  $\vec{v}$ , f)  $a$  najniższego punktu koła?

Rozważ następnie te same wielkości, względem siedzącego na poboczu drogi autostopowicza. Ile wynosi względem niego: g)  $\vec{v}$  środka koła, h)  $a$  środka koła, i)  $\vec{v}$  najwyższego punktu koła, j)  $a$  najwyższego punktu koła, k)  $\vec{v}$  najniższego punktu koła, l)  $a$  najniższego punktu koła?

## 12.2. Energia kinetyczna ruchu tocznego

3. Obręcz o masie 140 kg toczy się po poziomej podłodze, tak że jej środek masy porusza się z prędkością 0,15 m/s. Ile wynosi praca, potrzebna do zatrzymania tej obręczy?

4. Po podłodze toczy się cienkościenna rura. Oblicz dla tej rury stosunek energii kinetycznej ruchu postępowego do energii kinetycznej ruchu obrotowego, względem osi równoległej do rury i przechodzącej przez jej środek masy.

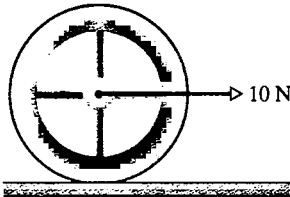
5. Samochód o masie 1000 kg ma cztery koła o masie 10 kg każde. Jaki ułamek całkowitej energii kinetycznej pojazdu stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego kół wokół ich osi? Przyjmij, że koła mają taki sam moment bezwładności, jak jednorodne krążki o takiej jak one masie i średnicy. Dlaczego wynik nie zależy od promienia kół? ilw [www](http://www)

6. Ciało o promieniu  $R$  i masie  $m$  toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni, z prędkością  $v$ , po czym wtacza się na pochylnię, wznosząc się maksymalnie na wysokość  $h$  nad powierzchnię. a) Oblicz moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy, wiedząc, że  $h = 3v^2/4g$ . b) Co to może być za ciało?

## 12.3. Siły przy toczeniu

7. Po równi pochyłej stacza się jednorodna kula. a) Ile musi wynosić kąt nachylenia równi do poziomu, aby przyspieszenie liniowe środka kuli miało wartość równą  $0,1g$ ? b) Wyobraź sobie, że puszczasz po tej równi klocek, ślizgający się po niej bez tarcia. Czy wartość jego przyspieszenia będzie większa, mniejsza, czy równa  $0,1g$ ? Dlaczego?

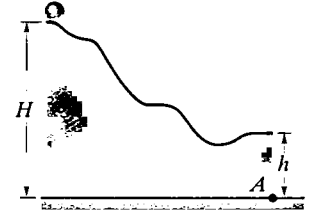
8. Jak pokazano na rysunku 12.30, do koła o masie 10 kg i promieniu 0,3 m przyłożono poziomo stałą siłę o wartości 10 N. W wyniku tego koło toczy się bez poślizgu po poziomym pod-



Rys. 12.30. Zadanie 8

łożu, przy czym przyspieszenie jego środka masy ma wartość  $0,6 \text{ m/s}^2$ . a) Jaka jest wartość i kierunek działającej na koło siły tarcia? b) Ile wynosi moment bezwładności koła względem osi, przechodzącej przez jego środek masy?

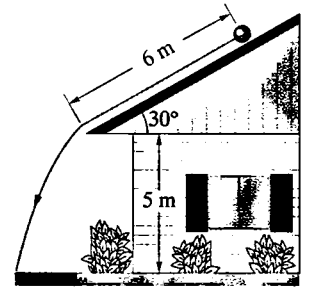
9. Kulka rusza z prędkością początkową równą zero po torze, przedstawionym na rysunku 12.31 i toczy się wzdłuż niego bez poślizgu aż do chwili, gdy spada z toru na jego prawym końcu. Jak daleko w poziomie od punktu A spadnie kulka na podłogę, jeśli wiadomo, że  $H = 6 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ , a końcowy odcinek toru jest poziomy?



Rys. 12.31. Zadanie 9

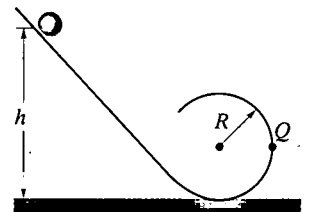
10. Mała kulka o promieniu  $r$  i masie  $m$  toczy się bez poślizgu we wnętrzu nieruchomego naczynia w kształcie połowy sfery o promieniu  $R$  i pionowej osi symetrii. Kulka rozpoczyna ruch na brzegu naczynia, a jej prędkość początkowa jest równa zero. a) Ile wynosi energia kinetyczna kulki na dnie naczynia? b) Jaka część energii kinetycznej jest związana z ruchem obrotowym kulki wokół osi, przechodzącej przez jej środek masy? c) Przyjmij, że  $r \ll R$ , i wyznacz wartość siły normalnej, jaką kulka działa na naczynie w chwili, gdy dociera do jego dna.

11. Walec o promieniu 10 cm i masie 12 kg stacza się bez poślizgu wzdłuż dachu, nachylonego do poziomu pod kątem  $30^\circ$  (patrz rysunek 12.32). W chwili początkowej walec znajdował się w spoczynku, w odległości 6 m od skraj dachu. a) Ile wynosi prędkość kątowna walca względem jego osi, gdy spada on z dachu? b) Skraj dachu znajduje się na wysokości 5 m nad otaczającym dom trawnikiem. W jakiej odległości poziomej od skraj dachu walec spadnie na trawnik? ilw



Rys. 12.32. Zadanie 11

12. Mała kulka kamienna o masie  $m$  i promieniu  $r$  stacza się bez poślizgu po torze, zakończonym pętlą, pokazanym na rysunku 12.33. Kulka została puszczone swobodnie bez prędkości początkowej w pewnym punkcie prostoliniowego odcinka toru. a) Chcemy, aby kulka dotarła do najwyższego punktu pętli. Z jakiej co najmniej wysokości  $h$  nad najniższym punktem toru należy ją puścić? Przyjmij, że promień pętli



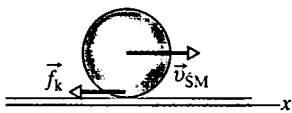
Rys. 12.33. Zadanie 12



$R \gg r$ . b) Oblicz składową poziomą siły działającej w punkcie  $Q$  na kulkę puszczoną z punktu na wysokości  $6R$  nad najniższym punktem toru.

13. Sfera o promieniu  $0,15\text{ m}$  i momencie bezwładności  $I = 0,04\text{ kg} \cdot \text{m}^2$  względem osi przechodzącej przez jej środek masy toczy się bez poślizgu w górę, po powierzchni nachylonej do poziomu pod kątem  $30^\circ$ . W pewnej chwili całkowita energia kinetyczna sfery jest równa  $20\text{ J}$ . a) Ile z tej energii stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego sfery? b) Ile wynosi w tej chwili prędkość środka masy sfery? Ile będzie równa: c) całkowita energia kinetyczna sfery. d) prędkość jej środka masy w chwili, gdy sfera przebędzie po równi w górę drogę  $1\text{ m}$  od położenia, którego dotyczy pytania (a) i (b)?

14. Kula do kręgli o promieniu  $R = 11\text{ cm}$  zostaje rzucona przez zawodnika wzdłuż toru kręgielni. Kula ślizga się po podłodze, mając początkowo prędkość liniową  $v_{\text{SM},0} = 8,5\text{ m/s}$  i prędkość kątową  $\omega_0 = 0$ . Współczynnik tarcia kinetycznego między kulą a podłogą wynosi  $0,21$ . Działająca na kulę siła tarcia kinetycznego  $\vec{f}_k$  (rys. 12.34) jest źródłem przyspieszenia liniowego kuli oraz momentu siły nadającego kuli przyspieszenie kątowe. Gdy prędkość  $v_{\text{SM}}$  dostatecznie zmaleje, a prędkość kątowa  $\omega$  dostatecznie wzrośnie, kula przestanie ślizgać się po torze i zacznie się po nim toczyć bez poślizgu. a) Jaki będzie wówczas związek  $v_{\text{SM}}$  z  $\omega$ ? Ile wynosi: b) przyspieszenie liniowe. c) przyspieszenie kątowe kuli w czasie, gdy ślizga się ona po torze? d) Jak długo ślizga się kula po torze? e) Jaką drogę przebędzie, ślizgając się wzdłuż toru? f) Ile wynosi prędkość kuli w chwili, gdy zaczyna się ona toczyć po torze bez poślizgu?



Rys. 12.34. Zadanie 14

## 12.4. Jo-jo

15. Zabawka jo-jo ma masę  $120\text{ g}$  i moment bezwładności  $950\text{ g} \cdot \text{cm}^2$ . Promień osi jest równy  $3,2\text{ mm}$ , a sznurek ma długość  $120\text{ cm}$ . Puszczamy jo-jo z prędkością początkową równą zeru i kółko zjeżdża po sznurku, aż do najniższego położenia. a) Ile wynosi wartość przyspieszenia liniowego kółka? b) Ile czasu trwa ruch kółka do dolnego końca sznurka? Ile wynosi: c) prędkość liniowa. d) energia kinetyczna ruchu postępowego. e) energia kinetyczna ruchu obrotowego oraz f) prędkość kątowa kółka w chwili, gdy dociera ono do dolnego końca sznurka?

16. Załóż, że jo-jo z zadania 15 nie zostało puszczone swobodnie, lecz rzucono je w dół, z prędkością początkową równą  $1,3\text{ m/s}$ . a) Ile czasu będzie trwał ruch kółka do dolnego końca sznurka? Ile wyniesie: b) całkowita energia kinetyczna. c) prędkość liniowa. d) energia kinetyczna ruchu postępowego. e) prędkość kątowa. f) energia kinetyczna ruchu obrotowego kółka w chwili, gdy dotrze ono do dolnego końca sznurka?

## 12.5. Moment siły raz jeszcze

17. Wykaż, że składowe momentu siły  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , równoległe do płaszczyzny, w której leżą wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ , są równe zeru.

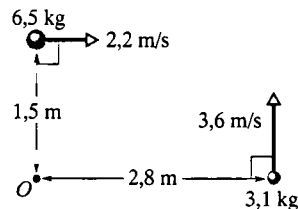
18. Wyznacz wartość i kierunek momentu siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa ma śliwkę, znajdującą się w punkcie o współrzędnych  $(-2\text{ m}, 0, 4\text{ m})$ , na którą działa siła  $\vec{F}$ , mająca jedynie składową: a)  $F_x = 6\text{ N}$ , b)  $F_x = -6\text{ N}$ , c)  $F_z = 6\text{ N}$ , d)  $F_z = -6\text{ N}$ .

19. Wyznacz wartość i kierunek momentu siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa ma cząstkę, znajdującą się w punkcie o współrzędnych  $(0, -4\text{ m}, 3\text{ m})$ , na którą działa: a) siła  $\vec{F}_1$  o składowych  $F_{1x} = 2\text{ N}$  oraz  $F_{1y} = F_{1z} = 0$ , b) siła  $\vec{F}_2$  o składowych  $F_{2x} = 0$ ,  $F_{2y} = 2\text{ N}$  oraz  $F_{2z} = 4\text{ N}$ .

20. Na kamyczek, którego wektor położenia względem początku układu współrzędnych wynosi  $\vec{r} = (0,5\text{ m})\hat{j} - (2,0\text{ m})\hat{k}$ , działa siła  $\vec{F} = (2\text{ N})\hat{i} - (3\text{ N})\hat{k}$ . Wyznacz działający na kamyczek moment siły względem: a) początku układu współrzędnych, b) punktu o współrzędnych  $(2\text{ m}, 0, -3\text{ m})$ .

21. Na cząstkę o wektorze położenia  $\vec{r} = (3\text{ m})\hat{i} + (4\text{ m})\hat{j}$  działa siła  $\vec{F} = (-8\text{ N})\hat{i} + (6\text{ N})\hat{j}$ . Oblicz: a) działający na cząstkę moment siły względem początku układu współrzędnych. b) kąt między wektorami  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ .

22. Oblicz moment siły działający na słoik ostrej papryki jalapeño, znajdujący się w punkcie o współrzędnych  $(3\text{ m}, -2\text{ m}, 4\text{ m})$ , pochodzący od: a) siły  $\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{i} - (4\text{ N})\hat{j} + (5\text{ N})\hat{k}$ , b) siły  $\vec{F}_2 = (-3\text{ N})\hat{i} - (4\text{ N})\hat{j} - (5\text{ N})\hat{k}$ , c) siły równej sumie wektorowej sił  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . d) Podaj odpowiedź na pytanie (c), biorąc zamiast początku układu współrzędnych punkt o współrzędnych  $(3\text{ m}, 2\text{ m}, 4\text{ m})$ .

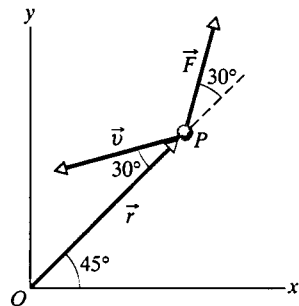


Rys. 12.35. Zadanie 23

## 12.6. Moment pędu

23. Dwa ciała poruszają się tak, jak pokazano na rysunku 12.35. Ile wynosi ich całkowity moment pędu względem punktu  $O$ ? ilw

24. Jak pokazano na rysunku 12.36, cząstka  $P$  o masie  $2\text{ kg}$  ma wektor położenia  $\vec{r}$  o długości  $3\text{ m}$  i prędkość  $\vec{v}$  o wartości  $4\text{ m/s}$ . Na cząstkę działa siła  $\vec{F}$  o wartości  $2\text{ N}$ . Wszystkie trzy wektory leżą w płaszczyźnie  $xy$ , o osiach zaznaczonych na rysunku. Ile wynosi względem



Rys. 12.36. Zadanie 24

początku układu współrzędnych: a) moment pędu cząstki, b) działająca na nią moment siły?

25. W pewnej chwili wektor położenia ciała o masie 0,25 kg jest równy (w metrach)  $\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$ . Prędkość ciała w tej chwili wynosi (w metrach na sekundę):  $\vec{v} = -5\hat{i} + 5\hat{k}$ , a siła, działająca na cząstkę, jest równa (w niutonach)  $\vec{F} = 4\hat{j}$ . a) Ile wynosi moment pędu ciała względem początku układu współrzędnych? b) Ile wynosi działająca na nie moment siły?

26. Ciało o masie 2 kg, które można traktować jak cząstkę, porusza się w płaszczyźnie  $xy$  i w chwili, gdy znajduje się w punkcie o współrzędnych (3, 4) m, ma prędkość o składowych  $v_x = 30$  m/s oraz  $v_y = 60$  m/s. Ile wynosi w tej chwili jego moment pędu względem: a) początku układu współrzędnych, b) punktu o współrzędnych (-2, -2) m?

27. Dwie cząstki, każda o masie  $m$  i prędkości  $v$ , poruszają się w przeciwnym kierunku po prostych równoległych, odległych od siebie o  $d$ . a) Wyznacz wartość momentu pędu  $L$  układu tych dwóch cząstek względem punktu leżącego w połowie odległości między ich torami, w zależności od  $m$ ,  $v$  i  $d$ . b) Czy ta zależność zmieni się, jeśli punkt, względem którego wyznaczać będziemy  $L$ , nie będzie leżał w połowie odległości między torami cząstek? c) Powtórz obliczenia z punktów (a) i (b) dla przypadku, w którym cząstki poruszają się po swoich torach w tym samym kierunku.

28. Cząstka o masie 4 kg porusza się w płaszczyźnie  $xy$ . W chwili, gdy jej położenie i prędkość wynoszą  $\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j})$  m i  $\vec{v} = -4\hat{j}$  m/s, działa na nią siła  $\vec{F} = -3\hat{i}$  N. Ile wynosi w tej chwili: a) moment pędu cząstki względem początku układu współrzędnych, b) moment pędu cząstki względem punktu o współrzędnych  $x = 0$ ,  $y = 4$  m, c) działający na nią moment siły względem początku układu współrzędnych, d) działający na nią moment siły względem punktu o współrzędnych  $x = 0$ ,  $y = 4$  m?

## 12.7. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

29. Cząstka o masie 3 kg znajduje się w punkcie o współrzędnych  $x = 3$  m,  $y = 8$  m i ma prędkość  $\vec{v} = (5 \text{ m/s})\hat{i} - (6 \text{ m/s})\hat{j}$ . Siła o wartości 7 N działa na nią w ujemnym kierunku osi  $x$ . a) Ile wynosi moment pędu tej cząstki względem początku układu współrzędnych? b) Ile wynosi działający na nią moment siły względem początku układu współrzędnych? c) Z jaką szybkością zmienia się w czasie moment pędu tej cząstki? ilw

30. Na cząstkę działają dwa momenty siły względem początku układu współrzędnych:  $M_1$ , mający wartość 2 N·m i dodatni kierunek osi  $x$ , oraz  $M_2$ , mający wartość 4 N·m i ujemny kierunek osi  $y$ . Wyznacz wartość i kierunek wektora  $d\vec{\ell}/dt$ , przy czym  $\vec{\ell}$  jest momentem pędu cząstki względem początku układu współrzędnych.

31. Cząstka porusza się w płaszczyźnie  $xy$ , przy czym kierunek jej ruchu względem początku układu współrzędnych jest zgodny

z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Ile wynosi działający na tę cząstkę moment siły względem początku układu współrzędnych, jeśli wartość jej momentu pędu względem tego punktu jest równa: a) 4 kg·m<sup>2</sup>/s, b) 4t<sup>2</sup> kg·m<sup>2</sup>/s, c) 4√t kg·m<sup>2</sup>/s, d) 4/t<sup>2</sup> kg·m<sup>2</sup>/s?

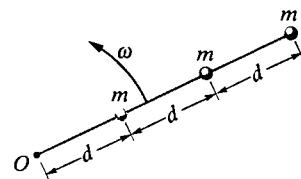
32. W chwili  $t = 0$  wektor położenia cząstki o masie 2 kg wynosi  $\vec{r} = (4 \text{ m})\hat{i} - (2 \text{ m})\hat{j}$  względem początku układu współrzędnych, a jej prędkość jest równa  $\vec{v} = (-6t^2 \text{ m/s})\hat{i}$ . Wyznacz dla  $t > 0$ : a) moment pędu tej cząstki, b) działający na nią moment siły, obydwa względem początku układu współrzędnych, c) Powtórz obliczenia z punktów (a) i (b), przyjmując za punkt odniesienia nie początek układu współrzędnych, lecz punkt o współrzędnych (-2 m, -3 m, 0).

## 12.9. Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi

33. Moment pędu koła zamachowego o momencie bezwładności względem osi koła równym 0,14 kg·m<sup>2</sup> maleje w ciągu 1,5 s z 3 do 0,8 kg·m<sup>2</sup>/s. a) Ile wynosi średnia wartość momentu siły względem osi koła, działającego na nie w tym czasie? b) O jaki kąt obraca się koło w tym czasie przy założeniu, że jego przyspieszenie kątowe jest stałe? c) Jaka praca zostaje wykonana nad kołem w tym czasie? d) Ile wynosi średnia moc tego koła zamachowego?

34. Tarczę ścierną o momencie bezwładności  $1,2 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>2</sup> umieszczono w uchwycie wiertarki elektrycznej, której silnik wytwarza moment siły o wartości 16 N·m i uruchomiono wiertarkę. Oblicz: a) moment pędu tarczy względem jej osi, b) prędkość kątową tarczy po 33 ms od włączenia silnika.

35. Trzy cząstki o masie  $m$  każda połączono ze sobą i z osią obrotu, przechodzącą przez punkt  $O$ , za pomocą trzech linek o długości  $d$  i znikomo małej masie, jak na rysunku



Rys. 12.37. Zadanie 35

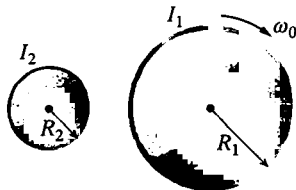
12.37. Układ ten wykonuje ruch obrotowy z prędkością kątową  $\omega$ , tak że cząstki pozostają przez cały czas ustawione wzdłuż jednej linii. Wyznacz zależność: a) momentu bezwładności układu, b) momentu pędu środkowej cząstki, c) całkowitego momentu pędu układu cząstek — względem punktu  $O$  — od  $m$ ,  $d$  i  $\omega$ .

36. Na obracające się ciało sztywne o momencie bezwładności  $I$  działa przez krótki czas  $\Delta t$  siła  $F(t)$ . Wykaż, że:

$$\int M dt = F_{sr} R \Delta t = I(\omega_{końc} - \omega_{pocz}).$$

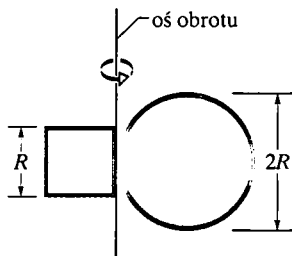
przy czym  $M$  jest momentem siły,  $R$  — jej ramieniem,  $F_{sr}$  — średnią wartością siły w czasie jej działania na ciało, a  $\omega_{pocz}$  i  $\omega_{końc}$  — prędkościami kątowymi ciała przed działaniem siły i po nim. (Wielkość  $\int M dt = F_{sr} R \Delta t$  nazywamy czasem popędu kątowym, przez analogię do popędu siły  $F_{sr} \Delta t$ ).

37\*. Dwa cylindry o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  oraz momentach bezwładności względem swoich osi  $I_1$  i  $I_2$  są zamocowane tak, że mogą obracać się wokół swych osi, prostopadłych do płaszczyzny rysunku 12.38. W chwili początkowej duży cylinder obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, z prędkością kątową  $\omega_0$ , a mały cylinder nie obraca się, lecz porusza się ruchem postępowym w prawo. Po zetknięciu się cylindrów działająca między nimi siła tarcia wprawia mały cylinder w ruch obrotowy. Po upływie pewnego czasu cylindry przestają się ślizgać po sobie i obracają się w przeciwnych kierunkach ze stałymi prędkościami kątowymi. Wyznacz końcową prędkość kątową małego cylindra  $\omega_2$  jako funkcję  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $\omega_0$ . *Wskaźówka:* Przy zderzeniu cylindrów nie jest zachowany ani moment pędu, ani energia kinetyczna; skorzystaj z wyrażenia na popęd kątowny z zadania 36. [www](#)



Rys. 12.38. Zadanie 37

38. Na rysunku 12.39 przedstawiono sztywną konstrukcję, złożoną z obręczy o promieniu  $R$  i masie  $m$  oraz kwadratu, wykonanego z czterech cienkich prętów, każdy o długości  $R$  i masie  $m$ . Cały układ obraca się ze stałą prędkością kątową wokół osi pionowej, zaznaczonej na rysunku. Okres obrotu wynosi 2,5 s. Przyjmij, że  $R = 0,5$  m, a  $m = 2$  kg, i oblicz: a) moment bezwładności układu względem podanej osi obrotu, b) moment pędu układu względem tej osi.



Rys. 12.39. Zadanie 38

## 12.10. Zachowanie momentu pędu

39. Człowiek stoi na platformie, obracającej się bez tarcia z prędkością kątową 1,2 obrotów/s i w każdej z wyciągniętych w bok rąk trzyma cegłę. Moment bezwładności układu złożonego z człowieka, cegiel i platformy względem osi obrotu wynosi  $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Przyciągając cegły do tułowia, człowiek zmniejsza moment bezwładności układu do wartości  $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . a) Ile wynosi prędkość kątowna platformy po wykonaniu przez człowieka tego manewru? b) Ile wynosi stosunek końcowej i początkowej energii kinetycznej układu? c) Kosztem jakiej energii zwiększyła się energia kinetyczna układu?

40. Wirnik silnika elektrycznego ma moment bezwładności względem swej osi równy  $I_w = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Silnik ten, przeznaczony do zmiany ustawienia sondy kosmicznej w przestrzeni, jest umocowany tak, że jego oś jest równoległa do osi sondy. Moment bezwładności sondy względem tej osi jest równy  $I_s = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Oblicz liczbę obrotów silnika, potrzebną do obrócenia sondy wokół jej osi o kąt  $30^\circ$ .

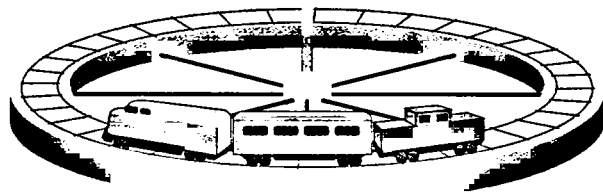
41. Koło obraca się swobodnie z prędkością kątową o wartości 800 obrotów/min na wale, którego moment bezwładności jest znikomo mały. W pewnej chwili z wałem tym zostaje nagle połączone pozostające uprzednio w spoczynku drugie koło, o momencie bezwładności dwa razy większym od pierwszego. a) Ile wynosi końcowa prędkość kątowna wału z dwoma kołami? b) Jaka część pierwotnej energii kinetycznej ruchu obrotowego zostaje stracona? ilw

42. Dwie tarcze umocowano na wspólnej osi za pomocą łożysk o bardzo małym tarciu. Tarcze te mogą zostać ze sobą sprzężone, tak że będą się obracać łącznie — jak jedno ciało. a) Wyobraź sobie, że pierwszą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym  $3,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , wprawiamy w ruch obrotowy z prędkością kątową 450 obrotów/min, a drugą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym  $6,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , wprawiamy w ruch obrotowy z prędkością kątową 900 obrotów/min w tym samym kierunku, co pierwszą. Następnie sprzęgamy tarcze ze sobą. Ile wynosi ich prędkość kątowna po sprzężeniu? b) Wyobraź sobie następnie, że druga tarcza obraca się początkowo z prędkością kątową 900 obrotów/min, lecz w kierunku przeciwnym niż pierwsza. Ile wynosi w tym przypadku prędkość kątowna tarcz po ich sprzężeniu i w którą stronę się one obracają?

43. Na placu zabaw jest mała karuzela o promieniu 1,2 m i masie 180 kg. Jej ramię bezwładności (patrz zadanie 43 z rozdziału 11) wynosi 91 cm. Dziecko o masie 44 kg biegnie z prędkością 3 m/s wzdłuż linii stycznej do brzegu karuzeli (która początkowo nie obraca się) i dobiegłszy do niej wskazuje na karuzelę. Przyjmij, że tarcie między łożyskami a wałem karuzeli jest znikomo małe i oblicz: a) moment bezwładności karuzeli względem osi jej obrotu, b) wartość momentu pędu biegnącego dziecka względem osi karuzeli, c) prędkość kątowną karuzeli i dziecka po jego wskoczeniu na karuzelę.

44. Moment bezwładności obracającej się gwiazdy maleje w czasie jej zapadania się do  $\frac{1}{3}$  jego wartości początkowej. Ile wynosi stosunek końcowej energii kinetycznej gwiazdy do jej początkowej energii kinetycznej?

45. Tor modelu kolejki elektrycznej został ułożony na dużym kole, które może się obracać bez tarcia wokół pionowej osi (rys. 12.40). Na torze ustawiono kolejkę o masie  $m_1$  i w chwili, w której cały układ pozostawał w spoczynku, włączono jej zasilanie. Po upływie pewnego czasu kolejka porusza się ze stałą

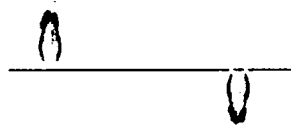


Rys. 12.40. Zadanie 45

prędkością o wartości  $v$  względem toru. Z jaką prędkością kątową obraca się wówczas koło, którego masa wynosi  $m_2$ , a promień —  $R$ ? Potraktuj koło jak obręcz oraz pomiń masę szprych i piasty koła. **www**

46. Jak pokazano na rysunku 12.41, dwie łyżwiarki, każda o masie 50 kg, zbliżają się do siebie po równoległych torach, oddległych od siebie o 3 m. Ich prędkości, skierowane przeciwnie, mają taką samą wartość, równą 1.4 m/s. Jedna z łyżwiarek trzyma za koniec długą tyczkę o znikomo małej masie, a druga chwytą ją za drugi koniec, gdy do niej dociera. Załóż, że łyżwiarki poruszają się po tafli lodu bez tarcia. a) Opisz ilościowo ruch łyżwiarek od chwili, gdy zostają one połączone tyczką. b) Ile wynosi energia kinetyczna układu tych dwóch łyżwiarek?

Wyobraź sobie, że następnie łyżwiarki przesuwają się wzdłuż tyczki, tak aby zbliżyć się do siebie na odległość 1 m. Ile wynosi po tym manewrze: c) ich prędkość kątową oraz d) energia kinetyczna układu? e) Wyjaśnij, kosztem czego zwiększa się energia kinetyczna układu.



Rys. 12.41. Zadanie 46

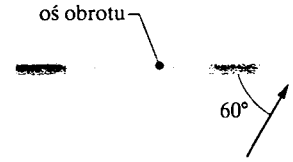
47. Karaluch o masie  $m$  biegnie wzdłuż brzegu stojącej na stole tacy obrotowej o promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I$ , która może obracać się na łożyskach bez tarcia, wokół pionowej osi. Prędkość karalucha względem stołu wynosi  $v$ , a taca obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, z prędkością kątową  $\omega_0$ . W pewnej chwili karaluch dostrzega na swej drodze okruszek chleba i — rzecz jasna — zatrzymuje się przy nim. a) Ile wynosi prędkość kątową tacy po zatrzymaniu się karalucha? b) Czy energia mechaniczna jest zachowana podczas tego manewru?

48. Dziewczynka o masie  $m_1$  stoi na brzegu karuzeli o promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I$ , która może obracać się bez tarcia. Karuzela się nie obraca. W pewnej chwili dziewczynka rzuca poziomo kamień o masie  $m_2$  w kierunku stycznym do zewnętrznej krawędzi karuzeli. Prędkość kamienia względem ziemi jest równa  $v$ . Ile wynosi po wyrzuceniu kamienia: a) prędkość kątową karuzeli, b) prędkość liniowa dziewczynki?

49. Płyta gramofonowa o masie 0,1 kg i promieniu 0,1 m jest ustawiona poziomo i obraca się swobodnie wokół osi pionowej, przechodzącej przez jej środek. Prędkość kątową płyty wynosi 4,7 rad/s, a moment bezwładności płyty względem jej osi obrotu jest równy  $5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . W pewnej chwili spada na płytę z góry wałek mokrego kitu o masie 0,02 kg i przykleja się do skraju płyty. Ile wynosi prędkość kątową płyty tuż po przyklejeniu się do niej kitu?

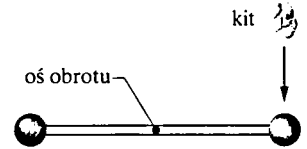
50. Jak pokazano na rysunku 12.42, jednorodny cienki pręt o długości 0,5 m i masie 4 kg może obracać się w płaszczy-

nie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili, gdy pręt nie obraca się, w kierunku jednego z jego końców zostaje wystrzelony poziomo pocisk. Kierunek prędkości pocisku tworzy z prętem kąt  $60^\circ$  (patrz rysunek). Pocisk grzęźnie w pręcie, którego prędkość kątową tuż po zderzeniu z pociskiem wynosi 10 rad/s. Wyznacz prędkość pocisku tuż przed zderzeniem z prętem.



Rys. 12.42. Zadanie 50

51. Dwie kule o masie 2 kg każda połączone cienkim prętem o długości 50 cm i znikomo małej masie. Pręt może obracać się bez tarcia w płaszczyźnie pionowej wokół poziomej osi, przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili, gdy pręt jest ustawiony poziomo (rys. 12.43), na jedną z kul spada grudka wilgotnego kitu o masie 50 g, mająca w chwili uderzenia w kulę prędkość równą 3 m/s, i przykleja się do tej kuli. a) Ile wynosi prędkość kątową układu tuż po upadku kitu na kulę? b) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej całego układu po zderzeniu do energii kinetycznej grudki kitu tuż przed tym zderzeniem? c) O jaki kąt obróci się pręt do chwili, w której prędkość układu stanie się równa zeru?



Rys. 12.43. Zadanie 51

52. Karaluch o masie  $m$  leży na skraju jednorodnego krążka o masie  $10m$ , który może obracać się swobodnie wokół swej osi jak karuzela. Początkowo karaluch i krążek obracają się łącznie z prędkością kątową  $\omega_0$ . W pewnej chwili karaluch zaczyna iść ku środkowi krążka i zatrzymuje się w połowie drogi do środka. a) Ile wynosi przy tym zmiana prędkości kątowej układu karaluch-krążek? b) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej układu po zmianie położenia karalucha do energii kinetycznej tego układu przed tym manewrem  $E_k/E_{k0}$ ? c) Dzięki czemu zmienia się energia kinetyczna układu?

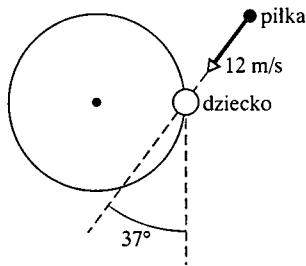
53. Gdyby lody, pokrywające okolice biegunów Ziemi, stopiły się całkowicie, a powstała z nich woda zasiliła oceany, to głębokość oceanów zwiększyłaby się o 30 m. Jaki miałoby to wpływ na ruch obrotowy Ziemi? Oszacuj związaną z tym zmianę długości doby. (Niektórzy niepokoją się, że ogrzewanie atmosfery w wyniku działalności przemysłowej może doprowadzić do topienia się czap lodowych na biegunach Ziemi).

54. Pozioma platforma w kształcie tarczy kołowej obraca się na łożyskach bez tarcia wokół osi pionowej, przechodzącej przez jej środek. Platforma ta ma masę 150 kg i promień 2 m, a jej moment bezwładności względem osi obrotu jest równy  $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Student o masie 60 kg idzie powoli wzdłuż promienia tarczy, od jej brzegu do środka. Prędkość kątową układu w chwili, gdy student znajduje

się na brzegu platformy wynosi  $1.5 \text{ rad/s}$ . Ile wynosi prędkość kątowa, gdy student znajduje się w odległości równej  $0.5 \text{ m}$  od środka platformy?

**55.** Jednorodna tarcza o masie  $10m$  i promieniu  $3r$  może obracać się swobodnie jak karuzela wokół swej stałej osi. Mniejsza jednorodna tarcza o masie  $m$  i promieniu  $r$  leży na większej tarczy tak, że ich osie się pokrywają. Obie tarcze obracają się początkowo razem, z prędkością kątową  $20 \text{ rad/s}$ . W pewnej chwili pod wpływem jakiegoś zaburzenia mniejsza tarcza przesuwa się po powierzchni tarczy większej aż do położenia, w którym ich krawędzie są do siebie styczne. Po zatrzymaniu się mniejszej z nich obie tarcze znów obracają się razem bez wzajemnego poślizgu. a) Ile wynosi wówczas ich prędkość kątowa względem osi większej tarczy? b) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej układu dwóch tarcz po zmianie położenia mniejszej z nich, do energii kinetycznej ich układu przed tym manewrem  $E_k/E_{k0}$ ?

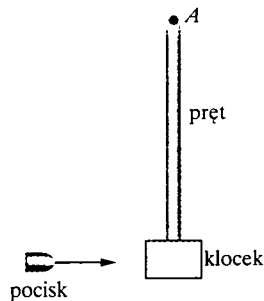
**56.** Dziecko o masie  $30 \text{ kg}$  stoi na brzegu nieobracającej się karuzeli o masie  $100 \text{ kg}$  i promieniu  $2 \text{ m}$ . Moment bezwładności karuzeli względem jej osi obrotu wynosi  $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . W pewnej chwili dziecko łapie piłkę o masie  $1 \text{ kg}$ , rzuconą do niego przez kolegę. Tuż przed złapaniem jej przez dziecko piłka ma prędkość poziomą o wartości  $12 \text{ m/s}$ , skierowaną pod kątem  $37^\circ$  do prostej, stycznej do zewnętrznej krawędzi karuzeli w punkcie, w którym stoi dziecko (patrz widok z góry na rysunku 12.44). Ile wynosi prędkość kątowa karuzeli tuż po złapaniu piłki przez dziecko?



Rys. 12.44. Zadanie 56

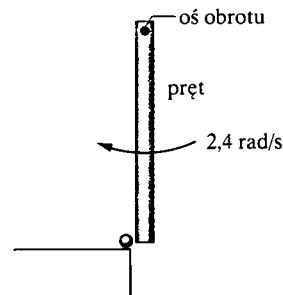
**57.** Jak pokazano na rysunku 12.45, pocisk o masie  $1 \text{ g}$  trafia w klocek o masie  $0.5 \text{ kg}$  przymocowany do końca niejednorodnego pręta o masie  $0.5 \text{ kg}$  i długości  $0.6 \text{ m}$ . Układ klocek-pręt-pocisk obraca się następnie wokół stałej osi przechodzącej przez punkt  $A$ . Moment bezwładności samego pręta względem tej osi jest równy  $0.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Przyjmij, że klocek jest dostatecznie mały na to, aby

można go uważać za cząstkę na końcu pręta. a) Ile wynosi moment bezwładności układu klocek-pręt-pocisk względem punktu  $A$ ? b) Wyznacz prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w klocek, wiedząc, że prędkość kątowa układu względem punktu  $A$  tuż po zderzeniu pocisku z klokiem była równa  $4.5 \text{ rad/s}$ .



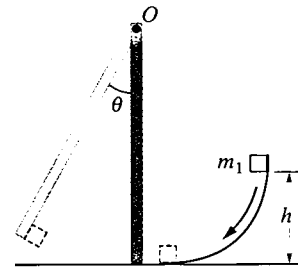
Rys. 12.45. Zadanie 57

**58.** Jak pokazano na rysunku 12.46, jednorodny pręt o długości  $0.6 \text{ m}$  i masie  $1 \text{ kg}$  obraca się wokół osi, przechodzącej przez jeden z jego końców, względem której jego moment bezwładności wynosi  $0.12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Gdy ruchomy koniec pręta przechodzi przez swe najniższe położenie, zderza się z małą kulką kitu o masie  $0.2 \text{ kg}$ , która przykleja się do pręta. Wyznacz prędkość kątową układu pręt-kit tuż po zderzeniu, wiedząc, że prędkość kątowa pręta tuż przed zderzeniem wynosiła  $2.4 \text{ rad/s}$ .



Rys. 12.46. Zadanie 58

**59.** Jak pokazano na rysunku 12.47, cząstka o masie  $m_1$  ześlizguje się bez tarcia z wysokości  $h$  po pewnej powierzchni, po czym zderza się z końcem jednorodnego pręta pionowego, o masie  $m_2$  i długości  $d$ , i przykleja się do niego. Pręt może się obracać wokół osi, przechodzącej przez punkt  $O$ . Prędkość pręta przybiera wartość równą zeru w chwili, gdy pręt jest odchylony od pionu o kąt  $\theta$ . Wyznacz ten kąt.



Rys. 12.47. Zadanie 59

# DODATEK A

## Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)\*

### 1. Jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	„długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie $1/299\,792\,458$ sekundy” (1983)
masa	kilogram	kg	„ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odąd uważany za jednostkę masy” (1889)
czas	sekunda	s	„czas trwania $9\,192\,631\,770$ okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nadsubtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	A	„natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich, prostoliniowych przewodach o znikomym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ niutona na każdy metr długości przewodu” (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	K	„ $1/273,16$ część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967)
ilość substancji	mol	mol	„ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971)
światłość	kandela	cd	„światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe $1/683$ wata na steradian” (1979)

\* Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”. National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wąg (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

## 2. Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki		Symbol
pole powierzchni	metr kwadratowy	$m^2$	
objętość	metr sześcienny	$m^3$	
częstość	herc	Hz	$s^{-1}$
gęstość	kilogram na metr sześcienny	$kg/m^3$	
prędkość	metr na sekundę	m/s	
prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s	
przyspieszenie	metr na sekundę kwadrat	$m/s^2$	
przyspieszenie kątowe	radian na sekundę kwadrat	$rad/s^2$	
siła	niuton	N	$kg \cdot m/s^2$
ciśnienie	paskal	Pa	$N/m^2$
praca, energia, ciepło	dżul	J	$N \cdot m$
moc	wat	W	J/s
ładunek elektryczny	kulomb	C	$A \cdot s$
napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	V	W/A
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m	N/C
opór elektryczny	om	$\Omega$	V/A
pojemność elektryczna	farad	F	$A \cdot s/V$
strumień magnetyczny	weber	Wb	$V \cdot s$
indukcyjność	henr	H	$V \cdot s/A$
indukcja magnetyczna	tesla	T	$Wb/m^2$
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m	
entropia	dżul na kelwin	J/K	
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	$J/(kg \cdot K)$	
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	$W/(m \cdot K)$	
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr	

## 3. Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

# DODATEK B

## Niektóre podstawowe stałe fizyczne\*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
prędkość światła w próżni	$c$	$3.00 \cdot 10^8$ m/s	2.997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	$e$	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C	1.602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	$G$	$6.67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)	6.673	1500
uniwersalna stała gazowa	$R$	8.31 J/(mol · K)	8.314 472	1,7
stała Avogadra	$N_A$	$6.02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6.022 141 99	0.079
stała Boltzmanna	$k$	$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmannna	$\sigma$	$5.67 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> · K <sup>4</sup> )	5.670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego <sup>c</sup>	$V_m$	$2.27 \cdot 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2.271 098 1	1,7
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8.854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6.626 068 76	0.078
masa elektronu <sup>d</sup>	$m_e$	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg	9.109 381 88	0.079
		$5.49 \cdot 10^{-4}$ u	5.485 799 110	0.0021
masa protonu <sup>d</sup>	$m_p$	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg	1.672 621 58	0.079
		1.0073 u	1.007 276 466 88	$1.3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	$m_p/m_e$	1840	1836.152 667 5	0.0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	$e/m_e$	$1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1.758 820 174	0.040
masa neutronu <sup>d</sup>	$m_n$	$1.68 \cdot 10^{-27}$ kg	1.674 927 16	0.079
		1.0087 u	1.008 664 915 78	$5.4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru <sup>d</sup>	$m_{1H}$	1.0078 u	1.007 825 031 6	0.0005
masa atomu deuteru <sup>d</sup>	$m_{2H}$	2.0141 u	2.014 101 777 9	0.0005
masa atomu helu-4 <sup>d</sup>	$m_{4He}$	4.0026 u	4.002 603 2	0.067

\* Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r. (patrz: [www.physics.nist.gov](http://www.physics.nist.gov)).



cd.

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
masa mionu	$m_\mu$	$1,88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	$\mu_p$	$1,41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	$\mu_N$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,050 783 17	0,040
promień Bohra	$a_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	$R$	$1,10 \cdot 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,097 373 156 854 8	$7,6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_C$	$2,43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426 310 215	0,0073

<sup>a</sup> Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę co odpowiednie wartości zaokrąglone.

<sup>b</sup> W jednostkach  $10^{-6}$  (milionowych częściach całości).

<sup>c</sup> W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).

<sup>d</sup> Atomowa jednostka masy 1 u =  $1,660\,538\,73 \cdot 10^{-27}$  kg.

# DODATEK C

## Niektóre dane astronomiczne

### Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca <sup>a</sup>	$3,82 \cdot 10^8$ m	do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do Słońca <sup>a</sup>	$1,50 \cdot 10^{11}$ m	do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4,04 \cdot 10^{16}$ m	do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

<sup>a</sup> Odległość średnia.

### Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
średnia gęstość	kg/m <sup>3</sup>	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu <sup>a</sup>		37 d na biegunach <sup>b</sup> , 26 d na równiku <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania <sup>c</sup>	W	$3,90 \cdot 10^{26}$		

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

<sup>c</sup> Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m<sup>2</sup>.

## Wybrane właściwości planet

	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, $10^6$ km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lat	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu <sup>a</sup> , d	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	< 28°	≈ 3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni <sup>c</sup> , $m/s^2$	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki <sup>c</sup> , km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16 <sup>d</sup>	18 <sup>e</sup>	17 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	1

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Wenus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.

<sup>c</sup> Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.

<sup>d</sup> + pierścień.

<sup>e</sup> + pierścienie.

# DODATEK D

## Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład 1 stopień =  $2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów, a zatem  $16,7^\circ = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

### Kąt płaski

	°	'	''	radianów	obrotów
1 stopień = 1		60	3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
1 minuta = $1,667 \cdot 10^{-2}$		1	60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
1 sekunda = $2,778 \cdot 10^{-4}$		$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
1 <b>radian</b> = 57,30		3438	$2,063 \cdot 10^5$	1	0,1592
1 obrót = 360		$2,16 \cdot 10^4$	$1,296 \cdot 10^6$	6,283	1

### Kąt bryłowy

1 pełny kąt bryłowy =  $4\pi$  steradianów = 12,57 steradianów

### Długość

	cm	metrów	km	cali	stóp	mil
1 centymetr = 1		$10^{-2}$	$10^{-5}$	0,3937	3,281	$6,214 \cdot 10^{-6}$
1 <b>metr</b> = 100		1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$
1 kilometr = $10^5$		1000	1	$3,937 \cdot 10^4$	3281	0,6214
1 cal (in) = 2,540		$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$
1 stopa (ft) = 30,48		0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$
1 mila (lądowa) = $1,609 \cdot 10^5$		1609	1,609	$6,336 \cdot 10^4$	5280	1

1 angstrom =  $10^{-10}$  m

1 mila morska = 1852 m = 1,151 mil = 6076 stóp

1 fermi =  $10^{-15}$  m

1 rok świetlny =  $9,460 \cdot 10^{12}$  km

1 parsek =  $3,084 \cdot 10^{13}$  km

1 sążen = 6 stóp

1 promień Bohra =  $5,292 \cdot 10^{-11}$  m

1 jard = 3 stopy

1 nm =  $10^{-9}$  m

## Pole powierzchni

	m <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>
1 metr kwadratowy = 1		10 <sup>4</sup>	10,76	1550
1 centymetr kwadratowy = 10 <sup>-4</sup>		1	1,076 · 10 <sup>-3</sup>	0,1550
1 stopa kwadratowa = 9,290 · 10 <sup>-2</sup>		929,0	1	144
1 cal kwadratowy = 6,452 · 10 <sup>-4</sup>		6,452	6,944 · 10 <sup>-3</sup>	1

1 mila kwadratowa = 2,788 · 10<sup>7</sup> ft<sup>2</sup> = 640 akrów

1 barn = 10<sup>-28</sup> m<sup>2</sup>

1 akr = 43 560 ft<sup>2</sup>

1 hektar = 10<sup>4</sup> m<sup>2</sup> = 2,471 akrów

## Objętość

	m <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	l (litrów)	ft <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>
1 metr sześcienny = 1		10 <sup>6</sup>	1000	35,31	6,102 · 10 <sup>4</sup>
1 centymetr sześcienny = 10 <sup>-6</sup>		1	1,000 · 10 <sup>-3</sup>	3,531 · 10 <sup>-5</sup>	6,102 · 10 <sup>-2</sup>
1 litr = 1,000 · 10 <sup>-3</sup>		1000	1	3,531 · 10 <sup>-2</sup>	61,02
1 stopa sześcienna = 2,832 · 10 <sup>-2</sup>		2,832 · 10 <sup>4</sup>	28,32	1	1728
1 cal sześcienny = 1,639 · 10 <sup>-5</sup>		16,39	1,639 · 10 <sup>-2</sup>	5,787 · 10 <sup>-4</sup>	1

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in<sup>3</sup>

1 galon angielski = 277,4 in<sup>3</sup> = 1,201 galonów amerykańskich

## Masa

	g	kg	u	uncji	funtów
1 gram = 1		0,001	6,022 · 10 <sup>23</sup>	3,527 · 10 <sup>-2</sup>	2,205 · 10 <sup>-3</sup>
1 kilogram = 1000		1	6,022 · 10 <sup>26</sup>	35,27	2,205
1 atomowa jednostka masy = 1,661 · 10 <sup>-24</sup>		1,661 · 10 <sup>-27</sup>	1	5,857 · 10 <sup>-26</sup>	3,662 · 10 <sup>-27</sup>
1 uncja handlowa (oz) = 28,35		2,835 · 10 <sup>-2</sup>	1,718 · 10 <sup>25</sup>	1	6,250 · 10 <sup>-2</sup>
1 funt handlowy (lb) = 453,6		0,4536	2,732 · 10 <sup>26</sup>	16	1

## Gęstość

	kg/m <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	lb/ft <sup>3</sup>	lb/in <sup>3</sup>
1 kg/m <sup>3</sup> = 1		0,001	6,243 · 10 <sup>-2</sup>	3,613 · 10 <sup>-5</sup>
1 g/cm <sup>3</sup> = 1000		1	62,43	3,613 · 10 <sup>-2</sup>
1 lb/ft <sup>3</sup> = 16,02		1,602 · 10 <sup>-2</sup>	1	5,787 · 10 <sup>-4</sup>
1 lb/in <sup>3</sup> = 2,768 · 10 <sup>4</sup>		27,68	17,28	1

## Czas

	a	d	h	min	s
1 rok = 1		365,25	8,766 · 10 <sup>3</sup>	5,259 · 10 <sup>5</sup>	3,156 · 10 <sup>7</sup>
1 doba = 2,738 · 10 <sup>-3</sup>		1	24	1440	8,640 · 10 <sup>4</sup>
1 godzina = 1,141 · 10 <sup>-4</sup>		4,167 · 10 <sup>-2</sup>	1	60	3600
1 minuta = 1,901 · 10 <sup>-6</sup>		6,944 · 10 <sup>-4</sup>	1,667 · 10 <sup>-2</sup>	1	60
1 sekunda = 3,169 · 10 <sup>-8</sup>		1,157 · 10 <sup>-5</sup>	2,778 · 10 <sup>-4</sup>	1,667 · 10 <sup>-2</sup>	1

## Prędkość

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 km/h = 1	0,2778	27,78	0,6214	0,9113
1 m/s = 3,6	1	100	2,237	3,281
1 cm/s = $3,6 \cdot 10^{-2}$	0,01	1	$2,237 \cdot 10^{-2}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/h = 1,609	0,4470	44,70	1	1,467
1 stopa/s = 1,097	0,3048	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

## Siła

dyn	N	G	kG	funtów
1 dyna = 1	$10^{-5}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$
1 N = $10^5$	1	102,0	0,1020	0,2248
1 G = 980,7	$9,807 \cdot 10^{-3}$	1	0,001	$2,205 \cdot 10^{-3}$
1 kG = $9,807 \cdot 10^5$	9,807	1000	1	2,205
1 funt = $4,448 \cdot 10^5$	4,448	453,6	0,4536	1

Jednostki: gram-siła (G), kilogram-siła (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-siła jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciężenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ); analogicznie dla kilograma-siły i funta.

## Ciśnienie

	atm	dyn/cm <sup>2</sup>	cali wody	cm Hg	Pa	funtów/in <sup>2</sup>	funtów/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera = 1		$1,013 \cdot 10^6$	406,8	76	$1,013 \cdot 10^5$	14,70	2116
1 dyna/cm <sup>2</sup> = $9,869 \cdot 10^{-7}$		1	$4,015 \cdot 10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody <sup>a</sup> w temp. 4°C = $2,458 \cdot 10^{-3}$		2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \cdot 10^{-2}$	5,202
1 cm rtęci <sup>a</sup> w temp. 0°C = $1,316 \cdot 10^{-2}$		$1,333 \cdot 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$		10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
1 funt/in <sup>2</sup> = $6,805 \cdot 10^{-2}$		$6,895 \cdot 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \cdot 10^3$	1	144
1 funt/ft <sup>2</sup> = $4,725 \cdot 10^{-4}$		478,8	0,1922	$3,591 \cdot 10^{-2}$	47,88	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

<sup>a</sup> W standardowych warunkach ciężenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

1 bar =  $10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$     1 milibar =  $10^3 \text{ dyn/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$     1 tor = 1 mm Hg

## Energia, praca, ciepło

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii.  $E = mc^2$ , i wyrażają energię wyzwalaną przy całkowitej zamianie na energię masy jednego kilograma lub atomowej jednostki masy  $u$  (dwa ostatnie wiersze) oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (dwie ostatnie kolumny tabeli).

	erg	J	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
1 erg = 1		$10^{-7}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$6,242 \cdot 10^5$	$1,113 \cdot 10^{-24}$	670,2
1 dżul = $10^7$		1	0,2389	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$6,242 \cdot 10^{12}$	$1,113 \cdot 10^{-17}$	$6,702 \cdot 10^9$
1 kaloria = $4,186 \cdot 10^7$		4,186	1	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{19}$	$2,613 \cdot 10^{13}$	$4,660 \cdot 10^{-17}$	$2,806 \cdot 10^{10}$
1 kilowatogodzina = $3,600 \cdot 10^{13}$		$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247 \cdot 10^{25}$	$2,247 \cdot 10^{19}$	$4,007 \cdot 10^{-11}$	$2,413 \cdot 10^{16}$
1 elektronowolt = $1,602 \cdot 10^{-12}$		$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	1	$10^{-6}$	$1,783 \cdot 10^{-36}$	$1,074 \cdot 10^{-9}$
1 megaelektronowolt =								
= $1,602 \cdot 10^{-6}$		$1,602 \cdot 10^{-13}$	$3,827 \cdot 10^{-14}$	$4,450 \cdot 10^{-20}$	$10^{-6}$	1	$1,783 \cdot 10^{-30}$	$1,074 \cdot 10^{-3}$
1 kilogram = $8,987 \cdot 10^{23}$		$8,987 \cdot 10^{16}$	$2,146 \cdot 10^{16}$	$2,497 \cdot 10^{10}$	$5,610 \cdot 10^{35}$	$5,610 \cdot 10^{29}$	1	$6,022 \cdot 10^{26}$
1 atomowa jednostka masy =								
= $1,492 \cdot 10^{-3}$		$1,492 \cdot 10^{-10}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	932,0	$1,661 \cdot 10^{-27}$	1

## Moc

	KM	cal/s	kW	W
1 koń mechaniczny = 1		178,1	0,7457	745,7
1 kaloria na sekundę = $5,615 \cdot 10^{-3}$		1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186
1 kilowat = 1,341		238,9	1	1000
1 wat = $1,341 \cdot 10^{-3}$		0,2389	0,001	1

## Indukcja magnetyczna

	Gs	T	mGs
1 gaus (Gs) = 1		$10^{-4}$	1000
1 tesla (T) = $10^4$		1	$10^7$
1 miligauss (mGs) = 0,001		$10^{-7}$	1

1 tesla = 1 weber/m<sup>2</sup>

## Strumień magnetyczny

	makswelei	weberów
1 makswel = 1		$10^{-8}$
1 weber = $10^8$		1

# DODATEK E

## Wzory matematyczne

### GEOMETRIA

Koło o promieniu  $r$ : obwód =  $2\pi r$ ; pole powierzchni =  $\pi r^2$ .  
Kula o promieniu  $r$ : pole powierzchni =  $4\pi r^2$ ; objętość =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .  
Walec obrotowy o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; objętość =  $\pi r^2 h$ .  
Trójkąt o podstawie  $a$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $\frac{1}{2}ah$ .

### RÓWNANIE KWADRATOWE I JEGO ROZWIĄZANIE

Jeśli  $ax^2 + bx + c = 0$ , to  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

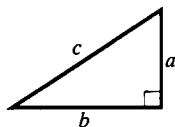
### FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA $\theta$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$      $\cos \theta = \frac{x}{r}$   
 $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$      $\operatorname{ctg} \theta = \frac{x}{y}$   
 $\sec \theta = \frac{r}{x}$      $\operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$

### TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



### TRÓJKĄTY

Kąty:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Boki im przeciwległe:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

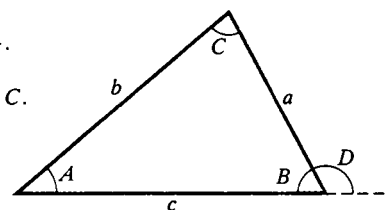
$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Kąt zewnętrzny

$$D = A + C.$$



### SYMBOLE MATEMATYCZNE

= równa się

$\approx$  równa się w przybliżeniu

$\sim$  jest tego samego rzędu wielkości

$\neq$  nie jest równe

$\equiv$  jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$  jest większe niż ( $\gg$  jest dużo większe niż)

$<$  jest mniejsze niż ( $\ll$  jest dużo mniejsze niż)

$\geq$  jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

$\leq$  jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

$\pm$  plus albo minus

$\propto$  jest proporcjonalne do

$\sum$  suma

$x_{\text{sr}}$  wartość średnia  $x$

### TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$



$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## ROZWIŃCIEŃ FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

(wzór dwumianowy)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

## WZORY CRAMERA

Układ równań z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{oraz} \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

## ILOCZYNY WEKTORÓW

Niech  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$  będą wektorami jednostkowymi kierunków  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Zachodzą związki:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

Dowolny wektor  $\vec{a}$  o składowych wzdłuż osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  równych  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Niech  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach)  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ — skalar}).$$

Niech  $\theta$  będzie mniejszym z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}. \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

## POCHODNE I CAŁKI

W poniższych wzorach  $u$  i  $v$  są dowolnymi funkcjami zmiennej  $x$ , a  $a$  i  $m$  są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

$$1. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$2. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$5. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$8. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$9. \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$10. \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

$$11. \frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$12. \frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$$

$$13. \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$$

$$14. \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$15. \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$16. \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$1. \int dx = x$$

$$2. \int audx = a \int udx$$

$$3. \int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$4. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$7. \int e^x dx = e^x$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x$$

$$10. \int \operatorname{tg} x dx = \ln |\sec x|$$

$$11. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$12. \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$$

$$13. \int x e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2} (ax+1) e^{-ax}$$

$$14. \int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3} (a^2 x^2 + 2ax + 2) e^{-ax}$$

$$15. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$16. \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

$$18. \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$19. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$20. \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$$

$$21. \int \frac{x dx}{x+d} = x - d \ln(x+d)$$

# DODATEK F

## Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyń	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	$1,6626 \cdot 10^{-3}$	-189,4	-185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
azot	N	7	14,0067	$1,1649 \cdot 10^{-3}$	-210	-195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	—	—	—	—
bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	-7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	$3,214 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	-101	-34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
dubn	Db	105	262,114	—	—	—	—
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	—	—	—	—
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	—	—	—	—
fluor	F	9	18,9984	$1,696 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
kafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
has	Hs	108	(265)	—	—	—	—
hel	He	2	4,0026	$0,1664 \cdot 10^{-3}$	-269,7	-268,9	5,23
holm	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
terb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
ir	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
iod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
kaliforn	Cf	98	(251)	—	—	—	—
kur	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
krypton	Kr	36	83,80	$3,488 \cdot 10^{-3}$	-157,37	-152	0,247
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
ksenon	Xe	54	131,30	$5,495 \cdot 10^{-3}$	-111,79	-108	0,159
lantan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
lit	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
lorens	Lr	103	(257)	—	—	—	—
lutet	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
magnez	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
meitner	Mt	109	(266)	—	—	—	—
mendelew	Md	101	(256)	—	—	—	—
miedź	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
molibden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
neon	Ne	10	20,183	$0,8387 \cdot 10^{-3}$	-248,597	-246,0	1,03
neptun	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
nikiel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
nobel	No	102	(255)	—	—	—	—
ołów	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
osm	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
pallad	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
platyna	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
pluton	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
polon	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
potas	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
prazeodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
protaktyn	Pa	91	(231)	15,37 (oszacowanie)	(1230)	—	—

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
rad	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
radon	Rn	86	(222)	9,96 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	(-71)	-61,8	0,092
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
rtęć	Hg	80	200,59	13,55	-38,87	357	0,138
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
rutherford	Rf	104	261,11	—	—	—	—
samar	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
seaborg	Sg	106	263,118	—	—	—	—
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
tlen	O	8	15,9994	1,3318 · 10 <sup>-3</sup>	-218,80	-183,0	0,913
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
węgiel	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
wodór	H	1	1,00797	0,08375 · 10 <sup>-3</sup>	-259,19	-252,7	14,4
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
ununnil	Uun	110	(269)	—	—	—	—
ununun	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
ununbi	Unb	112	(264)	—	—	—	—
ununtri	Unt	113	—	—	—	—	—
ununkwad	Unq	114	(285)	—	—	—	—
ununpent	Unp	115	—	—	—	—	—
ununheks	Unh	116	(292)	—	—	—	—

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa” podano w nawiasach wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia.

Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).



# ODPOWIEDZI

## do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych

### Rozdział 1

#### ZADANIA

1. a)  $10^9$ , b)  $10^{-4}$ , c)  $9,1 \cdot 10^5$ ; 3. a) 160 żerdzi, b) 40 łańcuchów;  
5. a)  $4 \cdot 10^4$  km, b)  $5,1 \cdot 10^8$  km<sup>2</sup>, c)  $1,08 \cdot 10^{12}$  km<sup>3</sup>; 7.  $1,9 \cdot 10^{22}$  cm<sup>3</sup>;  
9.  $1,1 \cdot 10^3$  akrostóp; 11. a) 0,98 stóp/ns, b) 0,3 mm/ps; 13. 2,1  
h; 15. 0,12 j.a.; 17. C, D, A, B, E — podstawowym kryterium  
oceny jest stałość zmian dobowych, a nie ich wielkość; 19.  $9 \cdot 10^{49}$ ;  
21. a)  $10^3$  kg, b) 158 kg/s; 23. a)  $1,18 \cdot 10^{-29}$  m<sup>3</sup>, b) 0,282 nm;  
25. 60,8 W, 43,3 Z; 27. 89 km; 29.  $\approx 1 \cdot 10^{36}$ .

### Rozdział 2

#### SPRAWDZIANY

1. b i c; 2. zero (przemieszczenie w czasie całej podróży jest równe  
zeru); 3. (oblicz pochodną  $dx/dt$ ) a) 1 i 4, b) 2 i 3; 4. (patrz porada  
5) a) plus, b) minus, c) minus, d) plus; 5. 1 i 4 ( $a = d^2x/dt^2$   
musi być stałe); 6. a) plus (przemieszczenie w górę wzdłuż osi  
y), b) minus (przemieszczenie w dół wzdłuż osi y), c)  $a = -g =$   
 $-9,8 \text{ m/s}^2$ .

#### PYTANIA

1. a) wszystkie razem, b) 4, 1 i 2 razem, 3; 3. E; 5. a i c; 7.  $x = 2t^2$   
oraz  $x = 8(t - 2) + (1,5)(t - 2)^2$ ; 9. taka sama.

#### ZADANIA

1. 414 ms; 3. a) +40 km/h, b) 40 km/h; 5. a) 73 km/h, b) 68 km/h.  
c) 70 km/h. d) 0; 7. a) 0, -2, 0, 12 m, b) +12 m. c) +7 m/s;  
9. 1,4 m; 11. a) -6 m/s, b) ujemny kierunek osi x, c) 6 m/s, d) naj-  
pierw mniejsza, potem równa zero, a potem większa, e) tak ( $t =$   
2 s), f) nie; 13. 100 m; 15. a) kwadrat prędkości. b) przyspiesze-  
nie. c)  $\text{m}^2/\text{s}^2$ ,  $\text{m}/\text{s}^2$ ; 17. 20  $\text{m}/\text{s}^2$ , kierunek przeciwny do kierunku  
prędkości początkowej; 19. a) 80 m/s, b) 110 m/s, c) 20  $\text{m}/\text{s}^2$ ;  
21. a)  $\text{m}/\text{s}^2$ ,  $\text{m}/\text{s}^3$ . b) 1 s, c) 82 m. d) -80 m. e) 0, -12, -36,  
-72 m/s, f) -6, -18, -30, -42  $\text{m}/\text{s}^2$ ; 23. 0,1 m; 25. a) 1,6 m/s,  
b) 18 m/s; 27. a)  $3,1 \cdot 10^6$  s = 1,2 miesiąca, b)  $4,6 \cdot 10^{13}$  m;  
29.  $1,62 \cdot 10^{15}$   $\text{m}/\text{s}^2$ ; 31. a) 2,5 s; 33. a) 3,56  $\text{m}/\text{s}^2$ , b) 8,43 m/s;  
35. a) 5 m/s, b) 1,67  $\text{m}/\text{s}^2$ , c) 7,5 m; 37. a) 0,74 s, b) -6,2  $\text{m}/\text{s}^2$ ;  
39. a) 10,6 m, b) 41,5 s; 41. a) 29,4 m, b) 2,45 s; 43. a) 31 m/s,  
b) 6,4 s; 45. a) 3,2 s, b) 1,3 s; 47. a) 3,70 m/s, b) 1,74 m/s, 0,154 m;  
49. 4 m/s; 51. 857  $\text{m}/\text{s}^2$ , skierowane do góry; 53.  $1,26 \cdot 10^3$   $\text{m}/\text{s}^2$ ,  
skierowane do góry; 55. 22 cm i 89 cm od sitka; 57. 1,5 s;  
59. a) 5,4 s, b) 41 m/s; 61. a) 76 m, b) 4,2 s; 63. a) 1,23 cm,  
b) 4 razy, 9 razy, 16 razy, 25 razy; 65. 2,34 m.

### Rozdział 3

#### SPRAWDZIANY

1. a) 7 m (gdy  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mają ten sam kierunek), b) 1 m (gdy  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mają  
kierunek przeciwny); 2. c, d i f (składowe muszą być ustawione  
tak, by koniec jednej pokrywał się z początkiem drugiej – wektor  
 $\vec{a}$  musi mieć początek w początku pierwszej składowej, a koniec  
w końcu drugiej); 3. a) +, +, b) +, -, c) +, + (narysuj wektor  
o początku w początku wektora  $\vec{d}_1$  i końcu w końcu wektora  $\vec{d}_2$ );  
4. a)  $90^\circ$ , b)  $0^\circ$ , c)  $180^\circ$  (wektory są antyrównoległe — mają  
przeciwnie kierunki); 5. a)  $0^\circ$  lub  $180^\circ$ , b)  $90^\circ$ .

#### PYTANIA

1.  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ; 3. nie, lecz dodawanie  $\vec{a}$  i  $-\vec{b}$  jest przemienne:  $\vec{a} +$   
 $(-\vec{b}) = (-\vec{b}) + \vec{a}$ ; 5. a)  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  równoległych, b)  $\vec{b} = 0$ , c)  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$   
prostopadłych; 7. wszystkie z wyjątkiem e; 9. a) 0 (wektory są  
równoległe), b) 0 (wektory są antyrównoległe).

#### ZADANIA

1. Wektory przemieszczenia powinny być do siebie a) równole-  
głe, b) antyrównoległe, c) prostopadłe; 3. a) -2,5 m, b) -6,9 m;  
5. a) 47,2 m, b)  $122^\circ$ ; 7. a) 168 cm, b)  $32,5^\circ$  w górę od podłoża;  
9. a) 6,42 m, b) nie, c) tak, d) tak, e) jedna z możliwych odp-  
owiedzi:  $(4,3 \text{ m})\hat{i} + (3,7 \text{ m})\hat{j} + (3,0 \text{ m})\hat{k}$ , f) 7,96 m; 11. a) 370 m,  
b)  $36^\circ$  na północ od kierunku wschodniego, c) 425 m, d) droga;  
13. a)  $(9 \text{ m})\hat{i} + (10 \text{ m})\hat{j}$ , b) 13 m, c)  $+132^\circ$ ; 15. a) 4,2 m, b)  $40^\circ$   
na wschód od kierunku północnego, c) 8,0 m, d)  $24^\circ$  na pół-  
noc od kierunku zachodniego; 17. a)  $(3 \text{ m})\hat{i} - (2 \text{ m})\hat{j} + (3 \text{ m})\hat{k}$ ,  
b)  $(5 \text{ m})\hat{i} - (4 \text{ m})\hat{j} - (3 \text{ m})\hat{k}$ , c)  $(-5 \text{ m})\hat{i} + (4 \text{ m})\hat{j} + (3 \text{ m})\hat{k}$ ;  
19. a) 38 m, b)  $320^\circ$ , c) 130 m, d)  $1,2^\circ$ , e) 62 m, f)  $130^\circ$ ;  
21. a) 1,59 m, b) 12,1 m, c) 12,2 m, d)  $82,5^\circ$ ; 27. a) Wybierz  
początek układu współrzędnych w jednym z wierzchołków sze-  
ścianu, a jego osie wzdłuż krawędzi sześcianu. Przekątne są równe  
 $a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$ ,  $a\hat{i} + a\hat{j} - a\hat{k}$ ,  $a\hat{i} - a\hat{j} - a\hat{k}$ ,  $a\hat{i} - a\hat{j} + a\hat{k}$ , b)  $54,7^\circ$ ,  
c)  $\sqrt{3}a$ ; 29. a) 30, b) 52; 31.  $22^\circ$ ; 35. b)  $a^2b \sin \phi$ ; 37. a) 3,0 m,  
b) 0, c) 3,46 m, d) 2 m, e) -5 m, f) 8,66 m, g) -6,67, h) 4,33.

### Rozdział 4

#### SPRAWDZIANY

1. a)  $(\hat{8}\hat{i} - \hat{6}\hat{j})$  m, b) tak, do płaszczyzny xy (składowa z równa  
zeru); 2. (narysuj wektor  $\vec{v}$  styczny do toru, o początku na torze)

a) pierwszej, b) trzeciej; 3. (oblicz drugą pochodną położenia względem czasu) 1 i 3 –  $a_x$  i  $a_y$  są stałe, a zatem wektor  $\vec{a}$  jest stały, 2 i 4 –  $a_y$  jest stałe, ale  $a_x$  nie, zatem wektor  $\vec{a}$  nie jest stały; 4. 4 m/s<sup>3</sup>. – 2 m/s, 3 m: 5. a)  $v_x$  stałe, b)  $v_y$  początkowo dodatnie, malejące aż do zera, potem coraz bardziej ujemne, c)  $a_x = 0$  przez cały czas, d)  $a_y = -g$  przez cały czas; 6. a)  $-(4 \text{ m/s})\hat{i}$ , b)  $-(8 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ ; 7. a) 0, nie zmienia się, b) +70 km/h. rośnie, c) +80 km/h. maleje; 8. a–c) wzrosną.

## PYTANIA

1. a)  $(7 \text{ m})\hat{i} + (1 \text{ m})\hat{j} + (-2 \text{ m})\hat{k}$ , b)  $(5 \text{ m})\hat{i} + (-3 \text{ m})\hat{j} + (1 \text{ m})\hat{k}$ , c)  $(-2 \text{ m})\hat{i}$ ; 3. a, b, c; 5. a) wszystkie razem, b) 1 i 2 razem (rakietka jest wyrzuczona w górę), 3 i 4 razem (rakietka jest wyrzuczona w dół); 7. a) 3. 2. 1. 2. 3. c) wszystkie razem, d) 6. 5. 4; 9. a) krótszy, b) nie da się odpowiedzieć, c) taki sam, d) nie da się odpowiedzieć; 11. a) 2, b) 3, c) 1, d) 2, e) 3, f) 1; 13. a) tak, b) nie, c) tak.

## ZADANIA

1. a)  $(-5\hat{i} + 8\hat{j}) \text{ m}$ , b) 9,4 m, c) 122°, e)  $(8\hat{i} - 8\hat{j}) \text{ m}$ , f) 11 m, g)  $-45^\circ$ ; 3. a)  $(-7\hat{i} + 12\hat{j}) \text{ m}$ , b)  $xy$ ; 5. 7,59 km/h, 22,5° na zachód od kierunku północnego; 7. a)  $(3\hat{i} - 8\hat{j}) \text{ m/s}$ , b)  $(3\hat{i} - 16\hat{j}) \text{ m/s}$ , c) 16,3 m/s, d)  $-79,4^\circ$ ; 9. a)  $(8\hat{i} + \hat{k}) \text{ m/s}$ , b)  $8\hat{j} \text{ m/s}^2$ ; 11. a)  $(6\hat{i} - 10\hat{j}) \text{ m}$ , b)  $(19\hat{i} - 22\hat{j}) \text{ m/s}$ , c)  $(24\hat{i} - 33\hat{j}) \text{ m/s}^2$ , d)  $-85,2^\circ$  względem  $+x$ ; 13. a)  $(-1,5\hat{j}) \text{ m/s}$ , b)  $(4,5\hat{i} - 2,25\hat{j}) \text{ m}$ ; 15. a) 45 m, b) 22 m/s; 17. a) 62 ms, b) 480 m/s; 19. a) 0,205 s, b) 0,205 s, c) 20,5 cm, d) 61,5 cm; 21. a) 2 ns, b) 2 mm, c)  $1 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , d)  $2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ ; 23. a) 16,9 m, b) 8,21 m, c) 27,6 m, d) 7,26 m, e) 40,2 m, f) 0; 25. 4,8 cm; 29. a) 11 m, b) 23 m, c) 17 m/s, d)  $63^\circ$  w dół od poziomu; 31. a) 24 m/s, b)  $65^\circ$  w górę od poziomu; 33. a) 10 s, b) 897 m; 35. trzeci; 37. a) 202 m/s, b) 806 m, c) 161 m/s, d)  $-171 \text{ m/s}$ ; 39. a) tak, b) 2,56 m; 41. od  $31^\circ$  do  $63^\circ$  w górę od poziomu; 43. a) 7,49 km/s, b)  $8 \text{ m/s}^2$ ; 45. a) 19 m/s, b) 35 obrotów/min, c) 1,7 s; 47. a) 0,034 m/s<sup>2</sup>, b) 84 min; 4,1 m/s<sup>2</sup>, skierowane w dół 49. a) 12 s, b) 4,1 m/s<sup>2</sup>, skierowane w dół, c) 4,1 m/s<sup>2</sup>, skierowane w górę; 51. 160 m/s<sup>2</sup>; 53. a) 13 m/s<sup>2</sup>, skierowane na wschód, b) 13 m/s<sup>2</sup>, skierowane na wschód; 55. 36 s, nie; 57.  $60^\circ$ ; 59. 32 m/s; 61. a) 38 węzłów,  $1,5^\circ$  na wschód od kierunku północnego, b) 4,2 h, c)  $1,5^\circ$  na zachód od kierunku południowego; 63. a)  $37^\circ$  na zachód od północy, b) 62,6 s.

## Rozdział 5

### SPRAWDZIANY

1. c, d i e (wektory  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  muszą być ustawione tak, by koniec jednego pokrywał się z początkiem drugiego, a wektor  $\vec{F}_{\text{wyp}}$  musi mieć początek w początku pierwszego z nich, a koniec w końcu drugiego); 2. a) i b) 2 N, skierowana w lewo (w obu przypadkach przyspieszenie jest równe zeru); 3. a) i b) 1, 2, 3, 4; 4. a) równą, b) większą (przyspieszenie jest skierowane w górę, a zatem działająca na ciało siła wypadkowa musi być skierowana w górę); 5. a) równą, b) większą, c) mniejszą; 6. a) rosną, b) tak, c) pozostają bez zmiany, d) tak; 7. a)  $F \sin \theta$ , b) zwiększenie; 8. 0 (gdyż teraz  $a = -g$ ).

## PYTANIA

1. a) 5, b) 7, c)  $(2 \text{ N})\hat{i}$ , d)  $-(6 \text{ N})\hat{j}$ , e) czwartej, f) czwartej; 3. a) 2 i 4, b) 2 i 4; 5. a) 2, 3, 4, b) 1, 3, 4, c) 1:  $+y$ , 2:  $+x$ , 3: czwarta ćwiartka, 4: trzecia ćwiartka; 7. a) mniejsza, b) większa; 9. a) 20 kg, b) 18 kg, c) 10 kg, d) wszystkie razem, e) 3, 2, 1; 11. a) 4 lub 5, wybierzmy 4, b) 2, c) 1, d) 4 lub 5, wybierzmy 5, e) 3, f) 6, g) 3 i 6 oraz 1, 2 i 5, h) 3 i 6, i) 1, 2 i 5.

## ZADANIA

1. a)  $F_x = 1.88 \text{ N}$ , b)  $F_y = 0.684 \text{ N}$ , c)  $(1.88\hat{i} + 0.684\hat{j}) \text{ N}$ ; 3. 2.9 m/s<sup>2</sup>; 5.  $(3\hat{i} - 11\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ N}$ ; 7. a)  $(-32\hat{i} - 21\hat{j}) \text{ N}$ , b) 38 N, c)  $213^\circ$  względem  $+x$ ; 9. a) 108 N, b) 108 N, c) 108 N; 11. a) 11 N, b) 2.2 kg, c) 0, d) 2.2 kg; 13. 16 N; 15. a) 42 N, b) 72 N, c) 4.9 m/s<sup>2</sup>; 17. a) 0,02 m/s<sup>2</sup>, b)  $8 \cdot 10^4 \text{ km}$ , c)  $2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ; 19.  $1,2 \cdot 10^5 \text{ N}$ ; 21. 1,5 mm; 23. a)  $(285\hat{i} + 705\hat{j}) \text{ N}$ , b)  $(285\hat{i} - 115\hat{j}) \text{ N}$ , c) 307 N, d)  $-22^\circ$  względem  $+x$ , e)  $3.67 \text{ m/s}^2$ , f)  $-22^\circ$  względem  $+x$ ; 25. a) 0,62 m/s<sup>2</sup>, b) 0,13 m/s<sup>2</sup>, c) 2,6 m; 27. a) 494 N, skierowana w górę, b) 494 N, skierowana w dół; 29. a)  $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , b)  $3,7 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ; 31. a) 1,1 N; 33.  $1,8 \cdot 10^4 \text{ N}$ ; 35. a) 620 N, b) 580 N; 37. a) 3260 N, b)  $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg}$ , c) 1,2 m/s<sup>2</sup>; 39. a) 180 N, b) 640 N; 41. a) 1,23 N, b) 2,46 N, c) 3,69 N, d) 4,92 N, e) 6,15 N, f) 0,25 N; 43. a) 0,735 m/s<sup>2</sup>, b) w dół, c) 20,8 N; 45. a) 1,18 m, b) 0,674 s, c) 3,5 m/s; 47. a) 4,9 m/s<sup>2</sup>, b) 2 m/s<sup>2</sup>, c) w górę, d) 120 N; 49. a) 2,18 m/s<sup>2</sup>, b) 116 N, c) 21 m/s<sup>2</sup>; 51. b)  $F/(m_2 + m_1)$ , c)  $m_1 F/(m_2 + m_1)$ , d)  $F(m_2 + 2m_1)/2(m_2 + m_1)$ ; 53.  $2m_1 a/(a + g)$ ; 55. a) 31,3 kN, b) 24,3 kN.

## Rozdział 6

### SPRAWDZIANY

1. a) 0 (żadna siła nie stara się wprawić klocka w ruch), b) 5 N, c) nie, d) tak, e) 8 N; 2. a) nie zmienia się (10 N), b) maleje, c) maleje (bo maleje  $N$ ); 3. większa (jak wynika z przykładu 6.5.  $v_t$  zależy od  $\sqrt{R}$ ); 4. ( $\vec{a}$  jest skierowane do środka kołowego toru ciała) a)  $\vec{a}$  w górę,  $\vec{N}$  w dół, b)  $\vec{a}$  i  $\vec{N}$  w górę; 5. a) pozostaje bez zmiany (nadal równoważą siłę ciężkości pasażera), b) rośnie ( $N = mv^2/R$ ), c) rośnie ( $f_{s,\text{max}} = \mu_s N$ ); 6. a)  $4R_1$ , b)  $4R_1$ .

## PYTANIA

1. a)  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , b) wszystkie razem; 3. a) pozostaje bez zmiany, b) rośnie, c) rośnie, d) nie; 5. a) maleje, b) maleje, c) maleje, d) rośnie, e) rośnie; 7. a) masa klocka  $m$ , b) taka sama (jest to para akcja–reakcja), c) na płytę: w kierunku siły przyłożonej, na klocek: w kierunku przeciwnym, d) masę płyty  $m_2$ ; 9. 4, 3, potem razem: 1, 2 i 3.

## ZADANIA

1. a) 200 N, b) 120 N; 3. 0,61; 5. a) 190 N, b) 0,56 m/s<sup>2</sup>; 7. a) 0,13 N, b) 0,12; 9. a) tak, b)  $(-12\hat{i} + 5\hat{j}) \text{ N}$ ; 13. a) 300 N, b) 1,3 m/s<sup>2</sup>; 15. a) 66 N, b) 2,3 m/s<sup>2</sup>; 17. b)  $3 \cdot 10^7 \text{ N}$ ; 19. 100 N; 21. a) 0, b) 3,9 m/s<sup>2</sup> wzdłuż równi w dół, c) 1,0 m/s<sup>2</sup> wzdłuż równi w dół; 23. a) 3,5 m/s<sup>2</sup>, b) 0,21 N, c) klocki poruszają się osobno; 25. 490 N; 27. a) 6,1 m/s<sup>2</sup>, w lewo, b) 0,98 m/s<sup>2</sup>, w lewo; 29.  $g(\sin \theta - \sqrt{2}\mu_k \cos \theta)$ ; 31. 9,9 s; 33. 6200 N; 35. 2,3; 37. około



48 km/h; 39. 21 m; 41.  $\sqrt{m_2gr/m_1}$ ; 43. a) Lżejszy. b) 778 N, c) 223 N; 45. 2.2 km; 47. b) 8.74 N, c) 37.9 N, skierowana wzdłuż promienia do osi, d) 6.45 m/s.

## Rozdział 7

### SPRAWDZIANY

1. a) zmaleje, b) nie zmieni się, c) ujemna, równa zero; 2. d, c, b, a; 3. a) taka sama, b) mniejsza; 4. a) dodatnia, b) ujemna, c) równa zero; 5. równa zero.

### PYANIA

1. wszystkie razem; 3. a) dodatnia, b) równa zero, c) ujemna, d) ujemna, e) równa zero, f) dodatnia; 5. a) A, B, C, b) C, B, A, c) C, B, A, d) A: 2, B: 3, C: 1; 7. wszystkie razem; 9. c, d, a i b razem, f, e; 11. a)  $2F_1$ , b)  $2W_1$ ; 13. B, C, A.

### ZADANIA

1.  $1.2 \cdot 10^6$  m/s; 3. a) 3610 J, b) 1900 J, c)  $1,1 \cdot 10^{10}$  J; 5. a)  $2,9 \cdot 10^7$  m/s, b)  $2,1 \cdot 10^{-13}$  J; 7. a) 590 J, b) 0, c) 0, d) 590 J; 9. a) 170 N, b) 340 m, c)  $-5,8 \cdot 10^4$  J, d) 340 N, e) 170 m, f)  $-5,8 \cdot 10^4$  J; 11. a) 1,5 J, b) wzrasta; 13. 15,3 J; 15. a) 98 N, b) 4 cm, c) 3,9 J, d)  $-3,9$  J; 17. a)  $1,2 \cdot 10^4$  J, b)  $-1,1 \cdot 10^4$  J, c) 1100 J, d) 5,4 m/s; 19. a)  $-3mgd/4$ , b)  $mgd$ , c)  $mgd/4$ , d)  $\sqrt{gd/2}$ ; 21. a)  $-0,043$  J, b)  $-0,13$  J; 23. a) 6,6 m/s, b) 4,7 m; 25. 800 J; 27. 0 (obie ma metodami); 29.  $-6$  J; 31. 490 W; 33. a) 0,83 J, b) 2,5 J, c) 4,2 J, d) 5 W; 35. 740 W; 37. 68 kW; 39. a)  $26 \cdot 10^4$  J, b) 0,58 KM.

## Rozdział 8

### SPRAWDZIANY

1. nie (rozważ pełny obieg mniejszej pętli); 2. 3, 1, 2 (patrz równanie (8.6)); 3. a) wszystkie razem, b) wszystkie razem; 4. a) CD, AB, BC (zero) (zbadaj nachylenie wykresu), b) dodatni kierunek osi  $x$ ; 5. wszystkie razem.

### PYANIA

1. a) 12 J, b)  $-2$  J; 3. a) wszystkie razem, b) wszystkie razem; 5. a) 4, b) powróci do punktu wyjściowego i pokona tę drogę ponownie, c) 1, d) 1; 7. a)  $fL$ , b) 0,5, c) 1,25, d) 2,25, e) b: na środku, c: na prawo od środka, d: na lewo od środka; 9. a) rośnie, b) maleje, c) maleje, d) nie zmienia się w obszarach AB i BC, maleje w obszarze CD;

### ZADANIA

1. 89 N/cm; 3. a) 4,31 mJ, b)  $-4,31$  mJ, c) 4,31 mJ, d)  $-4,31$  mJ, e) wszystkie się zwiększą; 5. a)  $mgL$ , b)  $-mgL$ , c) 0, d)  $-mgL$ , e)  $mgL$ , f) 0, g) taka sama; 7. a) 184 J, b)  $-184$  J, c)  $-184$  J; 9. a) 2,08 m/s, b) 2,08 m/s, c) wzrośnie; 11. a)  $\sqrt{2gL}$ , b)  $2\sqrt{gL}$ , c)  $\sqrt{2gL}$ , d) wszystkie pozostaną bez zmiany; 13. a) 260 m, b) nie zmieni się, c) zmaleje; 15. a) 21 m/s, b) 21 m/s, c) 21 m/s; 17. a) 0,98 J, b)  $-0,98$  J, c) 3,1 N/cm; 19. a) 39,2 J, b) 39,2 J, c) 4 m; 21. a) 35 cm, b) 1,7 m/s; 23. a) 4,8 m/s, b) 2,4 m/s; 25. 10 cm; 27. 1,25 cm; 31. a)  $2\sqrt{gL}$ , b)  $5mg$ , c)  $71^\circ$ ; 33.  $mgL/32$ ; 37. a)  $1,12(A/B)^{1/6}$ , b) odpychająca, c) przyciągająca; 39. a) 5,6 J, b) 3,5 J; 41. a) 30,1 J, b) 30,1 J, c) 0,22;

43. a)  $-2900$  J, b) 390 J, c) 210 N; 45. 11 kJ; 47. 25,3 J; 49. a) 1,5 MJ, b) 0,51 MJ, c) 1 MJ, d) 63 m/s; 51. a) 67 J, b) 67 J, c) 46 cm; 53. a) 31 J, b) 3,53 m/s, c) zachowawcza; 55. a) 44 m/s, b) 0,036; 57. a)  $-0,9$  J, b) 0,46 J, c) 1 m/s; 59. 1,2 m; 63. na środku odcinka płaskiego; 65. a) 216 J, b) 1180 N, c) 432 J, d) energia dostarczana przez silnik zamienia się także na energię cieplną skrzyni i pasa; 67. b)  $\rho(L-x)/2$ , c)  $v = v_0[2(\rho L + m_m)/(\rho L + 2m_m - \rho x)]^{0,5}$ , e) 35 m/s.

## Rozdział 9

### SPRAWDZIANY

1. a) w początku układu współrzędnych, b) w czwartej ćwiartce, c) na osi  $y$  poniżej początku układu, d) w początku układu, e) w trzeciej ćwiartce, f) w początku układu; 2. a-c) w ich środku masy, znajdującym się cały czas w początku osi (siły, którymi działają łyżwiarze, są siłami wewnętrznymi względem układu, a zatem nie mogą zmienić położenia środka masy); 3. (rozważ nachylenie wykresu i równanie (9.23)) 1, 3, potem 2 i 4 razem (siła równa zero), b) 3; 4. (wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zero, a zatem pęd  $\vec{P}$  jest zachowany) a) 0, b) nie, c)  $-x$ ; 5. a) 500 km/h, b) 2600 km/h, c) 1600 km/h; 6. a) tak, b) nie (wzdłuż osi  $y$  działa wypadkowa siła zewnętrzna).

### PYANIA

1. a-d) w początku układu współrzędnych; 3. a) w środku sań, b)  $L/4$ , na lewo, c) nie zmienia swego położenia (nie działają siły zewnętrzne), d)  $L/4$ , na lewo, e)  $L$ , f)  $L/2$ , g)  $L/2$ ; 5. a) ac, d i bc, b) bc, c) bd i ad; 7. c, d, potem a i b razem; 9. b, c, a.

### ZADANIA

1. a) 4600 km,  $0,73R_Z$ ; 3. a) 1,1 m, b) 1,3 m, c) będzie się przesuwać ku położonej najwyżej cząsteczce; 5. a)  $-0,25$  m, b) 0; 7.  $6,8 \cdot 10^{-12}$  m od atomu azotu w kierunku osi symetrii cząsteczki; 9. a)  $H/2$ , b)  $H/2$ , c) zmniejsza się do wartości najmniejszej, a potem zwiększa się do wartości  $H/2$ , d)  $(Hm_u/m)(\sqrt{1+m/m_u}-1)$ ; 11. 72 km/h; 13. a) 28 cm, b) 2,3 m/s; 15. 53 m; 17. a) w połowie odległości pojemników, b) 26 mm w stronę cięższego pojemnika, c) w dół, d)  $-1,6 \cdot 10^{-2}$  m/s<sup>2</sup>; 19. 4,2 m; 21. 24 km/h; 23. a)  $7,5 \cdot 10^4$  J, b)  $3,8 \cdot 10^4$  kg  $\cdot$  m/s, c)  $38^\circ$  na południe od kierunku wschodniego; 25. a)  $(-4 \cdot 10^4 \hat{i})$  kg  $\cdot$  m/s, b) na zachód, c) 0; 27. 3 mm/s, w kierunku przeciwnym do ruchu kamienia; 29. wzrasta o 4,4 m/s; 31. 4400 km/h; 33. a) 7290 m/s, b) 8200 m/s, c)  $1,271 \cdot 10^{10}$  J, d)  $1,275 \cdot 10^{10}$  J; 35. a)  $1,4 \cdot 10^{-22}$  kg  $\cdot$  m/s, b)  $150^\circ$ , c)  $120^\circ$ , d)  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J; 37. a) 1010 m/s,  $9,48^\circ$  w kierunku ruchu wskazówek zegara od kierunku  $+x$ , b) 3,23 MJ; 39. 14 m/s,  $135^\circ$  względem kierunków pozostałych części; 41. 108 m/s; 43. a)  $1,57 \cdot 10^6$  N, b)  $1,35 \cdot 10^5$  kg, c) 2,08 km/s; 45.  $2,2 \cdot 10^{-3}$ ; 47. a) 46 N, b) nie musi się zmieniać; 49. a) 0,2-0,3 MJ, b) tyle samo; 51. a) 8,8 m/s, b) 2600 J, c) 1,6 kW; 53. 24 W; 55. a) 860 N, b) 2,4 m/s; 57. a)  $2,1 \cdot 10^6$  kg, b)  $\sqrt{100+1,5r}$  m/s, c)  $(1,5 \cdot 10^6)\sqrt{100+1,5r}$  N, d) 6,7 km; 59. 0,5 cm/s w dół (pęcherzyki wznoszą się, lecz ich warstwy przesuują się w dół).

## A

atomowa jednostka masy 9

## C

całkowita energia układu 187–188

— masa układu 210, 211

ciała jednorodne 206

— rozciągnięte 206–207, 274

ciało sztywne 261, 262

— —, stała oś obrotu 313, 321

ciężar 96–97, 108

ciśnienie 38

czas 6–7, 9, 38

—, wzorzec 6

## D

długość 5–6, 9

droga zamknięta 171

druga zasada dynamiki 91–99, 108,  
209–212, 213, 214, 225, 235, 283,  
301, 312

— — — dla ruchu obrotowego 279–280,  
286, 308–309, 321

dźwul 142, 145

## E

energia 38, 141–142

— całkowita układu 187–188

— kinetyczna 141–142, 143–146, 161,  
283

— —, równanie 222

— — ruchu tocznego 299

— — w ruchu obrotowym 272–274,  
282–283, 286

— mechaniczna 176–178, 191

— —, zasada zachowania 176–178, 191

— potencjalna 169–170, 191

— — grawitacji 169, 173–174, 191

— —, krzywe 181, 191

— — sprężystości 169, 174, 191

— —, wyznaczanie 173–174

termiczna 170, 185

wewnętrzna 221–224, 225

—, zasada zachowania 187–189, 192,  
246

## G

gęstość 124, 133

## H

Hooke R. 152

## J

jednostka 2, 9

— pochodna 2

—, zamiana 3–4, 9

jo-jo 303

Joule J.P. 142

## K

kierunek 15

— działania siły 278, 286

—, współczynnik 16

kilogram 9

—, wzorzec 8

kilowatogodzina (kWh) 159

kinematyka 14

konfiguracja odniesienia 174

koń mechaniczny (KM) 159

## L

lot swobodny 27

## M

masa 8–9, 38, 90–91, 107, 283

—, atomowa jednostka 9

— całkowita układu 210, 211

—, środek 204–207, 224

mechanika klasyczna 87–107

metr 5–9

—, wzorzec 5

miara łukowa 261, 270, 271, 273, 280,  
285, 286

Międzynarodowe Biuro Miar i Wąg 5, 8

Międzynarodowy Układ Jednostek 2–3

moc 158–159, 162, 189, 192

— chwilowa 158, 189, 192

— średnia 158, 189, 192

moduł 15

moment bezwładności 273, 274–276,  
283, 286, 312

— pędu 306–307, 312, 321

— — ciała sztywnego 311–313, 321

— —, definicja 306

— — układu cząstek 310–311, 321

— —, zasada zachowania 314–317, 321

— siły 277–279, 286, 303–304, 311,  
312, 321

— —, definicja 304

## N

nachylenie 16

naprężenie 99

Newton I. 87

nieruchoma tarcza 244–246

niuton 88

## O

okres 72

oś 14, 30

—, kierunek dodatni 14, 30

— — ujemny 14, 30

— obrotu 261, 285

— —, punkt zerowy 14, 30

— stała 261

## P

Państwowy Instytut Wzorców i Techniki  
7, 9

pęd 213, 225, 235–240, 249, 312

pęd cząstki 213  
—, moment 306–307, 312, 321  
— układu cząstek 214  
—, zasada zachowania 215–216, 225, 240, 244, 246, 312  
pierwsza zasada dynamiki 87–91, 107  
pole przekroju poprzecznego 124, 133  
położenie 14–15, 30, 58–59, 270, 283  
— kątowe 261–262, 283, 285  
— — zerowe 261  
— odniesienia 191  
— równowagi 182–183  
popęd siły 235–237, 249  
poślizg 185  
praca 142–158, 161, 169–170, 171, 183–185, 191, 283  
— całkowita 145, 161, 171  
—, jednostka 145  
—, wzór 143–144  
—, znak 144, 145  
prawo Hooke’a 152, 161  
prawoskrętny układ współrzędnych 45  
prędkość 18, 30, 38, 60–61, 270, 283  
— chwilowa 18, 30, 60–61, 77  
— —, kierunku 61  
— graniczna 124–126, 133  
— kątowa 263, 266, 270, 283, 285  
— — chwilowa 263, 285  
— — średnia 263, 285  
— początkowa 65  
— „podróżna” 16  
— średnia 15–16, 30, 60–61, 77  
—, średnia wartość bezwzględna 16, 30  
— środka masy 211  
—, wyznaczanie 219–220  
przedrostek 3  
przemieszczenie 14–15, 30, 38, 58–59, 61, 77  
— kątowe 262–263, 267, 285  
przyspieszenie 20–22, 30, 38, 63, 87, 271, 283  
— chwilowe 20, 23, 30, 62–63, 77  
— dodatnie 20  
— dośrodkowe 72, 127, 133  
— kątowe 264, 266, 271, 283, 285  
— — chwilowe 264, 285  
— — stałe 267, 285  
— — średnie 264, 285  
—, składowa 92  
— — radialna 271  
— — styczna 271  
— spadku swobodnego 27  
— stałe 23–27, 30  
— średnie 20, 23, 30, 62–63, 77

— środka masy 210, 211  
— ujemne 20  
— ziemskie 27, 65  
punkt odniesienia 174  
— zwrotny 181–182, 191

## R

radian 262  
rakiet 219–221  
—, prędkość 220  
—, przyspieszenie 220  
ramię siły 278, 286  
reguła prawej dłoni 50, 266, 285  
równanie ruchu ze stałym przyspieszeniem 24–25  
równowaga nietrwała 183  
— obojętna 183  
— trwała 183, 191  
ruch 14  
— jednostajny po okręgu 71–73, 78, 127, 129, 133  
— obrotowy 261, 297–298  
— postępowy 261, 297–298  
— prostoliniowy 13–36  
— przyspieszony 222  
— —, równanie 24–25  
— względny 74–76, 78  
— — w dwóch wymiarach 75–76  
— — w jednym wymiarze 74–75  
ruchoma tarcza 246–247  
rzut ukośny 65–66, 77  
— —, analiza 66–68  
— —, opór powietrza 68  
— —, równanie toru 67, 78  
— —, ruch w pionie 67  
— — — w poziomie 66–67  
— —, zasięg 67–68, 78

## S

sekunda 7,9  
siła 87, 88–89, 107, 312  
— akcji 101  
— ciągu 220, 225  
— ciężkości 95–96, 108, 147–149, 161  
—, diagram 92  
— dośrodkowa 127, 128, 133  
— —, wartość 129  
—, moment 277–279, 286, 303–304, 311, 312, 321  
— niezachowawcza 170  
— normalna 97–98, 108  
— oporu 124–126, 133  
—, popęd 235–237, 249  
—, ramię 278, 286

— reakcji 101  
— sprężystości 152–154, 161  
— stała 144, 161  
— tarcia 98, 108, 119, 120, 127, 132, 184–185  
— wewnętrzna 92, 210, 212  
— wypadkowa 88, 89, 210  
— zachowawcza 170–172, 176, 180, 191  
—, zasada superpozycji 88  
— zewnętrzna 92, 154, 183–185, 191, 210, 212, 221–224, 225  
— zmienna 155–158, 161  
skalar 38, 52  
składowe wektora 45  
skok „grand jeté” 211  
spadek swobodny 27–28, 30  
— —, przyspieszenie 27  
stała oś 261  
— sprężystości 152, 161  
strumień cząstek 235

## Ś

środek masy 204–207, 224  
— —, prędkość 211  
— —, przyspieszenie 210, 211  
— —, wektor położenia 211

## T

tarcie 98–99, 118–119, 132, 300  
—, siła 98, 108, 119, 120, 127, 132, 184–185  
—, właściwości 120–121, 132  
temperatura 38  
teoria względności Einsteina 87  
toczenie 297–299, 320  
— bez poślizgu 297, 300  
— po równi pochyłej 300–302  
trzecia zasada dynamiki 100–101, 108  
twierdzenie Steinera 274, 286  
— —, dowód 275–276

## U

układ ciał 92  
— cząstek 321, 204–225  
— —, pęd 214  
— —, równanie 209–210  
— izolowany 188–189, 321  
— metryczny 5  
— o zmiennej masie 219–221, 225  
— odniesienia 74, 78, 89  
— — inercjalny 89, 107  
— — nieinercjalny 89, 108  
— SI 2  
— zamknięty 210  
— — izolowany 215, 225, 239, 240, 248, 250

## W

- waga równoramienna 97
- sprężynowa 97
- wartość bezwzględna 15, 38
- wat 2, 159
- Watt J. 159
- ważenie 97
- wektor 37–56
- , diagram 38
- długość 15, 38
- , dodawanie 38–40
- — algebraiczne 41–42
- — geometryczne 38–40, 52
- — na składowych 45–46, 52
- —, przemienność 39
- , iloczyn skalarny 48–49, 53
- , iloczyn wektorowy 50–51, 53
- jednostkowy 45, 52
- , mnożenie 48–51
- — przez skalar 48, 53
- — przez wektor 48, 53

- , moduł 38, 39
- , odejmowanie 40
- położenia 58–77
- , prawo rachunku 38
- prędkości 38
- przemieszczenia 38
- przyspieszenia 38
- , równanie 39
- , składowe 41–42, 52
- rozkład na składowe 41
- , suma 39
- wodzący 58
- wypadkowy 39
- wektory składowe 45
- wielkości podstawowe 2, 9
- wskaźnik bieżący 205
- współczynnik oporu 124, 133
- przeliczeniowy 3
- wzorec 2, 9
- czasu 6
- kilograma 8

- metra 5
- wtórny 5

## Z

- zasada superpozycji sił 88
- zachowania energii 187–189, 192, 246
- — momentu pędu 314–317, 321
- — pędu 240, 244, 246, 312
- zasady dynamiki Newtona 87
- — —, druga 91–99, 108, 209–212, 213, 214, 225, 235, 283, 301, 312
- — —, pierwsza 87–91, 107
- — —, trzecia 100–101, 108
- zderzenie 233–250
- zegar atomowy 7
- cezowy 7
- kwarcowy 7
- zespawanie na zimno 120
- zmiana położenia cząstki 38
- zmiennie obrotowe 261–264

## Wybrane stałe fizyczne\*

prędkość światła	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)
energetyczny równoważnik masy	$c^2$	$8,99 \cdot 10^{16}$ J/kg 931,5 MeV/u
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s $4,14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K $8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
masa elektronu	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa protonu	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
masa neutronu	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa deuteronu	$m_d$	$3,34 \cdot 10^{-27}$ kg
promień Bohra	$r_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T $5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
stała Rydberga	$R$	$0,01097$ nm <sup>-1</sup>

\* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

## Wybrane współczynniki zamiany jednostek\*

### Masa i gęstość

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

### Długość i objętość

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mila} = 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm}$$

$$1 \text{ rok świetlny (y)} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3$$

$$= 264 \text{ galony amerykańskie}$$

### Czas

$$1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ a} = 365\frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

### Miara łukowa kąta

$$1 \text{ rad} = 57,3' = 0,159 \text{ obrotu}$$

$$\pi \text{ rad} = 180' = \frac{1}{2} \text{ obrotu}$$

### Prędkość

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mili/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mili/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

### Siła i ciśnienie

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0,225 \text{ funta}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dyn/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}$$

### Energia i moc

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergów} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ KM} = 736 \text{ W}$$

### Magnetyzm

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$$

\* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

David **Halliday**  
Robert **Resnick**  
Jearl **Walker**

**1**

# Podstawy fizyki

**RESNICK • HALLIDAY** reaktywacja

- kompletny, nowoczesny podręcznik fizyki nareszcie po polsku !
- aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum
- teoria poparta licznymi przykładami
- pytania i zadania sprawdzające po każdym rozdziale
- przejrzysty układ tekstu
- wspaniała szata graficzna
- kolorowe, sugestywne ilustracje wzbogacające i uzupełniające wykład
- nowość: najważniejsze zagadnienia fizyki współczesnej !

**Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów**

**Nieoceniona pomoc dla nauczycieli**

## **Tom 1**

zawiera wiadomości z mechaniki klasycznej. Zostały omówione m.in.:  
ruch w jednym, dwóch i trzech wymiarach, siła, energia, praca,  
zderzenia oraz ruch obrotowy.

54.90

t.1



t.1-5



[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)