

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**



**3**

Podstawy

**FIZYKI**

W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E   P W N

## Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

### Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m <sup>3</sup>
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepł właściwych $c_p/c_v$	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

### Woda

gęstość	1000 kg/m <sup>3</sup>
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

### Ziemia

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s <sup>2</sup>
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

### Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

## Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
10 <sup>24</sup>	jotta	Y	10 <sup>-1</sup>	decy	d
10 <sup>21</sup>	zetta	Z	10 <sup>-2</sup>	centy	c
10 <sup>18</sup>	eksa	E	10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>15</sup>	peta	P	10 <sup>-6</sup>	mikro	μ
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-12</sup>	piko	p
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>3</sup>	kilo	k	10 <sup>-18</sup>	atto	a
10 <sup>2</sup>	hekto	h	10 <sup>-21</sup>	zepto	z
10 <sup>1</sup>	deka	da	10 <sup>-24</sup>	jokto	y

Podstawy **3**

---

**FIZYKI**

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

Podstawy **3**

---

**FIZYKI**

Z języka angielskiego tłumaczyli

**Zygmunt Ajduk i Marek Jaworski**



W A R S Z A W A 2006

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

Dane oryginału:  
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 3  
John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published by JohnWiley & Sons, Inc.  
Copyright © 2001by John Wiley & Sons, Inc.  
All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przekład z języka angielskiego **Zygmunt Ajduk** (rozdziały 22–28)  
**Marek Jaworski** (rozdziały 29–33)

Redaktor naukowy **Mirosław Łukaszewski**

Redaktor **Beata Mikołajek-Zielińska**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. 022 69 54 321  
faks 022 69 54 031  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

ISBN-13: 978-83-01-14076-2 t. 3  
ISBN-10: 83-01-14076-3

ISBN-13: 978-83-01-13997-1 t. 1–5  
ISBN-10: 83-01-13997-8

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie pierwsze, 2 dodruk  
Arkuszy drukarskich 50,5  
Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa  
Druk ukończono w październiku 2006 r.  
Druk i oprawa: GRAFMAR Sp. z o.o.  
36-100 Kolbuszowa Dolna, ul. Wiejska 43

# SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

## TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

## TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Grawitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Drgania
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło  
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

## TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Zjawisko indukcji i indukcyjność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

## TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

## TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

## Dodatki

- Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych
- Skorowidz

# SPIS TABEL

- 22.1. Ładunki cząstek 11
- 23.1. Wybrane pola elektryczne 20
- 23.2. Niektóre wielkości określające rozkład ładunku elektrycznego 28
- 26.1. Niektóre właściwości dielektryków 116
- 27.1. Opór elektryczny właściwy dla niektórych substancji w temperaturze pokojowej ( $20^{\circ}\text{C}$ ) 137
- 27.2. Niektóre właściwości elektryczne miedzi i krzemu 146
- 28.1. Oporniki i kondensatory połączone szeregowo i równolegle 167
- 29.1. Przybliżone wartości indukcji magnetycznej 188
- 29.2. Wartości niektórych dipolowych momentów magnetycznych 209
- 32.1. Równania Maxwella 312
- 33.1. Porównanie energii w dwóch układach drgających 324
- 33.2. Zależności fazowe i amplitudowe dla zmiennych natężeń prądu i napięć 338

# SPIS TREŚCI

## ROZDZIAŁ 22

### Ładunek elektryczny

*Dlaczego cukierki wintergrinowe świecą?*

- 22.1. Elekromagnetyzm 2
- 22.2. Ładunek elektryczny 2
- 22.3. Przewodniki i izolatory 4
- 22.4. Prawo Coulomba 5
- 22.5. Ładunek jest skwantowany 11
- 22.6. Ładunek jest zachowany 13
- Podsumowanie 14
- Pytania 14
- Zadania 16

## ROZDZIAŁ 23

### Pole elektryczne

*Skąd biorą się potężne wyładowania elektryczne nad wulkanem?*

- 23.1. Jeszcze o ładunkach i siłach 19
- 23.2. Pole elektryczne 19
- 23.3. Linie pola elektrycznego 21
- 23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego 23
- 23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego 26
- 23.6. Pole elektryczne naładowanej linii 27
- 23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy 32
- 23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym 33
- 23.9. Dipol w polu elektrycznym 36
- Podsumowanie 39
- Pytania 40
- Zadania 42

## ROZDZIAŁ 24

### Prawo Gaussa

*Jak szeroka jest błyskawica?*

- 24.1. Nowe spojrzenie na prawo Coulomba 47
- 24.2. Strumień 47
- 24.3. Strumień pola elektrycznego 48
- 24.4. Prawo Gaussa 51
- 24.5. Prawo Gaussa a prawo Coulomba 53
- 24.6. Izolowany przewodnik naładowany 55
- 24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa 58
- 24.8. Zastosowanie prawa Gaussa:
  - symetria płaszczyznowa 60
- 24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna 63
- Podsumowanie 65
- Pytania 65
- Zadania 66

## ROZDZIAŁ 25

### Potencjał elektryczny

*Dlaczego należy się bać, gdy nagle włosy stają nam na głowie?*

- 25.1. Elektryczna energia potencjalna 73
- 25.2. Potencjał elektryczny 74
- 25.3. Powierzchnie ekwipotencjalne 77
- 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola 79
- 25.5. Potencjał pola ładunku punktowego 81
- 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych 82
- 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego 84
- 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie 85
- 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału 88



25.10. Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych 89

25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika 91

Podsumowanie 93

Pytania 94

Zadania 96

## ROZDZIAŁ 26

Pojemność elektryczna

*Jak można zatrzymać migotanie komór serca z dala od szpitala?*

26.1. Zastosowanie kondensatorów 102

26.2. Pojemność elektryczna 102

26.3. Obliczanie pojemności elektrycznej 104

26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo 108

26.5. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym 113

26.6. Kondensator z dielektrykiem 115

26.7. Dielektryki: obraz mikroskopowy 118

26.8. Dielektryki i prawo Gaussa 119

Podsumowanie 122

Pytania 123

Zadania 124

## ROZDZIAŁ 27

Prąd elektryczny i opór elektryczny

*Dlaczego sterowiec Hindenburg stanął w płomieniach?*

27.1. Ładunki w ruchu i prądy elektryczne 129

27.2. Natężenie prądu elektrycznego 129

27.3. Gęstość prądu elektrycznego 132

27.4. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy 135

27.5. Prawo Ohma 140

27.6. Prawo Ohma — obraz mikroskopowy 142

27.7. Moc w obwodach elektrycznych 144

27.8. Półprzewodniki 145

27.9. Nadprzewodniki 147

Podsumowanie 148

Pytania 149

Zadania 150

## ROZDZIAŁ 28

Obwody elektryczne

*Jak węgorz elektryczny wytwarza prąd o dużym natężeniu?*

28.1. „Pompowanie” ładunków 155

28.2. Praca, energia i SEM 155

28.3. Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku 157

28.4. Inne obwody o jednym oczku 159

28.5. Różnice potencjałów 162

28.6. Obwody o wielu oczkach 164

28.7. Amperomierz i woltomierz 171

28.8. Obwody RC 171

Podsumowanie 176

Pytania 177

Zadania 178

## ROZDZIAŁ 29

Pola magnetyczne

*Dlaczego zorza jest szeroka i wysoka, lecz bardzo cienka?*

29.1. Pole magnetyczne 185

29.2. Definicja wektora  $\vec{B}$  185

29.3. Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu 190

29.4. Pola skrzyżowane: zjawisko Halla 192

29.5. Ruch cząstek naładowanych po okręgu 195

29.6. Cyklotrony i synchrotrony 200

29.7. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem 202

29.8. Moment siły działający na ramkę z prądem 205

29.9. Dipolowy moment magnetyczny 208

Podsumowanie 210

Pytania 211

Zadania 212

## ROZDZIAŁ 30

Pola magnetyczne wywołane przepływem prądu

*Jak można wytrześcić pojazd w przestrzeń kosmiczną?*

30.1. Obliczanie indukcji pola magnetycznego wywołanego przepływem prądu 219

- 30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem 226
- 30.3. Prawo Ampère'a 228
- 30.4. Solenoidy i toroidy 232
- 30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny 235
- Podsumowanie 238
- Pytania 239
- Zadania 240

## ROZDZIAŁ 31

### Zjawisko indukcji i indukcyjność

*Dlaczego użycie gitar elektrycznych zrewolucjonizowało muzykę rockową?*

- 31.1. Dwa symetryczne przypadki 248
- 31.2. Dwa doświadczenia 248
- 31.3. Prawo indukcji Faradaya 249
- 31.4. Reguła Lenza 252
- 31.5. Zjawisko indukcji i przekazywanie energii 256
- 31.6. Indukowane pola elektryczne 259
- 31.7. Cewki i indukcyjność 264
- 31.8. Samoindukcja 266
- 31.9. Obwody RL 267
- 31.10. Energia zgmagazynowana w polu magnetycznym 271
- 31.11. Gęstość energii pola magnetycznego 273
- 31.12. Indukcja wzajemna 275
- Podsumowanie 278
- Pytania 279
- Zadania 281

## ROZDZIAŁ 32

### Magnetyzm materii: równania Maxwella

*Jak żaba może lewitować w polu magnetycznym?*

- 32.1. Magnesy 290
- 32.2. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych 290
- 32.3. Magnetyzm ziemski 292
- 32.4. Magnetyzm i elektrony 293
- 32.5. Materiały magnetyczne 298
- 32.6. Diamagnetyzm 299
- 32.7. Paramagnetyzm 301
- 32.8. Ferromagnetyzm 303

- 32.9. Indukowane pola magnetyczne 306
- 32.10. Prąd przesunięcia 309
- 32.11. Równania Maxwella 312
- Podsumowanie 313
- Pytania 314
- Zadania 315

## ROZDZIAŁ 33

### Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

*Dlaczego energię elektryczną przesyła się liniami o dużym potencjale, a nie o dużym natężeniu prądu?*

- 33.1. Nowa fizyka — tradycyjna matematyka 320
- 33.2. Drgania obwodu LC, opis jakościowy 320
- 33.3. Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny 324
- 33.4. Drgania LC, opis ilościowy 325
- 33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC 329
- 33.6. Prąd zmienny 330
- 33.7. Drgania wymuszone 332
- 33.8. Trzy proste obwody 332
- 33.9. Obwód szeregowy RLC 339
- 33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego 344
- 33.11. Transformatory 347
- Podsumowanie 351
- Pytania 353
- Zadania 354

## DODATKI

- A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1
- B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3
- C. Niektóre dane astronomiczne A5
- D. Współczynniki zamiany jednostek A7
- E. Wzory matematyczne A11
- F. Właściwości pierwiastków A14
- G. Układ okresowy pierwiastków A17

**Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych**

## Skorowidz

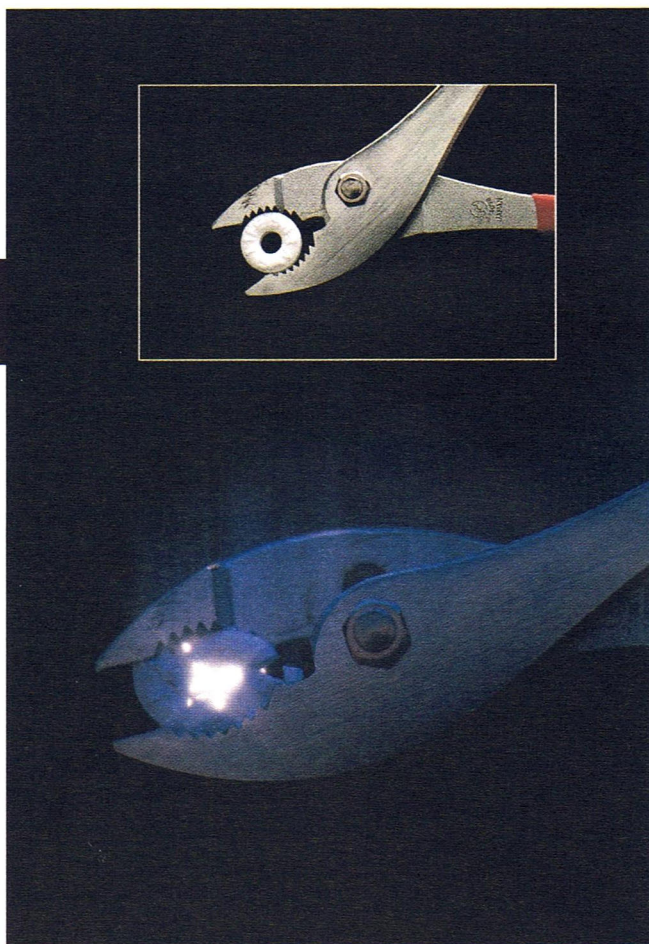
## 22 Ładunek elektryczny

Jeśli po 15-minutowej adaptacji oczu do ciemności spojrzysz na kolegę jedzącego cukierka wintergrinowego, to po każdym ugryzieniu przez niego cukierka dostrzeżesz w jego ustach słaby błysk niebieskiego światła.

(Aby nie uszkodzić zębów, można ścisnąć cukierka szczypcami, jak na fotografii).

Co jest przyczyną zjawiska, zwanego zwykle „iskrzeniem”?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 22.1. Elektromagnetyzm

Już starożytni filozofowie greccy wiedzieli, że potarty kawałek bursztynu przyciąga kawałeczki słomy. Ta starodawna obserwacja jest początkiem drogi, prowadzącej do wieku elektroniki, w którym żyjemy. (Dowodem tego związku jest wyraz *elektron*, wywodzący się od greckiego słowa, oznaczającego bursztyn). To również Grecy zaobserwowali, że niektóre, występujące w przyrodzie „kamienie” (minerały zwane dzisiaj magnetytami) przyciągają żelazo.

Z tych skromnych doświadczeń powstała nauka o elektryczności i magnetyzmie, które to dziedziny przez wieki rozwijały się niezależnie, aż do 1820 r., kiedy Hans Christian Oersted znalazł między nimi związek: przepływ prądu elektrycznego w przewodniku może spowodować odchylenie igły magnetycznej kompasu. Warto dodać, że Oersted dokonał tego odkrycia, przygotowując pokaz do wykładu dla studentów fizyki.

Nowa nauka o *elektromagnetyzmie* (opisująca łącznie zjawiska elektryczne i magnetyczne) rozwinęła się dzięki pracy uczonych z wielu krajów. Wśród nich należy wymienić przede wszystkim Michaela Faradaya, prawdziwie utalentowanego eksperymentatora, obdarzonego intuicją fizyczną i wyobraźnią, czego dowodzi fakt, że jego notatki laboratoryjne nie zawierają ani jednego równania. W połowie XIX w. James Clerk Maxwell zapisał idee Faradaya w postaci matematycznej, wprowadzając dodatkowo wiele nowych pomysłów, i stworzył solidne podstawy teoretyczne elektromagnetyzmu.

Podstawowe równania elektromagnetyzmu, zwane obecnie równaniami Maxwella podane są w tabeli 32.1. W najbliższych jedenastu rozdziałach będziemy chcieli je wyprowadzić, lecz już teraz warto spojrzeć na nie, aby zobaczyć, do czego dążymy.

## 22.2. Ładunek elektryczny

Jeśli przejdziesz po suchym dywanie w czasie ładnej pogody, to po zbliżeniu palca do metalowej klamki możesz zobaczyć iskrę. Reklamy telewizyjne uświadamiają nam problem „statycznego przylegania” odzieży. Wszyscy znamy błyskawice. Każde z tych zjawisk jest drobnym przejawem ogromnych ilości *ładunku elektrycznego*, który jest zmagazynowany w otaczającym nas świecie i nawet w naszych ciałach. **Ładunek elektryczny** jest nieodłączną właściwością cząstek elementarnych, z których składają się wszystkie ciała, czyli właściwością, która stale towarzyszy tym cząstkom.

Ogromne ilości ładunku w każdym ciele są zwykle niewidoczne, gdyż ciało zawiera jednakowe ilości dwóch rodzajów ładunku: *ładunku dodatniego* i *ładunku ujemnego*. Przy takiej równości, czyli *zrównoważeniu* ładunku mówimy o ciele *elektrycznie obojętnym* (*neutralnym*), czyli ciele o zerowym ładunku *wypadkowym*. Jeśli dwa rodzaje ładunku nie równoważą się, to ciało ma niezerowy ładunek wypadkowy. Mówimy, że ciało jest *naładowane*, jeśli ma niezrównoważony ładunek, czyli niezerowy ładunek wypadkowy. Ładunek wypadkowy jest zawsze bardzo mały w porównaniu z ilością ładunku dodatniego i ładunku ujemnego, znajdujących się w ciele.

Ciała naładowane wzajemnie na siebie oddziałują. Możesz to wykazać, elektryzując najpierw szklany pręt przez pocieranie jedwabiem jego jednego końca. W punktach styczności pręta z jedwabiem pewne ilości ładunku przenoszone są z jednego ciała na drugie, naruszając przy tym nieco elektryczną obojętność każdego z nich. (Pocieramy pręt jedwabiem, aby zwiększyć liczbę punktów styczności, a stąd i ilość przekazywanego ładunku). Zawieś teraz naładowany pręt na nici, aby go odizolować elektrycznie od otoczenia, czyli zapobiec zmianie jego ładunku. Jeśli zbliżamy do niego podobnie naładowany pręt szklany (rys. 22.1a), to obydwa pręty *odpychają się*, czyli każdy pręt doznaje działania siły odpychającej go od drugiego pręta. Jeśli jednak potarty futrem pręt plastikowy zbliżymy do zawieszonoego pręta szklanego (rys. 22.1b), to te dwa pręty będą się wzajemnie *przyciągać*, czyli każdy pręt dozna działania siły, przyciągającej go do drugiego pręta.

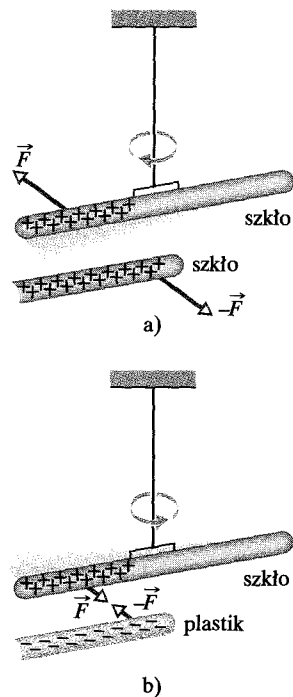
Ideę tych pokazów można wyjaśnić przez wprowadzenie dodatnich i ujemnych ładunków. Gdy szklany pręt pocieramy jedwabiem, szkło traci pewien ujemny ładunek elektryczny i uzyskuje mały, niezrównoważony ładunek dodatni (reprezentowany przez znaki plus na rysunku 22.1a). Gdy plastikowy pręt pocieramy futrem, wówczas pręt uzyskuje pewien niezrównoważony ładunek ujemny (reprezentowany przez znaki minus na rysunku 22.1b). Nasze dwa pokazy można podsumować w następujący sposób:

➤ Ładunki elektryczne o takich samych znakach odpychają się, a ładunki elektryczne o przeciwnych znakach się przyciągają.

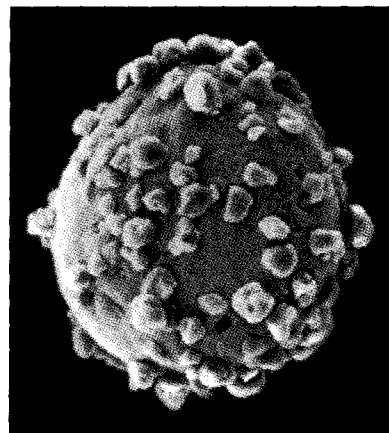
W paragrafie 22.4 zapiszemy tę regułę w postaci ilościowego prawa Coulomba dla *siły elektrostatycznej (elektrycznej)*, działającej między ładunkami. Określenia *elektrostatyczna* używa się dla podkreślenia faktu, że ładunki albo spoczywają, albo poruszają się bardzo wolno.

Określenia „dodatni” i „ujemny”, czyli znaki dla ładunków elektrycznych zostały ustalone umownie przez Benjamina Franklina. Mógł on oczywiście zamienić nawzajem te określenia lub użyć innej pary przeciwnych określeń dla rozróżnienia dwóch rodzajów ładunku. (Franklin był uczonym, cieszącym się międzynarodowym uznaniem. Nawet uważa się, że jego sukcesy dyplomatyczne we Francji podczas amerykańskiej wojny o niepodległość były łatwiejsze do osiągnięcia, a może nawet w ogóle były zasługą tego, że tak bardzo poważano go jako uczonego).

Wzajemne przyciąganie się i odpychanie ciał naładowanych ma wiele zastosowań przemysłowych, m. in.: przy malowaniu elektrostatycznym rozpyloną farbą, napyłaniu warstwy proszku, osadzaniu się popiołów w kominach, bezdotykowym druku atramentowym i kserowaniu. Na rysunku 22.2 przedstawiono drobną kulkę nośnika w kserokopiarence, pokrytą cząstkami czarnego proszku (zwanego *tonerem*), które przylegają do niej z powodu działania sił elektrostatycznych. Ujemnie naładowane cząstki tonera są następnie przyciągane do obracającego się bębna, na którym znajduje się dodatnio naładowany obraz kopiowanego dokumentu. Naładowana kartka papieru przyciąga potem do siebie cząstki tonera z bębna, które na koniec są termicznie utrwalane, tworząc fotokopię.

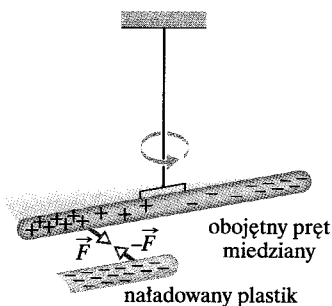


Rys. 22.1. a) Dwa pręty naładowane ładunkami tego samego znaku się odpychają. b) Dwa pręty naładowane ładunkami o przeciwnych znakach się przyciągają. Znaki plus oznaczają wypadkowy ładunek dodatni, a znaki minus — wypadkowy ładunek ujemny



Rys. 22.2. Kulka nośnika z kserokopiarki pokryta jest cząstkami tonera, które do niej przylegają w wyniku przyciągania elektrostatycznego. Średnica kulki wynosi około 0,3 mm

## 22.3. Przewodniki i izolatory



Rys. 22.3. Obojętny pręt miedziany jest odizolowany elektrycznie od otoczenia, gdyż jest zawieszony na nieprzewodzącej nici. Każdy z końców pręta miedzianego jest przyciągany przez naładowany pręt plastikowy. Elektrony przewodnictwa w pręcie miedzianym są wtedy odpychane do dalszego końca tego pręta przez ujemny ładunek na pręcie plastikowym. Ten ujemny ładunek przyciąga ładunki dodatnie pozostałe na bliższym końcu pręta miedzianego i obraca pręt miedziany tak, aby jego bliższy koniec zbliżył się do pręta plastikowego

W niektórych substancjach, np. metalach, wodzie z kranu i ciele ludzkim, niektóre ładunki ujemne mogą się dość swobodnie poruszać. Takie ośrodki materialne nazywamy **przewodnikami**. W innych substancjach, np. szkle, chemicznie czystej wodzie i plastiku nie ma ładunków, które mogą poruszać się swobodnie. Takie ośrodki materialne nazywamy **izolatorami**.

Pręta miedzianego, trzymanego w ręku, nie można naładować przez pocieranie wełną, ponieważ ciało ludzkie i pręt są przewodnikami. Pocieranie powoduje pojawienie się niezrównoważonego ładunku na pręcie. Jego nadmiar natychmiast odpływa z pręta przez ciało ludzkie do podłogi (połączonej z powierzchnią Ziemi) i pręt szybko staje się obojętny.

Ustanowienie przewodzącego połączenia między ciałem i powierzchnią Ziemi nazywamy **uziemieniem** ciała, a zubożenie ciała (przez pozbycie się niezrównoważonego ładunku dodatniego lub ujemnego) nazywamy **rozładowaniem** ciała. Jeśli natomiast pręt miedziany trzymamy za pomocą izolowanej ręczki, to eliminujemy drogę przewodzącą do Ziemi. Pręt można wtedy naładować przez pocieranie, jeśli tylko nie dotkniemy go bezpośrednio ręką.

Właściwości przewodników i izolatorów wynikają z budowy atomów i właściwości elektrycznych ich składników. Atomy zbudowane są z dodatnio naładowanych *protonów*, ujemnie naładowanych *elektronów* i elektrycznie obojętnych *neutronów*. Protony i neutrony są upakowane ściśle w *jądrze* znajdującym się w samym środku atomu.

Ładunek pojedynczego elektronu i ładunek pojedynczego protonu są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale mają przeciwny znak. Elektrycznie obojętny atom składa się więc z takiej samej liczby elektronów i protonów. Elektrony utrzymują się w pobliżu jądra, bo mają przeciwny znak ładunku niż protony w jądrze i dlatego są przyciągane przez jądro.

Gdy atomy przewodnika, np. miedzi, znajdują się blisko siebie, tworząc ciało stałe, niektóre z ich zewnętrznych (czyli najluźniej związanych) elektronów przestają być związane z poszczególnymi atomami i mogą swobodnie wędrować w całym ciele, pozostawiając dodatnio naładowane atomy (czyli *dodatnie jony*). Elektrony swobodne nazywamy *elektronami przewodnictwa*. W izolatorze jest ich bardzo mało lub nie ma ich wcale.

Z doświadczenia przedstawionego na rysunku 22.3 wynika, że w przewodniku istnieją ładunki swobodne. Ujemnie naładowany pręt plastikowy przyciąga którykolwiek koniec izolowanego obojętnego pręta miedzianego, gdyż elektrony przewodnictwa w bliższym końcu pręta miedzianego są odpychane przez ujemny ładunek pręta plastikowego. Przesuwają się one do dalszego końca pręta miedzianego, pozostawiając bliższy koniec bez elektronów, czyli z niezrównoważonym ładunkiem dodatnim. Ładunek dodatni przyciąga ujemny ładunek w pręcie plastikowym. Chociaż pręt miedziany jako całość jest nadal obojętny, to ma *indukowane ładunki*, czyli część dodatnich i ujemnych ładunków pręta ulega rozdzieleniu wskutek obecności naładowanego pręta plastikowego w jego pobliżu.

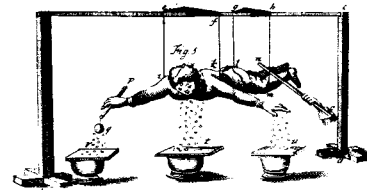
Podobnie, jeśli do jednego z końców obojętnego pręta miedzianego zbliżymy dodatnio naładowany pręt szklany, to elektrony przewodnictwa w pręcie

miedzianym zostaną przyciągnięte do tego końca. Ten koniec staje się ujemnie naładowany, a drugi — dodatnio, czyli znów w pręcie pojawiają się ładunki indukowane. Chociaż pręt miedziany jako całość jest nadal obojętny, to pręt ten i pręt szklany się przyciągają. (Na rysunku 22.4 przedstawiono inne doświadczenie ilustrujące istnienie ładunków indukowanych).

Warto podkreślić, że tylko elektrony przewodnictwa, o ujemnych ładunkach, mogą się swobodnie poruszać; dodatnie jony pozostają nieruchome. Ciało staje się więc dodatkowo naładowane tylko w wyniku *odpływu ładunków ujemnych*.

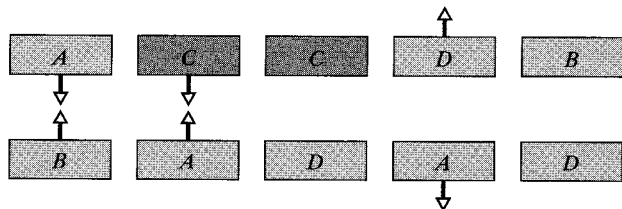
**Półprzewodniki**, np. krzem i german, są materiałami pośrednimi między przewodnikami i izolatorami. Rewolucja mikroelektroniczna, która tak wszechstronnie zmieniła nasze życie, jest oparta na przyrządach, zbudowanych z materiałów półprzewodnikowych.

Na koniec warto dodać, że istnieją także **nadprzewodniki**, których nazwa wiąże się z brakiem oporu przy przepływie w nich ładunku elektrycznego. Gdy ładunek porusza się w ośrodku materialnym, mówimy o istnieniu **prądu elektrycznego** w tym ośrodku. W zwykłych materiałach, nawet w dobrych przewodnikach, występuje opór przy przepływie w nich ładunku. Natomiast w nadprzewodniku opór nie jest po prostu mały — jest dokładnie równy zero. Gdy w nadprzewodzącym pierścieniu wzbudzimy prąd elektryczny, będzie on płynął „zawsze”, bez potrzeby podtrzymywania go przez jakieś źródło energii.



Rys. 22.4. To nie jest pokaz akrobacyjny, ale poważne doświadczenie wykonane w 1774 r., w celu udowodnienia, że ciało ludzkie jest przewodnikiem elektrycznym. Na rycinie przedstawiono osobę, zawieszoną na nieprzewodzących linach, którą ładuje się elektrycznie, używając naładowanego pręta (dotykając zapewne ciała, a nie spodni). Jeśli osoba zbliży twarz, lewą rękę lub przewodzącą kulkę i pręt w prawej ręce do kawałków papieru na płytkach, to wskutek indukowania się na papierze ładunku kawałki papieru zaczynają wznosić się do niej w powietrzu

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono pięć par płytek: *A*, *B* i *D* są naładowanymi płytkami plastikowymi, a *C* jest obojętną elektrycznie płytką miedzianą. Dla trzech par zaznaczono siły elektrostatyczne, działające między nimi. Czy w pozostałych dwóch parach płytki przyciągają się, czy odpychają?

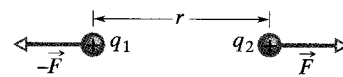


## 22.4. Prawo Coulomba

Jeśli dwie naładowane cząstki (zwane także *ładunkami punktowymi*) o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się w odległości  $r$ , to **siła elektrostatyczna** przyciągania lub odpychania między nimi ma wartość:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}), \quad (22.1)$$

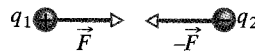
gdzie  $k$  jest stałą. Każda z cząstek oddziałuje na drugą siłą o tej wartości; te dwie siły spełniają trzecią zasadę dynamiki. Jeśli cząstki *odpychają się*, to siła działająca na każdą cząstkę jest skierowana *od* drugiej cząstki (rys. 22.5a i 22.5b). Jeśli cząstki przyciągają się, to siła działająca na każdą cząstkę jest skierowana *do* drugiej cząstki (rys. 22.5c).



a) odpychanie



b) odpychanie



c) przyciągnięcie

Rys. 22.5. Dwie naładowane cząstki znajdujące się w odległości  $r$  odpychają się, jeśli ich ładunki są: a) obydwa dodatnie, b) obydwa ujemne. c) Cząstki przyciągają się, jeśli ich ładunki mają przeciwne znaki. W każdym z tych trzech przypadków siła działająca na jedną cząstkę jest równa co do wartości sile działającej na drugą cząstkę, lecz jest przeciwnie skierowana

Wzór (22.1) nosi nazwę **prawa Coulomba**, od nazwiska Charlesa Augustina Coulomba, który doświadczalnie w 1785 roku doszedł do tego wzoru. Zauważ, że postać wzoru (22.1) jest taka sama, jak wzoru Newtona dla siły grawitacyjnej, działającej między dwiema cząstkami o masach  $m_1$  i  $m_2$ , znajdującymi się w odległości  $r$ :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (22.2)$$

gdzie  $G$  jest stałą grawitacyjną.

Stałą  $k$  we wzorze (22.1), przez analogię do stałej grawitacyjnej  $G$  ze wzoru (22.2), można nazywać *stałą elektrostatyczną*. W obydwu wzorach występuje w mianowniku kwadrat odległości, a w liczniku iloczyn wielkości, charakteryzujących oddziałujące cząstki — mas w jednym przypadku, a ładunków w drugim. Różnica między nimi polega na tym, że siły grawitacyjne są zawsze siłami przyciągania, a siły elektrostatyczne, zależnie od znaków dwóch ładunków, mogą być siłami przyciągania lub odpychania. Różnica wynika stąd, że mamy tylko jeden rodzaj masy, ale dwa rodzaje ładunków (we wzorze (22.1) występują dlatego znaki wartości bezwzględnej, a we wzorze (22.2) nie).

Prawo Coulomba zostało wielokrotnie potwierdzone doświadczalnie i nigdy nie znaleziono od niego odstępstw. Pozostaje ono słuszne nawet dla atomu, opisując poprawnie siłę, działającą między dodatnio naładowanym jądrem i każdym z ujemnie naładowanych elektronów, chociaż w tym przypadku mechanika klasyczna Newtona zawodzi i trzeba ją zastąpić fizyką kwantową. To proste prawo pozwala również poprawnie określić siły wiążące atomy w cząsteczki oraz siły wiążące atomy i cząsteczki w ciała stałe i ciecze.

Ze względów praktycznych (związanych z dokładnością pomiarów) jednostka ładunku elektrycznego w układzie SI jest jednostką pochodną jednostki natężenia prądu elektrycznego, którą jest amper (A). Jednostką ładunku jest **kulomb** (C): *jeden kulomb to ilość ładunku, przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w ciągu 1 sekundy, jeśli przez przewodnik płynie prąd o natężeniu 1 ampera*. W paragrafie 30.2 opiszemy, jak doświadczalnie zdefiniowany jest amper. W ogólności możemy napisać:

$$dq = I dt, \quad (22.3)$$

gdzie  $dq$  (w kulombach) jest ładunkiem, przenoszonym przez prąd o natężeniu  $I$  (w amperach) w przedziale czasu  $dt$  (w sekundach).

Z powodów historycznych (i ze względu na prostszą postać wielu innych wzorów) stałą elektrostatyczną  $k$  we wzorze (22.1) zapisuje się jako  $1/(4\pi\epsilon_0)$ . Wtedy prawo Coulomba przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}). \quad (22.4)$$

Stałe we wzorach (22.1) i (22.4) mają wartość

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \quad (22.5)$$

Wielkość  $\epsilon_0$ , zwana **przenikalnością elektryczną próżni** (stałą elektryczną), występuje nieraz we wzorach samodzielnie i ma wartość:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2). \quad (22.6)$$



Innym jeszcze podobieństwem między siłą grawitacyjną i siłą elektrostatyczną jest to, że obie siły spełniają zasadę superpozycji. Jeśli mamy  $n$  cząstek naładowanych, to oddziałują one niezależnie w parach i siła wypadkowa działająca na jakąkolwiek z nich, np. cząstkę 1, jest równa sumie wektorowej:

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots + \vec{F}_{1n}, \quad (22.7)$$

gdzie np.  $\vec{F}_{14}$  jest siłą oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1. Taki sam wzór jest słuszny dla siły grawitacyjnej.

Na koniec przypomnijmy sobie dwa twierdzenia o powłoce, których używaliśmy przy omawianiu zagadnień związanych z grawitacją, gdyż mają one swoje odpowiedniki w elektrostatyce:

- Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku.
- Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.

(W pierwszym twierdzeniu należy założyć, że ładunek na powłoce jest dużo większy od ładunku cząstki, gdyż wtedy można zaniedbać zmianę rozkładu ładunku na powłoce, spowodowaną obecnością ładunku cząstki).

## Przewodniki kuliste

Nadmiarowy ładunek na kulistej powłoce z materiału przewodzącego rozkłada się jednorodnie na jej (zewnątrzniej) powierzchni. Jeśli na przykład umieścimy nadmiarowe elektrony na kulistej powłoce metalowej, to elektrony, odpychając się, starają się od siebie oddalić i rozprzestrzeniają się po dostępnej powierzchni, aż rozłożą się na niej jednorodnie. Rozkład taki maksymalizuje odległości między parami nadmiarowych elektronów. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, będzie ona wtedy przyciągać lub odpychać ładunki, znajdujące się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały nadmiarowy ładunek był skupiony w jej środku.

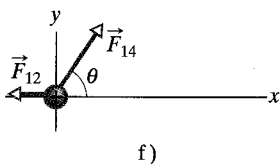
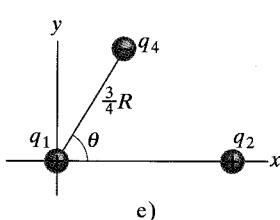
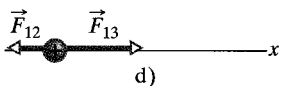
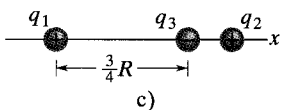
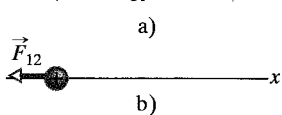
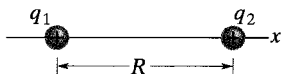
Po usunięciu pewnego ładunku ujemnego z kulistej powłoki metalowej powstały na powłoce ładunek dodatni jest także jednorodnie rozłożony na jej powierzchni. Jeśli np. usuniemy  $n$  elektronów, to powstanie  $n$  miejsc z ładunkiem dodatnim (miejsc pozbawionych elektronu), rozmieszczonych jednorodnie na powłoce. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, będzie ona znów przyciągać lub odpychać ładunek, znajdujący się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały niezrównoważony ładunek powłoki znajdował się w jej środku.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono dwa protony (symbol p) i jeden elektron (symbol e), umieszczone na prostej. W jakim kierunku działają: a) siła elektrostatyczna oddziaływania elektronu na środkowy proton, b) siła elektrostatyczna oddziaływania drugiego protonu na środkowy proton, c) wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na środkowy proton?



## Przykład 22.1

a) Na rysunku 22.6a przedstawiono dwie dodatnio naładowane cząstki, umieszczone na osi  $x$ . Ładunki cząstek wynoszą  $q_1 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  i  $q_2 = 3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , a odległość cząstek wynosi  $R = 0,02 \text{ m}$ . Jaka jest wartość i kierunek siły elektrostatycznej  $\vec{F}_{12}$  oddziaływania cząstki 2 na cząstkę 1?



Rys. 22.6. Przykład 22.1. a) Dwie naładowane cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się na osi  $x$  w odległości  $R$ . b) Diagram sił dla cząstki 1 ilustruje działającą na nią siłę elektrostatyczną, pochodzącą od cząstki 2. c) Cząstka 3 znajduje się teraz na osi  $x$ , razem z cząstkami 1 i 2. d) Diagram sił dla cząstki 1. e) Cząstka 4 znajduje się na linii, tworzącej kąt  $\theta$  z osią  $x$ , na której nadal znajdują się cząstki 1 i 2. f) Diagram sił dla cząstki 1

### ROZWIĄZANIE:

Obie cząstki są dodatnio naładowane, dlatego też cząstka 1 jest odpychana przez cząstkę 2, a wartość siły jest określona wzorem (22.4). Stąd też siła  $\vec{F}_{12}$ , działająca na cząstkę 1, jest skierowana od cząstki 2, w ujemnym kierunku osi  $x$  (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6b). Używając wzoru (22.4), po podstawieniu odległości  $R$  zamiast  $r$ , możemy obliczyć wartość siły  $F_{12}$ :

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Stąd siła  $\vec{F}_{12}$  ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi  $x$ ):

$$1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N} \quad \text{i} \quad 180^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możemy także zapisać  $\vec{F}_{12}$ , używając wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{12} = -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Rysunek 22.6c jest identyczny z rysunkiem 22.6a poza tym, że teraz dodatkowo między cząstkami 1 i 2 znajduje się cząstka 3,

o ładunku  $q_3 = -3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Znajduje się ona w odległości  $\frac{3}{4}R$  od cząstki 1. Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  oddziaływania cząstek 2 i 3 na cząstkę 1?

### ROZWIĄZANIE:

1. Obecność cząstki 3 nie zmienia siły elektrostatycznej oddziaływania cząstki 2 na cząstkę 1. Stąd siła  $\vec{F}_{12}$  nadal działa na cząstkę 1. Podobnie siła  $\vec{F}_{13}$  oddziaływania cząstki 3 na cząstkę 1 nie zmienia się wskutek obecności cząstki 2. Cząstki 1 i 3 mają ładunki o przeciwnym znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana przez cząstkę 3. Stąd siła  $\vec{F}_{13}$  jest skierowana do cząstki 3 (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6d).

Aby znaleźć wartość siły  $\vec{F}_{13}$ , przepisujemy wzór (22.4) w postaci:

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(\frac{3}{4}R)^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Możemy także zapisać  $\vec{F}_{13}$  za pomocą wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{13} = (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i}.$$

2. Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ , działająca na cząstkę 1 jest sumą wektorową sił  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{13}$ , czyli zgodnie ze wzorem (22.7) siłę wypadkową  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  działającą na cząstkę 1 możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,\text{wyp}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ &= -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} + (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} \\ &= (9 \cdot 10^{-25} \text{ N})\hat{i}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Stąd  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi  $x$ ):

$$9 \cdot 10^{-25} \text{ N} \quad \text{i} \quad 0^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Rysunek 22.6e jest identyczny z rysunkiem 22.6a poza tym, że teraz dodatkowo dodano w zaznaczonym miejscu cząstkę 4 o ładunku  $q_4 = -3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Znajduje się ona w odległości  $\frac{3}{4}R$  od cząstki 1, na linii tworzącej kąt  $\theta = 60^\circ$  z osią  $x$ . Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  oddziaływania cząstek 2 i 4 na cząstkę 1?

### ROZWIĄZANIE:

1. Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  jest sumą wektorową siły  $\vec{F}_{12}$  i nowej siły  $\vec{F}_{14}$  oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1. Cząstki 1 i 4 mają ładunki przeciwnego znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana do cząstki 4. Stąd siła  $\vec{F}_{14}$ , działająca na cząstkę 1, jest skierowana do cząstki 4 pod kątem  $\theta = 60^\circ$  (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6f).

Aby znaleźć wartość siły  $\vec{F}_{14}$ , przepisujemy wzór (22.4) w postaci:

$$\begin{aligned} F_{14} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_4|}{(\frac{3}{4}R)^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Stąd na podstawie wzoru (22.7) możemy zapisać siłę wypadkową  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  działającą na cząstkę 1 w postaci

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}.$$

➡ 2. Siły  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$  nie są skierowane wzdłuż tej samej osi, więc nie możemy ich zsumować przez proste dodanie ich wartości. Musimy je dodawać jak wektory, stosując jedną z następujących metod.

### Metoda 1

*Dodawanie przy zastosowaniu wektorów jednostkowych.* Najpierw musimy zapisać  $\vec{F}_{14}$  w postaci:

$$\vec{F}_{14} = (F_{14} \cos \theta)\hat{i} + (F_{14} \sin \theta)\hat{j}.$$

Podstawiając  $2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}$  za  $F_{14}$  i  $60^\circ$  za  $\theta$  otrzymujemy:

$$\vec{F}_{14} = (1,025 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} + (1,775 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{j}.$$

Następnie dodajemy:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,\text{wyp}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} \\ &= -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} + (1,025 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} \\ &\quad + (1,775 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{j} \\ &\approx (-1,25 \cdot 10^{-25} \text{ N})\hat{i} \\ &\quad + (1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{j}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

### Metoda 2

*Sumowanie składowych sił.* Suma składowych  $x$  wynosi

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp},x} &= F_{12,x} + F_{14,x} = F_{12} + F_{14} \cos 60^\circ \\ &= -1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N} + (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})(\cos 60^\circ) \\ &= -1,25 \cdot 10^{-25} \text{ N}. \end{aligned}$$

Suma składowych  $y$  wynosi:

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp},y} &= F_{12,y} + F_{14,y} = 0 + F_{14} \sin 60^\circ \\ &= (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})(\sin 60^\circ) = 1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  ma więc wartość

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp}} &= \sqrt{F_{1,\text{wyp},x}^2 + F_{1,\text{wyp},y}^2} \\ &= 1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Aby znaleźć kierunek siły  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ , obliczamy:

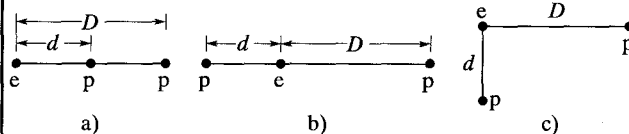
$$\theta = \arctg \frac{F_{1,\text{wyp},y}}{F_{1,\text{wyp},x}} = -86^\circ.$$

Jest to jednak wynik niezgodny z warunkami zadania, gdyż siła  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  musi mieć kierunek, mieszczący się między kierunkami sił  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$ . Aby otrzymać taką wartość  $\theta$ , dodajemy  $180^\circ$  i otrzymujemy

$$-86^\circ + 180^\circ = 94^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

### SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy układy

złożone z elektronu  $e$  i dwóch protonów  $p$ . a) Uszereguj układy zgodnie z wartością wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania protonów na elektron, zaczynając od wartości największej. b) Czy dla układu (c) kąt między wypadkową siłą, działającą na elektron i prostą, oznaczoną przez (d), jest mniejszy, czy większy od  $45^\circ$ ?



## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Symbole oznaczające ładunek

Oto ogólny przewodnik po symbolach, oznaczających ładunek. Jeśli w zdaniu użyto symbolu  $q$ , ze wskaźnikiem lub bez, i nie podano żadnego znaku ładunku, to ładunek może być albo dodatni, albo ujemny. Znak ładunku jest nieraz wskazany bezpośrednio, przez użycie notacji  $+q$  lub  $-q$ .

## Przykład 22.2

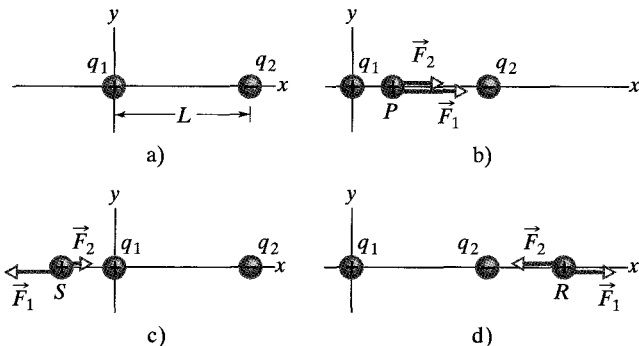
Na rysunku 22.7a przedstawiono dwie cząstki: cząstkę o ładunku  $q_1 = +8q$ , umieszczoną w początku układu, i cząstkę o ładunku  $q_2 = -2q$ , umieszczoną w punkcie o współrzędnej  $x = L$ . W którym punkcie (poza nieskończenie odległymi) należy umieścić proton, aby znalazł się w stanie równowagi (tzn. aby wypadkowa siła, działająca na proton, była równa zeru)? Czy jest to stan równowagi trwałej, czy nietrwałej?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Jeśli  $\vec{F}_1$  jest siłą oddziaływania ładunku  $q_1$  na proton i  $\vec{F}_2$  jest siłą oddziaływania ładunku  $q_2$  na proton, to szukamy punktu, w którym  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ . Warunek ten wymaga, aby:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (22.8)$$

Oznacza to, że w poszukiwanym punkcie siły oddziaływania na proton dwóch innych cząstek muszą być przeciwnie skierowane



**Rys. 22.7.** Przykład 22.2. a) Dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się na osi  $x$  w odległości  $L$ . b)–d) Trzy możliwe położenia  $P$ ,  $S$  i  $R$  protonu. W każdym położeniu  $\vec{F}_1$  jest siłą oddziaływania cząstki 1 na proton, a  $\vec{F}_2$  jest siłą oddziaływania cząstki 2 na proton

i mieć równe wartości:

$$F_1 = F_2. \quad (22.9)$$

Proton ma ładunek dodatni. Proton i cząstka o ładunku  $q_1$  mają więc ten sam znak i siła  $\vec{F}_1$  musi być skierowana od  $q_1$ . Natomiast proton i cząstka o ładunku  $q_2$  mają przeciwne znaki i siła  $\vec{F}_2$ , działająca na proton musi być skierowana do  $q_2$ . Siły „od  $q_1$ ” i „do  $q_2$ ” mogą być skierowane w przeciwnych kierunkach tylko wtedy, gdy proton znajduje się na osi  $x$ .

Jeśli proton umieszczony jest na osi  $x$  w którymkolwiek punkcie między  $q_1$  i  $q_2$ , np. w punkcie  $P$  na rysunku 22.7b, to  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  są skierowane w tę samą stronę, a nie w przeciwną, jak potrzeba. Jeśli proton jest umieszczony w którymkolwiek punkcie na osi  $x$  na lewo od  $q_1$ , np. w punkcie  $S$  na rysunku 22.7c, to  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  są skierowane przeciwnie. Ale ze wzoru (22.4) wynika, że  $\vec{F}_1$

i  $\vec{F}_2$  nie mogą mieć tam równych wartości: wartość  $F_1$  musi być większa od wartości  $F_2$ , bo  $F_1$  odpowiada bliższemu ładunkowi (o mniejszym  $r$ ) o większej wartości ( $8q$  w porównaniu z  $2q$ ).

Na koniec, jeśli proton umieszczony jest w którymkolwiek punkcie na osi  $x$  na prawo od  $q_2$ , na przykład w punkcie  $R$  na rysunku 22.7d, to  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  są także przeciwnie skierowane. Jednak, ponieważ teraz ładunek o większej wartości ( $q_1$ ) jest umieszczony dalej od protonu niż ładunek o mniejszej wartości, to istnieje punkt, w którym wartość  $F_1$  jest równa  $F_2$ . Jeśli  $x$  jest współrzędną tego punktu i  $q_p$  jest ładunkiem protonu, to korzystając ze wzoru (22.4) możemy wzór (22.9) zapisać w postaci:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8qq_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qq_p}{(x-L)^2}. \quad (22.10)$$

(Zauważ, że we wzorze (22.10) występują tylko wartości ładunków). Po przekształceniu wzoru (22.10) otrzymujemy:

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Wyciągając pierwiastek z obydwu stron pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{x-L}{x} = \frac{1}{2},$$

co daje nam ostatecznie:

$$x = 2L. \quad (\text{odpowiedź})$$

Równowaga w punkcie  $x = 2L$  jest nietrwała. Jeśli proton przesuniemy w lewo od punktu  $R$ , to  $F_1$  i  $F_2$  wzrastają, ale  $F_2$  wzrasta bardziej (ponieważ  $q_2$  jest bliżej niż  $q_1$ ) i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze bardziej w lewo. Jeśli proton przesuniemy w prawo, to  $F_1$  i  $F_2$  zmniejszą się, ale  $F_2$  zmniejsza się bardziej i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze bardziej w prawo. W stanie równowagi trwałej, przy małym przesunięciu proton powracałby z powrotem do położenia równowagi.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Rysowanie wektorów siły elektrostatycznej

Gdy mając dany rysunek, na którym przedstawiono cząstki naładowane, na przykład rysunek 22.6a, masz znaleźć wypadkową siłę elektrostatyczną, działającą na jedną z nich, zwykle trzeba narysować diagram sił, na którym naniesiesz tylko wybraną cząstkę i siły, jakie na nią działają (jak np. na rys. 22.6b). Gdy chcesz nanieść te siły na rysunek, na którym przedstawiono wszystkie

cząstki, musisz pamiętać, aby narysować wektory siły w ten sposób, żeby początek wektora (lepiej wybór) lub jego koniec były umieszczone na wybranej cząstce. Narysowanie tych wektorów w innym miejscu na rysunku prowadzi do nieporozumień — nieporozumienie jest pewne, jeśli narysujesz wektory przy cząstkach, które *przyczyniają się* do powstania sił działających na wybraną cząstkę.

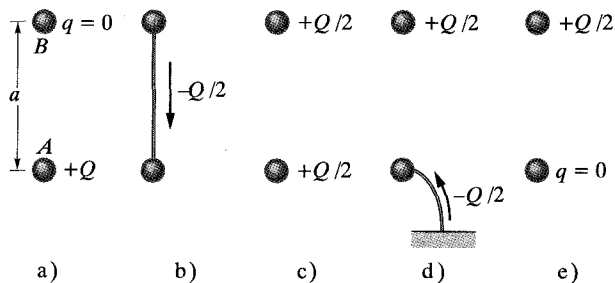
## Przykład 22.3

Na rysunku 22.8a dwie identyczne, elektrycznie izolowane przewodzące kule  $A$  i  $B$  znajdują się w odległości  $a$ , dużej w porównaniu z promieniem kul (odległość mierzymy między środkami kul). Kula  $A$  ma ładunek dodatni  $+Q$ , a kula  $B$  jest elektrycznie obojętna. Początkowo siła elektrostatyczna działająca między kulami wynosi zero. (Zakładamy, że na powierzchniach kul nie indukuje się ładunek, bo znajdują się one w dużej odległości od siebie).

a) Załóżmy, że kule połączono na chwilę przewodnikiem. Jest on na tyle cienki, że można pominąć jakikolwiek wypadkowy ładunek na nim. Ile wynosić będzie siła elektrostatyczna oddziaływania kul po usunięciu przewodnika?

### ROZWIĄZANIE:

➔ 1. Gdy kule połączymy przewodnikiem, to (ujemne) elektrony przewodnictwa na kuli  $B$ , które zawsze się odpychają, mogą się oddalić od siebie (wzdłuż przewodnika do dodatnio naładowa-



Rys. 22.8. Przykład 22.3. Dwie małe przewodzące kule A i B. a) Na początku kula A jest naładowana dodatnio. b) Między kulami przez łączący je przewód zostaje przekazany ładunek ujemny. c) Obie kule są teraz naładowane dodatnio. d) Ujemny ładunek zostaje przekazany kuli A przez uziemiający przewód. e) Kula A jest teraz obojętna

nej kuli A, która je przyciąga) (zob. rys. 22.8b). Kula B traci ładunek ujemny i ładuje się dodatnio, a kula A zyskuje ładunek ujemny i staje się *mniej* naładowana dodatnio.

2. Kule ostatecznie będą mieć takie same ładunki, ponieważ są identyczne. Przepływ ładunku kończy się więc, gdy ładunek na kuli B osiągnie wartość  $+Q/2$ , a na kuli A zmaleje do  $+Q/2$ . Warunek ten zostaje osiągnięty, gdy przepłynie ładunek  $-Q/2$ .

Po usunięciu przewodnika (rys. 22.8c) możemy założyć, że ładunek na żadnej z kul nie zakłóca jednorodności rozkładu ładunku na drugiej kuli, bo promienie kul są małe w porównaniu z odległością między nimi. Możemy więc zastosować pierwsze twierdzenie o powłoce do każdej z kul. Ze wzoru (22.4), po podstawieniu  $q_1 = q_2 = Q/2$  i  $r = a$ , otrzymujemy wartość siły elektrostatycznej oddziaływania kul:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a}\right)^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Kule, obecnie naładowane dodatnio, się odpychają.

b) Załóżmy teraz, że kula A zostanie na chwilę uziemiona, a następnie połączenie uziemiające zostanie usunięte. Ile wynosić będzie teraz siła elektrostatyczna, działająca między kulami?

### ROZWIĄZANIE:

Połączenie uziemiające pozwala elektronom o całkowitym ładunku  $-Q/2$  przesunąć się z ziemi do kuli A (rys. 22.8d), w wyniku czego kula stanie się obojętna (rys. 22.8e). Pod nieobecność ładunku na kuli A siła elektrostatyczna oddziaływania dwóch kul (podobnie, jak na początku, rys. 22.8a) będzie równa zeru.

## 22.5. Ładunek jest skwantowany

W czasach Benjamina Franklina ładunek elektryczny uważano za ciągły płyn, co w wielu przypadkach było ideą przydatną. Obecnie wiemy, że materialne płyny, np. powietrze i woda, nie są ciągłe, bo są złożone z atomów i cząsteczek, a materia jest nieciągła (dyskretna). Z doświadczenia wynika, że „płyn elektryczny” także nie jest ciągły, a przyjmuje wartości będące wielokrotnością pewnego ładunku elementarnego. Każdy ładunek  $q$ , dodatni lub ujemny, można zapisać w postaci:

$$q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (22.11)$$

gdzie **ładunek elementarny**  $e$  ma wartość

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (22.12)$$

Ładunek elementarny  $e$  jest jedną z ważnych stałych fizycznych. Elektron i proton mają ładunek o wartości bezwzględnej  $e$  (tabela 22.1). (Kwarki, czyli cząstki, z których zbudowane są protony i neutrony, mają ładunki  $\pm e/3$  lub  $\pm 2e/3$ , ale są one zawsze uwięzione, tzn. mogą być indywidualnie obserwowane. Z tego powodu, a także ze względów historycznych, ich ładunków nie traktuje się jako ładunku elementarnego).

Często spotykamy się ze stwierdzeniami, np. „ładunek na kuli”, „przekazany ładunek”, „ładunek niesiony przez elektron”, które mogłyby sugerować, że ładunek jest substancją. (Faktycznie, takie zdania pojawiały się także w tym rozdziale). Powinniśmy jednak pamiętać, jaki był zamierzony sens tych stwierżeń: substancją są *cząstki*, a ładunek jest jedynie jedną z ich właściwości, jaką jest na przykład masa.

Tabela 22.1. Ładunki cząstek

Cząstka	Symbol	Ładunek
Elektron	$e$ lub $e^-$	$-e$
Proton	$p$	$+e$
Neutron	$n$	$0$

Jeśli wielkość fizyczna, jak na przykład ładunek elektryczny, może przyjmować tylko wartości z dyskretnego zbioru, a nie dowolne, to mówimy, że ta wielkość jest **skwantowana**. Można na przykład znaleźć cząstkę, która wcale nie ma ładunku, albo ma ładunek  $+10e$  lub  $-6e$ , ale nie cząstkę z ładunkiem, powiedzmy,  $3,57e$ .

Kwant ładunku jest mały, na przykład przez włókno zwykłej żarówki o mocy 100 W w każdej sekundzie przepływa około  $10^{19}$  ładunków elementarnych. Ziarnistość ładunku elektrycznego nie ujawnia się więc w takich zjawiskach makroskopowych (żarówka nie mruga, gdy przepływają przez nią kolejne elektrony), podobnie jak nie można wyczuć ręką pojedynczych cząsteczek wody.

Ziarnistość ładunku elektrycznego jest odpowiedzialna za niebieską poświatę, wysyłaną przez cukierek wintergrinowy przy jego ściskaniu. Gdy w cukierku kruszone są kryształy cukru (sacharozy), jedna część każdego pękniętego kryształu ma nadmiar elektronów, a druga nadmiar jonów dodatnich. Elektrony prawie natychmiast przeskakują przez szczelinę pęknięcia, aby zobojętnić obie strony. Podczas przeskoków elektrony zderzają się wtedy z cząsteczkami azotu w powietrzu, które dostało się do szczeliny.

Zderzenia powodują, że azot wysyła promieniowanie nadfioletowe, którego nie widzimy, i światło niebieskie (z widzialnego zakresu widma), które jest jednak za słabe, aby je zaobserwować. Olejek wintergrinowy w kryształach pochłania promieniowanie nadfioletowe i natychmiast wysyła niebieskie światło, które powoduje poświatę w ustach lub szczypcach. Pokaz nie udaje się jednak, jeśli cukierek jest zwilżony śliną, gdyż przewodząca ślina zobojętnia obie części pękniętego kryształu, zanim pojawi się iskrzenie.

**SPRAWDZIAN 4:** Początkowo kula  $A$  ma ładunek  $-50e$ , a kula  $B$  ładunek  $20e$ . Kule są wykonane z materiału przewodzącego i mają identyczne rozmiary. Jaki będzie końcowy ładunek na kuli  $A$  po zetknięciu się kul?

## Przykład 22.4

Jądro w atomie żelaza ma promień około  $4 \cdot 10^{-15}$  m i zawiera 26 protonów.

a) Jaka jest wartość odpychającej siły elektrostatycznej, działającej między dwoma protonami, jeśli znajdują się one w odległości  $4 \cdot 10^{-15}$  m?

### ROZWIĄZANIE:

Protony można traktować jako cząstki naładowane, a więc wartość siły elektrostatycznej oddziaływania jednego protonu na drugi możesz obliczyć, korzystając z prawa Coulomba. Z tabeli 22.1 wynika, że ładunek protonu wynosi  $+e$ . Ze wzoru (22.4) otrzymujemy:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 14 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Byłaby to mała siła, gdyby działała na obiekt makroskopowy, na przykład melon, ale jest ogromną siłą w odniesieniu do protonu. Takie siły powinny być wystarczające, aby rozbić jądro dowolnego

pierwiastka poza wodorem (którego jądro ma tylko jeden proton). Tak się jednak nie dzieje nawet w jądrach o bardzo dużej liczbie protonów. Musi więc istnieć jakaś ogromna siła przyciągająca, przeciwstawiająca się ogromnej odpychającej sile elektrostatycznej.

b) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej między tymi dwoma protonami?

### ROZWIĄZANIE:

Protony są cząstkami, a więc wartość siły grawitacyjnej ich wzajemnego oddziaływania możesz obliczyć ze wzoru Newtona (22.2). Podstawiając masę protonu  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, mamy:

$$F = G \frac{m_p^2}{r^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 1,2 \cdot 10^{-35} \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Wynik ten świadczy o tym, że (przyciągająca) siła grawitacyjna jest zbyt słaba, aby przeciwstawić się odpychającym siłom elektrostatycznym między protonami w jądrze. Protony są w rzeczywistości związane ogromną siłą. Oddziaływanie cząstek w jądrze

nazywamy (trafnie) *oddziaływaniem silnym*. Jest to oddziaływanie między protonami (i neutronami), gdy są one blisko siebie, jak w jądrze.

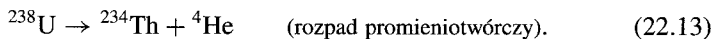
Chociaż siła grawitacyjna jest o wiele rzędów wielkości słabsza od siły elektrostatycznej, to jest ważniejsza w zjawiskach makroskopowych, ponieważ jest zawsze siłą przyciągania. Oznacza

to, że może ona skupić wiele małych ciał w ogromne ciała o wielkich masach (jak np. planety i gwiazdy), które mogą oddziaływać dużymi siłami grawitacyjnymi. Natomiast siła elektrostatyczna jest siłą odpychającą dla ładunków o tym samym znaku i dlatego nie można skupić dużych ilości dodatniego czy ujemnego ładunku, aby mogły pojawić się duże siły elektrostatyczne.

## 22.6. Ładunek jest zachowany

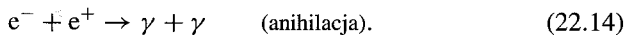
Przy pocieraniu pręta szklanego jedwabiem, na pręcie pojawia się ładunek dodatni. Pomiar wykazuje, że ujemny ładunek o takiej samej wartości bezwzględnej pojawia się na jedwabiu. Oznacza to, że przy pocieraniu ładunek nie jest wytwarzany, lecz tylko przekazywany z jednego ciała do drugiego, co narusza obojętność elektryczną każdego z nich. Tę hipotezę **zachowania ładunku** jako pierwszy postawił Benjamin Franklin. Została ona potwierdzona dokładnymi badaniami zarówno dla dużych ciał naładowanych, jak i dla atomów, jąder i cząstek elementarnych. Nigdy nie znaleziono wyjątków. Dodajemy więc ładunek elektryczny do naszej listy wielkości (zawierającej energię, pęd i moment pędu), które spełniają zasadę zachowania.

*Rozpad promieniotwórczy* jądra, w którym samorzutnie przekształca się ono w inne jądra, dostarcza nam wielu przykładów zachowania ładunku w zjawiskach jądrowych. Na przykład uran-238 ( $^{238}\text{U}$ ), występujący w naturalnej rudzie uranu, może rozpadać się przez emisję cząstki  $\alpha$  (która jest jądrem helu  $^4\text{He}$ ), przekształcając się w tor  $^{234}\text{Th}$ :



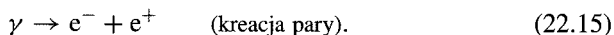
Liczba atomowa  $Z$  promieniotwórczego jądra *macierzystego*  $^{238}\text{U}$  wynosi 92, co oznacza, że jądro zawiera 92 protony i ma ładunek  $92e$ . Emitowana cząstka  $\alpha$  ma  $Z = 2$ , a jądro *poходne*  $^{234}\text{Th}$  ma  $Z = 90$ . Ilość ładunku przed rozpadem,  $92e$ , jest więc równa całkowitemu ładunkowi po rozpadzie,  $90e + 2e$ . Ładunek elektryczny jest zachowany.

Innym przykładem zachowania ładunku jest *proces anihilacji* elektronu  $e^-$  (o ładunku  $-e$ ) i jego antycząstki, pozytonu  $e^+$  (o ładunku  $+e$ ), w którym cząstki te przekształcają się w dwa kwanty  $\gamma$  (promieniowania elektromagnetycznego o wielkiej energii):

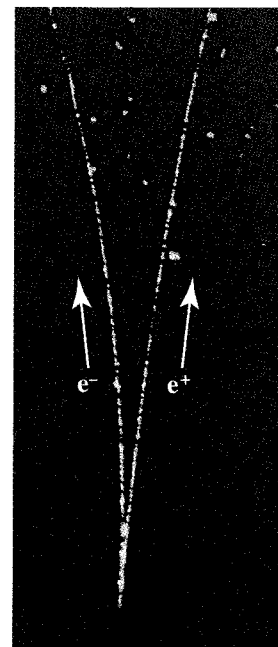


Stosując zasadę zachowania ładunku, musimy ładunki dodawać algebraicznie, uwzględniając ich znaki. W procesie anihilacji (22.14) wypadkowy ładunek układu jest równy zeru zarówno przed, jak i po anihilacji. Ładunek elektryczny jest więc zachowany.

W procesie *kreacji pary*, odwrotnym do anihilacji, ładunek jest także zachowany. W tym procesie kwant  $\gamma$  przekształca się w elektron i pozyton:



Na rysunku 22.9 przedstawiono proces kreacji pary w komorze pęcherzykowej. Kwant  $\gamma$  wpadł do komory z dołu i w pewnym punkcie przekształcił się



Rys. 22.9. Fotografia śladów, pozostawionych przez elektron i pozyton w postaci pęcherzyków w komorze pęcherzykowej. Para cząstek została wytworzona, w wyniku procesu kreacji, z kwantu  $\gamma$ , który wpadł do komory z dołu. Obojętny elektrycznie kwant  $\gamma$  nie pozostawił śladu z pęcherzyków wzdłuż swej drogi, tak jak zrobiły to elektron i pozyton

w elektron i pozyton. Nowe cząstki były naładowane, a więc podczas ruchu każda z nich zostawiła ślad z drobnych pęcherzyków. (Ślady są zakrzywione, bo w komorze włączono pole magnetyczne). Kwant  $\gamma$ , będąc elektrycznie obojętny, nie pozostawił śladu. Można jednak dokładnie powiedzieć, gdzie nastąpiła kreacja pary, a mianowicie w punkcie, w którym zaczynają się ślady elektronu i pozytonu.

## Podsumowanie

**Ladunek elektryczny** Wielkość oddziaływania elektrycznego cząstki z otaczającymi ją obiektami zależy od jej **ładunku elektrycznego**, który może być dodatni lub ujemny. Ładunki o tym samym znaku odpychają się, a ładunki o przeciwnych znakach się przyciągają. Ciało z równymi ilościami dwóch rodzajów ładunku jest obojętne elektrycznie, a z niezrównoważonym ładunkiem — naładowane elektrycznie.

**Przewodniki** są materiałami, w których znaczna liczba cząstek naładowanych (elektronów w metalu) może poruszać się swobodnie. Naładowane cząstki w **izolatorach** nie mogą się swobodnie poruszać. Gdy ładunek porusza się w przewodzie, mówimy, że w przewodzie płynie **prąd elektryczny**.

**Kulomb i amper** Jednostką ładunku elektrycznego w układzie SI jest **kulomb** (C). Jest on zdefiniowany za pomocą jednostki natężenia prądu elektrycznego, ampera (A), jako ładunek przepływający przez określoną powierzchnię w ciągu 1 sekundy, jeśli natężenie prądu przepływającego przez tę powierzchnię jest równe 1 amperowi.

**Prawo Coulomba** *Prawo Coulomba* określa **siłę elektrostatyczną**, działającą między małymi (punktowymi) ładunkami elektrycznymi  $q_1$  i  $q_2$ , znajdującymi się w spoczynku w odległości  $r$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}), \quad (22.4)$$

gdzie  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$  jest **przenikalnością elektryczną próżni** i  $1/(4\pi\epsilon_0) = k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ .

Siła przyciągania lub odpychania, działająca między ładunkami w spoczynku, działa wzdłuż prostej, łączącej dwa ładunki. Jeśli jest ich więcej niż dwa, to wzór (22.4) jest słuszny dla każdej pary ładunków. Siłę wypadkową działającą na każdy ładunek znajdujemy, korzystając z zasady superpozycji, jako sumę wektorową sił oddziaływania wszystkich innych ładunków na dany ładunek.

Dwa twierdzenia o powłoce dla elektrostatyki są następujące:

*Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę, znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w jej środku.*

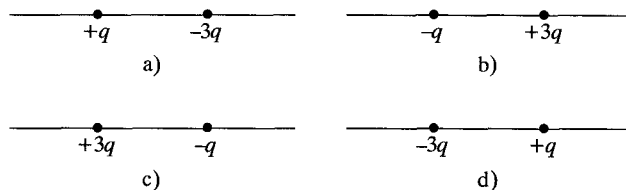
*Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.*

**Ładunek elementarny** Ładunek elektryczny jest **skwantowany**: dowolny ładunek można zapisać jako  $ne$ , gdzie  $n$  jest dodatnią lub ujemną liczbą całkowitą, a  $e$  jest stałą fizyczną zwaną **ładunkiem elementarnym** (w przybliżeniu  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ). Ładunek elektryczny jest **zachowany**: algebraiczna suma ładunków w dowolnym odosobnionym układzie nie może ulegać zmianie.

## Pytania

1. Czy prawo Coulomba jest słuszne dla wszystkich ciał naładowanych?
2. Cząstkę o ładunku  $q$  umieszczamy kolejno na zewnątrz następujących czterech metalowych ciał naładowanych jednorodnie ładunkiem  $Q$ : 1) dużej kuli, 2) dużej powłoki kulistej, 3) małej kuli i 4) małej powłoki kulistej. Odległość między cząstką i środkiem ciała jest taka sama, a ładunek  $q$  jest na tyle mały, że nie zmienia znacząco jednorodnego rozkładu ładunku  $Q$ . Uszereguj ciała według wartości siły ich oddziaływania na cząstkę, zaczynając od największej.

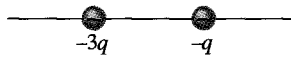
3. Na rysunku 22.10 przedstawiono na osi cztery układy cząstek naładowanych. W których układach istnieje punkt na lewo od cząstek, w którym elektron będzie w stanie równowagi?



Rys. 22.10. Pytanie 3

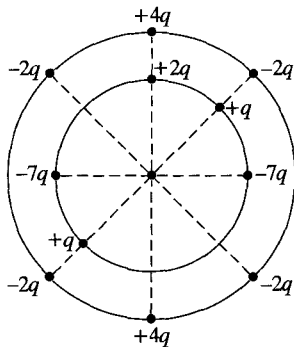


4. Na rysunku 22.11 przedstawiono na osi dwie naładowane cząstki. Cząstki te mogą się poruszać. Istnieje jednak jeden taki punkt, że po umieszczeniu w nim trzeciej naładowanej cząstki wszystkie trzy będą w stanie równowagi. a) Czy ten punkt jest na lewo od pierwszych dwóch cząstek, czy na prawo, czy między nimi? b) Czy trzecia cząstka powinna być naładowana dodatnio, czy ujemnie? c) Czy równowaga jest trwała, czy nietrwała?



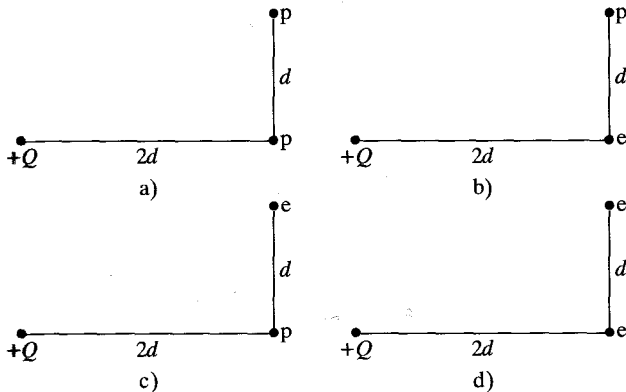
Rys. 22.11. Pytanie 4

5. Na rysunku 22.12 przedstawiono znajdującą się w środku cząstkę o ładunku  $-q$ , otoczoną przez dwa okręgi o promieniach  $r$  i  $R$  ( $R > r$ ), z umieszczonymi na nich cząstkami naładowanymi. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania pozostałych cząstek na cząstkę środkową?



Rys. 22.12. Pytanie 5

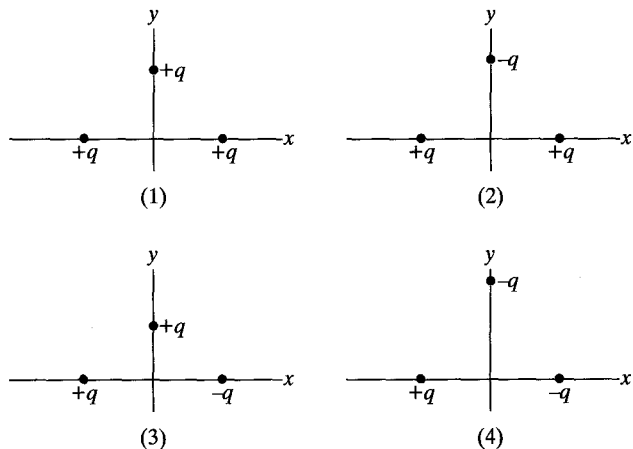
6. Na rysunku 22.13 przedstawiono cztery układy cząstek naładowanych. U szereguj te układy według wartości wypadkowej siły elektrostatycznej, działającej na cząstkę o ładunku  $+Q$ , zaczynając od największej.



Rys. 22.13. Pytanie 6

7. Na rysunku 22.14 przedstawiono cztery układy cząstek o ładunku  $+q$  lub  $-q$ , przy czym cząstki umieszczone na osi  $x$  są równoodległe od osi  $y$ . Rozważ najpierw środkową cząstkę w układzie 1; cząstka ta doznaje działania siły elektrostatycznej ze strony każdej z dwóch pozostałych cząstek. a) Czy wartości  $F$  tych sił są takie same, czy różne? b) Czy wartość siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę jest równa  $2F$ , większa,

czy mniejsza od tej wartości? c) Czy składowe  $x$  tych dwóch sił dodają się, czy odejmują? d) Czy ich składowe  $y$  dodają się, czy odejmują? e) Czy kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę odpowiada odejmowaniu się składowych, czy ich dodawaniu? f) Jaki jest kierunek tej siły wypadkowej? Rozważ teraz pozostałe układy. Jaki jest kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę dla: g) układu 2, h) układu 3, i) układu 4. (Dla każdego układu rozważ symetrię rozkładu ładunku i określ, które składowe się dodają, a które odejmują).



Rys. 22.14. Pytanie 7

8. Dodatnio naładowana kula znajduje się w pobliżu obojętnego izolowanego przewodnika. Przewodnik zostaje uziemiony, gdy kula jest blisko przewodnika. Czy przewodnik naładowuje się dodatnio, ujemnie, czy pozostanie obojętny, jeśli: a) najpierw zabierzemy kulę, a potem usuniemy uziemienie, b) najpierw usuniemy uziemienie, a potem zabierzemy kulę?

9. a) Dodatnio naładowany pręt szklany przyciąga ciało zawieszane na nieprzewodzącej nici. Czy ciało jest na pewno naładowane ujemnie, czy tylko może być naładowane ujemnie? b) Dodatnio naładowany pręt szklany odpycha podobnie zawieszane ciało. Czy ciało jest na pewno naładowane dodatnio, czy jest tylko taka możliwość?

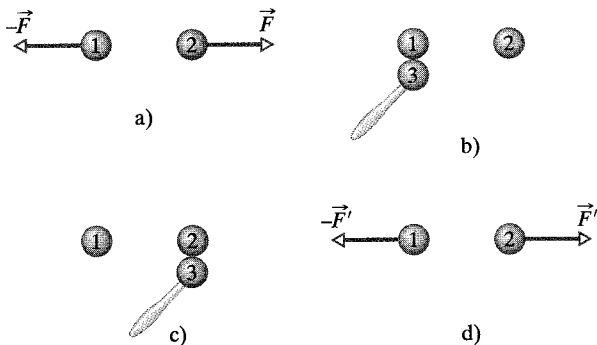
10. Na rysunku 22.3 przedstawiono sytuację, w której zbliżony (ujemnie naładowany) pręt plastikowy powoduje, że pewna liczba elektronów przewodnictwa w miedzi przesuwa się do bardziej odległego końca pręta miedzianego. Dlaczego przepływ elektronów przewodnictwa szybko się kończy? Przecież ogromna liczba elektronów może przesuwać się swobodnie do tego końca.

11. Osoba stojąca na elektrycznie izolowanej platformie dotyka naładowanego i elektrycznie izolowanego przewodnika. Czy przewodnik rozładuje się całkowicie?

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

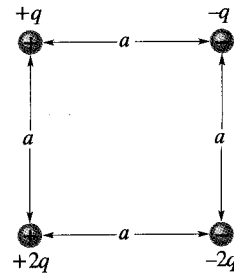
## 22.4. Prawo Coulomba

1. Ile wynosić musi odległość między ładunkiem punktowym  $q_1 = 26 \mu\text{C}$  i ładunkiem punktowym  $q_2 = -47 \mu\text{C}$ , aby siła elektrostatyczna ich oddziaływania miała wartość  $5,7 \text{ N}$ ?
2. Ładunek punktowy  $+3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  jest odległy o  $12 \text{ cm}$  od drugiego ładunku punkowego  $-1,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ . Oblicz wartość siły, działającej na każdy ładunek.
3. Dwie jednakowo naładowane cząstki, znajdujące się początkowo w spoczynku, w odległości  $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , zaczęły się poruszać. Zaobserwowano, że początkowe przyspieszenie pierwszej cząstki wynosiło  $7 \text{ m/s}^2$ , a drugiej  $9 \text{ m/s}^2$ . Jeśli masa pierwszej cząstki wynosi  $6,3 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$ , to ile wynoszą: a) masa drugiej cząstki, b) wartość ładunku każdej cząstki? *ilw*
4. Identyczne izolowane kule 1 i 2 mają jednakowe ładunki i znajdują się w odległości dużej, w porównaniu z ich średnicami (rys. 22.15a). Siła elektrostatyczna oddziaływania kuli 1 na kulę 2 wynosi  $\vec{F}$ . Załóż teraz, że trzecia identyczna kula 3, mająca izolującą rączkę i początkowo obojętna, dotknęła najpierw kuli 1 (rys. 22.15b), potem kuli 2 (rys. 22.15c), a na koniec została usunięta (rys. 22.15d). Wyraż przez  $F$  wartość siły elektrostatycznej  $\vec{F}'$ , która teraz działa na kulę 2.



Rys. 22.15. Zadanie 4

5. Dla układu ładunków z rysunku 22.16 znajdź: a) poziomą, b) pionową składową wypadkowej siły elektrostatycznej, działającej na naładowaną cząstkę w dolnym lewym rogu kwadratu, jeśli  $q = 1 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  i  $a = 5 \text{ cm}$ ? *ilw*



Rys. 22.16. Zadanie 5

6. Ładunki punktowe  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się na osi  $x$ , odpowiednio w punktach  $x = -a$  i  $x = +a$ . a) Jaki musi być związek między  $q_1$  i  $q_2$ , aby wypadkowa siła elektrostatyczna, działająca na ładunek punktowy  $+Q$ , umieszczony w punkcie  $x = +a/2$  była równa zero? b) Powtórz (a) dla ładunku  $+Q$ , umieszczonego w punkcie  $x = +3a/2$ .
7. Dwie identyczne przewodzące kule, których środki są odległe o  $50 \text{ cm}$ , przyciągają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości  $0,108 \text{ N}$ . Następnie kule połączono cienkim przewodnikiem. Po usunięciu przewodnika kule odpychają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości  $0,036 \text{ N}$ . Ile wynosiły początkowe ładunki na kulach?
8. Na rysunku 22.17 przedstawiono trzy naładowane cząstki, leżące na linii prostej, w odległościach  $d$  od siebie. Ładunki  $q_1$  i  $q_2$  są unieruchomione. Ładunek  $q_3$  może się poruszać, ale okazuje się, że jest w stanie równowagi (działająca na ten ładunek siła wypadkowa jest równa zero). Wyraż  $q_1$  przez  $q_2$ .



Rys. 22.17. Zadanie 8

9. Dwie cząstki (mogące się poruszać) o ładunkach  $+q$  i  $+4q$  znajdują się w odległości  $L$  od siebie. Trzecia cząstka została tak umieszczona, że cały układ jest w stanie równowagi. a) Znajdź położenie, wartość i znak trzeciego ładunku. b) Wykaż, że równowaga jest nietrwała. *ilw*
10. Dwie unieruchomione cząstki o ładunkach  $q_1 = +1 \mu\text{C}$  i  $q_2 = -3 \mu\text{C}$  znajdują się w odległości  $10 \text{ cm}$  od siebie. W jakiej odległości od nich należy umieścić trzeci ładunek, aby działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna była równa zero?
11. a) Jakie jednakowe ładunki dodatnie należy umieścić na Ziemi i na Księżycu, aby zrównoważyć ich przyciąganie grawitacyjne? Czy musisz znać odległość do Księżycy, aby rozwiązać to zadanie? Dlaczego? b) Ile kilogramów wodoru potrzeba, aby uzyskać ładunek dodatni, obliczony w punkcie (a)?
12. Ładunki i współrzędne dwóch cząstek naładowanych znajdujących się w płaszczyźnie  $xy$  wynoszą  $q_1 = +3 \mu\text{C}$ ,  $x_1 = 3,5 \text{ cm}$ ,  $y_1 = 0,5 \text{ cm}$  i  $q_2 = -4 \mu\text{C}$ ,  $x_2 = -2 \text{ cm}$ ,  $y_2 = 1,5 \text{ cm}$ .

- a) Znajdź wartość i kierunek siły elektrostatycznej działającej na  $q_2$ . b) Gdzie należy umieścić trzeci ładunek  $q_3 = +4 \mu\text{C}$ , aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na  $q_2$  była równa zero?

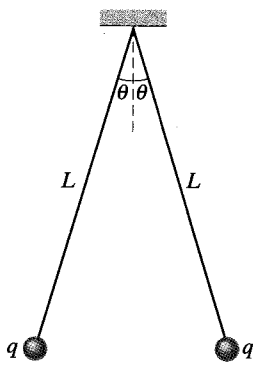
13. Pewien ładunek  $Q$  podzielono na dwie części  $q$  i  $Q - q$ , które rozsunięto na pewną odległość. Jakie musi być  $q$  (wyrażone za pomocą  $Q$ ), aby odpychanie elektrostatyczne między tymi dwoma ładunkami było maksymalne?

14. W dwóch przeciwległych wierzchołkach kwadratu znajdują się cząstki o ładunku  $Q$ , a cząstki o ładunku  $q$  znajdują się w pozostałych wierzchołkach. a) Jaki jest związek między  $Q$  i  $q$ , jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na każdą cząstkę o ładunku  $Q$  jest równa zero? b) Czy istnieje jakaś wartość  $q$ , dla której wypadkowa siła elektrostatyczna, działająca na każdą z czterech cząstek jest równa zero? Odpowiedź uzasadnij.

15. Na rysunku 22.18 przedstawiono dwie małe kulki przewodzące o takich samych masach  $m$  i takich samych ładunkach  $q$ , wiszące na nieprzewodzących niciach o długości  $L$ . Załóżmy, że kąt  $\theta$  jest tak mały, że  $\text{tg } \theta$  można zastąpić przez  $\sin \theta$ . a) Wykaż, że w stanie równowagi:

$$x = \left( \frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{\frac{1}{3}},$$

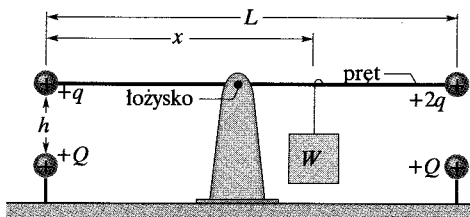
gdzie  $x$  jest odległością między kulkami. b) Jeśli  $L = 120 \text{ cm}$ ,  $m = 10 \text{ g}$  i  $x = 5 \text{ cm}$ , to jaką wartość ma  $q$ ?



Rys. 22.18. Zadanie 15

16. Wyjaśnij, co stanie się z kulkami z zadania 15(b), jeśli jedną z nich się rozładuje (przekazując jej ładunek  $q$  do ziemi). Znajdź nową odległość  $x$  w stanie równowagi, używając podanych wartości  $L$ ,  $m$  i obliczonej wartości  $q$ .

17. Na rysunku 22.19 przedstawiono długi, nieprzewodzący pręt o znikomym małej masie i długości  $L$ , o osi obrótu w środku, zrównoważony obciążnikiem o ciężarze  $W$ , w odległości  $x$  od lewego końca pręta. Na lewym i prawym końcu pręta umocowano małe przewodzące kule o dodatnich ładunkach, równych odpowiednio



Rys. 22.19. Zadanie 17

$q$  i  $2q$ . W odległości  $h$  poniżej każdej z tych kul znajduje się kula o dodatnim ładunku  $Q$ . a) Znajdź odległość  $x$ , jeśli pręt jest poziomy i w stanie równowagi. b) Jaka powinna być odległość  $h$ , aby pionowa siła działająca na łożysko, gdy pręt jest poziomy i w stanie równowagi, była równa zero?

## 22.5 Ładunek jest skwantowany

18. Jaka jest wartość siły elektrostatycznej działającej między pojedynczo naładowanym jonem sodu ( $\text{Na}^+$  o ładunku  $+e$ ) i towarzyszącym mu pojedynczo naładowanym jonem chloru ( $\text{Cl}^-$  o ładunku  $-e$ ) w kryształce soli, jeśli ich odległość wynosi  $2,82 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ?

19. Ile wynosi w kulombach całkowity ładunek 75 kg elektronów?

20. Ile megakulombów dodatniego (lub ujemnego) ładunku jest w 1 molu obojętnej cząsteczkowej wodoru ( $\text{H}_2$ )?

21. Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma identycznymi jonami znajdującymi się w odległości  $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  wynosi  $3,7 \cdot 10^{-9} \text{ N}$ . a) Ile wynosi ładunek każdego z jonów? b) Ile elektronów „brakuje” w każdym z jonów (powodując niezrównoważony ładunek jonu)?

22. Środki dwóch małych, kulistych kropelek wody o identycznych ładunkach  $-1 \cdot 10^{-16} \text{ C}$  znajdują się w odległości 1 cm. a) Jaka jest wartość siły elektrostatycznej, działającej między nimi? b) Ile nadmiarowych elektronów powodujących ten niezrównoważony ładunek znajduje się na każdej kropelce?

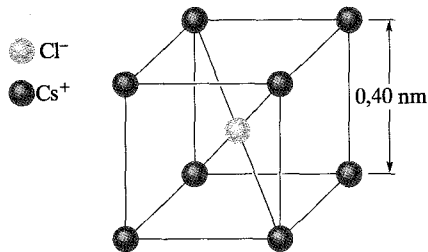
23. Ile elektronów trzeba usunąć z monety, aby uzyskała ładunek  $+1 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ ?

24. W próżni w pobliżu powierzchni Ziemi znajduje się elektron. Gdzie należałoby umieścić drugi elektron, aby siła elektrostatyczna działająca na pierwszy elektron równoważyła siłę grawitacyjną oddziaływania Ziemi na pierwszy elektron?

25. Atmosfera Ziemi jest stale bombardowana protonami *promieniowania kosmicznego*, które powstają gdzieś w kosmosie. Gdyby wszystkie protony przeszły przez atmosferę, to na każdy  $\text{m}^2$  powierzchni Ziemi padałoby 1500 protonów na sekundę. Jakie byłoby natężenie takiego prądu elektrycznego, przepływającego przez całą powierzchnię planety?

26. Oblicz w kulombach ładunek dodatni, znajdujący się w  $250 \text{ cm}^3$ , czyli w szklance, (obojętej) wody.

27. W komórce elementarnej kryształu chlorku cezu ( $\text{CsCl}$ ) jony  $\text{Cs}^+$  zajmują wierzchołki sześcianu, a jony  $\text{Cl}^-$  znajdują się w środku sześcianu (rys. 22.20). Długość krawędzi sześcianu wynosi  $0,40 \text{ nm}$ . Jonom  $\text{Cs}^+$  brakuje jednego elektronu (i stąd każdy z nich ma ładunek  $+e$ ), a jony  $\text{Cl}^-$  mają po jednym dodatkowym elektronie (i stąd każdy z nich ma ładunek  $-e$ ). a) Jaka jest war-



Rys. 22.20. Zadanie 27

tość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon  $\text{Cl}^-$  ośmiu jonów  $\text{Cs}^+$ , znajdujących się w wierzchołkach sześcianu?  
 b) Jeśli brakuje jednego z jonów  $\text{Cs}^+$ , to mówimy o *defekcie* kryształu. Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon  $\text{Cl}^-$  siedmiu pozostałych jonów  $\text{Cs}^+$ ?

28. Wiemy, że wartości ujemnego ładunku elektronu i dodatniego ładunku protonu są równe. Przypuśćmy jednak, że te wartości róż-

nią się od siebie o 0,0001%. Jaką siłą odpychałyby się dwie miedziane monety, znajdujące się w odległości 1 m od siebie? Załóż, że każda moneta zawiera  $3 \cdot 10^{22}$  atomów miedzi. (Wskazówka: Obojętny atom miedzi zawiera 29 protonów i 29 elektronów). Jaki wynika stąd wniosek?

## 22.6 Ładunek jest zachowany

29. Zidentyfikuj X w następujących reakcjach jądrowych (w pierwszej n oznacza neutron): a)  ${}^1\text{H} + {}^9\text{Be} \rightarrow \text{X} + \text{n}$ , b)  ${}^{12}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow \text{X}$ , c)  ${}^{15}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{X}$ . Skorzystaj z dodatku F.

## Zadanie dodatkowe

30. Do zadania 13 wstaw  $q = \alpha Q$ . a) Wyraź wartość siły  $F$ , działającej między ładunkami, przez  $\alpha$ ,  $Q$  i odległość  $d$  między ładunkami. b) Wykreśl  $F$  w zależności od  $\alpha$  i znajdź graficznie wartości  $\alpha$ , które dają: c) maksymalną wartość  $F$ , d) połowę maksymalnej wartości  $F$ .

# 23 Pole elektryczne

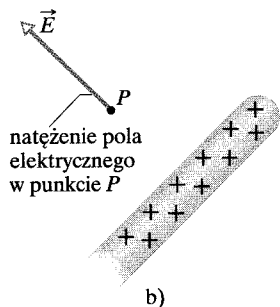
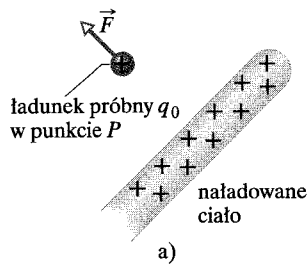
Podczas częstych wybuchów wulkanu Sakurajima w Japonii, nad kraterem wulkanu powstają liczne wyładowania elektryczne (iskry), które rozświetlają niebo i wysyłają fale dźwiękowe przypominające grzmoty. Nie są to jednak błyskawice odpowiadające burzy z piorunami, z naelektryzowanymi chmurami kropli wody, rozładowującymi się ku powierzchni ziemi. Jest to coś innego.

Jak elektryzuje się przestrzeń nad wulkanem i czy można ustalić, w którą stronę lecą iskry: w górę (od krateru), czy w dół (do krateru)?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 23.1. Jeszcze o ładunkach i siłach



Rys. 23.1. a) Dodatni ładunek próbnny  $q_0$  umieszczono w punkcie  $P$  w pobliżu naładowanego ciała. Na ładunek próbnny działa siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ . b) Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie  $P$

Założmy, że umieszczamy gdzieś punktowy ładunek dodatni  $q_1$  i następnie zbliżamy do niego drugi dodatni ładunek punktowy  $q_2$ . Z prawa Coulomba wiemy, że  $q_1$  oddziałuje na  $q_2$  odpychającą siłą elektrostatyczną i mając potrzebne dane, możemy określić wartość i kierunek tej siły. Może jednak nękać nas pytanie: skąd ładunek  $q_1$  „wie” o obecności ładunku  $q_2$ ? Skoro ładunki się nie stykają, to jak  $q_1$  może działać siłą na  $q_2$ ?

Na pytanie o *działanie na odległość* można odpowiedzieć, że ładunek  $q_1$  powoduje powstanie **pola elektrycznego** w otaczającej go przestrzeni. W dowolnym punkcie  $P$  przestrzeni pole to można scharakteryzować za pomocą wektora o określonej wartości i kierunku. Jego wartość zależy od wartości ładunku  $q_1$  i odległości między punktem  $P$  i ładunkiem  $q_1$ . Kierunek zależy od położenia punktu  $P$  względem ładunku  $q_1$  i znaku ładunku  $q_1$ . Gdy więc umieścimy ładunek  $q_2$  w punkcie  $P$ , ładunek  $q_1$  oddziałuje z ładunkiem  $q_2$  za pośrednictwem pola elektrycznego w punkcie  $P$ . Wartość i kierunek wektora pola elektrycznego określają wartość i kierunek siły działającej na ładunek  $q_2$ .

Ini pytanie, dotyczące oddziaływania na odległość nasuwa się, gdy przesuniemy ładunek  $q_1$ , powiedzmy, w kierunku ładunku  $q_2$ . Na podstawie prawa Coulomba stwierdzamy, że gdy ładunek  $q_1$  jest bliżej ładunku  $q_2$ , to odpychająca siła elektrostatyczna, działająca na  $q_2$  musi być większa, i tak jest. Może nas więc nękać kolejne pytanie: czy pole elektryczne w punkcie, w którym znajduje się ładunek  $q_2$ , i stąd siła działająca na ładunek  $q_2$ , zmieniają się natychmiast, wraz ze zmianą położenia źródła pola?

Odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Informacja o ruchu ładunku  $q_1$  rozchodzi się od ładunku  $q_1$  (we wszystkich kierunkach) w postaci fali elektromagnetycznej, z prędkością światła  $c$ . Zmiana wektora pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek  $q_2$ , a stąd i zmiana siły, działającej na ładunek  $q_2$  pojawia się, gdy fala dotrze do ładunku  $q_2$ .

Tabela 23.1. Wybrane pola elektryczne

Sytuacja fizyczna	Natężenie pola (N/C)
Na powierzchni jądra uranu	$3 \cdot 10^{21}$
W atomie wodoru w odległości $5,29 \cdot 10^{-11}$ m od jądra	$5 \cdot 10^{11}$
Przebiecie elektryczne w powietrzu	$3 \cdot 10^6$
W pobliżu naładowanego bębna fotokopiarki	$10^5$
W pobliżu naładowanego grzebienia	$10^3$
W dolnej warstwie atmosfery	$10^2$
W przewodniku miedzianym w domowej instalacji elektrycznej	$10^{-2}$

## 23.2. Pole elektryczne

Temperatura w każdym punkcie pokoju ma określoną wartość. Można ją zmierzyć w dowolnym punkcie lub układzie punktów, umieszczając tam termometr. Otrzymany rozkład temperatur nazywamy *polem temperatury*. W podobny sposób można sobie wyobrazić *pole ciśnienia* w atmosferze: charakteryzuje je rozkład wartości ciśnienia powietrza, podający jego wartość w każdym punkcie atmosfery. Te dwa przykłady odpowiadają *polom skalarnym*, ponieważ temperatura i ciśnienie powietrza są wielkościami skalarnymi.

Pole elektryczne jest *polem wektorowym*, gdyż jego scharakteryzowanie wymaga określenia rozkładu *wektorów*, czyli podania wektora dla każdego punktu obszaru wokół naładowanego ciała, np. naładowanego pręta. Pole elektryczne w pewnym punkcie w pobliżu naładowanego ciała, np. punkcie  $P$  na rysunku 23.1a, możemy zdefiniować w następujący sposób: najpierw umieszczamy *dodatni* ładunek  $q_0$ , zwany *ładunkiem próbnym* w tym punkcie, a następnie mierzymy siłę elektrostatyczną  $\vec{F}$ , która działa na ładunek próbnny. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie  $P$  definiujemy wtedy wzorem:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (\text{natężenie pola elektrycznego}). \quad (23.1)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w punkcie  $P$  wynosi więc  $E = F/q_0$ , a kierunek natężenia  $\vec{E}$  jest taki sam jak kierunek siły  $\vec{F}$  działającej na dodatni ładunek próbny. Na rysunku 23.1b przedstawiono natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  w postaci wektora o początku w punkcie  $P$ . Aby zdefiniować pole elektryczne w pewnym obszarze, należy podobnie zdefiniować jego natężenie we wszystkich punktach obszaru.

Jednostką natężenia pola elektrycznego w układzie SI jest niuton na kulomb (N/C). W tabeli 23.1 podano wartości natężeń pól elektrycznych, jakie występują w kilku sytuacjach fizycznych.

Chociaż do definicji natężenia pola elektrycznego naładowanego ciała używamy dodatniego ładunku próbnego, to pole istnieje niezależnie od tego ładunku. Pole w punkcie  $P$  na rysunku 23.1b istniało zarówno przed, jak i po umieszczeniu tam ładunku próbnego (rys. 23.1a). (Zakładamy, że obecność ładunku próbnego nie wpływa na rozkład ładunku w naładowanym ciele i stąd nie zmienia się natężenie definiowanego pola elektrycznego).

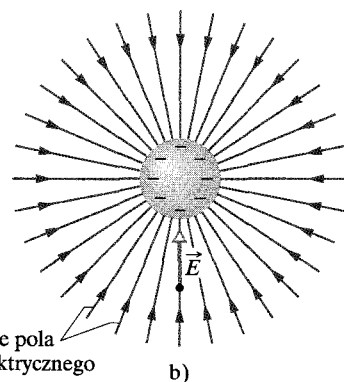
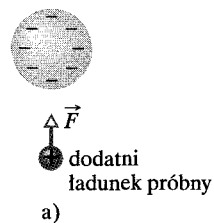
Badanie roli pola elektrycznego w oddziaływaniu między naładowanymi ciałami sprowadza się do dwóch zadań: 1) obliczenia natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dany rozkład ładunku i 2) obliczenia siły, jaką dane pole działa na umieszczony w nim ładunek. Pierwszym zadaniem dla kilku rozkładów ładunku zajmiemy się w paragrafach od 23.4 do 23.7, a drugim — w paragrafach 23.8 i 23.9, rozważając jeden lub dwa ładunki punktowe w polu elektrycznym. Najpierw jednak przedyskutujemy graficzny sposób przedstawiania pola elektrycznego.

### 23.3. Linie pola elektrycznego

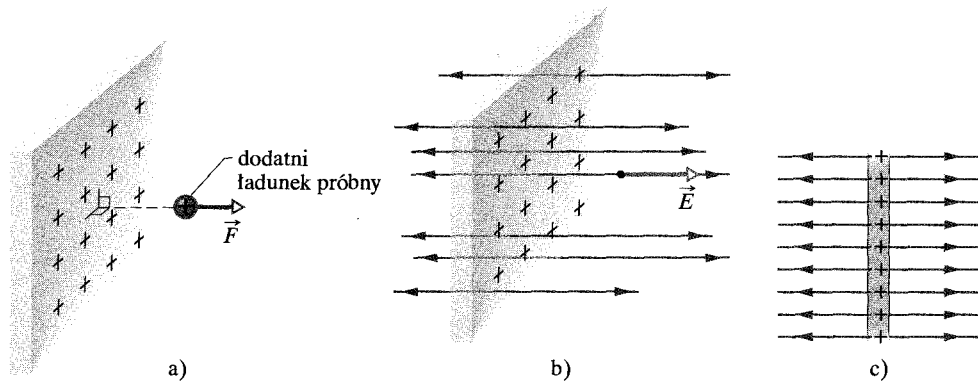
Michael Faraday, który wprowadził ideę pola elektrycznego w XIX w., wyobrażał sobie, że przestrzeń wokół naładowanego ciała jest jak gdyby wypełniona *liniami sił*. Chociaż nie przypisujemy tym liniom, zwanym obecnie **liniami pola elektrycznego**, realnego istnienia, to nadal ułatwiają one graficzne przedstawienie rozkładu natężenia pola elektrycznego.

Związek między liniami pola i wektorami natężenia pola elektrycznego jest następujący: 1) w dowolnym punkcie kierunek linii pola (gdy jest ona prosta) lub stycznej do linii pola (gdy linia jest zakrzywiona) określa kierunek wektora  $\vec{E}$  w tym punkcie, 2) linie pola są tak narysowane, że liczba linii na jednostkę powierzchni, mierzona w płaszczyźnie prostopadłej do linii, jest proporcjonalna do wartości wektora  $\vec{E}$ . Drugi związek oznacza, że tam, gdzie linie pola są blisko siebie, wartość  $E$  jest duża, a tam, gdzie są daleko od siebie, wartość  $E$  jest mała.

Na rysunku 23.2a przedstawiono kulę, na której znajduje się jednorodnie rozłożony ładunek ujemny. Jeśli umieścimy *dodatni* ładunek próbny gdziekolwiek blisko kuli, to będzie na niego działać siła elektrostatyczna, skierowana *do* środka kuli, jak na rysunku. Innymi słowy, wektory natężenia pola elektrycznego we



Rys. 23.2. a) Na dodatni ładunek próbny znajdujący się w pobliżu jednorodnie ujemnie naładowanej kuli działa siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ . b) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu kuli. Linie pola skierowane są *do* ujemnie naładowanej kuli. (Zaczynają się one na odległych ładunkach dodatnich)



**Rys. 23.3.** a) Siła elektrostatyczna  $\vec{F}$  działająca na dodatni ładunek próbny w pobliżu bardzo dużej nieprzewodzącej płytki o jednej powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem dodatnim. b) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu płytki. Linie pola wychodzą z dodatnio naładowanej płytki. c) Widok z boku sytuacji (b)

wszystkich punktach w pobliżu kuli są skierowane radialnie do jej środka. Rozkład wektorów przedstawiono na rysunku 23.2b przy zastosowaniu linii pola, których kierunki są takie same, jak kierunki sił i wektorów natężenia pola. Co więcej, oddalanie się od siebie linii pola wraz ze wzrostem odległości od kuli oznacza, że wartość natężenia pola maleje wraz z odległością od środka kuli.

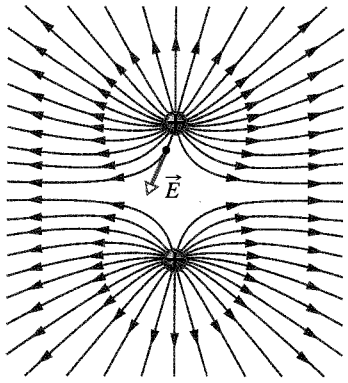
Jeśli kula na rysunku 23.2 byłaby naładowana jednorodnie ładunkiem *dodatnim*, to wektory natężenia pola elektrycznego, a stąd i linie pola elektrycznego we wszystkich punktach w pobliżu kuli byłyby skierowane radialnie *od* kuli. Mamy więc następującą regułę:

➤ Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego (gdzie się zaczynają) i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu (gdzie się kończą).

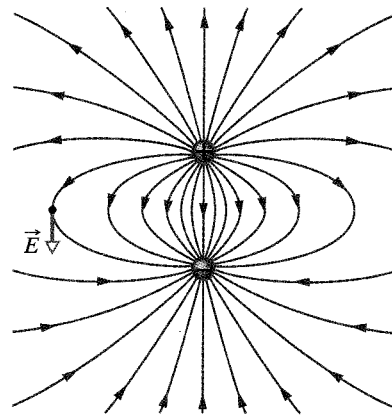
Na rysunku 23.3a przedstawiono fragment nieskończenie dużej, nieprzewodzącej płytki (*plaszczyny*). Na jednej jej stronie umieszczono jednorodnie rozłożony ładunek dodatni. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbny w dowolnym punkcie w pobliżu płytki z rys. 23.3a, to wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na ładunek próbny będzie prostopadła do płytki, ponieważ siły działające we wszystkich innych kierunkach znoszą się ze względu na symetrię zagadnienia. Ponadto, siła wypadkowa działająca na ładunek próbny będzie skierowana od płytki, jak na rysunku. Stąd wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie przestrzeni po każdej stronie płaszczyny jest także prostopadły do płytki i skierowany od niej (rys. 23.2b i c). Ładunek jest rozłożony równomiernie na całej płycie, dlatego też wszystkie wektory natężenia pola mają taką samą wartość. Pole elektryczne o takiej samej wartości i takim samym kierunku natężenia w każdym punkcie nazywamy *jednorodnym polem elektrycznym*.

Oczywiście, żadna nieprzewodząca płyta (np. płaska powierzchnia plastikowa) nie jest nieskończenie duża, ale jeśli rozważymy obszar w pobliżu środka rzeczywistej płytki, a nie przy jej brzegach, to linie pola w tym obszarze mają rozkład jak na rysunkach 23.3b i c.





**Rys. 23.4.** Linie pola dla dwóch jednakowych dodatnich ładunków punktowych. Ładunki odpychają się wzajemnie. (Linie kończą się na odległych ładunkach ujemnych). Aby „zobaczyć” rzeczywisty trójwymiarowy rozkład linii pola, należy w myśli obrócić rozkład tu pokazany wokół osi przechodzącej przez obydwa ładunki. Trójwymiarowy rozkład i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają *symetrię obrotową* wokół tej osi. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; widać, że jest on styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt



**Rys. 23.5.** Linie pola dla położonych blisko siebie dodatniego i ujemnego ładunku punktowego, o jednakowej wartości ładunków. Ładunki przyciągają się wzajemnie. Rozkład linii pola i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają *symetrię obrotową* wokół osi, przechodzącej przez obydwa ładunki. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; ten jest styczny do linii pola, przechodzącej przez ten punkt

Na rysunku 23.4 przedstawiono linie pola dla dwóch jednakowych ładunków dodatnich, a na rysunku 23.5 — rozkład pola dla dwóch ładunków o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach, czyli dla układu, który nazywamy **dipolem elektrycznym**. Chociaż nie będziemy często używać linii pola do opisu ilościowego, to są one bardzo użyteczne do graficznego przedstawienia tego, co się dzieje. Czyż prawie nie „widać”, że ładunki odpychają się na rys. 23.4 i przyciągają się na rys. 23.5?

### Przykład 23.1

Jak zmienia się wartość natężenia pola elektrycznego wraz z odległością od środka jednorodnie naładowanej kuli z rysunku 23.2? Użyj argumentów, opartych na pojęciu linii pola elektrycznego.

#### ROZWIĄZANIE:

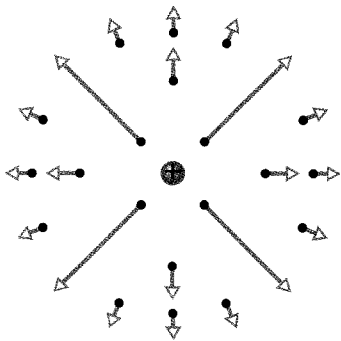
➡ 1. Linie pola są jednorodnie rozłożone wokół kuli i skierowane na zewnątrz od niej. Jeśli więc umieścimy współśrodkową powłokę sferyczną o promieniu  $r$  wokół naładowanej kuli,

to wszystkie linie kończące się na naładowanej kuli muszą przejść przez współśrodkową powłokę. Jeśli liczba linii pola wynosi  $N$ , to liczba linii przechodzących przez jednostkę powierzchni powłoki wynosi  $N/(4\pi r^2)$ , bo pole powierzchni sfery wynosi  $4\pi r^2$ .

➡ 2. Wartość natężenia pola elektrycznego  $E$  jest proporcjonalna do liczby linii na jednostkę powierzchni prostopadłej do linii. Powłoka sferyczna jest prostopadła do linii pola, a więc wartość  $E$  jest proporcjonalna do  $N/(4\pi r^2)$ . Odległość  $r$  jest jedyną zmienną w tym wyrażeniu, a więc  $E$  maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od środka naładowanej kuli.

## 23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego

Aby znaleźć pole ładunku punktowego  $q$  (czyli naładowanej cząstki) w dowolnym punkcie, w odległości  $r$  od ładunku punktowego, umieszczamy w tym punkcie dodatni ładunek próbny  $q_0$ . Z prawa Coulomba (22.4) wiesz, że wartość siły



Rys. 23.6. Wektory natężenia pola elektrycznego w otoczeniu dodatniego ładunku punkowego

elektrostatycznej, działającej na  $q_0$  wynosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q_0|}{r^2}. \quad (23.2)$$

Siła  $\vec{F}$  jest skierowana od ładunku punkowego, jeśli  $q$  jest ładunkiem dodatnim, i do ładunku punkowego, jeśli  $q$  jest ładunkiem ujemnym. Wartość natężenia pola elektrycznego na podstawie wzoru (23.1) wynosi:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (\text{ładunek punkowy}). \quad (23.3)$$

Kierunek natężenia  $\vec{E}$  jest taki sam, jak kierunek siły działającej na dodatni ładunek próbny: od ładunku punkowego, jeśli  $q$  jest ładunkiem dodatnim, i do niego, jeśli ładunek  $q$  jest ujemny.

Dla ładunku  $q_0$  wybraliśmy dowolny punkt, a więc wzór (23.3) określa natężenie pola w dowolnym punkcie w otoczeniu ładunku  $q$ . Rozkład natężenia pola dla dodatniego ładunku punkowego przedstawiono na rysunku 23.6 za pomocą wektorów (a nie linii pola).

Możemy szybko znaleźć wypadkowe pole elektryczne, pochodzące od więcej niż jednego ładunku punkowego. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbny  $q_0$  w pobliżu  $n$  ładunków punkowych  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , to ze wzoru (22.7) siła wypadkowa  $\vec{F}_0$  oddziaływania  $n$  ładunków punkowych na ładunek próbny wynosi:

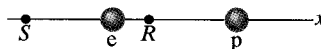
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}.$$

Ze wzoru (23.1) możemy obliczyć wypadkowe natężenie pola elektrycznego w miejscu ładunku próbnego, które wynosi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \quad (23.4)$$

gdzie  $\vec{E}_i$  jest natężeniem pola elektrycznego, jakie wytworzyłby tylko sam ładunek punkowy  $q_i$ . Ze wzoru (23.4) widać, że zasada superpozycji stosuje się zarówno do natężeń pola elektrycznego, jak i sił elektrostatycznych.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono umieszczone na osi  $x$  proton  $p$  i elektron  $e$ . Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego elektronu w: a) punkcie  $S$ , b) punkcie  $R$ ? Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w: c) punkcie  $R$ , d) punkcie  $S$ ?



### Przykład 23.2

Na rysunku 23.7a przedstawiono trzy cząstki o ładunkach  $q_1 = +2Q$ ,  $q_2 = -2Q$  i  $q_3 = -4Q$ , z których każda znajduje się w odległości  $d$  od początku układu. Jakie jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w początku układu?

### ROZWIĄZANIE:

Ładunki  $q_1, q_2$  i  $q_3$  wytwarzają w początku układu pole elektryczne o natężeniach odpowiednio  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$ , a wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest sumą wektorową  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ . Aby znaleźć tę sumę, musimy najpierw znaleźć wartości

i kierunki tych trzech wektorów natężeń. Aby znaleźć wartość natężenia  $\vec{E}_1$ , które jest wytworzone przez ładunek  $q_1$ , korzystamy ze wzoru (23.3) i po podstawieniu  $d$  zamiast  $r$  i  $2Q$  zamiast  $|q|$  otrzymujemy:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobnie obliczamy wartości natężeń  $\vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$ , które wynoszą:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad \text{i} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Następnie musimy znaleźć kierunki trzech wektorów natężenia pola elektrycznego w początku układu. Ładunek  $q_1$  jest ładunkiem dodatnim, dlatego też natężenie wytwarzanego przez niego pola jest skierowane *od* niego. Ładunki  $q_2$  i  $q_3$  są ujemne, a więc natężenia odpowiadających im pól są skierowane *do* nich. Stąd natężenia pól elektrycznych, wytworzonych w środku układu przez te trzy naładowane cząstki mają kierunki przedstawione na rysunku 23.7b. (*Uwaga:* Początki wektorów umieściliśmy w punkcie, gdzie są obliczane natężenia pól — takie postępowanie zmniejsza prawdopodobieństwo pomyłki).

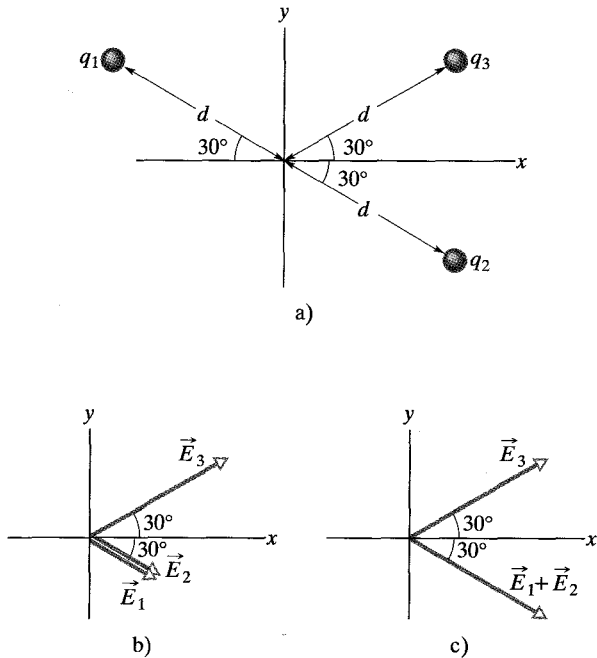
Możemy teraz dodać wektorowo natężenia, podobnie jak dodawaliśmy siły w przykładzie 22.1c. Warto tu jednak zastosować symetrię w celu uproszczenia obliczeń. Z rysunku 23.7b widzimy, że  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$  mają ten sam kierunek. Stąd ich wektorowa suma ma ten sam kierunek, a jej wartość wynosi:

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Jest ona równa wartości natężenia  $\vec{E}_3$ .

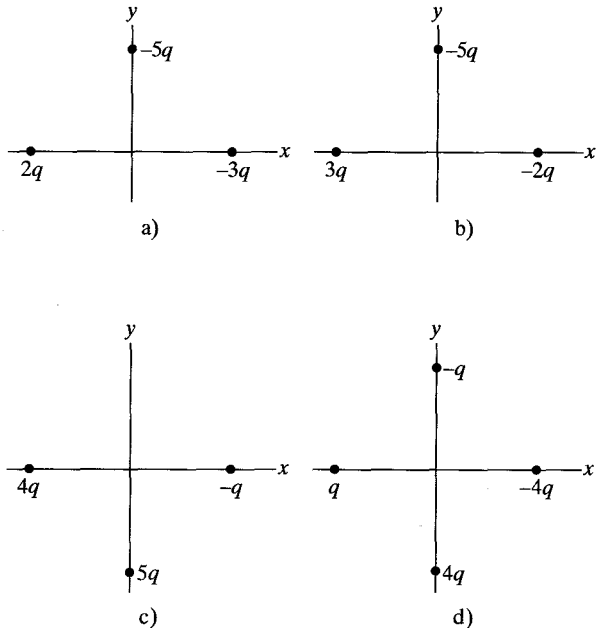
Musimy teraz dodać dwa wektory,  $\vec{E}_3$  i sumę wektorową  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , które mają taką samą wartość i są skierowane symetrycznie względem osi  $x$ , jak pokazano na rysunku 23.7c. Korzystając z symetrii rysunku 23.7c, wnioskujemy, że składowe  $y$  naszych dwóch wektorów, jednakowe co do wartości bezwzględnej, znoszą się, a składowe  $x$ , jednakowe co do wartości bezwzględnej, się dodają. Stąd wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  w początku układu jest skierowane w dodatnim kierunku osi  $x$  i ma wartość:

$$\begin{aligned} E &= 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = (2) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2} (0,866) \\ &= \frac{6,93Q}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

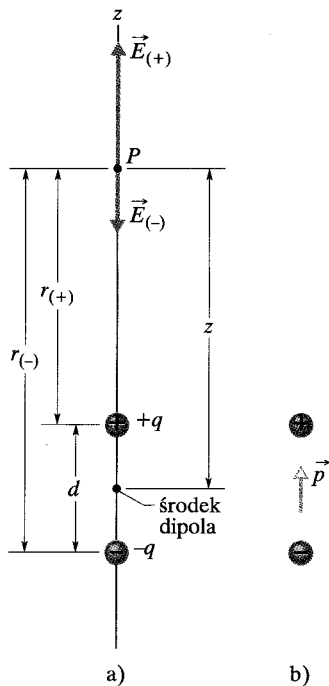


**Rys. 23.7.** Przykład 23.2. a) Trzy cząstki o ładunkach  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$  znajdują się w takiej samej odległości  $d$  od początku układu. b) Wektory natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$  w początku układu, pochodzące od tych trzech cząstek. c) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_3$  i suma wektorowa  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  w początku układu

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono cztery układy, w których naładowane cząstki są umieszczone w jednakowych odległościach od początku układu. Uszereguj te układy względem wartości wypadkowego natężenia pola elektrycznego w początku układu, zaczynając od największej.



## 23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego



Rys. 23.8. a) Dipol elektryczny. Wektory natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_{(+)}$  i  $\vec{E}_{(-)}$  w punkcie  $P$  na osi dipola pochodzą od dwóch ładunków dipola. Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $r_{(+)}$  i  $r_{(-)}$  od poszczególnych ładunków tworzących dipol. b) Moment dipolowy  $\vec{p}$  dipola jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego

Na rysunku 23.8a przedstawiono dwie naładowane cząstki o takiej samej wartości ładunku  $q$ , ale przeciwnych znakach, znajdujące się w odległości  $d$ . Jak już wspomnieliśmy podczas omawiania rysunku 23.5, taki układ ładunków nazywamy *dipolem elektrycznym*. Znajdźmy pole elektryczne dipola z rysunku 23.8a w punkcie  $P$ , w odległości  $z$  od środkowego punktu dipola, na osi przechodzącej przez cząstki, zwanej *osią dipola*.

Korzystając z symetrii, wnioskujemy, że natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w punkcie  $P$  — a także natężenia pól  $\vec{E}_{(+)}$  i  $\vec{E}_{(-)}$  wytworzonych przez oddzielne ładunki tworzące dipol — muszą być skierowane wzdłuż osi dipola, którą wybraliśmy za oś  $z$ . Stosując zasadę superpozycji dla natężeń pól elektrycznych, znajdujemy wartość  $E$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ :

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{(-)}^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Po algebraicznym przekształceniu wzór ten można zapisać w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]. \quad (23.6)$$

Jesteśmy zwykle zainteresowani polem dipola w dużych odległościach w porównaniu z wymiarami dipola, czyli dla  $z \gg d$ . Przy tak dużych odległościach we wzorze (23.6) mamy  $d/(2z) \ll 1$ . Możemy wtedy rozwinąć w szereg dwie wielkości w nawiasach w tym równaniu i po skorzystaniu ze wzoru dwumianowego (dodatek E) otrzymujemy:

$$\left[ \left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right].$$

Stąd:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[ \left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]. \quad (23.7)$$

Wyrazy, które pominęliśmy, pisząc wzór (23.7), zawierają  $d/z$  kolejno w coraz wyższych potęgach. Wartości tych wyrazów są kolejno coraz mniejsze, ponieważ  $d/z \ll 1$ . Obliczając  $E$  dla dużych odległości, możemy je pominąć. W tym przybliżeniu możemy przepisać wzór (23.7) w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3}. \quad (23.8)$$

Iloczyn  $qd$ , który zawiera dwie wielkości charakteryzujące dipol,  $q$  i  $d$ , jest wartością  $p$  wielkości wektorowej zwanej **momentem dipolowym elektrycznym**  $\vec{p}$  dipola. (Jednostką momentu  $\vec{p}$  jest kulomb razy metr (C·m)). Wzór (23.8) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (\text{dipol elektryczny}). \quad (23.9)$$

Za kierunek momentu  $\vec{p}$  przyjmujemy kierunek od ujemnego do dodatniego ładunku dipola, zgodnie z rysunkiem 23.8b, dlatego też możemy używać  $\vec{p}$  do określania ustawienia dipola.

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli mierzymy natężenie pola elektrycznego dipola tylko w odległych punktach, to nie możemy znaleźć oddzielnie  $q$  i  $d$ , lecz tylko ich iloczyn. Natężenie pola w dużych odległościach nie ulegnie zmianie, jeśli na przykład podwoimy  $q$  i równocześnie dwukrotnie zmniejszymy  $d$ . Moment dipolowy elektryczny jest więc podstawową właściwością dipola.

Chociaż wzór (23.9) jest słuszny tylko dla odległych punktów na osi dipola, to okazuje się, że  $E$  dla dipola zmienia się proporcjonalnie do  $1/r^3$  dla *wszystkich* odległych punktów, niezależnie od tego, czy leżą one na osi dipola, czy nie; wielkość  $r$  jest tu odległością między rozważanym punktem i środkiem dipola.

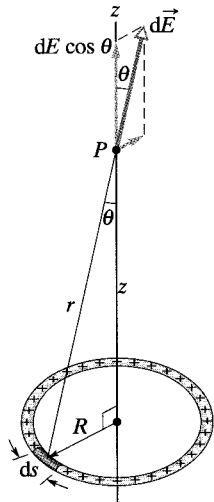
Analiza rysunku 23.8 i linii pola na rysunku 23.5 pokazuje, że natężenie  $\vec{E}$  dla odległych punktów na osi dipola, na przykład dla punktu  $P$  na rysunku 23.8a zarówno w górnej, jak i w dolnej części osi dipola ma kierunek wektora momentu dipolowego  $\vec{p}$ .

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli podwoimy odległość punktu od dipola, to natężenie pola elektrycznego w tym punkcie zmaleje ośmiokrotnie. Jeśli jednak podwoimy odległość od pojedynczego ładunku punktowego, to zgodnie ze wzorem (23.3) natężenie pola elektrycznego zmaleje tylko czterokrotnie. Tak więc natężenie pola elektrycznego dipola maleje szybciej wraz z odległością, niż natężenie pola elektrycznego pojedynczego ładunku. Fizycznym powodem tego szybkiego spadku natężenia pola elektrycznego dipola jest to, że z odległych punktów dipol wygląda jak dwa równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki, które prawie, choć nie całkiem, się pokrywają. Stąd natężenia ich pola elektrycznego w odległych punktach prawie całkiem się znoszą.

## 23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

Rozważaliśmy dotąd pole elektryczne wytwarzane przez jeden ładunek punktowy, lub co najwyżej kilka. Rozważymy obecnie rozkłady ładunków, składające się z bardzo wielu (np. miliardów) leżących blisko siebie ładunków punktowych, rozłożonych wzdłuż linii, na powierzchni, czy w pewnej objętości. Rozkłady takie nazywamy **ciągłymi**, w przeciwieństwie do dyskretnych. Takie rozkłady mogą zawierać ogromną liczbę ładunków punktowych, dlatego też wytwarzane przez nie pola elektryczne znajdujemy, korzystając z metod analizy matematycznej, a nie przez rozważanie poszczególnych ładunków punktowych. W tym paragrafie omówimy pole elektryczne naładowanej linii, w następnym paragrafie rozważymy naładowaną powierzchnię, a w następnym rozdziale wyznaczymy pole wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli.

Gdy mamy do czynienia z ciągłymi rozkładami ładunku, to wygodnie jest wyrazić ładunek obiektu za pomocą *gęstości ładunku*, a nie całkowitego ładunku. Na przykład, dla naładowanej linii będziemy używać liniowej gęstości ładunku (czyli ładunku na jednostkę długości linii)  $\lambda$ , której jednostką w układzie SI jest kulomb na metr (C/m). W tabeli 23.2 przedstawiono także inne gęstości ładunku, jakich będziemy używać w tym rozdziale.



**Rys. 23.9.** Pierścień naładowany jednorodnie dodatnio. Element ładunku zajmuje długość  $ds$  (znacznie powiększoną dla lepszego obrazu). Element ten wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$ . Składowa natężenia  $d\vec{E}$  wzdłuż osi pierścienia wynosi  $dE \cos \theta$

**Tabela 23.2.** Niektóre wielkości określające rozkład ładunku elektrycznego

Nazwa	Symbol	Jednostka SI
Ładunek	$q$	C
Liniowa gęstość ładunku	$\lambda$	C/m
Powierzchniowa gęstość ładunku	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>
Objętościowa gęstość ładunku	$\rho$	C/m <sup>3</sup>

Na rysunku 23.9 przedstawiono cienki pierścień o promieniu  $R$ , naładowany jednorodnie dodatnio o liniowej gęstości ładunku  $\lambda$  na całym obwodzie. Możemy sobie wyobrazić, że pierścień jest z plastiku, lub jakiegoś innego izolatora, i ładunki są umieszczone w poszczególnych jego punktach. Jakie jest natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w punkcie  $P$ , w odległości  $z$  od płaszczyzny pierścienia, łączącej na osi pierścienia?

Aby znaleźć odpowiedź, nie możemy bezpośrednio zastosować wzoru (23.3), który określa natężenie pola ładunku punktowego, gdyż ładunek rozmieszczony na pierścieniu nie jest oczywiście ładunkiem punktowym. Możemy jednak w myśli podzielić ładunek na pierścieniu na nieskończenie małe elementy, które zachowują się jak ładunki punktowe, i potem zastosować wzór (23.3) do każdego z nich. Możemy następnie dodać natężenia pola elektrycznego, wytworzonego w punkcie  $P$  przez poszczególne elementy. Suma wektorowa tych wszystkich natężeń daje nam natężenie pola, wytwarzanego w punkcie  $P$  przez pierścień.

Niech  $ds$  będzie długością (wzdłuż łuku) elementu pierścienia. Ponieważ  $\lambda$  jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości, to taki element ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.10)$$

Ten ładunek wytwarza natężenie pola  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$ , który znajduje się w odległości  $r$  od elementu. Traktując ten element jak ładunek punktowy i korzystając ze wzoru (23.10), możemy napisać wzór (23.3) dla wartości  $d\vec{E}$  w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.11)$$

Zgodnie z rysunkiem 23.9 możemy zapisać wzór (23.11) jako:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}. \quad (23.12)$$

Na rysunku 23.9 pokazano, że wektor  $d\vec{E}$  jest skierowany pod kątem  $\theta$  do osi, którą wybraliśmy jako oś  $z$  i ma składową prostopadłą i równoległą do tej osi.

Każdy element ładunku pierścienia wytwarza natężenie pola  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$ , o wartości danej wzorem (23.12). Wszystkie wektory  $d\vec{E}$  mają identyczne składowe równoległe do osi, zarówno co do wartości, jak i kierunku. Składowe prostopadłe wektorów  $d\vec{E}$  są identyczne co do wartości, ale skierowane w różnych kierunkach. Dla każdej składowej prostopadłej skierowanej w danym kierunku istnieje inna skierowana przeciwnie. Suma takiej pary składowych, podobnie jak suma wszystkich innych par przeciwnie skierowanych składowych, jest równa zeru.

Składowe prostopadłe znoszą się więc i nie musimy ich brać pod uwagę. Pozostają składowe równoległe, które mają ten sam kierunek i wypadkowe natężenie pola w punkcie  $P$  jest ich sumą.

Składowa równoległa wektora  $d\vec{E}$ , pokazanego na rysunku 23.9, ma wartość  $dE \cos \theta$ . Z rysunku wynika także, że:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (23.13)$$

Ze wzorów (23.13) i (23.12) dla składowej równoległej wektora  $d\vec{E}$  otrzymujemy:

$$dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (23.14)$$

Aby dodać składowe równoległe  $dE \cos \theta$ , wytworzone przez wszystkie elementy, należy scałkować wzór (23.14) po obwodzie pierścienia od  $s = 0$  do  $s = 2\pi R$ . Jedyną wielkością we wzorze (23.14), która zmienia się podczas całkowania, jest  $s$ , a więc pozostałe wielkości można wyłączyć przed znak całki. Całkowanie daje więc:

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (23.15)$$

Ponieważ  $\lambda$  jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości pierścienia, to człon  $\lambda(2\pi R)$  we wzorze (23.15) jest równy całkowitemu ładunkowi  $q$  pierścienia. Wzór (23.15) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{naładowany pierścień}). \quad (23.16)$$

Jeśli ładunek umieszczony na pierścieniu jest ujemny, a nie dodatni, jak założyliśmy, to wartość natężenia pola w punkcie  $P$  jest w dalszym ciągu dana wzorem (23.16), ale wektor natężenia jest skierowany do pierścienia zamiast od pierścienia.

Sprawdźmy wzór (23.16) dla ładunku punktowego, umieszczonego na osi tak daleko, że  $z \gg R$ . Dla takiego punktu wyrażenie  $z^2 + R^2$  we wzorze (23.16) można przybliżyć przez  $z^2$  i wzór (23.16) przyjmuje postać:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (\text{pole naładowanego pierścienia w dużej odległości}). \quad (23.17)$$

Jest to rozsądny wynik, ponieważ przy dużej odległości pierścień „wygląda” jak ładunek punktowy. Jeśli zastąpimy  $z$  przez  $r$  we wzorze (23.17), to mamy wzór (23.3) dla wartości natężenia pola elektrycznego ładunku punktowego.

Sprawdźmy następnie wzór (23.16) dla punktu, leżącego w środku pierścienia, czyli dla  $z = 0$ . Ze wzoru (23.16) wynika, że w tym punkcie  $E = 0$ . Jest to również rozsądny wynik, bo jeśli umieścimy ładunek próbny w środku pierścienia, to działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna będzie równa zero; siła pochodząca od dowolnego elementu pierścienia będzie się znosić z siłą od elementu po przeciwnej stronie pierścienia. Ze wzoru (23.1) i faktu, że siła w środku pierścienia jest równa zero, wynika, że natężenie pola także jest równe zero.

## Przykład 23.3

Na rysunku 23.10a przedstawiono plastikowy pręt naładowany jednorodnie ładunkiem  $-Q$ . Pręt został wygięty tak, że tworzy łuk okręgu o promieniu  $r$  i rozwartości  $120^\circ$ . Oś układu współrzędnych wybieramy w taki sposób, że oś symetrii pręta pokrywa się z osią  $x$ , a środek układu znajduje się w środku krzywizny  $P$  pręta. Jak przez  $Q$  i  $r$  wyrazisz natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  pręta w punkcie  $P$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Ze względu na ciągły rozkład ładunku w przecię musimy znaleźć wyrażenie na natężenie pola, wytworzonego przez elementy pręta, a następnie dodać je przez całkowanie. Rozważmy element o długości  $ds$  umieszczony nad osią  $x$  pod kątem  $\theta$  (rys. 23.10b). Jeśli  $\lambda$  oznacza liniową gęstość ładunku pręta, to nasz element  $ds$  ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.18)$$

Taki element wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$ , który znajduje się w odległości  $r$  od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy przedstawić wzór (23.3) dla wartości wektora  $d\vec{E}$  w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.19)$$

Wektor  $d\vec{E}$  jest skierowany do  $ds$ , bo ładunek  $dq$  jest ujemny.

Wybrany przez nas element ma symetrycznie położony element  $ds'$  (obraz zwierciadlany) w dolnej połowie pręta. Natężenie pola elektrycznego  $d\vec{E}'$ , wytworzonego w punkcie  $P$  przez  $ds'$ , ma znów wartość opisaną wzorem (23.19), ale wektor natężenia jest skierowany do  $ds'$  zgodnie z rysunkiem 23.10b. Jeśli rozłożymy wektory natężenia pola, pochodzącego od  $ds$  i  $ds'$  na składowe  $x$  i  $y$ , jak pokazano na rysunku 23.10b, to widzimy, że składowe  $y$  znoszą się (ponieważ mają jednakowe wartości i przeciwnie kierunki). Widzimy także, że składowe  $x$  mają jednakowe wartości i takie same kierunki.

Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego pręta, należy więc zsumować (przez całkowanie) tylko składowe  $x$  natężeń pola od wszystkich elementów pręta. Na podstawie rysunku 23.10b i wzoru (23.9) możemy zapisać składową  $dE_x$  od elementu  $ds$  w postaci:

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds. \quad (23.20)$$

Wzór (23.20) ma dwie zmienne:  $\theta$  i  $s$ . Przed obliczeniem całki musimy pozbyć się jednej z nich. W tym celu zastosujemy związek:  $ds = r d\theta$ , w którym  $d\theta$  jest kątem o wierzchołku w punkcie  $P$ , który odpowiada długości łuku  $ds$  (rys. 23.10c). Po tym podstawieniu możemy scałkować wzór (23.20) względem kąta  $\theta$ , od  $\theta = -60^\circ$  do  $\theta = 60^\circ$ . Otrzymujemy wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ :

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta r d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \frac{1,73\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

(Gdybyśmy przestawili granice całkowania, to otrzymalibyśmy ten sam wynik ze znakiem minus. Całkowanie daje tylko wartość wektora  $\vec{E}$ , a więc znak nie jest istotny).

W celu obliczenia  $\lambda$  zauważmy, że prętowi odpowiada kąt  $120^\circ$ , czyli  $\frac{1}{3}$  kąta pełnego. Długość pręta wynosi więc  $2\pi r/3$ , a liniowa gęstość ładunku wynosi:

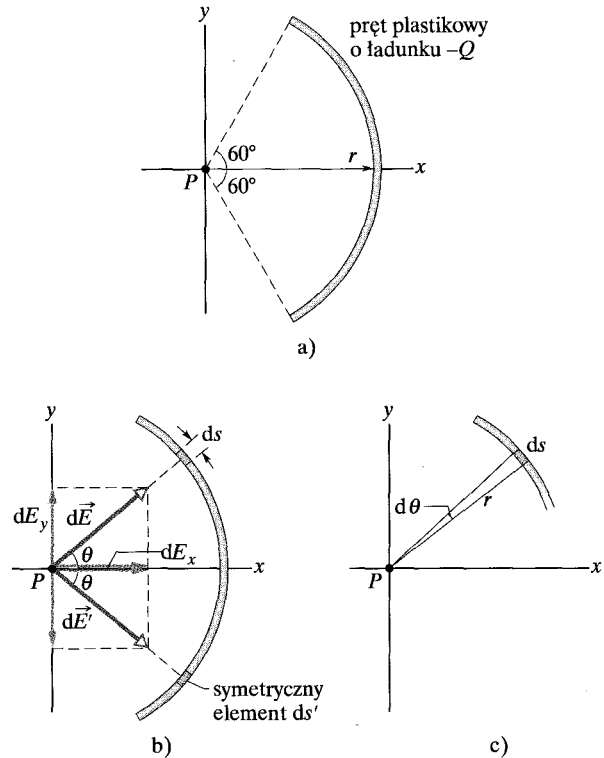
$$\lambda = \frac{\text{ładunek}}{\text{długość}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477 Q}{r}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (23.21), otrzymujemy:

$$E = \frac{(1,73)(0,477 Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane do pręta wzdłuż osi symetrii rozkładu ładunku. Używając wektorów jednostkowych, zapisujemy:

$$\vec{E} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{i}.$$



Rys. 23.10. Przykład 23.3. a) Pręt plastikowy o ładunku  $-Q$  stanowi część łuku okręgu o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $120^\circ$ ; punkt  $P$  jest w środku krzywizny pręta. b) Element w górnej części pręta, pod kątem  $\theta$  do osi i długości  $ds$ , wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$ . Element  $ds'$ , symetryczny do  $ds$  względem osi  $x$ , wytwarza w punkcie  $P$  pole o takiej samej wartości natężenia  $d\vec{E}'$ . c) Elementowi długości łuku  $ds$  odpowiada kąt  $d\theta$  o wierzchołku w punkcie  $P$



**Porada 1:** Obliczanie natężenia pola pochodzącego od naładowanej linii

Oto szczegółowy opis metody obliczania natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytwarzanego w punkcie  $P$  przez jednorodnie naładowaną linię, będącą łukiem okręgu lub odcinkiem prostej. Ogólna strategia polega na wybraniu elementu  $dq$  ładunku, znalezieniu  $d\vec{E}$  od tego elementu i scałkowaniu  $d\vec{E}$  po całej naładowanej linii.

**Krok 1.** Jeśli naładowana linia jest łukiem okręgu, to jako  $ds$  należy wybrać długość łuku elementu rozkładu. Jeśli linia jest prostą biegnącą wzdłuż osi  $x$ , to jako  $dx$  wybieramy długość elementu. Zaznaczamy ten element na rysunku.

**Krok 2.** Szukamy związku ładunku  $dq$  z długością elementu, zgodnie ze wzorem  $dq = \lambda ds$  lub  $dq = \lambda dx$ . Rozważamy  $dq$  i  $\lambda$  dodatnie, nawet jeśli ładunek jest w rzeczywistości ujemny. (Znak ładunku weźmiemy pod uwagę w następnym kroku).

**Krok 3.** Wyrażamy natężenie pola  $d\vec{E}$  wytworzonego w punkcie  $P$  przez ładunek  $dq$ , korzystając ze wzoru (23.3) i zastępując  $q$  w tym równaniu przez  $\lambda ds$  lub  $\lambda dx$ . Jeśli ładunek na linii jest dodatni, to w punkcie  $P$  rysujemy wektor  $d\vec{E}$  tak, aby był skierowany od  $dq$ . Jeśli ładunek jest ujemny, to rysujemy wektor skierowany do  $dq$ .

**Krok 4.** Zawsze szukamy symetrii w rozważanej sytuacji. Jeśli punkt  $P$  leży na osi symetrii rozkładu ładunku, to rozkładamy natężenie pola  $d\vec{E}$ , wytworzonego przez  $dq$  na składowe: prostopadłą i równoległą do osi symetrii. Rozważamy następnie drugi element  $dq'$ , który znajduje się symetrycznie do  $dq$  względem osi symetrii. W punkcie  $P$  rysujemy wektor natężenia pola  $d\vec{E}'$  wytworzonego przez ten symetryczny element i rozkładamy go na składowe. Jedna ze składowych natężenia wytworzonego przez  $dq$  jest składową, która się znosi z odpowiednią składową natężenia pola, wytworzonego przez  $dq'$  i nie wymaga dalszych rozważań. Druga składowa natężenia pola wytworzonego przez  $dq$  dodaje się do składowej, wytworzonej przez  $dq'$ . Sumujemy składowe pochodzące od wszystkich elementów przez całkowanie.

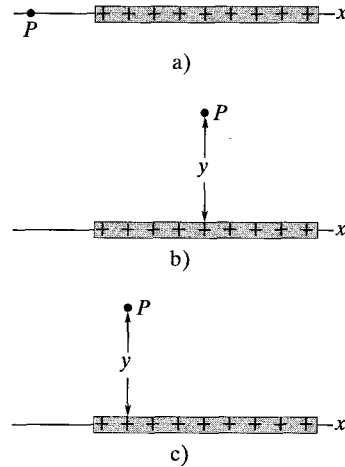
**Krok 5.** Niżej podajemy cztery ogólne typy jednorodnego rozkładu ładunku, z omówieniem strategii uproszczenia całki z kroku 4.

*Pierścień*, z punktem  $P$  leżącym na osi symetrii, jak na rysunku 23.9. W wyrażeniu na  $dE$  zastępujemy  $r^2$  przez  $z^2 + R^2$ , jak we wzorze (23.12). Wyrażamy składowe natężenia  $dE$  przez  $\theta$ , co wprowadza  $\cos \theta$ , ale  $\theta$  jest identyczne dla wszystkich elementów i dlatego nie jest zmienną. Zastępujemy  $\cos \theta$ , jak we wzorze (23.13) i całkujemy względem  $s$  po całym obwodzie pierścienia.

*Łuk okręgu* z punktem  $P$ , leżącym w środku krzywizny, jak na rysunku 23.10. Wyrażamy składowe natężenia pola  $d\vec{E}$  przez  $\theta$ , co wprowadza  $\sin \theta$  lub  $\cos \theta$ . Zastępując  $ds$  przez  $r d\theta$ , otrzymujemy jedną zmienną  $\theta$ , zamiast dwóch

zmiennych  $s$  i  $\theta$ . Całkujemy względem  $\theta$ , jak w przykładzie 23.3, od jednego końca łuku do drugiego.

*Odcinek prostej* z punktem  $P$  na jego przedłużeniu, jak na rysunku 23.11a. W wyrażeniu na  $dE$  zastępujemy  $r$  przez  $x$ . Całkujemy względem  $x$  od jednego końca naładowanego odcinka do drugiego.

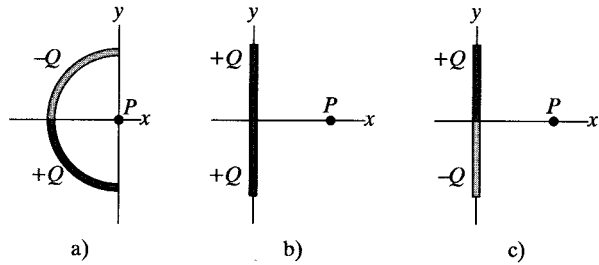


**Rys. 23.11.** a) Punkt  $P$  znajduje się na przedłużeniu naładowanego odcinka. b) Punkt  $P$  znajduje się na symetralnej naładowanego odcinka, w odległości  $y$  od odcinka. c) Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $y$  od naładowanego odcinka, ale w przeciwieństwie do (b) nie leży na jego symetralnej

*Odcinek prostej* z punktem  $P$  w odległości  $y$  od naładowanego odcinka, jak na rysunku 23.11b. W wyrażeniu na  $dE$  zastępujemy  $r$  wyrażeniem zawierającym  $x$  i  $y$ . Jeśli punkt  $P$  umieszczony jest na symetralnej naładowanego odcinka, to znajdujemy wyrażenie na dodające się składowe natężenia pola  $d\vec{E}$ , co wprowadza  $\sin \theta$  lub  $\cos \theta$ . Przejdziemy od dwóch zmiennych  $x$  i  $\theta$  do jednej zmiennej  $x$  przez zastąpienie funkcji trygonometrycznej definiującą ją wyrażeniem zawierającym  $x$  i  $y$ . Obliczamy całkę względem  $x$  od jednego do drugiego końca odcinka. Jeśli punkt  $P$  nie jest umieszczony na symetralnej, jak na rysunku 23.11c, to tworzymy całkę sumującą składowe  $dE_x$  i całkujemy względem  $x$ , aby znaleźć  $E_x$ . Następnie tworzymy całkę sumującą składowe  $dE_y$  i całkujemy względem  $x$ , aby znaleźć  $E_y$ . Wartość i kierunek natężenia pola  $\vec{E}$  wyznaczamy w standardowy sposób, ze składowych  $E_x$  i  $E_y$ .

**Krok 6.** Jeden z wybranych wariantów granic całkowania daje dodatni wynik. Przeciwny wybór daje ten sam wynik z przeciwnym znakiem — należy wtedy pominąć znak minus. Jeśli wynik chcemy wyrazić przez całkowity ładunek  $Q$  rozkładu, to zastępujemy  $\lambda$  przez  $Q/L$ , gdzie  $L$  jest długością naładowanej linii. Dla pierścienia  $L$  jest długością jego obwodu.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono trzy nieprzewodzące pręty: jeden kołowy i dwa proste. Każdy pręt jest jednorodnie naładowany ładunkiem o wartości bezwzględnej  $Q$  w górnej i dolnej połowie jak pokazano na rysunku. Jak skierowane jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  w przypadku każdego pręta?



## 23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

Na rysunku 23.12 przedstawiono kołową plastikową tarczę o promieniu  $R$ , której górna powierzchnia jest naładowana dodatnio, a gęstość powierzchniowa  $\sigma$  jest stała (zob. tabela 23.2). Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$ , leżącym w odległości  $z$  od środka tarczy?

Podzielimy tarczę na współśrodkowe płaskie pierścienie i następnie obliczymy natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  przez dodanie (scałkowanie) składników pochodzących od wszystkich pierścieni. Na rysunku 23.12 przedstawiono jeden taki pierścień o promieniu  $r$  i szerokości radialnej  $dr$ . Ponieważ  $\sigma$  jest ładunkiem przypadającym na jednostkę powierzchni, to ładunek na pierścieniu wynosi:

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr), \quad (23.22)$$

gdzie  $dS$  jest powierzchnią pierścienia.

Rozwiązaliśmy już problem natężenia pola elektrycznego naładowanego pierścienia. Podstawiając  $dq$  ze wzoru (23.22) zamiast  $q$  we wzorze (23.16) i zastępując  $R$  we wzorze (23.16) przez  $r$ , otrzymujemy wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego  $dE$  w punkcie  $P$ , pochodzącego od naszego płaskiego pierścienia:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}},$$

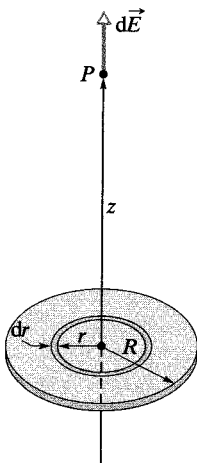
które można zapisać w postaci:

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (23.23)$$

Możemy teraz znaleźć  $E$  przez scałkowanie wzoru (23.23) po powierzchni tarczy, czyli przez scałkowanie względem zmiennej  $r$ , od  $r = 0$  do  $r = R$ . Zauważ, że  $z$  pozostaje stałe przy tym całkowaniu. Otrzymujemy:

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr. \quad (23.24)$$

Aby obliczyć tę całkę, sprowadzamy ją do postaci  $\int X^m dX$ , podstawiając  $X = (z^2 + r^2)$ ,  $m = -\frac{3}{2}$  i  $dX = (2r) dr$ . Wartość takiej całki wynosi:



**Rys. 23.12.** Tarcza o promieniu  $R$  jest naładowana jednorodnie dodatnio. Pokazany pierścień o promieniu  $r$  i szerokości radialnej  $dr$  wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $d\vec{E}$  w punkcie  $P$  na osi tarczy

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

i wzór (23.24) przyjmuje postać:

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R \quad (23.25)$$

Uwzględniając granice całkowania we wzorze (23.25), otrzymujemy po przekształceniu wyrażenie:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{naładowana tarcza}) \quad (23.26)$$

na wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez płaską, kołową, naładowaną tarczę w punktach leżących na jej osi. (Przy obliczaniu całki przyjęliśmy  $z \geq 0$ ).

Jeśli przyjmiemy, że  $R \rightarrow \infty$  przy ustalonej skończonej wartości  $z$ , to drugi człon w nawiasach we wzorze (23.26) będzie dążył do zera i wzór ten sprowadzi się do postaci:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{nieskończona płaszczyzna}). \quad (23.27)$$

Jest to wartość natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez nieskończoną płaszczyznę, na przykład przez naładowaną jednorodnie z jednej strony płytę z izolatora takiego, jak plastik. Linie pola elektrycznego w takiej sytuacji są przedstawione na rysunku 23.3.

Wzór (23.27) otrzymujemy także, jeśli przyjmiemy  $z \rightarrow 0$  we wzorze (23.26), przy ustalonym skończonym  $R$ . Wynik ten dowodzi, że w punktach bliższych tarczy natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę jest takie samo jak w przypadku tarczy o nieskończonym promieniu.

## 23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

W poprzednich czterech paragrafach zajmowaliśmy się pierwszym z naszych dwóch zadań: przy danym rozkładzie ładunku znajdowaliśmy natężenie pola elektrycznego, wytwarzanego przez ten ładunek w otaczającej go przestrzeni. Obecnie zajmiemy się drugim zadaniem: określeniem, co stanie się z naładowaną cząstką, gdy znajdzie się w polu elektrycznym, wytworzonym przez inne stacjonarne lub powoli poruszające się ładunki.

Otóż na naładowaną cząstkę będzie działać siła elektrostatyczna, określona następującym wzorem:

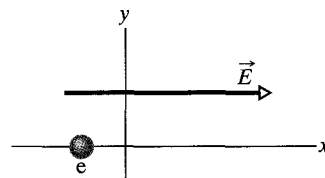
$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (23.28)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem cząstki (z uwzględnieniem jego znaku), a  $\vec{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez pozostałe ładunki w miejscu, w którym znajduje się cząstka. (Natężenie to *nie* uwzględnia pola wytworzonego przez samą cząstkę — aby odróżnić te dwa pola, pole działające na cząstkę we

wzorze (23.28) nazywa się często *polem zewnętrznym*. Naładowana cząstka (lub naładowane ciało) nie podlega oddziaływaniu swego własnego pola elektrycznego). Na podstawie wzoru (23.28) możemy powiedzieć, że:

➤ Siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ , działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  ma kierunek natężenia  $\vec{E}$ , jeśli ładunek cząstki  $q$  jest dodatni, i ma przeciwny kierunek, jeśli ładunek  $q$  jest ujemny.

**SPRAWDZIAN 4:** a) Jak skierowana jest siła elektrostatyczna działająca na elektron i pochodząca od pola elektrycznego o natężeniu przedstawionym na rysunku? b) W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli przed wejściem w obszar pola elektrycznego poruszał się równoległe do osi  $y$ ? c) Jeśli elektron poruszał się początkowo w prawo, to czy jego prędkość wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie stała?



### Pomiar ładunku elementarnego

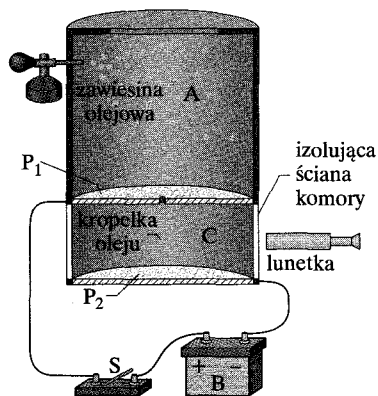
Równanie (23.28) stanowi podstawę pomiaru ładunku elementarnego  $e$ , jakiego dokonał fizyk amerykański Robert A. Millikan w latach 1910–1913. Na rysunku 23.13 przedstawiono używaną przez niego aparaturę. Gdy maleńkie kropelki oleju zostaną wstrzyknięte do komory A, niektóre z nich zostaną w czasie tego procesu naładowane dodatnio lub ujemnie. Przeanalizujemy kropelkę, która przechodzi na dół przez mały otwór w płycie  $P_1$  do komory C i założymy, że kropelka ma ujemny ładunek  $q$ .

Jeśli klucz  $S$  na rysunku 23.13 jest otwarty (jak w narysowanym położeniu), to źródło  $B$  nie wytwarza pola elektrycznego w komorze C. Jeśli jest zamknięty (istnieje połączenie między komorą C i dodatnim biegunem źródła), to powstaje nadmiarowy ładunek dodatni na płycie przewodzącej  $P_1$  i nadmiarowy ładunek ujemny na płycie przewodzącej  $P_2$ . W wyniku naładowania płyt, w komorze C powstanie pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) pole to działa siłą elektrostatyczną na każdą naładowaną kropelkę, która pojawi się w komorze, oraz wpływa na jej ruch. W szczególności, nasza ujemnie naładowana kropelka zacznie poruszać się do góry.

Analizując ruch kropelek oleju przy otwartym i zamkniętym kluczu Millikan określił wielkość ładunku  $q$  i odkrył, że wartości  $q$  były zawsze dane przez:

$$q = ne, \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (23.29)$$

gdzie  $e$  jest stałą podstawową, równą  $1,60 \cdot 10^{-19}$  C i zwaną *ładunkiem elementarnym*. Doświadczenie Millikana jest przekonującym dowodem skwantowania ładunku. Częściowo za tę pracę w 1923 roku Millikan otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Współczesne pomiary ładunku elementarnego opierają się na różnych powiązanych ze sobą doświadczeniach, znacznie dokładniejszych niż pionierski eksperyment Millikana.



Rys. 23.13. Aparatura do pomiaru ładunku elementarnego  $e$  w doświadczeniu Millikana z kropelkami oleju. Gdy naładowana kropelka oleju przejdzie do komory C przez otwór w płycie  $P_1$ , na jej ruch wpływa zamknięcie lub otwarcie klucza  $S$ , czyli włączenie lub wyłączenie pola elektrycznego w komorze C. Lunetka służy tu do oglądania kropli i pozwala śledzić jej ruch

## Drukarka atramentowa

Potrzeba bardzo szybkiego i dobrej jakości druku spowodowała poszukiwanie innego sposobu, niż stosowane w standardowych maszynach do pisania drukowanie uderzeniowe. Jednym z takich sposobów jest tworzenie liter przez wtryskiwanie maleńkich kropelek atramentu na papier.

Na rysunku 23.14 przedstawiono ujemnie naładowaną kropelkę, która porusza się między dwiema przewodzącymi płytkami odchylającymi, między którymi wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym w dół. Kropelka jest odchylana do góry zgodnie ze wzorem (23.28) i pada na papier w punkcie, którego położenie jest określone przez wartość natężenia  $\vec{E}$  i ładunku  $q$  kropelki.

W praktyce wartość  $E$  jest stała i położenie kropelki jest określone przez ładunek  $q$ , przekazany kropelce w układzie ładowania, przez który kropelka musi przejść przed wejściem do układu odchylającego. Układ ładowania jest z kolei aktywowany elektronicznie, za pomocą sygnałów kodujących drukowany tekst czy rysunek.

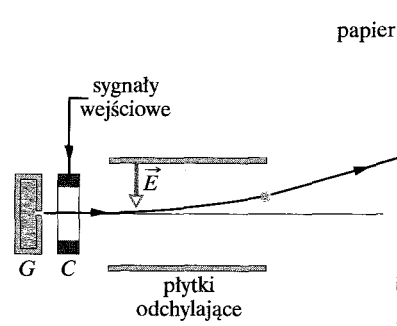
## Błyski wulkanów

Podczas wybuchu wulkan Sakurajima, przedstawiony na fotografii na początku tego rozdziału, wyrzuca popioły do atmosfery. Popioły powstają wtedy, gdy para, w którą zamienia się gwałtownie woda w wulkanie w wyniku przepływu gorącej lawy, kruszy skały ulegające następnie spalaniu. Przejście wody w parę i eksplozja skały powodują rozdzielanie się w niej dodatnich i ujemnych ładunków. Gdy para i popioły dostają się do atmosfery, tworzą obłok, w którym występują zarówno obszary z ładunkiem dodatnim, jak i ujemnym.

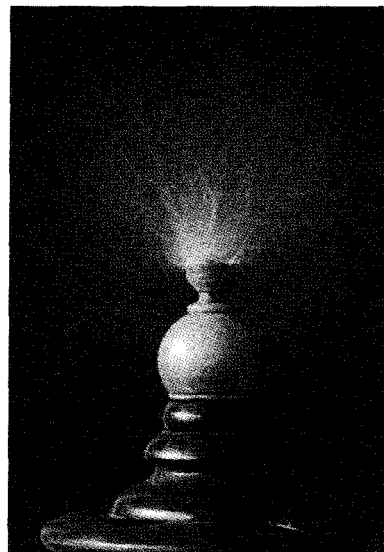
Przy wzroście wielkości tych obszarów rośnie natężenie pól elektrycznych między sąsiednimi obszarami i między nimi a kraterem wulkanu. Gdy natężenie osiągnie wartość około  $3 \cdot 10^6$  N/C, w powietrzu następuje *przebiecie elektryczne* i zaczyna płynąć prąd elektryczny. Chwilowe tory przewodzące pojawiają się w powietrzu tam, gdzie pole elektryczne zjonizowało cząsteczki powietrza, uwalniając część ich elektronów. Elektrony te, przyspieszane przez pole, zderzają się na swej drodze z cząsteczkami powietrza, co powoduje, że cząsteczki emitują światło. Możemy zobaczyć te krótkie tory, zwane zwykle *iskrami*, właśnie w wyniku emisji światła. (*Iskrzenie* w małej skali możemy zauważyć np. wokół naładowanej metalowej czaszy na rysunku 23.15).

Iskry nad wulkanem skierowane są od naładowanego obszaru do krateru lub w przeciwną stronę. Możemy określić kierunek iskry patrząc, jak rozchodzą się od niej ślepe odgałęzienia. Jeśli rozchodzą się one w dół, to iskra skierowana jest w dół. Jeśli odgałęzienia odchodzą do góry, to iskra też skierowana jest do góry. Czasem iskra skierowana w dół i iskra skierowana do góry się spotykają.

**23.15.** Metalowa czasza jest tak silnie naładowana, że wytworzone przez nią w otaczającej przestrzeni pole elektryczne prowadzi do przebicia w występującym tam powietrzu. Widoczne iskry wskazują, gdzie w powietrzu powstały chwilowe przewodzące tory, wzdłuż których pole elektryczne usunęło elektrony z cząsteczek powietrza i przyspieszyło je, doprowadzając do zderzeń z cząsteczkami

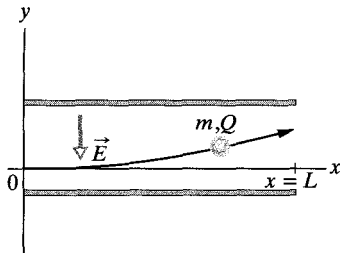


**Rys. 23.14.** Zasada działania drukarki atramentowej. Kropelki atramentu są wystrzeliwane z generatora  $G$  i otrzymują ładunek w jednostce ładującej  $C$ . Sygnał pochodzący z komputera określa ładunek nadawany każdej kropelce i wpływa na efekt działania pola  $\vec{E}$  na kropelkę i położenie punktu na papierze, w którym kropelka wyląduje. Do wytworzenia pojedynczego znaku potrzeba około 100 drobnych kropelek



## Przykład 23.4

Na rysunku 23.16 przedstawiono odchylające płytki drukarki atramentowej, z naniesionymi osiami układu współrzędnych. Kropelka atramentu o masie  $m = 1,3 \cdot 10^{-10}$  kg i ujemnym ładunku o wartości  $Q = 1,5 \cdot 10^{-13}$  C wpada w obszar między płytkami, poruszając się początkowo wzdłuż osi  $x$ , z prędkością  $v_x = 18$  m/s. Długość  $L$  płyt wynosi 1,6 cm. Płytki są naładowane i wytwarzają pole elektryczne we wszystkich punktach między nimi. Załóż, że pole jest jednorodne, wektor natężenia pola  $\vec{E}$  jest skierowany w dół i ma wartość  $1,4 \cdot 10^6$  N/C. Jakie jest pionowe odchylenie kropelki po przejściu przez całą długość płyty? (Siła grawitacyjna, działająca na kropkę jest mała w porównaniu z siłą elektrostatyczną i można ją pominąć).



Rys. 23.16. Przykład 23.4. Kropelka atramentu o masie  $m$  i ładunku  $Q$  jest odchylana w polu elektrycznym drukarki atramentowej

## ROZWIĄZANIE:

Kropka jest naładowana ujemnie, a natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) na naładowaną kropelkę działa stała siła elektrostatyczna o wartości  $QE$ , skierowana do góry. Kropelka, przesuwaną się równoległe do osi  $x$  ze stałą prędkością  $v_x$ , zaczyna więc odchyłać się do góry z pewnym stałym przyspieszeniem  $a_y$ . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ( $F = ma$ ) dla składowych wzdłuż osi  $y$  otrzymujemy:

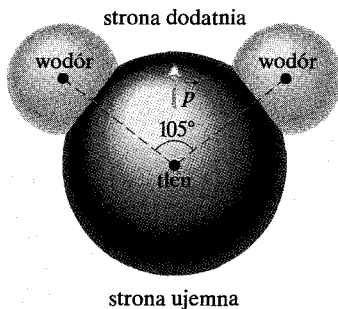
$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}. \quad (23.30)$$

Oznaczmy przez  $t$  czas potrzebny kropelce na przejście obszaru między płytkami. Po czasie  $t$  pionowe i poziome przesunięcia kropelki wynoszą odpowiednio:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{i} \quad L = v_x t. \quad (23.31)$$

Eliminując  $t$  z tych równań i podstawiając wartość (23.30) na  $a_y$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y &= \frac{QEL^2}{2mv_x^2} \\ &= \frac{(1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1,4 \cdot 10^6 \text{ N/C})(1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2} \\ &= 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowieź})$$



Rys. 23.17. Cząsteczka  $\text{H}_2\text{O}$ , składająca się z trzech jąder (zaznaczonych kropkami) i obszarów, gdzie występują elektrony. Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  jest skierowany od (ujemnej) tlenowej do (dodatniej) wodorowej strony cząsteczki

## 23.9. Dipol w polu elektrycznym

Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  dipola elektrycznego zdefiniowaliśmy jako wektor skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola. Jak zobaczymy, zachowanie się dipola w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  można w pełni opisać, używając dwóch wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{p}$ , bez potrzeby wnikania w strukturę dipola.

Cząsteczka wody ( $\text{H}_2\text{O}$ ) jest dipolem elektrycznym, co przedstawiono na rysunku 23.17. Czarne kropki przedstawiają jądro tlenu (mające 8 protonów) i dwa jądra wodoru (mające po jednym protonie). Pokolorowane powierzchnie przedstawiają obszary w otoczeniu jąder, w których można znaleźć elektrony.

W cząsteczce wody dwa atomy wodoru i atom tlenu nie leżą na jednej prostej, ale proste, jakie można przez nie przeprowadzić, tworzą kąt równy około  $105^\circ$ , jak przedstawiono na rysunku 23.17. W wyniku tego cząsteczka ma określoną „stronę tlenową” i „stronę wodorową”. Co więcej, 10 elektronów cząsteczki ma skłonność do pozostawiania bliżej jądra tlenu niż jąder wodoru. Stąd strona tlenowa cząsteczki ma więcej ładunku ujemnego niż wodorowa, co prowadzi do powstania elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ , skierowanego wzdłuż osi symetrii czą-

steczki, jak pokazano na rysunku. Jeśli cząsteczką wody znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym, to zachowuje się jak dipol elektryczny z rysunku 23.8.

W celu zbadania tego zachowania rozważmy taki dipol, umieszczony w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  (rys. 23.18a). Zakładamy, że dipol jest sztywnym układem, składającym się z dwóch przeciwnie naładowanych kulek, każda o ładunku  $q$ , które znajdują się w odległości  $d$  od siebie. Moment dipolowy  $\vec{p}$  tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem natężenia pola  $\vec{E}$ .

Na naładowane końce dipola działają siły elektrostatyczne. Pole elektryczne jest jednorodne, a więc siły działają w przeciwnych kierunkach (jak pokazano na rysunku 23.18) i mają taką samą wartość  $F = qE$ . W jednorodnym polu elektrycznym wypadkowa siła oddziaływania pola na dipol jest więc równa zero i środek masy dipola się nie porusza. Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają wypadkowy moment siły  $\vec{M}$  względem środka masy dipola. Środek masy leży na prostej, łączącej naładowane końce, w pewnej odległości  $x$  od jednego końca i w odległości  $d - x$  od drugiego. Korzystając ze wzoru (11.31) ( $M = rF \sin \phi$ ), możemy zapisać wartość wypadkowego momentu siły  $\vec{M}$  w postaci

$$M = Fx \sin \theta + F(d - x) \sin \theta = Fd \sin \theta. \quad (23.32)$$

Wartość momentu siły  $\vec{M}$  możemy także zapisać, używając wartości natężenia pola elektrycznego  $E$  i momentu dipolowego  $p = qd$ . W tym celu podstawimy  $qE$  za  $F$  i  $p/q$  za  $d$  do wzoru (23.32) i otrzymamy wyrażenie na wartość momentu siły:

$$M = pE \sin \theta. \quad (23.33)$$

Wzór ten możemy ogólnie zapisać w postaci wektorowej:

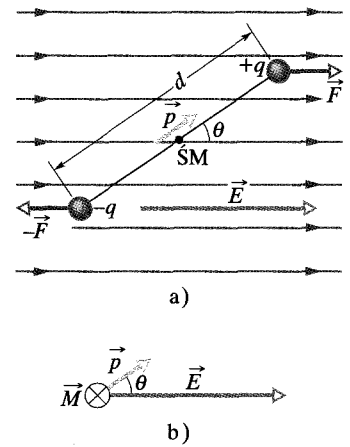
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{moment siły działający na dipol}). \quad (23.34)$$

Wektory  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  przedstawiono na rysunku 23.18b. Moment siły działający na dipol dąży do obrócenia  $\vec{p}$  (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola  $\vec{E}$ , czyli zmniejszenia kąta  $\theta$ . Na rysunku 23.18 obrót taki jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W rozdziale 11 powiedzieliśmy, że dla momentu siły, prowadzącego do obrotu zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wygodnie jest włączyć znak minus do wartości momentu. Przy takim zapisie moment siły z rysunku 23.18 ma wartość:

$$M = -pE \sin \theta. \quad (23.35)$$

## Energia potencjalna dipola elektrycznego

Energia potencjalna jest związana z ustawieniem dipola elektrycznego w polu elektrycznym. Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest w stanie równowagi, czyli gdy jego moment  $\vec{p}$  jest skierowany zgodnie z kierunkiem natężenia pola  $\vec{E}$  (wówczas  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$ ). Dla każdego innego ustawienia dipol ma większą energię potencjalną. Podobnie jest dla wahadła, które ma swą najmniejszą grawitacyjną energię potencjalną w swym stanie równowagi, czyli w najniższym punkcie. Nadanie dipolowi lub wahadłu innego ustawienia (przez obrót) wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną.



Rys. 23.18. a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Dwie kulki o ładunkach jednakowych co do wartości, ale o przeciwnych znakach, znajdują się w odległości  $d$ . Linia między kulkami reprezentuje ich sztywne połączenie. b) Pole o natężeniu  $\vec{E}$  działa momentem siły o wartości  $M$  na dipol. Moment siły  $\vec{M}$  jest skierowany za kartkę, co zaznaczono symbolem  $\otimes$

Możemy zawsze w całkiem dowolny sposób zdefiniować konfigurację o zerowej energii potencjalnej, ponieważ fizyczne znaczenie mają tylko różnice energii potencjalnej. Okazuje się, że wyrażenie na energię potencjalną dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym jest najprostsze, jeśli wybierzemy zerową wartość energii potencjalnej dla kąta  $\theta$  (rys. 23.18) równego  $90^\circ$ . Możemy teraz znaleźć energię potencjalną  $E_p$  dipola przy dowolnej innej wartości kąta  $\theta$ , korzystając ze wzoru (8.1) ( $\Delta E_p = -W$ ), tzn. obliczając pracę  $W$ , wykonaną przez pole, przy obróceniu dipola od ustawienia odpowiadającego wartości  $90^\circ$  do wartości  $\theta$ . Ze wzoru (11.45) ( $W = \int M d\theta$ ) i wzoru (23.35) znajdujemy, że energia potencjalna  $E_p$  przy dowolnym kącie  $\theta$  wynosi:

$$E_p = -W = - \int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta d\theta. \quad (23.36)$$

Obliczenie całki prowadzi do wyniku:

$$E_p = -pE \cos \theta. \quad (23.37)$$

Wzór ten możemy zapisać ogólnie w postaci wektorowej:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{energia potencjalna dipola}). \quad (23.38)$$

Ze wzorów (23.37) i (23.38) wynika, że energia potencjalna dipola jest najmniejsza ( $E_p = -pE$ ), gdy  $\theta = 0$ , czyli gdy  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  mają ten sam kierunek; energia potencjalna jest największa ( $E_p = pE$ ), gdy  $\theta = 180^\circ$ , czyli gdy  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  są przeciwnie skierowane.

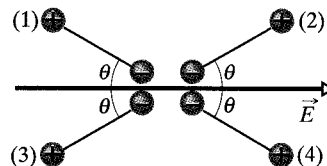
Gdy dipol obraca się od początkowego ustawienia  $\theta_{\text{pocz}}$  do innego  $\theta_{\text{końc}}$ , praca  $W$ , wykonana przez pole elektryczne nad dipolem wynosi:

$$W = -\Delta E_p = -(E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz}), \quad (23.39)$$

gdzie  $E_p \text{ pocz}$  i  $E_p \text{ końc}$  można obliczyć ze wzoru (23.38). Jeśli zmiana ustawienia jest spowodowana przez zewnętrzny moment siły zewnętrznej, to praca  $W_{\text{zewn}}$ , wykonana nad dipolem przez ten moment siły różni się znakiem od pracy, wykonanej nad dipolem przez pole, czyli:

$$W_{\text{zewn}} = -W = (E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz}). \quad (23.40)$$

**SPRAWDZIAN 5:** Na rysunku przedstawiono cztery ustawienia dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym. Uszereguj te ustawienia względem: a) wartości momentu siły działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, zaczynając od wartości największej.





## Przykład 23.5

Obojętna cząsteczka wody ( $\text{H}_2\text{O}$ ) w stanie gazowym ma elektryczny moment dipolowy o wartości  $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ .

a) W jakiej odległości od siebie znajdują się środki dodatniego i ujemnego ładunku cząsteczki?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Moment dipolowy cząsteczki zależy od wartości  $q$  dodatniego lub ujemnego ładunku cząsteczki i odległości  $d$  ładunków. W obojętnej cząsteczce wody jest 10 elektronów i 10 protonów i dlatego wartość jej momentu dipolowego wynosi:

$$p = qd = (10e)(d),$$

gdzie  $d$  jest poszukiwaną odległością, a  $e$  ładunkiem elementarnym. Stąd:

$$\begin{aligned} d &= \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})}{(10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} \\ &= 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,9 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana odległość jest bardzo mała, mniejsza od promienia atomu wodoru.

b) Jakim maksymalnym momentem siły pole może oddziaływać na dipol, jeśli cząsteczka znajdzie się w polu elektrycznym o

natężeniu  $1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}$  (pole o takim natężeniu można łatwo wytworzyć w laboratorium)?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Moment siły działający na dipol jest największy, gdy kąt między  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  wynosi  $90^\circ$ . Podstawiając tę wartość do wzoru (23.33), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M &= pE \sin \theta = (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \sin 90^\circ \\ &= 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić tę cząsteczkę o  $180^\circ$ , zaczynając od równoległego ustawienia odpowiadającego  $\theta = 0^\circ$ ?

### ROZWIĄZANIE:

➡ Aby obrócić cząsteczkę, należy przyłożyć do niej zewnętrzny moment siły. Praca wykonana przez ten moment siły jest równa zmianie energii potencjalnej przy zmianie ustawienia cząsteczki. Ze wzoru (23.40) znajdujemy:

$$\begin{aligned} W_{\text{zewn}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0^\circ) \\ &= (-pE \cos 180^\circ) - (-pE \cos 0^\circ) = 2pE \\ &= (2) \cdot (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}) \cdot (1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \\ &= 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Podsumowanie

**Pole elektryczne** Jednym ze sposobów wyjaśnienia działania siły elektrostatycznej między dwoma ładunkami jest założenie, że każdy ładunek wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole elektryczne. Siła elektrostatyczna działająca na dowolny ładunek jest wywołana polem elektrycznym, wytworzonym przez inne ładunki w miejscu, w którym znajduje się rozważany ładunek.

**Definicja natężenia pola elektrycznego** Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie jest określone przez siłę elektrostatyczną  $\vec{F}$ , działającą na umieszczony w tym punkcie dodatni ładunek próbny  $q_0$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (23.1)$$

**Linie pola elektrycznego** Linie pola elektrycznego umożliwiają graficzne przedstawienie kierunku i wartości natężeń pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt. Gęstość linii pola w dowolnym obszarze jest proporcjonalna do wartości natężenia pola w tym obszarze. Linie pola są skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych.

**Pole ładunku punktowego** Wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez ładunek punktowy  $q$ , w odległości  $r$  od ładunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (23.3)$$

Wektor natężenia pola  $\vec{E}$  jest skierowany od ładunku punktowego, jeśli ładunek jest dodatni i do ładunku punktowego, jeśli ładunek jest ujemny.

**Pole dipola elektrycznego** Dipol elektryczny składa się z dwóch cząstek o jednakowej wartości ładunku  $q$ , ale o przeciwnym znaku, znajdujących się w odległości  $d$  od siebie. Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  dipola ma wartość  $qd$  i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego. Wartość natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez dipol, w odległym punkcie na osi dipola (prostej przechodzącej przez obydwaj ładunki) wynosi:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}, \quad (23.9)$$

gdzie  $z$  jest odległością między punktem i środkiem dipola.

**Pole ciągłego rozkładu ładunku** Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek o rozkładzie ciągłym obliczamy, traktując elementy ładunku jak ładunki punktowe i następnie sumując przez całkowanie wektory natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez wszystkie elementy ładunku.

**Siła działająca na ładunek punktowy w polu elektrycznym** Gdy ładunek punktowy  $q$  znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  wytworzonym przez inne ładunki, siła elektrostatyczna  $\vec{F}$  działająca na ładunek punktowy jest wyrażona wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (23.28)$$

Siła  $\vec{F}$  ma ten sam kierunek jak natężenie  $\vec{E}$ , jeśli ładunek  $q$  jest dodatni i przeciwny kierunek, jeśli ładunek  $q$  jest ujemny.

**Dipol w polu elektrycznym** Jeśli dipol elektryczny o momencie dipolowym  $\vec{p}$  znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to pole działa na dipol momentem siły  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (23.34)$$

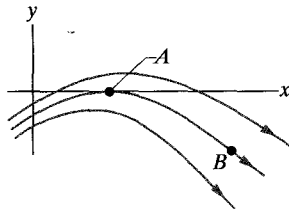
Dipol ma energię potencjalną  $E_p$ , związaną z jego ustawieniem w polu elektrycznym:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (23.38)$$

Ta energia potencjalna jest tak określona, że przyjmuje wartość równą zero, gdy moment  $\vec{p}$  jest prostopadły do natężenia  $\vec{E}$ ; jest najmniejsza ( $E_p = -pE$ ), gdy moment  $\vec{p}$  ma kierunek zgodny z natężeniem  $\vec{E}$ , i największa ( $E_p = pE$ ), gdy moment  $\vec{p}$  ma kierunek przeciwny do natężenia  $\vec{E}$ .

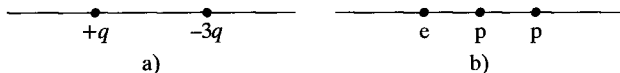
## Pytania

1. Na rysunku 23.19 przedstawiono trzy linie pola elektrycznego. Jaki jest kierunek siły elektrostatycznej, działającej na dodatni ładunek próbny, umieszczony w: a) punkcie A, b) punkcie B? c) W którym punkcie, A czy B, przyspieszenie ładunku punktowego będzie większe, jeśli ładunek będzie mógł się poruszać?



Rys. 23.19. Pytanie 1

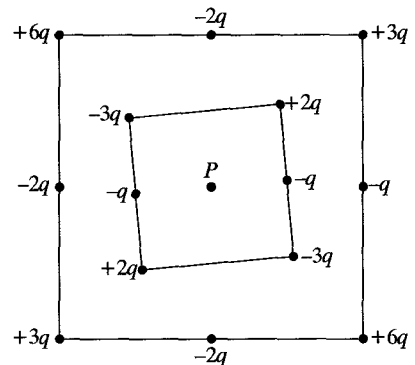
2. Na rysunku 23.20a przedstawiono dwie naładowane cząstki, umieszczone na osi. a) Gdzie na osi (w skończonej odległości) znajduje się punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: między ładunkami, na lewo czy na prawo od nich? b) Czy istnieje punkt o zerowym natężeniu pola elektrycznego poza osią (w skończonej odległości)?



Rys. 23.20. Pytania 2 i 3

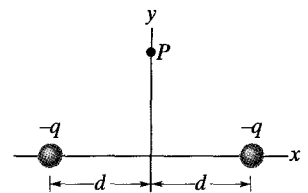
3. Na rysunku 23.20b przedstawiono dwa protony i elektron znajdujące się w równej odległości od siebie na osi. Gdzie na osi (w skończonej odległości) jest punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: na lewo od cząstek, na prawo, między dwoma protonami, czy między elektronem i bliższym protonem?

4. Na rysunku 23.21 przedstawiono dwa układy naładowanych cząstek. Boki zaznaczonych kwadratów nie są równoległe do siebie. Ładunki znajdują się w odległości  $d$  lub  $d/2$  wzdłuż obwodów kwadratów. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ ?



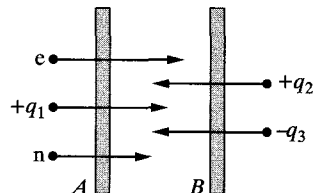
Rys. 23.21. Pytanie 4

5. Na rysunku 23.22 dwie cząstki o ładunku  $-q$  są rozmieszczone symetrycznie względem osi  $y$ ; każda z nich wytwarza pole elektryczne w punkcie  $P$ , leżącym na tej osi. a) Czy wartości natężeń pól w punkcie  $P$  są równe? b) Czy każde pole elektryczne jest skierowane do, czy od ładunku go wytwarzającego? c) Czy wartość wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$  jest równa sumie wartości  $E$  natężeń tych dwóch pól (czyli czy jest równa  $2E$ )? d) Czy składowe  $x$  natężeń tych dwóch pól dodają się, czy odejmują? e) Czy ich składowe  $y$  dodają się, czy odejmują? f) Czy kierunek wypadkowego natężenia pola w punkcie  $P$  jest kierunkiem składowych, które się odejmują, czy składowych, które się dodają? g) Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola?



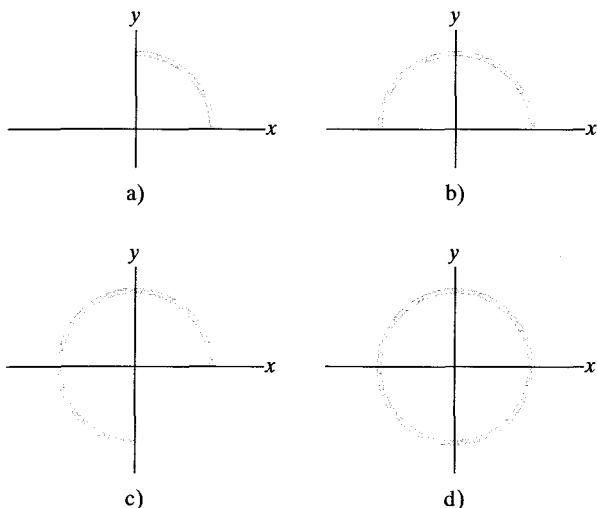
Rys. 23.22. Pytanie 5

6. Trzy nieprzewodzące pręty o kształcie łuku o tym samym promieniu krzywizny są jednorodnie naładowane. Pręt *A* ma ładunek  $+2Q$  i zajmuje łuk odpowiadający kątowi  $30^\circ$ , pręt *B* ma ładunek  $+6Q$  i zajmuje łuk odpowiadający kątowi  $90^\circ$ , pręt *C* ma ładunek  $+4Q$  i zajmuje łuk odpowiadający kątowi  $60^\circ$ . Uszereguj pręty według ich liniowej gęstości ładunku, zaczynając od największej.



Rys. 23.24. Pytanie 8

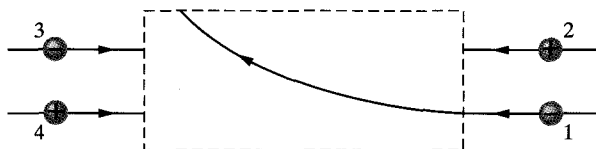
7. Na rysunku 23.23a przedstawiono plastikowy pręt o kolistym kształcie, jednorodnie naładowany ładunkiem  $+Q$ , który wytwarza pole elektryczne o wartości natężenia  $E$  w środku krzywizny pręta (w początku układu). Na rysunkach 23.23b, c i d przedstawiono inne pręty kolisty, naładowane jednorodnie, z ładunkiem kolejno powiększonym o  $+Q$ , aż do wypełnienia całego okręgu. Piąty rozkład (który oznaczmy przez (e)) jest taki sam, jak w (d), ale pręt w czwartej ćwiartce ma ładunek  $-Q$ . Uszereguj te rozkłady zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego w środku krzywizny, zaczynając od największego.



Rys. 23.23. Pytanie 7

8. Na rysunku 23.24 elektron *e* przechodzi przez mały otwór w płycie *A*, poruszając się w kierunku płyty *B*. Jednorodne pole elektryczne w obszarze między płytami spowalnia elektron bez odchylenia. a) Jaki jest kierunek natężenia pola? b) Cztery inne cząstki również przechodzą przez małe otwory w płycie *A* lub w płycie *B*, wpadając w obszar między płytami. Trzy z nich mają ładunki  $+q_1$ ,  $+q_2$  i  $-q_3$ , czwarta (oznaczona przez *n*) jest neutronem, który jest cząstką obojętną elektrycznie. Czy prędkość każdej z tych czterech cząstek rośnie, maleje, czy pozostaje taka sama w obszarze między płytami?

9. Na rysunku 23.25 przedstawiono tor ujemnie naładowanej cząstki 1 w prostokątnym obszarze jednorodnego pola elektrycznego; cząstka jest odchylana do góry strony. a) Czy natężenie pola elektrycznego jest skierowane w lewo, w prawo, do góry, czy w dół strony? b) Na rysunku są przedstawione trzy inne cząstki naładowane, wpadające w obszar pola elektrycznego. Które cząstki zostaną odchylone do góry strony, a które w dół?



Rys. 23.25. Pytanie 9

10. a) Czy dla dipola ze sprawdzianu 5 przy obrocie od ustawienia 1 do ustawienia 2 praca wykonana nad nim przez pole jest dodatnia, ujemna, czy równa zero? b) Jeśli dipol obraca się od ustawienia 1 do ustawienia 4, to czy praca wykonana przez pole jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w (a)?

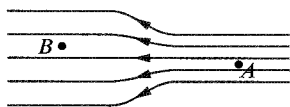
11. Energie potencjalne związane z czterema ustawieniami dipola elektrycznego w polu elektrycznym wynoszą: 1)  $-5E_{p0}$ , 2)  $-7E_{p0}$ , 3)  $3E_{p0}$ , 4)  $5E_{p0}$ , gdzie wartość  $E_{p0}$  jest dodatnia. Uszereguj ustawienia: a) zgodnie z wartością kąta między elektrycznym momentem dipolowym  $\vec{p}$  i natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$ , b) według wartości momentu siły działającego na dipol elektryczny, zaczynając od wartości największych.

12. Jeśli przejdziemy po dywanie z pewnego materiału podczas suchego dnia i następnie dotkniemy metalowej klamki w drzwiach lub (dla większej zabawy) czyjś karku, to możemy spowodować powstanie iskry. Dlaczego pojawia się iskra? (Jasność i głośność iskry można zwiększyć przez dotknięcie wyciągniętym palcem lub, nawet lepiej, końcem metalowego klucza).

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

## 23.3. Linie pola elektrycznego

1. Na rysunku 23.26 przedstawiono linie pola elektrycznego, których wzajemna odległość w lewej części rysunku jest dwa razy większa niż w prawej. a) Jeśli wartość natężenia pola w punkcie A wynosi  $40 \text{ N/C}$ , to jaka siła działa na proton w punkcie A? b) Jaka jest wartość natężenia pola w punkcie B?



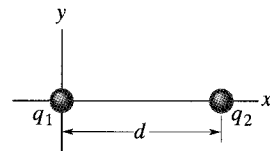
Rys. 23.26. Zadanie 1

2. Narysuj linie pola elektrycznego w obszarach między i poza dwoma współśrodkowymi powłokami sferycznymi, gdy na wewnętrznej powłoce jest jednorodnie rozłożony ładunek dodatni  $q_1$ , a na powłoce zewnętrznej jednorodnie rozłożony ładunek ujemny  $-q_2$ . Rozważ przypadki, gdy  $q_1 > q_2$ ,  $q_1 = q_2$  i  $q_1 < q_2$ .
3. Narysuj linie pola elektrycznego dla cienkiej, kołowej, jednorodnie naładowanej tarczy o promieniu  $R$ . (Wskazówka: Rozważ jako graniczne przypadki punkty leżące blisko tarczy, gdzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane prostopadłe do powierzchni i punkty bardzo odległe od niej, gdzie pole elektryczne przypomina pole ładunku punktowego).

## 23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego

4. Jaka jest wartość ładunku punktowego, który wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $1 \text{ N/C}$ , w punktach odległych o  $1 \text{ m}$ ?
5. Jaka jest wartość ładunku punktowego, który w odległości  $50 \text{ cm}$  wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $2 \text{ N/C}$ ?
6. Dwie cząstki, których ładunki mają jednakowe wartości równe  $2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ , lecz przeciwne znaki, znajdują się w odległości  $15 \text{ cm}$  od siebie. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w środku odcinka łączącego cząstki.
7. Jądro atomu plutonu-239 o liczbie atomowej  $Z = 94$  ma promień równy  $6,64 \text{ fm}$ . Zakładamy, że ładunek dodatni jest równomiernie rozłożony w obszarze jądra. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego, wytworzonego na powierzchni jądra przez ten ładunek dodatni.

8. Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe  $q_1 = +1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  i  $q_2 = +3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ , znajdujące się w odległości  $d = 10 \text{ cm}$ . Wykreśl wypadkowe natężenie pola elektrycznego  $E(x)$  w zależności od  $x$  dla dodatnich i ujemnych wartości  $x$ , przyjmując wartość  $E$  za dodatnią, jeśli wektor  $\vec{E}$  jest skierowany w prawo i za ujemną, jeśli wektor  $\vec{E}$  jest skierowany w lewo.

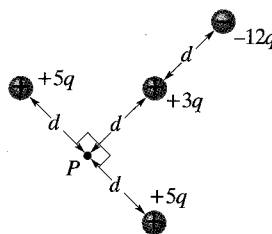


Rys. 23.27. Zadania 8 i 10

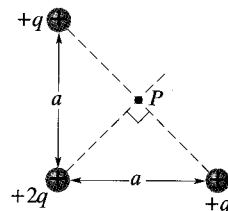
9. Dwa ładunki punktowe  $q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  i  $q_2 = -4q_1$  znajdują się w odległości  $50 \text{ cm}$  od siebie. Znajdź punkt na linii prostej, przechodzącej przez te ładunki, w którym natężenie pola elektrycznego jest równe zero. www

10. a) Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe  $q_1 = -5q$  i  $q_2 = +2q$ , znajdujące się w odległości  $d$ . Wyznacz położenie punktu (lub punktów), w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez te dwa ładunki jest równe zero. b) Narysuj linie wypadkowego pola elektrycznego.

11. Jaka wartość w punkcie P ma natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez cztery ładunki punktowe, przedstawione na rysunku 23.28?



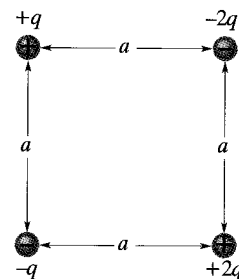
Rys. 23.28. Zadanie 11



Rys. 23.29. Zadanie 12

12. Wyznacz kierunek i oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P, wytworzonego przez trzy ładunki punktowe przedstawione na rysunku 23.29.

13. Jaka wartość i kierunek ma natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu na rysunku 23.30, jeśli  $q = 1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  i  $a = 5 \text{ cm}$ ? www



Rys. 23.30. Zadanie 13

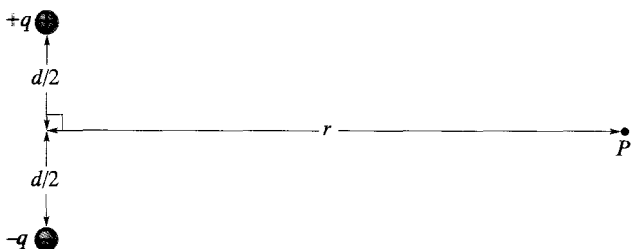
## 23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego

14. Przyjmij, że na rysunku 23.8 obydwa ładunki są dodatnie. Zakładając, że  $z \gg d$  pokaż, że natężenie  $E$  w punkcie  $P$  na tym rysunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2}.$$

15. Oblicz elektryczny moment dipolowy układu złożonego z elektronu i protonu znajdujących się w odległości 4,3 nm od siebie.

16. Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ , wytworzonego przez dipol elektryczny na rysunku 23.31. Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $r \gg d$  na symetrycznej odcinka łączącego ładunki. Skorzystaj z wartości i kierunku elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ .

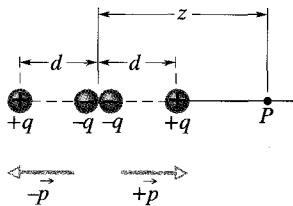


Rys. 23.31. Zadanie 16

17. \* Kwadrupol elektryczny. Na rys. 23.32 przedstawiono kwadrupol elektryczny. Składa się on z dwóch dipoli o momentach dipolowych o takich samych wartościach i przeciwnych kierunkach. Pokaż, że wartość natężenia  $E$  na osi kwadrupola w punkcie  $P$  w odległości  $z$  od jego środka (przy założeniu  $z \gg d$ ) wynosi:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

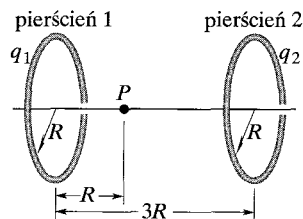
gdzie wielkość  $Q (= 2qd^2)$  nosi nazwę elektrycznego momentu kwadrupolowego rozważanego rozkładu ładunków.



Rys. 23.32. Zadanie 17

## 23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

18. Na rysunku 23.33 przedstawiono dwa równoległe nieprzewodzące pierścienie, których środki znajdują się na prostej, prostopadłej do obydwu pierścieni. Pierścień 1 o promieniu  $R$  jest jednorodnie naładowany ładunkiem  $q_1$ ; pierścień 2 o tym samym promieniu jest jednorodnie naładowany ładunkiem  $q_2$ . Pierścienie znajdują się w odległości  $3R$ . Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  na wspólnej osi, w odległości  $R$  od pierścienia 1 wynosi zero. Jaki jest stosunek ładunków  $q_1/q_2$ ?



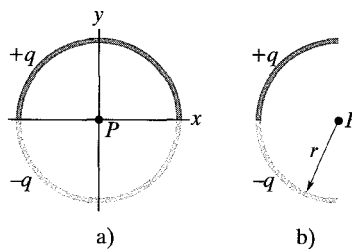
Rys. 23.33. Zadanie 18

19. Elektron może poruszać się wzdłuż osi symetrii naładowanego pierścienia o promieniu  $R$ , omawianego w paragrafie 23.6. Pokaż, że siła elektrostatyczna, działająca na elektron może spowodować jego drgania wokół środka pierścienia z częstotliwością kątową równą:

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem pierścienia, a  $m$  — masą elektronu.

20. Na rysunku 23.34a przedstawiono dwa zakrzywione pręty plastikowe, jeden o ładunku  $+q$  i drugi o ładunku  $-q$ , które tworzą okrąg o promieniu  $R$  w płaszczyźnie  $xy$ . Oś  $x$  przechodzi przez punkty łączące pręty. W obydwu prętach ładunek jest rozłożony jednorodnie. Jaką wartość i kierunek ma natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego w środku okręgu  $P$ ?



Rys. 23.34. Zadania 20 i 21

21. Cienki szklany pręt ma kształt półokręgu o promieniu  $r$ . Ładunek  $+q$  jest rozłożony jednorodnie w górnej połowie, a ładunek  $-q$  — w dolnej połowie (rys. 23.34b). Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w środku półokręgu  $P$ .

22. Punkt  $P$  leży osi symetrii naładowanego jednorodnie pierścienia o promieniu  $R$ . W jakiej odległości od środka tego pierścienia powinien znajdować się punkt  $P$ , aby wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek na pierścieniu była w tym punkcie największa?

23. Na rysunku 23.35 przedstawiono nieprzewodzący pręt o długości  $L$ , naładowany jednorodnie ładunkiem  $-q$ . a) Ile wynosi liniowa gęstość ładunku pręta? b) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  w odległości  $a$  od końca pręta? c) Jeśli



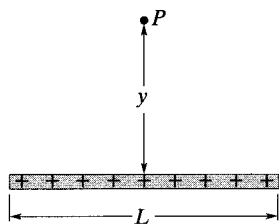
Rys. 23.35. Zadanie 23

punkt  $P$  znajdowałby się bardzo daleko od pręta w porównaniu z  $L$ , to pręt przypominałby ładunek punktowy. Pokaż, że wynik z (b) redukuje się do pola elektrycznego ładunku punktowego dla  $a \gg L$ .

24. Cienki nieprzewodzący pręt o skończonej długości  $L$  jest naładowany jednorodnie ładunkiem  $q$ . Pokaż, że:

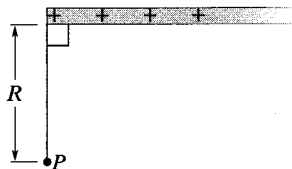
$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

określa wartość natężenia  $E$  pola elektrycznego w punkcie  $P$  na symetrycznej pręta (rys. 23.36).



Rys. 23.36. Zadanie 24

25\*. Na rysunku 23.37 przedstawiono nieprzewodzący pręt w kształcie półprostej, naładowany jednorodnie z gęstością liniową  $\lambda$ . Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  tworzy kąt  $45^\circ$  z prętem i że wynik jest niezależny od odległości  $R$ . (Wskazówka: Znajdź niezależnie równoległą i prostopadłą (do pręta) składową natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$  i porównaj te składowe).



Rys. 23.37. Zadanie 25

### 23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

26. Górna powierzchnia tarczy o promieniu 2,5 cm jest naładowana z gęstością powierzchniową  $5,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę w punkcie leżącym na osi symetrii prostopadłej do tarczy, w odległości 12 cm od tarczy?

27. W jakiej odległości od środka jednorodnie naładowanej plastikowej tarczy o promieniu  $R$  (na jej osi symetrii) wartość natężenia pola elektrycznego jest równa połowie tej wartości w środku tarczy?

### 23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

28. W polu elektrycznym elektron porusza się w kierunku wschodnim z przyspieszeniem  $1,8 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2$ . Określ wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego.

29. Spoczywający początkowo elektron znalazł się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ . Oblicz przyspieszenie elektronu (pomiń siłę ciężkości).

30. Cząstka  $\alpha$  (jądro atomu helu) ma masę  $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  i ładunek  $+2e$ . Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego, w którym siła elektrostatyczna zrównoważy siłę ciężkości działającą na tę cząstkę?

31. Oblicz wartość siły oddziaływania dipola elektrycznego o momencie dipolowym  $3,6 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$  na elektron, znajdujący się na osi dipola, w odległości 25 nm od jego środka. Załóż, że ta odległość jest duża w porównaniu z odległością ładunków dipola.

32. Wilgotne powietrze ulega przebiciu (jego cząsteczki ulegają jonizacji) w polu elektrycznym o natężeniu  $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ . Jaka jest wartość siły elektrostatycznej, działającej w takim polu na: a) elektron b) jon jednododatni?

33. Naładowana chmura wytwarza pole elektryczne w powietrzu nad powierzchnią Ziemi. Na cząstkę o ładunku  $-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ , znajdującą się w tym polu, działa siła elektrostatyczna o wartości  $3 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ , skierowana w dół. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego? b) Jaka jest wartość i kierunek siły elektrostatycznej, działającej na proton umieszczony w tym polu? c) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej na proton? d) Ile wynosi stosunek wartości siły elektrostatycznej do wartości siły grawitacyjnej, działającej na proton?

34. W atmosferze w pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  o średniej wartości około  $150 \text{ N/C}$  jest skierowane w dół. Chcemy „zawiesić” w powietrzu kulę siarkową o ciężarze 4,4 N przez jej naładowanie. a) Znajdź wartość i znak ładunku, jakiego trzeba użyć. b) Dlaczego taki eksperyment nie ma szerszego zastosowania?

35. Stosując pola elektryczne do przyspieszania protonów w „działach protonowych” można wytwarzać wiązki szybkich protonów. a) Jakiego przyspieszenia dozna proton, jeśli natężenie pola elektrycznego „działa” wynosi  $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ ? b) Jaką prędkość uzyska proton, jeśli pole będzie przyspieszało proton na drodze 1 cm?

36. Elektron, którego prędkość jest równa  $5 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ , wpada w pole elektryczne o natężeniu  $1 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ , poruszając się wzdłuż linii pola w kierunku, w którym jego ruch jest opóźniony. a) Jaką drogę przebywa elektron w polu do chwili zatrzymania? b) Ile czasu upłynie do tego momentu? c) Jeśli obszar pola elektrycznego ma tylko 8 mm długości (za mało do zatrzymania w nim elektronu), to jaka część początkowej energii kinetycznej elektronu zostanie w tym obszarze stracona?

37. W doświadczeniu Millikana kropelka oleju o promieniu  $1,64 \mu\text{m}$  i gęstości  $0,851 \text{ g/cm}^3$  zawisła w komorze C (rys. 23.13), gdy włączono pole elektryczne o natężeniu  $1,92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ , skierowane w dół. Znajdź ładunek kropelki jako wielokrotność  $e$ .

38. W jednym ze swych doświadczeń Millikan otrzymał między innymi następujące wartości ładunku, jaki w różnych chwilach znajdował się na pojedynczej kropelce:

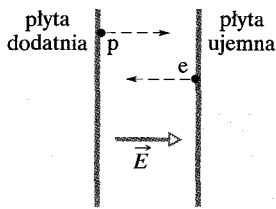
$6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$13,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Jaką wartość ładunku elementarnego  $e$  można przyjąć na podstawie tych danych?

39. W obszarze między dwiema przeciwnie naładowanymi płytami istnieje jednorodne pole elektryczne. Elektron, początkowo spoczywający przy ujemnie naładowanej płycie uderzył po czasie  $1,5 \cdot 10^{-8}$  s w przeciwnie naładowaną płytę, znajdującą się w odległości 2 cm. a) Ile wynosiła prędkość elektronu w momencie, gdy zderzył się z drugą płytą? b) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ ?

40. W pewnej chwili składowe prędkości elektronu, poruszającego się między dwiema naładowanymi równoległymi płytami wynoszą  $v_x = 1,5 \cdot 10^5$  m/s i  $v_y = 3 \cdot 10^3$  m/s. Załóż, że pole elektryczne między płytami jest dane przez  $\vec{E} = (120 \text{ N/C})\hat{j}$ . a) Ile wynosi przyspieszenie elektronu? b) Ile wynosić będzie prędkość elektronu, gdy jego współrzędna  $x$  zmieni się o 2 cm?

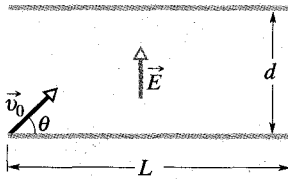
41. Dwie duże równoległe płyty miedziane znajdują się w odległości 5 cm od siebie, a między nimi wytworzone jest jednorodne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 23.38. Spoczywający początkowo elektron opuszcza płytę ujemną w tej samej chwili, w której proton jest uwolniony z płyty dodatniej. Pomijając siłę oddziaływania wzajemnego cząstek, znajdź odległość cząstek od płyty dodatniej w chwili mijania się. (Czy nie jest dziwne, że przy rozwiązywaniu tego zadania nie musimy znać natężenia pola elektrycznego?)



Rys. 23.38. Zadanie 41

42. Klocek o masie 10 g i ładunku  $+8 \cdot 10^{-5}$  C umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E} = (3 \cdot 10^3)\hat{i} - 600\hat{j}$ , gdzie składowe  $\vec{E}$  podano w niutonach na kulomb (N/C). a) Jaka jest wartość i kierunek siły, działającej na klocek? b) Jeśli klocek spoczywał (w chwili  $t = 0$  s) w początku układu, to jakie będą jego współrzędne w chwili  $t = 3$  s?

43. Przez naładowanie dolnej płyty dodatnio i górnej płyty ujemnie wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $2 \cdot 10^3$  N/C, skierowane do góry (rys. 23.39). Płyty mają długość  $L = 10$  cm i znajdują się w odległości  $d = 2$  cm. Z lewej krawędzi dolnej płyty wystrzelono elektron w obszar między płytami. Początkowa prędkość  $\vec{v}_0$  elektronu tworzy kąt  $\theta = 45^\circ$  z dolną płytą i ma wartość  $6 \cdot 10^6$  m/s. a) Czy elektron uderzy w którąś płytę? b) Jeśli tak, to w którą płytę i w jakiej odległości, patrząc w kierunku poziomym, od lewej krawędzi płyty?



Rys. 23.39. Zadanie 43

### 23.9. Dipol w polu elektrycznym

44. Dipol elektryczny, składający się z ładunków o wartości 1,5 nC, znajdujących się w odległości 6,2  $\mu\text{m}$  od siebie, umieszczony jest w polu elektrycznym o natężeniu 1100 N/C. a) Jaka jest wartość elektrycznego momentu dipolowego dipola? b) Jaka jest różnica między energiami potencjalnymi, odpowiadającymi równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu dipola względem natężenia pola?

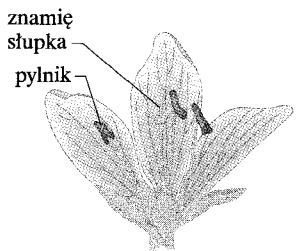
45. Dipol elektryczny, składający się z ładunków  $+2e$  i  $-2e$ , umieszczonych w odległości 0,78 nm od siebie, znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $3,4 \cdot 10^6$  N/C. Oblicz wartość momentu siły działającego na dipol, jeśli moment dipolowy jest: a) równoległy, b) prostopadły, c) antyrównoległy do natężenia pola elektrycznego.

46. Znajdź pracę potrzebną do obrócenia dipola elektrycznego o  $180^\circ$  w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  — wynik wyraż przez wartość  $p$  momentu dipolowego, wartość  $E$  natężenia pola i początkowy kąt  $\theta_0$  między wektorami  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$ .

47. Znajdź częstość drgań dipola elektrycznego o momencie dipolowym  $\vec{p}$  i momencie bezwładności  $I$  dla małych amplitud drgań wokół jego położenia równowagi, w jednorodnym polu elektrycznym o wartości natężenia  $E$ .

#### Zadanie dodatkowe

48. Zapylenie kwiatów zależy od owadów, przenoszących ziarenka pyłku z kwiatu na kwiat. Jeden ze sposobów, w jaki pszczoły mogą to robić, polega na elektrycznym zbieraniu ziaren pyłku, gdyż pszczoły są zwykle dodatnio naładowane. Gdy pszczoła zawisa w pobliżu elektrycznie izolowanego pylnika kwiatu (rys. 23.40), ziarenka pyłku (umiarkowanie przewodzące) padają na pszczołę i są przez nią przenoszone do następnego kwiatu. Gdy pszczoła zbliży się do elektrycznie uziemionego (przez wnętrze kwiatu) znamienia słupka, ziarenka pyłku spadają z pszczoły na uziemione znamię i zapylają kwiat. a) Zakładając, że pszczoła z typowym ładunkiem 45 pC jest kulistym przewodnikiem, znajdź wartość natężenia pola elektrycznego pszczoły w obszarze pylnika, w odległości 2 cm od środka pszczoły. b) Czy pole to jest jednorodne, czy niejednorodne? c) Wyjaśnij, dlaczego ziarenka pyłku padają na pszczołę, przylegają do niej podczas lotu i potem spadają z pszczoły na uziemione znamię. (Wskazówka: Spójrz na rys. 22.5). Gdy ziarenko pyłku przykleja się do pszczoły, to czy istnieje elektryczny kontakt pyłku z pszczołą, w wyniku czego ładunek ziarenka pyłku ulega zmianie?



Rys. 23.40. Zadanie 48

# 24 Prawo Gaussa

Wspaniale wyglądające błyskawice nad miastem podczas każdego uderzenia pioruna wysyłają około  $10^{20}$  elektronów z chmury do ziemi.

Jak szeroka jest błyskawica?  
Skoro błyskawicę można obserwować nawet z odległości kilku kilometrów, to czy szerokość jej jest równa na przykład szerokości samochodu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





## 24.1. Nowe spojrzenie na prawo Coulomba

Środek masy ziemiaka można wyznaczyć doświadczalnie lub wykonując żmudne obliczenia, zawierające numeryczne obliczenie całki potrójnej. Jeśli jednak ziemiak byłby jednorodną elipsoidą, to biorąc pod uwagę jej symetrię, bez żadnych obliczeń potrafimy określić dokładnie, gdzie jest środek masy. Takie korzyści wynikają z symetrii. Symetria pojawia się we wszystkich działach fizyki; gdy tylko jest to możliwe, warto przekształcić prawa fizyki do postaci, która w pełni pozwoli wykorzystać ten fakt.

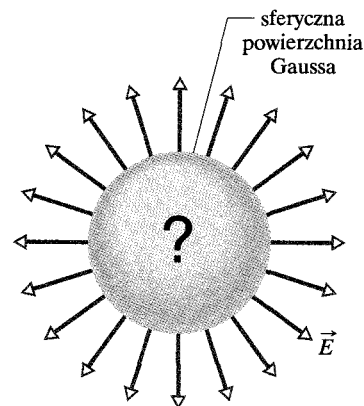
Prawo Coulomba jest podstawowym prawem elektrostatyki, ale nie jest wyrażone w postaci, która pozwalałaby w prostszy sposób wykonać obliczenia w przypadku występowania symetrii. W tym rozdziale poznasz nowe sformułowanie prawa Coulomba, wyprowadzone przez niemieckiego matematyka i fizyka Carla Friedricha Gaussa (1777–1855). Tego prawa, zwanego **prawem Gaussa**, można użyć do uwzględnienia szczególnej symetrii w rozważanym zagadnieniu. Dla zagadnień elektrostatyki jest ono w pełni równoważne prawu Coulomba; które z nich wybierzemy, zależy tylko od rozważanego zagadnienia.

Dla prawa Gaussa istotne jest wprowadzenie umownej zamkniętej powierzchni, zwanej **powierzchnią Gaussa**. Może mieć ona dowolny kształt, ale najbardziej użyteczny jest wybór powierzchni naśladującej symetrię rozważanego zagadnienia. Dlatego powierzchnia Gaussa będzie często sferą, powierzchnią walcową lub powierzchnią innej symetrycznej bryły. Musi być ona zawsze powierzchnią *zamkniętą*, tak aby można było wyraźnie rozróżnić punkty wewnątrz powierzchni, na powierzchni i na zewnątrz powierzchni.

Wyobraź sobie, że wybraliśmy powierzchnię Gaussa wokół rozkładu ładunków. Wtedy wkracza prawo Gaussa:

► Prawo Gaussa określa związek między natężeniem pola elektrycznego w punktach na (zamkniętej) powierzchni Gaussa i całkowitym ładunkiem objętym tą powierzchnią.

Na rysunku 24.1 przedstawiono prostą sytuację, w której powierzchnia Gaussa jest sferą. Załóżmy, że w każdym punkcie powierzchni jest określone natężenie pola elektrycznego i że wszystkie wektory natężenia mają taką samą wartość i są skierowane radialnie na zewnątrz. Nie wiedząc nic o prawie Gaussa, możemy się domyślać, że powierzchnia Gaussa musi wtedy obejmować pewien wypadkowy ładunek dodatni. Jeśli *znamy* prawo Gaussa, to możemy obliczyć wypadkowy ładunek dodatni, objęty przez powierzchnię Gaussa. Aby wykonać obliczenie, wystarczy tylko wiedzieć, „ile” pola elektrycznego przenika przez powierzchnię — miarą tego „ile” jest *strumień* pola elektrycznego, przenikający przez powierzchnię.

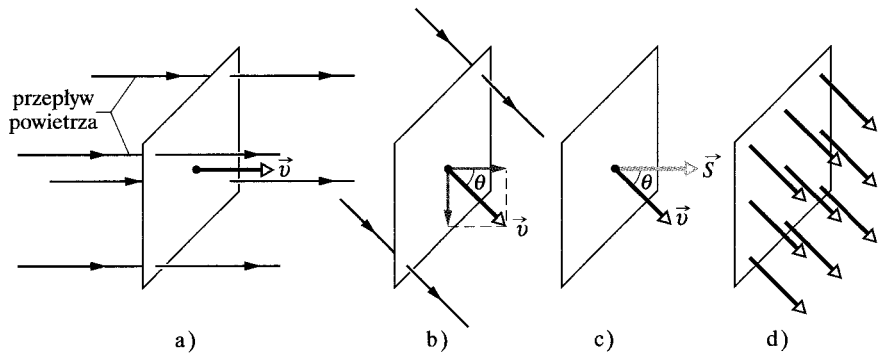


Rys. 24.1. Sferyczna powierzchnia Gaussa. Jeśli wektory natężenia pola elektrycznego mają jednakową wartość i są skierowane na zewnątrz we wszystkich punktach powierzchni, to można wnioskować, że wewnątrz powierzchni znajduje się wypadkowy dodatni rozkład ładunku, który ma symetrię sferyczną

## 24.2. Strumień

Załóżmy, że przez małą kwadratową ramkę o polu powierzchni  $S$  przepływa szeroki strumień powietrza o stałej prędkości  $\vec{v}$  (rys. 24.2a). Oznaczmy przez  $\Phi$  *szybkość przepływu przez powierzchnię*, czyli objętość powietrza, przepływającego

Rys. 24.2. a) Jednorodny strumień powietrza o prędkości  $\vec{v}$  jest prostopadły do płaszczyzny kwadratowej ramki o polu powierzchni  $S$ . b) Składowa prędkości  $\vec{v}$  prostopadła do płaszczyzny ramki jest równa  $v \cos \theta$ , gdzie  $\theta$  jest kątem między  $\vec{v}$  i normalną (prostopadłą) do płaszczyzny. c) Wektor powierzchni  $\vec{S}$  jest prostopadły do płaszczyzny ramki i tworzy kąt  $\theta$  z  $\vec{v}$ . d) Pole prędkości na powierzchni ramki.



przez ramkę w jednostce czasu. Szybkość przepływu zależy od kąta między wektorem  $\vec{v}$  i płaszczyzną ramki. Jeśli prędkość  $\vec{v}$  jest prostopadła do płaszczyzny, to szybkość przepływu  $\Phi$  jest równa  $vS$ .

Jeśli prędkość  $\vec{v}$  jest równoległa do płaszczyzny ramki, to powietrze wcale nie przechodzi przez ramkę i  $\Phi$  jest równa zero. Dla pośredniego kąta  $\theta$  szybkość  $\Phi$  zależy od składowej prędkości  $\vec{v}$ , prostopadłej do płaszczyzny ramki (rys. 24.2b). Składowa ta jest równa  $v \cos \theta$ , a więc szybkość przepływu przez powierzchnię wynosi:

$$\Phi = (v \cos \theta)S. \quad (24.1)$$

Ta szybkość przepływu przez powierzchnię jest przykładem **strumienia** — tutaj *strumienia objętościowego*. Zanim przedyskutujemy strumień występujący w elektrostatyce, napiszemy wzór (24.1), korzystając z wektorów.

W tym celu zdefiniujemy najpierw *wektor powierzchni*  $\vec{S}$  jako wektor, którego wartość jest równa polu powierzchni (tu polu powierzchni ograniczonej ramką) i który jest skierowany prostopadłe do powierzchni (rys. 24.2c). Możemy wtedy napisać wzór (24.1) jako iloczyn skalarny wektora prędkości  $\vec{v}$  strumienia powietrza i wektora powierzchni  $\vec{S}$  ograniczonej ramką:

$$\Phi = vS \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{S}, \quad (24.2)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{S}$ .

Nazwa „strumień”, kojarzy się z „płynięciem”. Takie określenie jest całkiem naturalne, gdy mówimy o przepływie objętości powietrza przez ramkę. Wzór (24.2) można jednak traktować bardziej abstrakcyjnie. Zauważ, że każdemu punktowi strumienia powietrza, przechodzącego przez ramkę, możemy przypisać wektor prędkości (rys. 24.2d). Zbiór wszystkich takich wektorów tworzy *pole prędkości* i wzór (24.2) możemy interpretować, jako określenie *strumienia pola prędkości przez ramkę*. Przy tej interpretacji strumień nie oznacza, że coś przechodzi przez tę powierzchnię — oznacza właściwie iloczyn pola powierzchni i pola pewnej wielkości, określonej na tej powierzchni.

### 24.3. Strumień pola elektrycznego

W celu zdefiniowania strumienia pola elektrycznego rozważmy rysunek 24.3, na którym przedstawiono pewną dowolną (asymetryczną) powierzchnię Gaussa

w niejednorodnym polu elektrycznym. Podzielmy powierzchnię na małe kwadraty o polu powierzchni  $\Delta S$ , wybierając każdy kwadrat na tyle mały, aby można było zaniedbać jego krzywiznę i rozważać poszczególne kwadraty jako płaskie. Każdy taki element powierzchni będziemy opisywać wektorem powierzchni  $\Delta \vec{S}$ , którego wartość jest równa polu powierzchni  $\Delta S$  i który jest skierowany prostopadłe do powierzchni Gaussa, na zewnątrz tej powierzchni.

Wybraliśmy dowolnie małe kwadraty, więc natężenie pola elektrycznego możemy uważać za stałe na powierzchni danego kwadratu. Wektory  $\Delta \vec{S}$  i  $\vec{E}$  dla każdego kwadratu tworzą ze sobą pewien kąt  $\theta$ . Na rysunku 24.3 pokazano w powiększeniu trzy kwadraty (1, 2 i 3) na powierzchni Gaussa i kąt  $\theta$  dla każdego z nich.

Zacznijmy od wstępnej definicji strumienia pola elektrycznego dla powierzchni Gaussa z rysunku 24.3:

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}. \quad (24.3)$$

Ze wzoru tego wynika, że musimy wziąć pod uwagę każdy kwadrat na powierzchni Gaussa, obliczyć iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$  dwóch wektorów  $\vec{E}$  i  $\Delta \vec{S}$  tam określonych i zsumować wyniki algebraicznie (czyli z uwzględnieniem znaków) dla wszystkich kwadratów, tworzących powierzchnię. Znak, jaki otrzymujemy przy obliczaniu każdego iloczynu skalarnego określa, czy strumień, przenikający przez dany kwadrat jest dodatni, ujemny, czy zerowy. Kwadraty (jak np. 1), dla których natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane do wnętrza powierzchni, dają ujemny wkład do sumy ze wzoru (24.3). Kwadraty (jak 2), dla których wektor  $\vec{E}$  leży w płaszczyźnie kwadratu, dają wkład zerowy. Kwadraty (jak 3), dla których natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane na zewnątrz powierzchni, dają wkład dodatni.

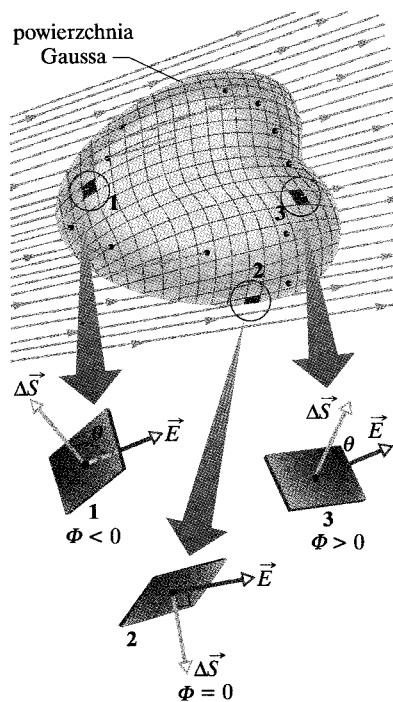
Dokładną definicję strumienia pola elektrycznego, przenikającego przez zamkniętą powierzchnię otrzymujemy przez przejście do coraz mniejszych pól powierzchni kwadratów (rys. 24.3), osiągając w granicy  $dS$ . Wektory powierzchni dążą wtedy do różniczek  $d\vec{S}$ . Suma ze wzoru (24.3) staje się całką i jako definicję strumienia elektrycznego otrzymujemy:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}). \quad (24.4)$$

Całkę należy obliczyć po całej (zamkniętej) powierzchni (co zaznaczamy kółkiem na całce). Strumień pola elektrycznego jest skalarem i jego jednostką w układzie SI jest niuton razy metr kwadratowy na kulomb ( $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ).

Wzór (24.4) możemy zinterpretować następująco: przypomnij sobie, że gęstość linii pola elektrycznego przechodzących przez powierzchnię jest proporcjonalna do natężenia pola  $\vec{E}$  na powierzchni. Oznacza to, że wartość  $E$  jest proporcjonalna do liczby linii pola elektrycznego na jednostkę powierzchni. Stąd iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  we wzorze (24.4) jest proporcjonalny do liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez powierzchnię  $d\vec{S}$ . Całkowanie we wzorze (24.4) odbywa się po powierzchni Gaussa, która jest zamknięta, a więc widzimy, że:

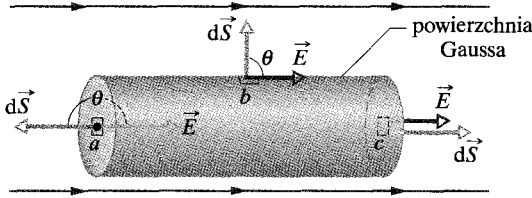
➤ Strumień elektryczny  $\Phi$  przenikający przez powierzchnię Gaussa jest proporcjonalny do całkowitej liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez tę powierzchnię.



Rys. 24.3. Powierzchnia Gaussa dowolnego kształtu, znajdująca się w polu elektrycznym. Powierzchnia jest podzielona na małe kwadraty o polu powierzchni  $\Delta S$ . Pokazano wektory natężenia pola  $\vec{E}$  i wektory powierzchni  $\Delta \vec{S}$  dla trzech przykładowych kwadratów, oznaczonych 1, 2 i 3

## Przykład 24.1

Na rysunku 24.4 przedstawiono powierzchnię Gaussa w postaci powierzchni walca o promieniu  $R$ , umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , przy czym oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola. Ile wynosi strumień  $\Phi$  pola elektrycznego, przenikającego przez tę zamkniętą powierzchnię?



**Rys. 24.4.** Przykład 24.1. Walcowa powierzchnia Gaussa, zamknięta przez denka, znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym. Oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola

### ROZWIĄZANIE:

Strumień elektryczny przez powierzchnię możemy znaleźć przez scałkowanie iloczynu skalarnego  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po powierzchni Gaussa. Możemy to zrobić, przedstawiając strumień jako sumę trzech całek: po lewym denku  $a$ , po powierzchni bocznej walca  $b$  i po prawym denku  $c$ . Ze wzoru (24.4) mamy więc:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (24.5)$$

Dla wszystkich punktów na lewym denku kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{S}$  wynosi  $180^\circ$  i wartość  $E$  natężenia pola jest stała. Stąd:

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 180^\circ) dS = -E \int dS = -ES,$$

gdzie  $\int dS$  daje pole powierzchni denka  $S (= \pi R^2)$ . Podobnie dla prawego denka, gdzie dla wszystkich punktów  $\theta = 0^\circ$ , mamy:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 0^\circ) dS = ES.$$

Na koniec, dla powierzchni bocznej walca, gdzie we wszystkich punktach kąt  $\theta = 90^\circ$ , mamy:

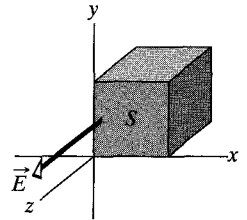
$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 90^\circ) dS = 0.$$

Podstawiając te wyniki do wzoru (24.5), otrzymujemy ostatecznie:

$$\Phi = -ES + 0 + ES = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten raczej nie zaskakuje, gdyż wszystkie linie pola, które reprezentują pole elektryczne, całkowicie przechodzą przez powierzchnię Gaussa i dają wypadkowy strumień równy zeru, bo wchodzą przez lewe denko i wychodzą przez prawe.

**SPRAWDZIAN 1:** Przedstawiona na rysunku powierzchnia Gaussa, w postaci powierzchni sześcianu o polu powierzchni ściany  $S$ , jest umieszczona w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , które jest skierowane w dodatnim kierunku osi  $z$ . Wyraż przez  $E$  i  $S$  strumień pola elektrycznego przenikającego przez: a) przednią ścianę (leżącą w płaszczyźnie  $xy$ ), b) tylną ścianę, c) górną ścianę, d) powierzchnię całego sześcianu.



## Przykład 24.2

Niejednorodne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$  przenika przez sześcienną powierzchnię Gaussa, przedstawioną na rys. 24.5 ( $E$  jest wyrażone w niutonach na kulomb, a  $x$  w metrach). Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, lewą ścianę i górną ścianę sześcianu.

### ROZWIĄZANIE:

Strumień elektryczny  $\Phi$  przez powierzchnię możemy obliczyć, całkując iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po każdej ze ścian.

**Prawa ściana:** Wektor powierzchni  $\vec{S}$  jest zawsze prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni Gaussa. Stąd wektor  $d\vec{S}$  dla prawej ściany sześcianu musi być skierowany w kierunku dodatnim osi  $x$ . Zapisując to za pomocą wektorów jednostkowych mamy więc:

$$d\vec{S} = dS\hat{i}.$$

Ze wzoru (24.4) strumień  $\Phi_p$ , przenikający przez prawą ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_p &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dS\hat{i}) \\ &= \int [(3x) \cdot (dS)\hat{i} \cdot \hat{i} + (4)(dS)\hat{j} \cdot \hat{i}] \\ &= \int (3xdS + 0) = 3 \int x dS. \end{aligned}$$

Aby obliczyć całkę po prawej ścianie, skorzystajmy z faktu, że  $x$  ma taką samą wartość  $x = 3$  m na całej ścianie. Możemy więc podstawić tę stałą wartość za  $x$  i otrzymamy:

$$\Phi_p = 3 \int 3dS = 9 \int dS.$$

Teraz całka daje nam po prostu pole powierzchni  $S = 4 \text{ m}^2$  dla prawej ściany i ostatecznie:

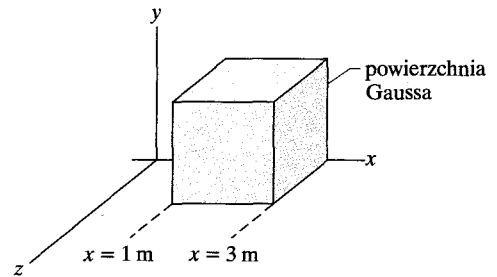
$$\Phi_p = (9 \text{ N/C})(4 \text{ m}^2) = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

*Lewa ściana:* Procedura obliczania strumienia, przenikającego przez lewą ścianę jest taka sama, jak dla prawej ściany. Jednak dwa czynniki ulegają zmianie. 1) Wektor powierzchni  $d\vec{S}$  jest skierowany w kierunku ujemnym osi  $x$  i stąd  $d\vec{S} = -dS\hat{i}$ . 2) W naszej całce znów występuje czynnik  $x$ , który ponownie jest stały na rozważanej ścianie. Obecnie, na lewej ścianie mamy jednak  $x = 1 \text{ m}$ . Po uwzględnieniu tych dwóch zmian strumień  $\Phi_1$  przez lewą ścianę wynosi

$$\Phi_1 = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

*Górna ściana:* Wektor powierzchni  $d\vec{S}$  jest skierowany w dodatnim kierunku osi  $y$  i stąd  $d\vec{S} = dS\hat{j}$ . Strumień  $\Phi_g$ , przenikający przez górną ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_g &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot dS\hat{j} = \int [(3x) \cdot (dS)\hat{i} \cdot \hat{j} + (4)(dS) \cdot \hat{j} \cdot \hat{j}] \\ &= \int (0 + 4dS) = 4 \int dS = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$



Rys. 24.5. Przykład 24.2. Powierzchnia Gaussa w postaci powierzchni sześcianu o jednej krawędzi na osi  $x$  znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym

## 24.4. Prawo Gaussa

Prawo Gaussa opisuje związek między strumieniem  $\Phi$  pola elektrycznego, przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i całkowitym ładunkiem  $q_{\text{wewn}}$ , zawartym *wewnątrz* tej powierzchni. Zgodnie z tym prawem:

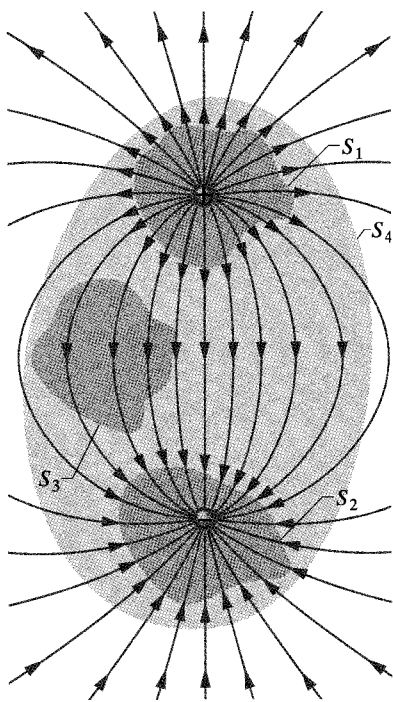
$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.6)$$

Po podstawieniu wzoru (24.4) definiującego strumień, prawo Gaussa możemy także zapisać w postaci:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.7)$$

Wzory (24.6) i (24.7) są słuszne tylko wtedy, gdy ładunek znajduje się w próżni lub (co jest praktycznie tym samym) w powietrzu. W paragrafie 26.8 zmodyfikujemy prawo Gaussa, aby uwzględnić sytuacje, gdy rozważamy takie materiały, jak: mika, olej czy szkło.

We wzorach (24.6) i (24.7) ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest algebraiczną sumą wszystkich dodatnich i ujemnych ładunków zawartych wewnątrz tej powierzchni i może być dodatni, ujemny lub zerowy. Uwzględniamy znak ładunku, zamiast używać tylko jego bezwzględnej wartości, ponieważ znak zawiera istotną informację o wypadkowym strumieniu przenikającym przez powierzchnię Gaussa. Jeśli ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest dodatni, to przeważa strumień *na zewnątrz*; jeśli ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest ujemny, to przeważa strumień *do wewnątrz*.



**Rys. 24.6.** Dwa ładunki punktowe o jednakowej wartości, ale o przeciwnym znaku i linie pola, reprezentujące wypadkowe natężenie wytworzonego przez nie pola elektrycznego. Pokazano przekrój czterech powierzchni Gaussa. Powierzchnia  $S_1$  otacza ładunek dodatni. Powierzchnia  $S_2$  otacza ładunek ujemny. Powierzchnia  $S_3$  nie otacza żadnego ładunku. Powierzchnia  $S_4$  otacza obydwa ładunki. Całkowity ładunek jest równy zero

Ładunek na zewnątrz powierzchni, bez względu na to, jak jest duży lub jak blisko się znajduje, nie jest włączony do członu  $q_{\text{wewn}}$  w prawie Gaussa. Dokładna postać rozkładu, czyli położenie ładunków wewnątrz powierzchni Gaussa także nie odgrywa roli; istotne po prawej stronie wzoru (24.7) są tylko wartość i znak wypadkowego ładunku, otoczonego powierzchnią Gaussa. Wielkość  $\vec{E}$  po lewej stronie wzoru (24.7) jest jednak natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez *wszystkie* ładunki zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz powierzchni Gaussa. Może się wydawać, że to jest niekonsekwencja, ale przypomnij sobie wynik z przykładu 24.1: pole elektryczne, wytworzone przez ładunki na zewnątrz powierzchni Gaussa daje zerowy wypadkowy strumień przenikający przez tę powierzchnię, bo tyle samo linii pola wytworzonego przez te ładunki pada na powierzchnię, co ją opuszcza.

Zastosujmy te idee do rysunku 24.6, na którym przedstawiono linie pola elektrycznego, wytworzonego przez dwa ładunki punktowe o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach. Przedstawiono także w przekroju cztery powierzchnie Gaussa. Rozważmy po kolei każdą z nich.

**Powierzchnia  $S_1$ .** We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wychodzą na zewnątrz. Stąd strumień pola elektrycznego przenikający przez tę powierzchnię jest dodatni, dodatni jest też całkowity ładunek wewnątrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa. (Zgodnie ze wzorem (24.6), jeśli strumień  $\Phi$  jest dodatni, to taki musi być też ładunek  $q_{\text{wewn}}$ ).

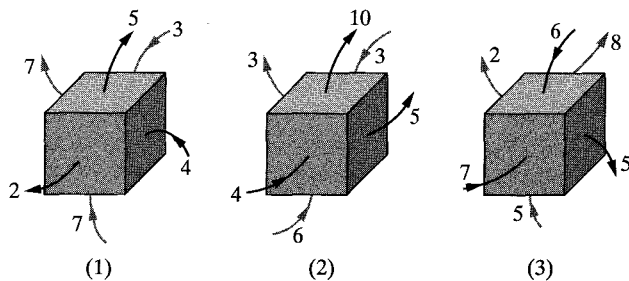
**Powierzchnia  $S_2$ .** We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wchodzą do wnętrza. Stąd strumień pola elektrycznego jest ujemny i taki jest też całkowity ładunek wewnątrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa.

**Powierzchnia  $S_3$ .** Ta powierzchnia nie otacza żadnego ładunku i stąd  $q_{\text{wewn}} = 0$ . Prawo Gaussa (wzór (24.6)) wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zero. Jest tak rzeczywiście, bo wszystkie linie pola przechodzą całkowicie przez powierzchnię, wchodząc u góry i wychodząc na dole.

**Powierzchnia  $S_4$ .** Całkowity ładunek wewnątrz tej powierzchni jest równy zero, bo otaczane ładunki, dodatni i ujemny, mają jednakowe wartości. Prawo Gaussa wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zero. Jest tak rzeczywiście, bo tyle samo linii opuszcza powierzchnię  $S_4$ , co na nią pada.

Co się stanie, gdy w pobliżu powierzchni  $S_4$  z rysunku 24.6 umieścimy na zewnątrz niej ogromny ładunek  $Q$ ? Rozkład linii pola z pewnością się zmieni, ale wypadkowy strumień dla każdej z czterech powierzchni Gaussa nie ulegnie zmianie. Jest to zrozumiałe, bo linie pola związane z dodanym ładunkiem  $Q$  będą całkowicie przechodziły przez każdą z czterech powierzchni Gaussa, nie dając wkładu do wypadkowego strumienia przez każdą z nich. Wartość  $Q$  nie jest uwzględniona w prawie Gaussa, bo  $Q$  leży na zewnątrz wszystkich czterech rozważanych powierzchni Gaussa.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których sześcienna powierzchnia Gaussa znajduje się w polu elektrycznym. Strzałki i liczby wskazują kierunki linii pola i wartości (w  $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ) strumienia, przenikającego przez każdą ze ścian każdego sześcianu. (Jaśniejsze strzałki dotyczą ścian niewidocznych). W których sytuacjach sześcián otacza: a) dodatni ładunek wypadkowy, b) ujemny ładunek wypadkowy, c) zerowy ładunek wypadkowy?



### Przykład 24.3

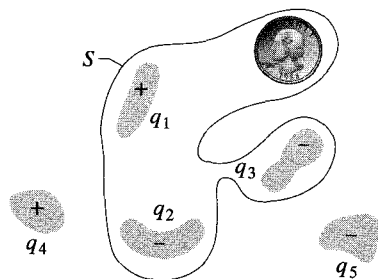
Na rysunku 24.7 przedstawiono pięć naładowanych kawałków plastiku i elektrycznie obojętną monetę oraz zaznaczono przekrój powierzchni Gaussa  $S$ . Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię, jeśli  $q_1 = q_4 = +3,1 \text{ nC}$ ,  $q_2 = q_5 = -5,9 \text{ nC}$  i  $q_3 = -3,1 \text{ nC}$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Całkowity strumień  $\Phi$  przenikający przez powierzchnię zależy od całkowitego ładunku  $q_{\text{wewn}}$ , objętego przez powierzchnię  $S$ . Oznacza to, że moneta oraz ładunki  $q_4$  i  $q_5$  nie dają wkładu do  $\Phi$ . Moneta nie daje wkładu, ponieważ jest obojętna, czyli zawiera jednakowe ilości ładunku dodatniego i ujemnego. Ładunki  $q_4$  i  $q_5$  nie dają wkładu, ponieważ znajdują się na zewnątrz powierzchni  $S$ . Stąd  $q_{\text{wewn}} = q_1 + q_2 + q_3$  i wzór (24.6) daje nam

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} \\ &= \frac{+3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} \\ &= -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Znak minus wskazuje, że przeważa strumień, przenikający przez powierzchnię do wewnątrz, bo wypadkowy ładunek objęty powierzchnią jest ujemny.

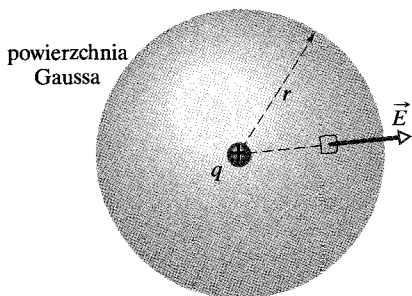


Rys. 24.7. Przykład 24.3. Pięć plastikowych naładowanych ciał i moneta o zerowym ładunku wypadkowym. Przedstawiono przekrój powierzchni Gaussa, która otacza trzy plastikowe ciała i monetę

## 24.5. Prawo Gaussa a prawo Coulomba

Jeśli prawo Gaussa i prawo Coulomba są sobie równoważne, to powinniśmy móc wyprowadzić jedno z drugiego. W tym paragrafie wyprowadzimy prawo Coulomba z prawa Gaussa. Skorzystamy przy tym z pewnych właściwości symetrii.

Na rysunku 24.8 przedstawiono dodatni ładunek punktowy  $q$ , wokół którego narysowano sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu  $r$ . Podzielmy tę powierzchnię na nieskończenie małe obszary o polu powierzchni  $dS$ . Z definicji,



Rys. 24.8. Sferyczna powierzchnia Gaussa, w której środku znajduje się w ładunek punktowy  $q$

wektor powierzchni  $d\vec{S}$  w dowolnym punkcie jest prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz. Z właściwości symetrii wynika, że w każdym punkcie natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  również jest prostopadłe do powierzchni i skierowane na zewnątrz. Kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{S}$  jest równy zero, więc wzór (24.7) możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = q_{\text{wewn}}, \quad (24.8)$$

gdzie  $q_{\text{wewn}} = q$ . Chociaż  $E$  zmienia się radialnie wraz z odległością od  $q$ , to ma taką samą wartość na całej powierzchni sferycznej. Całkę we wzorze (24.8) trzeba obliczyć po tej powierzchni, a więc natężenie  $E$  ma stałą wartość przy całkowaniu i można je wyłączyć przed znak całki:

$$\varepsilon_0 E \oint dS = q. \quad (24.9)$$

Całka jest teraz tylko sumą po polach powierzchni  $dS$  elementów sfery i jest równa polu powierzchni  $4\pi r^2$ . Po podstawieniu tej wartości otrzymujemy:

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q,$$

czyli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (24.10)$$

Jest to dokładnie natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego, znane nam ze wzoru (23.3), który otrzymaliśmy, używając prawa Coulomba. Prawo Gaussa jest więc równoważne prawu Coulomba.

**SPRAWDZIAN 3:** Wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu  $r$ , otaczającą odosobnioną cząstkę naładowaną wynosi  $\Phi_0$ . Załóżmy, że zamieniliśmy otaczającą powierzchnię Gaussa na: a) większą sferę, b) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej  $r$ , c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej  $2r$ . Czy wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez nową powierzchnię Gaussa będzie większy, mniejszy, czy równy  $\Phi_0$  w każdym z tych przypadków?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Wybór powierzchni Gaussa

Wyprowadzenie wzoru (24.10) przy zastosowaniu prawa Gaussa jest tylko ćwiczeniem przed wyprowadzeniami natężeń pól elektrycznych, wytwarzanych przez inne rozkłady ładunku i dlatego spróbujmy powtórzyć poszczególne kroki. Zaczęliśmy od dodatniego ładunku punktowego  $q$ ; wiemy, że linie pola elektrycznego wychodzą radialnie z  $q$  w sposób sferycznie symetryczny.

W celu wyznaczenia z prawa Gaussa (24.7) wartości  $E$  natężenia pola elektrycznego w odległości  $r$ , musimy umieścić wybraną zamkniętą powierzchnię Gaussa wokół  $q$  tak, aby przechodziła przez punkt, znajdujący się w odległości  $r$  od ładunku  $q$ . Następnie należy zsumować przez całkowanie wartości  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po całej powierzchni Gaussa. Aby uczynić tę całkę możliwie najprostszą, wybieramy sferyczną powierzchnię Gaussa (aby uwzględnić sferyczną symetrię pola elektrycznego). Wybór ten pozwala na następujące uproszczenia: 1) Iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  staje się

prosty do obliczenia, ponieważ we wszystkich punktach na powierzchni Gaussa kąt między  $\vec{E}$  i  $d\vec{S}$  jest równy zero, czyli we wszystkich punktach mamy  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ . 2) Wartość natężenia pola elektrycznego  $E$  jest taka sama we wszystkich punktach sferycznej powierzchni Gaussa i dlatego wartość  $E$  jest stała, czyli przy całkowaniu można ją wynieść przed znak całki. 3) W wyniku otrzymujemy bardzo prostą całkę — sumę pól powierzchni elementów sfery, którą możemy zapisać jako  $4\pi r^2$ .

Warto podkreślić, że prawo Gaussa jest spełnione bez względu na kształt powierzchni Gaussa, jaką wybieramy wokół ładunku  $q_{\text{wewn}}$ . Jeśli jednak wybralibyśmy, powiedzmy, sześcienną powierzchnię Gaussa, to nie moglibyśmy skorzystać z żadnego z tych trzech uproszczeń i całka z  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po tej powierzchni byłaby bardzo trudna do obliczenia. Wniosek jest taki, że należy wybierać powierzchnię Gaussa tak, aby całkowanie w prawie Gaussa najbardziej się upraszczało.



## 24.6. Izolowany przewodnik naładowany

Prawo Gaussa pozwala udowodnić ważne twierdzenie o izolowanych (odosobnionych) przewodnikach:

➤ Jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.

Fakt ten może wydawać się naturalny, bo ładunki o tym samym znaku odpychają się wzajemnie. Można stąd wywnioskować, że przesuując się do powierzchni nadmiarowe ładunki oddalają się od siebie tak daleko, jak to jest tylko możliwe. Odwołamy się do prawa Gaussa, aby sprawdzić poprawność tego rozumowania.

Na rysunku 24.9a przedstawiono w przekroju izolowany kawałek miedzi, naładowany ładunkiem  $q$  i zawieszony na izolującej nici. Powierzchnię Gaussa umieszczamy wewnątrz powierzchni przewodnika.

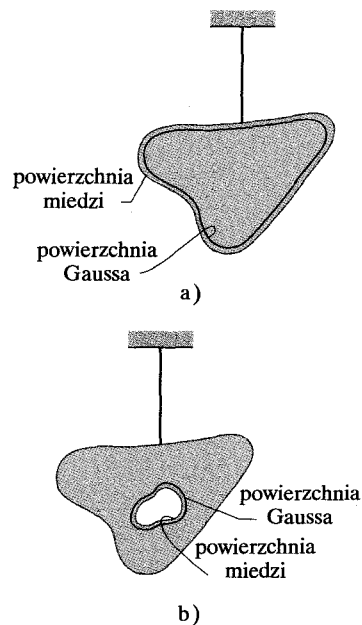
Natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika musi być równe zero. Gdyby tak nie było, to na (swobodne) elektrony przewodnictwa, które zawsze występują w przewodniku, działałyby siły i stąd w przewodniku istniałby prąd elektryczny, czyli ładunek przepływałby w przewodniku z miejsca na miejsce. W izolowanym przewodniku nie ma oczywiście takich ciągle płynących prądów i dlatego natężenie pól elektrycznych jest wewnątrz przewodnika zerowe.

(Wewnętrzne pole elektryczne występuje w przewodniku, gdy przewodnik jest ładowany. Jednak dodawany ładunek szybko rozmieszcza się w ten sposób, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego — wektorowa suma natężeń pól elektrycznych, wytworzonych przez wszystkie ładunki, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz przewodnika — jest równe zero. Wówczas ruch ładunków ustaje, ponieważ siła wypadkowa działająca na każdy ładunek jest równa zero — ładunki są wtedy w równowadze elektrostatycznej).

Jeśli natężenie  $\vec{E}$  jest równe zero w każdym punkcie wewnątrz miedzianego przewodnika, to musi być zerowe we wszystkich punktach powierzchni Gaussa, ponieważ ta powierzchnia, chociaż może znajdować się blisko powierzchni przewodnika, jest z pewnością wewnątrz przewodnika. Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Z prawa Gaussa wynika wtedy, że ładunek wypadkowy wewnątrz powierzchni Gaussa musi być także równy zero. Nadmiarowego ładunku nie ma wewnątrz powierzchni Gaussa, dlatego też musi być na zewnątrz tej powierzchni, co oznacza, że znajduje się on na powierzchni przewodnika.

### Izolowany przewodnik z wnęką

Na rysunku 24.9b przedstawiono ten sam wiszący na nici przewodnik, ale tym razem z wnęką, znajdującą się całkowicie w przewodniku. Uzasadnione wydaje się założenie, że gdy wycinamy elektrycznie obojętny materiał, aby utworzyć



Rys. 24.9. a) Kawałek miedzi o ładunku  $q$  jest zawieszony na izolującej nici. Powierzchnia Gaussa została wybrana wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni przewodnika. b) Kawałek miedzi ma teraz wewnątrz wnękę. Powierzchnia Gaussa leży wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni wnęki

wnękę, nie zmieniamy rozkładu ani ładunku, ani pola elektrycznego, istniejącego na rysunku 24.9a. Znów zastosujemy prawo Gaussa, aby przeprowadzić dowód ilościowy.

Narysujmy powierzchnię Gaussa otaczającą wnękę, bliską jej powierzchni, ale znajdującą się wewnątrz przewodzącego ciała. Wewnątrz przewodnika  $\vec{E} = 0$ , a więc strumień elektryczny przez tę nową powierzchnię Gaussa musi być równy zeru. Z prawa Gaussa wynika więc, że wnęka nie może zawierać wypadkowego ładunku. Wnioskujemy, że na ścianach wnęki nie ma wypadkowego ładunku — cały nadmiarowy ładunek pozostaje na zewnętrznej powierzchni przewodnika, jak na rysunku 24.9a.

## Usunięcie przewodnika

Załóżmy, że w jakiś magiczny sposób nadmiarowe ładunki mogą zostać „zamrożone” na powierzchni przewodnika, na przykład przez pokrycie ich plastikową powłoką, tak że przewodnik można całkowicie usunąć. Jest to równoważne powiększeniu wnęki z rysunku 24.9b tak, aby wypełniała w całości przewodnik, pozostawiając tylko ładunki. Pole elektryczne nie ulegnie wtedy żadnej zmianie — pozostanie zerowe we wnętrzu cienkiej naładowanej powłoki i nie zmieni się w punktach na zewnątrz powłoki. Wynika stąd, że pole elektryczne jest wytworzone przez ładunki, a nie przez przewodnik. Przewodnik po prostu umożliwia tylko ładunkom zajęcie odpowiedniego położenia.

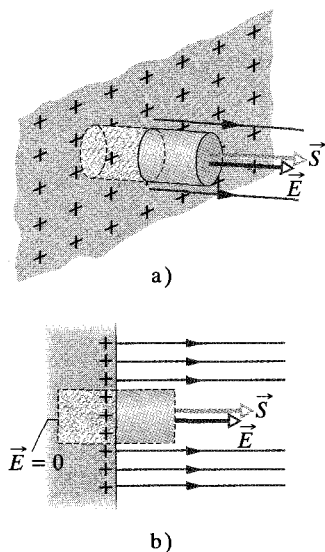
## Zewnętrzne pole elektryczne

Wiesz już, że nadmiar ładunku na izolowanym przewodniku przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. Jeśli jednak powierzchnia przewodnika nie jest sferyczna, to ładunek nie rozkłada się równomiernie. Innymi słowy, powierzchniowa gęstość ładunku  $\sigma$  (ładunek na jednostkę powierzchni) nie jest stała na powierzchni dowolnego przewodnika niesferycznego. Ta zmienność powoduje, że na ogół bardzo trudno jest wyznaczyć natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki powierzchniowe.

Korzystając z prawa Gaussa, można jednak łatwo określić natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika. Rozważmy w tym celu wycinek powierzchni na tyle mały, aby można było zaniedbać jakąkolwiek jego krzywiznę, czyli aby można było uważać go za płaski. Wyobraźmy sobie następnie małą walcową powierzchnię Gaussa, zawierającą ten wycinek (rys. 24.10): jedno denko powierzchni znajduje się całkowicie wewnątrz przewodnika, drugie całkowicie na zewnątrz przewodnika, a powierzchnia boczna walca jest prostopadła do powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  na powierzchni przewodnika i tuż nad nią musi być także prostopadłe do tej powierzchni. Gdyby nie było, to miałyby składową wzdłuż powierzchni przewodnika, która prowadziłaby do działania sił na ładunki powierzchniowe, powodujących ruch ładunków. Taki ruch naruszałby jednak nasze milczące założenie, że mamy do czynienia z równowagą elektrostatyczną. Stąd natężenie  $\vec{E}$  jest prostopadłe do powierzchni przewodnika.

Zsumujemy obecnie strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa. Strumień przez wewnętrzne denko jest zerowy, bo natężenie pola elektrycznego



**Rys. 24.10.** Widok z ukosa (a) i z boku (b) drobnej części dużego odosobnionego przewodnika z nadmiarowym ładunkiem dodatnim na jego powierzchni. Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa wnika do przewodnika i jest do niego prostopadła, obejmując pewien ładunek. Linie pola elektrycznego przechodzą przez zewnętrzne denko walca, ale nie przez wewnętrzne denko. Zewnętrzne denko ma pole powierzchni  $S$  i wektor powierzchni  $\vec{S}$

w przewodniku wynosi zero. Strumień przez boczną powierzchnię walca także znika, bo w części znajdującej się wewnątrz przewodnika nie ma pola elektrycznego, a w części znajdującej się na zewnątrz natężenie pola elektrycznego jest równoległe do elementu powierzchni Gaussa. Nie znika jedynie strumień przenikający przez zewnętrzne denko powierzchni Gaussa, gdzie natężenie  $\vec{E}$  jest prostopadłe do płaszczyzny denka. Zakładamy, że pole powierzchni  $S$  denka jest wystarczająco małe, aby wartość natężenia  $E$  była na denku stała. Strumień przenikający przez denko wynosi wtedy  $ES$  i taki jest wypadkowy strumień  $\Phi$  przez powierzchnię Gaussa.

Ładunek  $q_{\text{wewn}}$ , objęty powierzchnią Gaussa znajduje się na powierzchni przewodnika o polu powierzchni  $S$ . Jeśli  $\sigma$  jest ładunkiem na jednostkę powierzchni, to  $q_{\text{wewn}}$  wynosi  $\sigma S$ . Po podstawieniu  $\sigma S$  za  $q_{\text{wewn}}$  i  $ES$  za  $\Phi$  prawo Gaussa (24.6) przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 ES = \sigma S,$$

z której otrzymujemy:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika jest więc proporcjonalna do gęstości powierzchniowej ładunku w tym miejscu przewodnika. Jeśli ładunek na przewodniku jest dodatni, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane na zewnątrz przewodnika, jak na rysunku 24.10. Jeśli ładunek jest ujemny, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane do przewodnika.

Linie pola na rysunku 24.10 muszą się kończyć na ładunkach ujemnych, gdzieś w otoczeniu. Jeśli przesuniemy te ładunki w pobliże przewodnika, to gęstość ładunku w dowolnym miejscu na powierzchni przewodnika ulegnie zmianie. Zmieni się także natężenie pola elektrycznego. Związek między  $E$  i  $\sigma$  będzie jednak nadal określony wzorem (24.11).

## Przykład 24.4

Na rysunku 24.11a przedstawiono przekrój sferycznej powłoki metalowej o wewnętrznym promieniu  $R$ . Ładunek punktowy  $-5 \mu\text{C}$  umieszczono w odległości  $R/2$  od środka powłoki. Jeśli powłoka jest elektrycznie obojętna, to jakie (indukowane) ładunki są na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki? Czy te ładunki są rozłożone równomiernie? Jaki jest rozkład pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki?

### ROZWIĄZANIE:

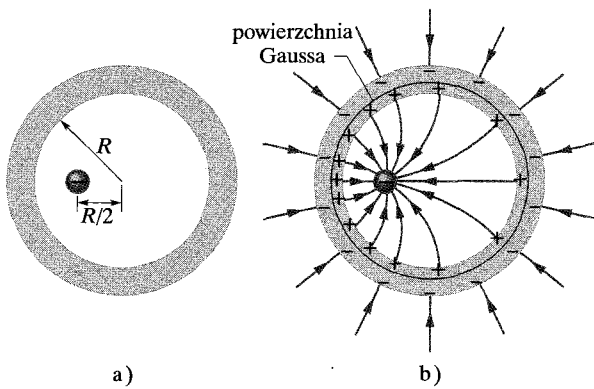
Na rysunku 24.11b przedstawiono przekrój sferycznej powierzchni Gaussa wewnątrz metalu, tuż poza wewnętrzną powierzchnią powłoki.

1. Natężenie pola elektrycznego musi być równe zero wewnątrz metalu (i stąd na powierzchni Gaussa wewnątrz metalu).

Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być także równy zero. Z prawa Gaussa wynika, że całkowity ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Przy punktowym ładunku  $-5 \mu\text{C}$  wewnątrz powłoki, na wewnętrznej powierzchni powłoki musi znajdować się ładunek  $+5 \mu\text{C}$ .

Jeśli ładunek punktowy byłby w środku powłoki, to ten dodatni ładunek byłby rozłożony jednorodnie na powierzchni wewnętrznej. Jeśli jednak ładunek punktowy znajduje się poza środkiem, to rozkład ładunku dodatniego jest niejednorodny, jak przedstawiono na rysunku 24.11b, gdyż ładunek dodatni ma tendencję gromadzenia się na wycinkach wewnętrznej powierzchni, najbliższych (ujemnemu) ładunkowi punktowemu.

2. Ze względu na to, że powłoka jest elektrycznie obojętna, jej wewnętrzna powierzchnia może mieć ładunek  $+5 \mu\text{C}$  tylko wtedy, gdy elektrony o całkowitym ładunku  $-5 \mu\text{C}$  opuszczą wewnętrzną powierzchnię i przesuną się na zewnętrzną. Elektrony



Rys. 24.11. Przykład 24.4. a) Ujemny ładunek punktowy umieszczono wewnątrz sferycznej powłoki metalowej, która jest elektrycznie obojętna. b) Na wewnętrznej powierzchni powłoki pojawił się wtedy niejednorodny rozkład ładunku dodatniego, a na zewnętrznej powierzchni — jednorodny rozkład ładunku ujemnego

rozkładają się tu jednorodnie, co zaznaczono na rysunku 24.11b. Ten rozkład ładunku ujemnego jest jednorodny, ponieważ powłoka jest sferyczna. Niejednorodny rozkład ładunku dodatniego na wewnętrznej powierzchni nie może wytworzyć takiego pola elektrycznego, które mogłoby wpłynąć na rozkład ładunku na zewnętrznej powierzchni.

Na rysunku 24.11b przedstawiono w przybliżeniu linie pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki. Wszystkie linie pola przecinają powłokę prostopadle. Wewnątrz powłoki rozkład linii pola jest nierównomierny wskutek niejednorodności rozkładu ładunku dodatniego. Poza powłoką rozkład pola jest taki, jakby było wytworzone przez ładunek punktowy, umieszczony w środku powłoki i jakby powłoki nie było. Jest tak niezależnie od tego, gdzie wewnątrz powłoki umieszczono ładunek punktowy.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** Kulka o ładunku  $-50e$  znajduje się w środku sferycznej powłoki metalowej o ładunku wypadkowym  $-100e$ . Jaki jest ładunek na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki?

## 24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

Na rysunku 24.12 przedstawiono fragment nieskończenie długiego walcowego pręta plastikowego, naładowanego jednorodnie dodatnio z gęstością liniową  $\lambda$ . Znajdziemy teraz wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w odległości  $r$  od osi pręta.

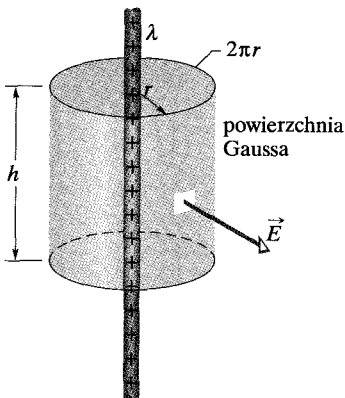
Powierzchnia Gaussa powinna w tym przypadku odpowiadać walcowej symetrii zagadnienia. Wybieramy więc powierzchnię walca o promieniu  $r$  i wysokości  $h$ , współosiowego z prętem. Powierzchnia Gaussa musi być zamknięta i dlatego włączamy do niej dwa denka.

Wyobraź sobie teraz, że gdy nie patrzyliśmy, ktoś obrócił pręt plastikowy wokół jego osi podłużnej lub go odwrócił. Jeśli spojrzymy ponownie na pręt, to nie potrafimy dostrzec tej zmiany. Wnioskujemy więc, że jedynym jednoznacznie wyróżnionym kierunkiem w tym zagadnieniu jest kierunek radialny. Dlatego w każdym punkcie powierzchni bocznej walca natężenie  $\vec{E}$  musi mieć taką samą wartość  $E$  i (dla dodatnio naładowanego pręta) musi być skierowane na zewnątrz.

Pole powierzchni bocznej walca wynosi  $2\pi rh$ , ponieważ długość obwodu podstawy jest równa  $2\pi r$ , a wysokość jest równa  $h$ . Strumień natężenia  $\vec{E}$  przez powierzchnię walca wynosi:

$$\Phi = ES \cos \theta = E \cdot 2\pi rh \cdot \cos 0 = E \cdot 2\pi rh.$$

Strumień elektryczny, przenikający przez denka jest równy zeru, ponieważ natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , skierowane radialnie, jest równoległe do powierzchni denka w każdym jego punkcie.



Rys. 24.12. Powierzchnia Gaussa w postaci zamkniętej powierzchni walcowej otacza odcinek bardzo długiego, jednorodnie naładowanego, walcowego pręta plastikowego

Ładunek objęty rozważaną powierzchnią wynosi  $\lambda h$  i prawo Gaussa:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$

sprowadza się do postaci:

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r h = \lambda h,$$

stąd otrzymujemy:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia prosta}). \quad (24.12)$$

Wzór ten określa wartość natężenia pola elektrycznego pochodzącego od nieskończonej, jednorodnie naładowanej linii prostej, w punkcie znajdującym się w odległości  $r$  od linii. Natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane radialnie od linii, jeśli ładunek jest dodatni i do linii, jeśli ładunek jest ujemny. Wzór (24.12) określa także w przybliżeniu pole naładowanej nici o skończonej długości w punktach, które nie znajdują się zbyt blisko jej końców (w porównaniu z odległością od nici).

## Przykład 24.5

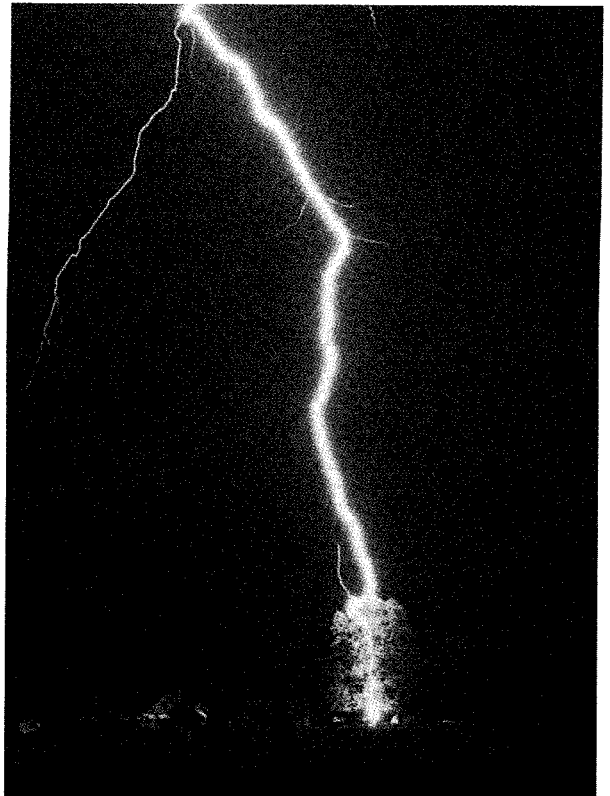
Każda błyskawica poprzedzona jest niewidzialnym procesem, podczas którego strumień elektronów rozchodzi się w dół, od chmury do ziemi. Elektrony te pochodzą z chmury i cząstek powietrza, które ulegają jonizacji w obszarze strumienia. Liniowa gęstość ładunku  $\lambda$  wzdłuż strumienia jest zwykle równa  $-1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}$ . Gdy strumień dociera do ziemi, elektrony zaczynają szybko na nią słuwać. Podczas tego przepływu zderzenia między poruszającymi się elektronami i cząsteczkami powietrza dają bardzo jasny błysk światła (czyli samą błyskawicę). Jaki jest promień strumienia, jeśli cząsteczki powietrza ulegają jonizacji w polu elektrycznym o natężeniu większym od  $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

1. Chociaż strumień nie jest ani prosty, ani nieskończenie długi, to można go przybliżyć przez naładowaną linię z rysunku 24.12. (Linia jest naładowana ujemnie, a więc natężenie  $\vec{E}$  jej pola jest skierowane radialnie do wnętrza). Zgodnie ze wzorem (24.12) wartość natężenia  $E$  maleje wraz z odległością od osi strumienia ładunku.

2. Powierzchnia strumienia ładunku musi znajdować się w takiej odległości  $r$  od jej osi, w której wartość natężenia  $\vec{E}$  wynosi  $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ , ponieważ cząsteczki powietrza wewnątrz obszaru o tym promieniu ulegają jonizacji, a znajdujące się dalej nie. Ze wzoru (24.12) wyznaczamy  $r$  i po podstawieniu znanych wielkości obliczamy promień strumienia:

Rys. 24.13. Piorun uderza w jawor o wysokości 20 m. Drzewo jest mokre, więc większość ładunku przepływa przez znajdującą się na nim wodę i drzewo pozostaje nieuszkodzone





Rys. 24.14. Prądy uziemienia od uderzenia pioruna wypaliły trawę na tym polu golfowym, odkrywając glebę

$$r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 E}$$

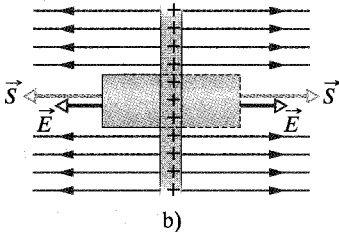
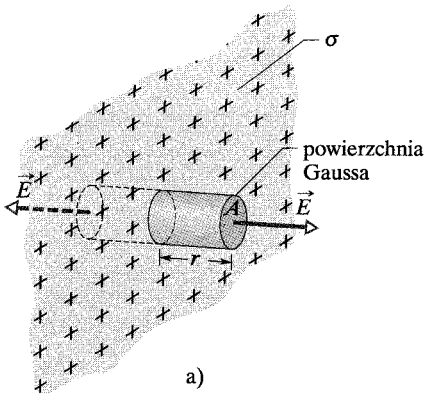
$$= \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}}{(2\pi) \cdot (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N/C})}$$

$$= 6 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

(Promień świecącego obszaru błyskawicy jest mniejszy, prawdopodobnie wynosi tylko 0,5 m. Szerokość tę można ocenić na podstawie rysunku 24.13). Chociaż promień strumienia wynosi tylko 6 m, to nie należy sądzić, że jesteśmy bezpieczni w większych odległościach od punktu uderzenia pioruna, bowiem elektrony spływające do ziemi rozchodzą się po jej powierzchni. Na rysunku 24.14 przedstawiono dowód istnienia takich prądów uziemienia. Prądy uziemienia są śmiertelnie groźne.

## 24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

### Płyta nieprzewodząca



Rys. 24.15. Widok a) z ukosa, b) z boku fragmentu bardzo dużej, cienkiej płyty plastikowej, naładowanej jednorodnie z jednej strony z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$ . Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa przenika przez płytę i jest prostopadła do niej

Na rysunku 24.15 przedstawiono fragment cienkiej nieskończonej nieprzewodzącej płaskiej płyty, naładowanej jednorodnie dodatnio z gęstością powierzchniową  $\sigma$ . Arkusz cienkiej plastikowej folii, jednorodnie naładowany z jednej strony, może służyć jako prosty model takiej płyty. Znajdźmy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w odległości  $r$  od płyty.

W tym zagadnieniu przydatną powierzchnią Gaussa jest przedstawiona na rysunku powierzchnia walcowa, zamknięta denkami o polu powierzchni  $S$ , przecinająca prostopadłe płytę. Z symetrii zagadnienia wynika, że natężenie  $\vec{E}$  musi być prostopadłe do płyty i stąd do denek. Ponadto, ponieważ ładunek jest dodatni, to natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane od płyty i stąd linie pola elektrycznego przecinają denka powierzchni Gaussa, wychodząc na zewnątrz. Linie pola nie przecinają powierzchni bocznej, dlatego też strumień elektryczny przez tę część powierzchni Gaussa jest równy zero. Na powierzchni denek  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  wynosi po prostu  $E dS$  i prawo Gaussa:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}$$

przyjmuje postać:

$$\epsilon_0(ES + ES) = \sigma S,$$

gdzie  $\sigma S$  jest ładunkiem objętym przez powierzchnię Gaussa. Mamy zatem:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$

Rozważamy tutaj nieskończoną płytę o jednorodnej gęstości ładunku, a więc wynik ten obowiązuje dla każdego punktu w skończonej odległości od płyty. Wzór (24.13) jest zgodny ze wzorem (23.27), który znaleźliśmy przez całkowanie składowych natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez poszczególne ładunki. (Warto powrócić do tego czasochłonnego i złożonego całkowania i zauważyć, o ile łatwiej otrzymuje się ten wynik z prawa Gaussa. Jest to jeden z powodów poświęcenia całego rozdziału temu prawu: dla pewnych symetrycznych rozkładów ładunku łatwiej jest skorzystać z prawa Gaussa, niż całkować składowe natężenia pola).

## Dwie przewodzące płyty

Na rysunku 24.16a przedstawiono przekrój cienkiej nieskończonej płyty przewodzącej, na której znajduje się nadmiar ładunku dodatniego. Z paragrafu 24.6 wiemy, że ten nadmiarowy ładunek znajduje się tylko na powierzchni płyty. Płyta jest bardzo cienka i bardzo duża, a więc możemy założyć, że cały nadmiarowy ładunek umieszczony jest w zasadzie na dwóch dużych ścianach płyty.

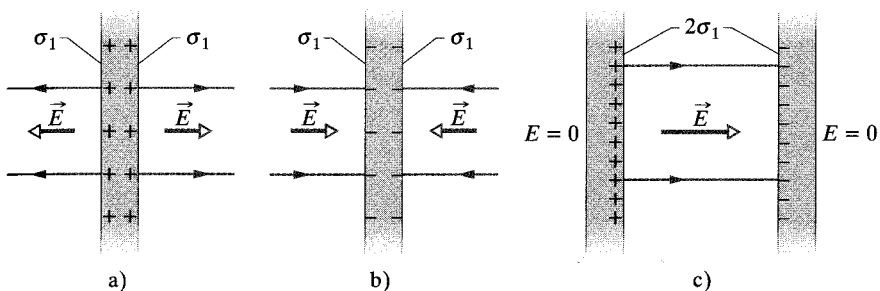
Jeśli nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, które mogłoby spowodować szczególny rozkład ładunku, to ładunek rozłoży się na dwóch płaszczyznach, z jednorodną gęstością powierzchniową  $\sigma_1$ . Ze wzoru (24.11) wiemy, że poza płytą taki ładunek wytwarza pole elektryczne o natężeniu równym  $E = \sigma_1/\epsilon_0$ . Nadmiarowy ładunek jest dodatni, a więc natężenie pola jest skierowane od płyty.

Na rysunku 24.16b przedstawiono identyczną płytę z nadmiarowym ładunkiem ujemnym, o takiej samej wartości gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma_1$ . Wytworzone pole różni się jedynie tym, że jego natężenie jest teraz skierowane do płyty.

Załóżmy, że ustawiliśmy płyty z rysunku 24.16a i b blisko siebie i równoległe (rys. 24.16c). Płyty są przewodnikami, dlatego też po takim ich ustawieniu ładunek nadmiarowy na jednej płycie przyciąga ładunek nadmiarowy na drugiej i cały nadmiarowy ładunek przesunie się na wewnętrzne powierzchnie płyt, jak pokazano na rysunku 24.16c. Przy dwukrotnie większym ładunku nowa gęstość powierzchniowa ładunku  $\sigma$  na każdej wewnętrznej powierzchni jest równa  $2\sigma_1$ . Stąd natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie między płytami ma wartość:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (24.14)$$

Natężenie pola elektrycznego jest skierowane od płyty naładowanej dodatnio do płyty naładowanej ujemnie. Na zewnętrznych powierzchniach nie pozostał żaden nadmiarowy ładunek, więc natężenie na lewo i na prawo od płyt jest równe zero.



Rys. 24.16. a) Cienka, bardzo duża płyta przewodząca z nadmiarowym ładunkiem dodatnim. b) Identyczna płyta z nadmiarowym ładunkiem ujemnym. c) Obie płyty ustawione równoległe i blisko siebie

Ładunki na płytach przesunęły się, gdy zbliżyliśmy płyty do siebie, a więc rysunek 24.16c *nie jest* złożeniem rysunków 24.16a i b: rozkład ładunku dla układu dwóch płyt nie jest sumą rozkładów ładunku dla pojedynczych płyt.

Może cię zastanawiać, dlaczego omawiamy szczegółowo tak nierealistyczne zagadnienia, jak pole wytworzone przez nieskończoną naładowaną linię, nieskończoną naładowaną płytę lub parę nieskończonych naładowanych płyt. Jednym z powodów jest to, że analiza takich sytuacji przy zastosowaniu prawa Gaussa jest łatwa. Ważniejszym powodem jest to, że analizy dla „nieskończonych” sytuacji stanowią dobre przybliżenie wielu zagadnień rzeczywistego świata. Wzór (24.13) opisuje więc dobrze pole dla skończonej nieprzewodzącej płyty, jeśli rozważamy punkty znajdujące się blisko niej i niezbyt blisko jej krawędzi. Wzór (24.14) obowiązuje dla pary skończonych przewodzących płyt, znajdujących się w niewielkiej odległości od siebie, jeśli rozważamy punkty niezbyt bliskie krawędzi płyt.

Nie zajmujemy się krawędziami płyt, ponieważ blisko krawędzi nie możemy już korzystać z symetrii płaszczyznowej, aby znaleźć wyrażenia dla natężeń pól. Linie pola są tu w rzeczywistości zakrzywione (mówimy zwykle o *zjawisku krawędziowym* lub *brzegowym*) i może być bardzo trudno podać wzory opisujące natężenia pól.

## Przykład 24.6

Na rysunku 24.17a przedstawiono fragmenty dwóch dużych równoległych nieprzewodzących płyt, z których każda jest jednorodnie naładowana z jednej strony. Wartości gęstości powierzchniowej ładunku są równe  $\sigma_{(+)} = 6,8 \mu\text{C}/\text{m}^2$  dla płyty naładowanej dodatnio i  $\sigma_{(-)} = 4,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$  dla płyty naładowanej ujemnie. Oblicz natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ : a) na lewo od płyt, b) między płytami, c) na prawo od płyt.

### ROZWIĄZANIE:

Przy danych ładunkach pole elektryczne płyt na rysunku 24.17a można znaleźć przez: a) znalezienie natężenia pola, pochodzącego od każdej płyty, jak gdyby tej drugiej nie było, b) algebraiczne dodanie natężeń pól tych płyt, przez zastosowanie zasady superpozycji. (Natężenia te możemy dodać algebraicznie, ponieważ są one równoległe do siebie). Zastosowanie wzoru (24.13) daje wartość  $E_{(+)}$  natężenia pola elektrycznego dodatniej płyty w dowolnym punkcie przestrzeni

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} = \frac{6,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C}.$$

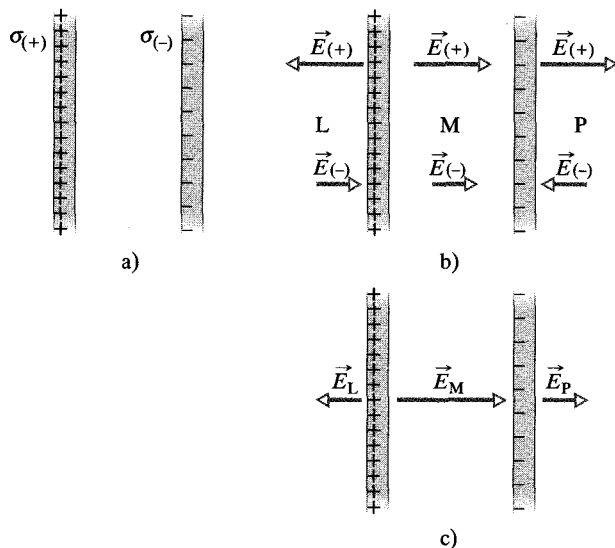
Podobnie wartość  $E_{(-)}$  natężenia pola elektrycznego płyty ujemnej w dowolnym punkcie wynosi:

$$\begin{aligned} E_{(-)} &= \frac{\sigma_{(-)}}{2\epsilon_0} = \frac{4,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} \\ &= 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C}. \end{aligned}$$

Na rysunku 24.17b przedstawiono natężenia pól, wytworzonych przez płyty na lewo od płyt (L), między nimi (M) i na prawo od nich (P).

Wypadkowe natężenia pola w tych trzech obszarach wynikają z zasady superpozycji. Na lewo wartość natężenia wynosi:

$$\begin{aligned} E_L &= E_{(+)} - E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} - 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} \\ &= 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/C}. \end{aligned} \quad (\text{odpowieź})$$



Rys. 24.17. Przykład 24.6. a) Dwie duże równoległe płyty, jednorodnie naładowane z jednej strony. b) Natężenia pól elektrycznych wytworzonych przez każdą z płyt z osobna. c) Wypadkowe natężenie pola od obydwu naładowanych płyt, obliczone w wyniku zastosowania zasady superpozycji



Ponieważ  $E_{(+)}$  jest większe od  $E_{(-)}$ , więc wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}_L$  w tym obszarze jest skierowane w lewo, jak przedstawiono na rysunku 24.17c. Na prawo od płyt natężenie pola  $\vec{E}_P$  ma taką samą wartość, ale jest skierowane w prawo (rys. 24.17c).

Między płytami natężenia dwóch pól dodają się i mamy:

$$E_M = E_{(+)} + E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} + 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} \\ = 6,3 \cdot 10^5 \text{ N/C.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie pola  $\vec{E}_M$  jest skierowane w prawo.

## 24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

Zastosujemy teraz prawo Gaussa do udowodnienia dwóch twierdzeń o powłoce, przedstawionych bez dowodu w paragrafie 22.4:

- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie przyciąga lub odpycha cząstkę naładowaną, znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku powłoki.
- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie nie działa siłą elektrostatyczną na cząstkę naładowaną znajdującą się wewnątrz powłoki.

Na rysunku 24.18 przedstawiono naładowaną powłokę sferyczną o całkowitym ładunku  $q$  i promieniu  $R$  oraz dwie współśrodkowe sferyczne powierzchnie Gaussa  $S_1$  i  $S_2$ . Postępując według procedury opisanej w paragrafie 24.5 przy stosowaniu prawa Gaussa do powierzchni  $S_2$ , dla której  $r \geq R$ , otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r \geq R). \quad (24.15)$$

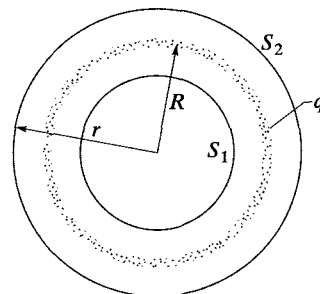
Jest to takie samo natężenie pola, jakie wytworzyłby ładunek punktowy  $q$ , umieszczony w środku naładowanej powłoki. Stąd powłoka o ładunku  $q$  oddziałuje taką samą siłą na naładowaną cząstkę na zewnątrz powłoki, jak ładunek punktowy  $q$ , umieszczony w środku powłoki. Jest to dowód pierwszego twierdzenia o powłoce.

Stosując prawo Gaussa do powierzchni  $S_1$ , dla której  $r < R$ , otrzymujemy:

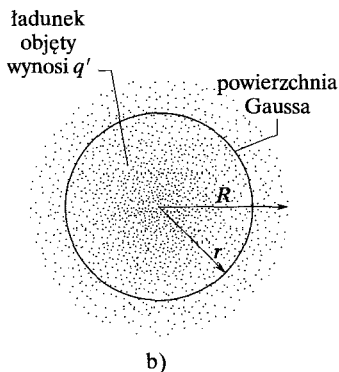
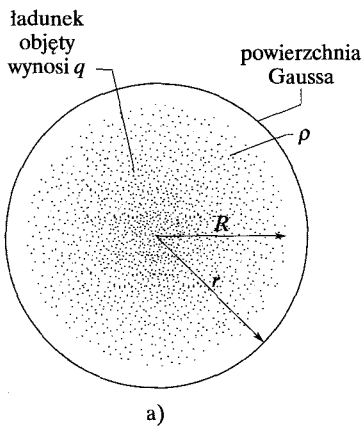
$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r < R), \quad (24.16)$$

ponieważ powierzchnia Gaussa nie obejmuje żadnego ładunku. Jeśli więc cząstka naładowana znajdowałaby się wewnątrz powłoki, to powłoka nie działałaby na nią żadną wypadkową siłą. Jest to dowód drugiego twierdzenia o powłoce.

Dowolny sferycznie symetryczny rozkład ładunku, taki jak na rysunku 24.19 można utworzyć przez złożenie współśrodkowych powłok sferycznych. Aby można było zastosować dwa twierdzenia o powłoce, gęstość objętościowa ładunku  $\rho$  powinna mieć określoną wartość dla każdej powłoki, ale wartości te nie muszą być takie same dla wszystkich powłok. Stąd dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku gęstość  $\rho$  może zależeć tylko od odległości  $r$  od środka. Możemy



Rys. 24.18. Przekrój cienkiej, jednorodnie naładowanej powłoki sferycznej o całkowitym ładunku  $q$ . Widać także przekrój dwóch powierzchni Gaussa  $S_1$  i  $S_2$ . Powierzchnia  $S_2$  obejmuje powłokę, a  $S_1$  tylko puste wnętrze powłoki



Rys. 24.19. Kropki oznaczają sferycznie symetryczny rozkład ładunku o promieniu  $R$ , dla którego gęstość objętościowa ładunku  $\rho$  jest funkcją tylko odległości od środka. Naładowane ciało nie jest przewodnikiem. Zakładamy, że ładunki mają ustalone położenie. Przedstawiono także współśrodkową sferyczną powierzchnię Gaussa o  $r > R$  (a) i podobną powierzchnię Gaussa o  $r < R$  (b)

wtedy sumować „powłoka po powłoce” wkłady do pola, wytworzonego przez symetryczny rozkład ładunku.

Na rysunku 24.19a cały ładunek znajduje się wewnątrz powierzchni Gaussa dla  $r > R$ . Natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek na tej powierzchni Gaussa jest takie, jakby ładunek był ładunkiem punktowym, znajdującym się w środku i wobec tego obowiązuje wzór (24.15). Na rysunku 24.19b przedstawiono powierzchnię Gaussa dla  $r < R$ . Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punktach na powierzchni Gaussa, rozważmy dwa układy naładowanych powłok: jeden układ zawierający powłoki wewnątrz powierzchni Gaussa i drugi — na zewnątrz. Ze wzoru (24.16) wynika, że ładunek znajdujący się *na zewnątrz* powierzchni wytwarza zerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego na powierzchni Gaussa. Natomiast ze wzoru (24.15) wynika, że ładunek *objęty* przez powierzchnię wytwarza takie natężenie pola elektrycznego, jak gdyby objęty ładunek był skupiony w środku. Jeśli  $q'$  oznacza obejmowany ładunek, to wzór (24.15) możemy napisać w postaci:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \quad (\text{rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.17)$$

Jeśli cały ładunek  $q$  zamknięty wewnątrz sfery o promieniu  $R$  jest rozłożony *jednorodnie*, to ładunek  $q'$  wewnątrz sfery o promieniu  $r$  na rysunku 24.19b jest proporcjonalny do  $q$ :

$$\frac{\text{ładunek wewnątrz sfery o promieniu } r}{\text{objętość wnętrza sfery o promieniu } r} = \frac{\text{cały ładunek}}{\text{cała objętość}},$$

czyli:

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (24.18)$$

Otrzymujemy stąd:

$$q' = q \frac{r^3}{R^3} \quad (24.19)$$

i po podstawieniu do wzoru (24.17) otrzymujemy:

$$E = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \quad (\text{jednorodny rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.20)$$

**SPRAWDZIAN 5:** Na rysunku przedstawiono dwie duże równoległe nieprzewodzące płyty, naładowane jednorodnie, z identycznymi (dodatnimi) gęstościami powierzchniowymi i kulę naładowaną jednorodnie, z (dodatnią) gęstością objętościową. Uszereguj wartości natężenia wypadkowego pola elektrycznego w czterech ponumerowanych punktach, zaczynając od największej.

## Podsumowanie

**Prawo Gaussa** Prawo Gaussa i prawo Coulomba, chociaż mają różne postaci, są równoważnymi sposobami opisu związku między ładunkiem i natężeniem pola elektrycznego w sytuacjach statycznych. Prawo Gaussa ma postać:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}), \quad (24.6)$$

gdzie  $q_{\text{wewn}}$  jest wypadkowym ładunkiem wewnątrz zamkniętej powierzchni (**powierzchni Gaussa**), a  $\Phi$  jest wypadkowym **strumieniem** natężenia pola elektrycznego przez tę powierzchnię:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}) \quad (24.4)$$

Prawo Coulomba można łatwo wyprowadzić z prawa Gaussa.

**Zastosowanie prawa Gaussa** Dla symetrycznych rozkładów ładunku, korzystając z prawa Gaussa, możemy wyprowadzić wiele ważnych związków elektrostatycznych. Oto niektóre z nich:

1. Ładunek nadmiarowy na *przewodniku* znajduje się tylko na zewnętrznej jego powierzchni.
2. Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej *powierzchni naładowanego przewodnika* jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wewnątrz przewodnika mamy  $E = 0$ .

3. Natężenie pola elektrycznego nieskończonej *linii naładowanej* z gęstością liniową ładunku  $\lambda$  jest w dowolnym punkcie

prostopadłe do naładowanej linii i ma wartość:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia}), \quad (24.12)$$

gdzie  $r$  jest odległością punktu od naładowanej linii.

4. Natężenie pola elektrycznego *nieskończonej nieprzewodzącej płyty*, naładowanej jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$  jest prostopadłe do płaszczyzny płyty i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$

5. Natężenie pola elektrycznego *na zewnątrz sferycznej jednorodnie naładowanej powłoki* o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$  jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r \geq R), \quad (24.15)$$

gdzie  $r$  jest odległością od środka powłoki do punktu, w którym wartość  $E$  jest wyznaczana. (Dla punktów na zewnątrz powłoki ładunek zachowuje się tak, jakby był skupiony w środku sfery). Natężenie pola *wewnątrz sferycznej powłoki naładowanej jednorodnie* jest równe zeru:

$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r < R). \quad (24.16)$$

6. Natężenie pola elektrycznego *wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli* jest skierowane radialnie i ma wartość:

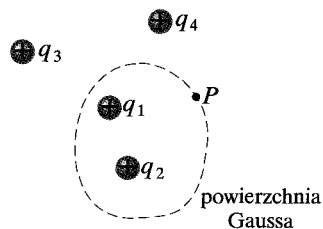
$$E = \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right) r. \quad (24.20)$$

## Pytania

1. Wektor powierzchni jest równy:  $\vec{S} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m}^2$ . Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez tę powierzchnię, jeśli natężenie pola wynosi: a)  $\vec{E} = 4\hat{i} \text{ N/C}$ , b)  $\vec{E} = 4\hat{k} \text{ N/C}$ .

2. Ile wynosi  $\int dS$  dla: a) kwadratu o boku  $a$ , b) koła o promieniu  $r$ , c) powierzchni bocznej walca o wysokości  $h$  i promieniu  $r$ ?

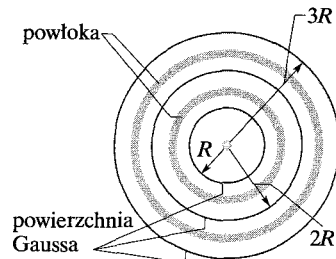
3. Na rysunku 34.20 zamknięta powierzchnia Gaussa obejmuje dwie z czterech dodatnio naładowanych cząstek. a) Które z cząstek dają wkład do natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$  na



Rys. 24.20. Pytanie 3

powierzchni? b) Który wypadkowy strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię jest większy: ten wywołany ładunkami  $q_1$  i  $q_2$ , czy ten wywołany wszystkimi czterema ładunkami?

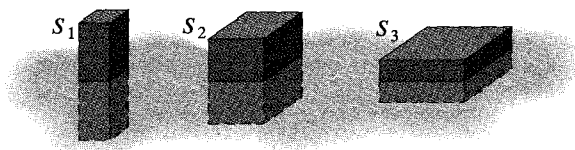
4. Na rysunku 24.21 przedstawiono w przekroju kulkę metalową, dwie sferyczne powłoki metalowe i trzy sferyczne powierzchnie Gaussa o promieniach  $R$ ,  $2R$  i  $3R$  — wszystkie mają wspólny środek. Jednorodnie rozłożone ładunki trzech ciał metalowych wynoszą:  $Q$  dla kulki,  $3Q$  dla mniejszej powłoki i  $5Q$  dla większej



Rys. 24.21. Pytanie 4

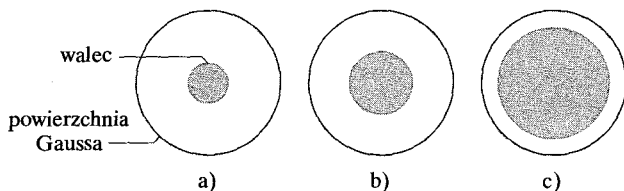
powłoki. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie na powierzchni, zaczynając od wartości największej.

5. Na rysunku 24.22 przedstawiono trzy powierzchnie Gaussa, z których każda jest do połowy zagłębiona w dużej, grubej, metalowej płycie, jednorodnie naładowanej powierzchniowo. Powierzchnia  $S_1$  jest najwyższa i ma najmniejsze kwadratowe denka, powierzchnia  $S_3$  jest najniższa i ma największe kwadratowe denka, a powierzchnia  $S_2$  ma pośrednie wymiary. Uszereguj powierzchnie według: a) objętości ładunku, b) wartości natężenia pola w punktach na ich górnych denkach, c) wypadkowego strumienia elektrycznego przez górne denko, d) wypadkowego strumienia elektrycznego przez ich dolne denka, zaczynając od wartości największej.



Rys. 24.22. Pytanie 5

6. Na rysunku 24.23 przedstawiono w przekroju trzy walce, każdy naładowany jednorodnie ładunkiem  $Q$ . Każdy z nich otoczony jest współosiową walcową powierzchnią Gaussa. Wszystkie te powierzchnie mają takie same promienie. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie powierzchni, zaczynając od wartości największej.



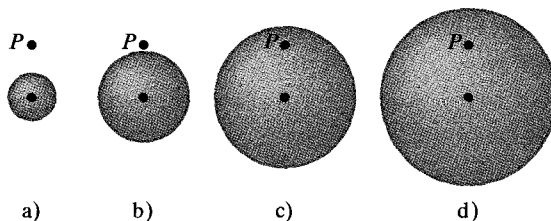
Rys. 24.23. Pytanie 6

7. Trzy nieskończone nieprzewodzące płyty naładowane jednorodnie z gęstościami powierzchniowymi  $\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$  są ustawione równolegle, podobnie jak dwie płyty na rysunku 24.17a. W jakiej kolejności są one ustawione, od lewej do prawej, jeśli natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez ten układ, ma wartość  $E = 0$  w jednym obszarze i  $E = 2\sigma/\epsilon_0$  w drugim obszarze między nimi?

8. Mała naładowana kulka znajduje się wewnątrz metalowej sferycznej powłoki o promieniu  $R$ . Wypadkowe ładunki na kulce i powłoce wynoszą dla trzech sytuacji: 1)  $+4q$ , 0; 2)  $-6q$ ,  $+10q$ ; 3)  $+16q$ ,  $-12q$ . Uszereguj te sytuacje według ładunku na: a) wewnętrznej powierzchni powłoki, b) zewnętrznej powierzchni powłoki, zaczynając od największego dodatniego ładunku.

9. Uszereguj sytuacje z pytania 8 według wartości natężenia pola elektrycznego: a) w połowie grubości powłoki, b) w punkcie odległym o  $2R$  od środka powłoki, zaczynając od wartości największej.

10. Na rysunku 24.24 przedstawiono cztery kule, naładowane jednorodnie objętościowo ładunkiem  $Q$  każda. a) Uszereguj kule według ich gęstości objętościowej ładunku, zaczynając od największej. Na rysunku zaznaczono także punkt  $P$  dla każdej kuli, zawsze w tej samej odległości od jej środka. b) Uszereguj kule według wartości natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego w punkcie  $P$ , zaczynając od największej.



Rys. 24.24. Pytanie 10

## Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

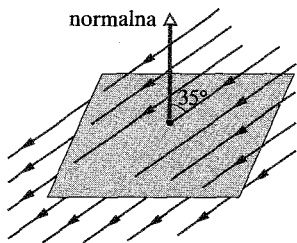
### 24.2. Strumień

1. Woda w rowie melioracyjnym o szerokości  $w = 3,22$  m i głębokości  $d = 1,04$  m płynie z prędkością  $0,207$  m/s. Strumień masy

wody przez powierzchnię jest iloczynem gęstości wody ( $1000$   $\text{kg/m}^3$ ) i jej strumienia objętości przez tę powierzchnię. Oblicz strumień masy przez następujące powierzchnie: a) powierzchnię o polu  $wd$ , zanurzoną całkowicie w wodzie i prostopadłą do kierunku przepływu, b) powierzchnię o polu  $3wd/2$ , z którego część  $wd$  jest w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, c) powierzchnię o polu  $wd/2$ , całkowicie zanurzoną w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, d) powierzchnię o polu  $wd$ , w połowie w wodzie i w połowie nad wodą, prostopadłą do kierunku przepływu, e) powierzchnię o polu  $wd$ , całkowicie zanurzoną w wodzie, o normalnej tworzącej kąt  $34^\circ$  z kierunkiem przepływu.

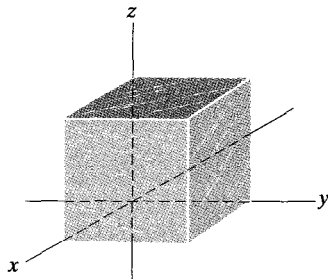
### 24.3. Strumień pola elektrycznego

2. Długość boku kwadratu przedstawionego na rysunku 24.25 wynosi 3,2 mm. Kwadrat znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $E = 1800 \text{ N/C}$ . Linie pola tworzą kąt  $35^\circ$  z normalną do powierzchni kwadratu, jak przedstawiono na rysunku. Przyjmując, że ta normalna jest skierowana „na zewnątrz”, tak jakby powierzchnia stanowiła jedną ścianę pudełka, oblicz strumień elektryczny przez tę powierzchnię.



Rys. 24.25. Zadanie 2

3. Długość krawędzi sześcianu na rysunku 24.26 wynosi 1,40 m. Sześcian znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego i jest ustawiony jak na rysunku. Znajdź strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, jeśli natężenie pola elektrycznego w niutonach na kulomb (N/C) wynosi: a)  $6\hat{i}$ , b)  $-2\hat{j}$ , c)  $-3\hat{i} + 4\hat{k}$ . d) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu dla każdego z tych pól?



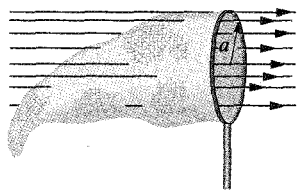
Rys. 24.26. Zadania 3, 7 i 10

### 24.4. Prawo Gaussa

4. Mamy cztery ładunki punktowe  $2q$ ,  $q$ ,  $-q$  i  $-2q$ . Jeśli to możliwe opisz, jak powinna być umieszczona zamknięta powierzchnia, otaczająca przynajmniej ładunek  $2q$  (i ewentualnie inne ładunki), aby wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię wynosił: a) 0, b)  $3q/\epsilon_0$ , c)  $-2q/\epsilon_0$ .

5. Ładunek punktowy o wartości  $1,8 \mu\text{C}$  znajduje się w środku sześciennej powierzchni Gaussa. Jaki jest wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię, jeśli długość krawędzi sześcianu wynosi 55 cm?

6. Na rysunku 24.27 siatka na motyle znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu  $E$ . Obręcz okręgu o promieniu  $a$  jest ustawiona prostopadle do kierunku natężenia pola. Oblicz strumień elektryczny przenikający przez siatkę.



Rys. 24.27. Zadanie 6

7. Oblicz wypadkowy strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu z zadania 3 i rysunku 24.26, jeśli natężenie pola elektrycznego wynosi: a)  $\vec{E} = 3y\hat{j}$ , b)  $\vec{E} = -4\hat{i} + (6 + 3y)\hat{j}$ . Natężenie pola podane jest w niutonach na kulomb (N/C), a  $y$  w metrach (m). c) Jaki ładunek znajduje się wewnątrz sześcianu w obydwu przypadkach?

8. Jeśli włączymy natrysk w zamkniętej łazience, to woda rozpryskująca się na wannie może wypełnić powietrze ujemnie naładowanymi jonami i wytworzyć w powietrzu pole elektryczne o natężeniu do 1000 N/C. Wyobraź sobie łazienkę o wymiarach  $2,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Przyjmij, że przy suficie, podłodze i czterech ścianach natężenie pola elektrycznego jest stałe, skierowane prostopadle do powierzchni i ma wartość 600 N/C. Przyjmij, że te powierzchnie tworzą zamkniętą powierzchnię Gaussa. Jaka jest: a) objętościowa gęstość ładunku  $\rho$ , b) liczba nadmiarowych ładunków elementarnych  $e$  na metr sześcienny w powietrzu w łazience?

9. Stwierdzono doświadczalnie, że natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze atmosfery ziemskiej jest skierowane pionowo w dół. Na wysokości 300 m natężenie pola ma wartość 60 N/C, a na wysokości 200 m — wartość 100 N/C. Znajdź wypadkowy ładunek w sześcianie, którego długość krawędzi wynosi 100 m, a ściany poziome umieszczono na wysokości 200 i 300 m. Zaniedbaj krzywiznę Ziemi.

10. W każdym punkcie na powierzchni sześcianu z rysunku 24.26 natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dodatnim kierunku osi  $z$ . Długość krawędzi sześcianu wynosi 3 m. Na górnej ścianie sześcianu  $\vec{E} = -34\hat{k} \text{ N/C}$ , a na dolnej ścianie sześcianu  $\vec{E} = +20\hat{k} \text{ N/C}$ . Określ wypadkowy ładunek zawarty w sześcianie.

11. Ładunek punktowy  $q$  znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu o krawędzi  $a$ . Jaki strumień elektryczny przenika przez każdą ze ścian sześcianu? (Wskazówka: Zastosuj prawo Gaussa i właściwości symetrii).

### 24.6. Izolowany przewodnik naładowany

12. Natężenie pola elektrycznego tuż nad powierzchnią naładowanego bębna fotokopiarki ma wartość  $E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ . Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na bębnie? Załóż, że bęben jest przewodnikiem.

13. Jednorodnie naładowana przewodząca kula o średnicy 1,2 m ma gęstość powierzchniową ładunku  $8,1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . a) Znajdź wypadkowy ładunek na kuli. b) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię kuli?

14. Pojazdy kosmiczne przelatujące przez ziemskie pasy promieniowania mogą zbierać dużą liczbę elektronów. Powstały ładunek może uszkodzić elementy elektroniczne i uniemożliwić ich działanie. Załóżmy, że sferyczny metalowy satelita o średnicy 1,3 m zgromadził ładunek  $2,4 \mu\text{C}$  w czasie jednego obiegu orbity. a) Znajdź powstałą gęstość powierzchniową ładunku. b) Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego (wytworzonego przez ten ładunek powierzchniowy) tuż na zewnątrz satelity.

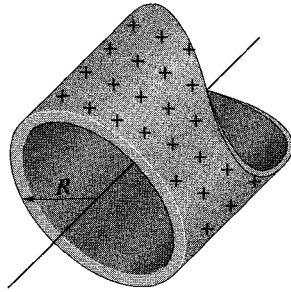
15. Izolowany przewodnik o dowolnym kształcie ma ładunek wypadkowy  $+10 \cdot 10^{-6}$  C. Wewnątrz przewodnika jest wnęka, w której znajduje się ładunek punktowy  $q = +3 \cdot 10^{-6}$  C. Jaki jest ładunek: a) na powierzchni wnęki, b) na zewnętrznej powierzchni przewodnika?

### 24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

16. a) Bęben fotokopiarki z zadania 12 ma długość 42 cm i średnicę 12 cm. Oblicz całkowity ładunek znajdujący się na bębnie. b) Wytwórca chce wyprodukować stołową wersję tej fotokopiarki, co wymaga zmniejszenia rozmiarów bębna do długości 28 cm i średnicy 8 cm. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni bębna nie może ulec zmianie. Jaki musi być ładunek na mniejszym bębnie?

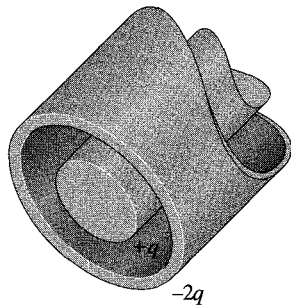
17. Nieskończona naładowana linia prosta wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $4,5 \cdot 10^4$  N/C, w odległości 2 m. Oblicz liniową gęstość ładunku.

18. Na rysunku 24.28 przedstawiono przekrój długiej metalowej rury o promieniu  $R$  i cienkich ściankach, naładowanej powierzchniowo ładunkiem  $\lambda$ , przypadającym na jednostkę długości rury. Wyprowadź wzór na natężenie pola  $E$  jako funkcji odległości  $r$  od osi rury, rozważając zarówno: a)  $r > R$ , jak i b)  $r < R$ . Wykreśl tę zależność dla zakresu od  $r = 0$  do  $r = 5$  cm zakładając, że  $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$  C/m i  $R = 3$  cm. (Wskazówka: Zastosuj walcowe powierzchnie Gaussa, współosiowe z metalową rurą).



Rys. 24.28. Zadanie 18

19. Bardzo długi walcowy pręt przewodzący o długości  $L$  i całkowitym ładunku  $+q$  jest otoczony przewodzącą walcową powłoką (także o długości  $L$ ), o całkowitym ładunku  $-2q$  (rys. 24.29). Korzystając z prawa Gaussa, znajdź: a) natężenie pola elektrycznego w punktach, leżących na zewnątrz przewodzącej powłoki, b) rozkład ładunku na powłoce, c) natężenie pola elektrycznego w obszarze między powłoką i prętem.



Rys. 24.29. Zadanie 19

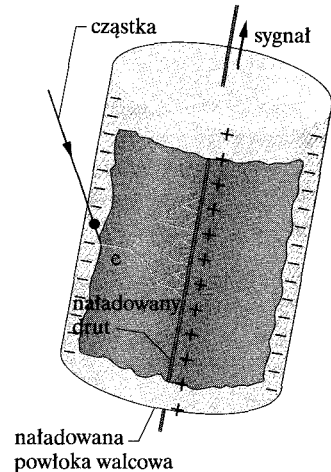
20. Długi prosty drut jest naładowany ujemnie z liniową gęstością ładunku 3,6 nC/m. Drut ma zostać otoczony cienką nieprzewodzącą powłoką walcową, współosiową z drutem, o zewnętrznym

promieniu 1,5 cm. Powłoka ma mieć dodatni ładunek na swej zewnętrznej powierzchni, rozłożony z taką gęstością powierzchniową  $\sigma$ , aby natężenie wypadkowego pola elektrycznego na zewnątrz powłoki było równe zero. Oblicz gęstość  $\sigma$ .

21. Dwie naładowane długie współosiowe powierzchnie walcowe mają promienie 3 i 6 cm. Ładunek na jednostkę długości wynosi  $5 \cdot 10^{-6}$  C/m na wewnętrznym walcu i  $-7 \cdot 10^{-6}$  C/m na zewnętrznym walcu. Znajdź natężenie pola elektrycznego dla radialnej odległości od wspólnej osi: a)  $r = 4$  cm, b)  $r = 8$  cm.

22. Długi nieprzewodzący walec o promieniu 4 cm jest naładowany niejednorodnie, z objętościową gęstością ładunku  $\rho$ , która jest funkcją odległości radialnej  $r$  od osi walca, określoną wzorem  $\rho = Ar^2$ , gdzie  $A = 2,5 \mu\text{C}/\text{m}^3$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości: a) 3 cm, b) 5 cm od osi walca?

23. Na rysunku 24.30 przedstawiono licznik Geigera–Müllera, czyli przyrząd używany do wykrywania promieniowania jonizującego (promieniowania powodującego jonizację atomów). Licznik składa się z cienkiego, dodatnio naładowanego drutu, otoczonego przez współosiową przewodzącą powłokę walcową, naładowaną takim samym co do wartości bezwzględnej ładunkiem ujemnym. Wewnątrz walca powstaje więc silne radialne pole elektryczne. Walec zawiera gaz szlachetny pod niskim ciśnieniem. Gdy cząstka promieniowania wpada przez walcową ściankę do licznika, jonizuje kilka atomów gazu. Powstałe elektrony swobodne (oznaczone przez  $e$ ) są przyciągane do dodatnio naładowanego drutu. Pole elektryczne jest jednak na tyle silne, że między zderzeniami z innymi atomami gazu swobodne elektrony uzyskują energię, wystarczającą do zjonizowania tych atomów. Powstaje więc więcej elektronów swobodnych i proces się powtarza, aż elektrony dotrą do drutu. Powstała „lawina” elektronów jest zbierana przez drut, wytwarzając sygnał, który jest używany do zarejestrowania przejścia wywołującej ją cząstki promieniowania. Przyjmując, że promień drutu wynosi 25  $\mu\text{m}$ , promień powłoki walcowej 1,4 cm, długość rury 16 cm i natężenie pola elektrycznego przy wewnętrznej ściance powłoki  $2,9 \cdot 10^4$  N/C, oblicz całkowity ładunek dodatni w drucie.



Rys. 24.30. Zadanie 23

24. Długi, cienki, nieprzewodzący pręt jest naładowany jednorodnie z gęstością liniową 2 nC/m. Pręt jest otoczony współosiową długą, przewodzącą powłoką walcową (o wewnętrznym promieniu 5 cm i zewnętrznym promieniu 10 cm). Wypadkowy ładunek na przewodniku wynosi zero. a) Jaka jest wartość natężenia

pola elektrycznego w odległości 15 cm od osi pręta? Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku na: b) wewnętrznej, c) zewnętrznej powierzchni przewodnika?

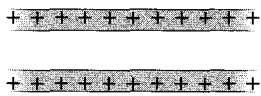
25. Nieskończenie długi walec o promieniu  $R$  jest naładowany jednorodnie objętościowo. a) Wykaż, że w odległości  $r$  od osi walca (dla  $r < R$ ) mamy:

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

gdzie  $\rho$  jest objętościową gęstością ładunku. b) Wyprowadź wyrażenie dla  $E$ , gdy  $r > R$ .

### 24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

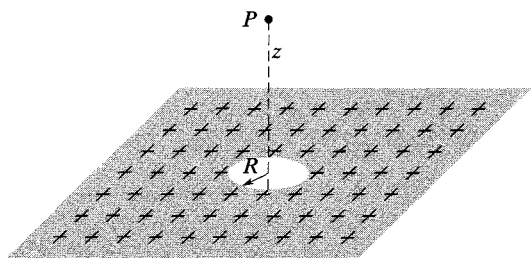
26. Na rysunku 24.31 przedstawiono przekroje przez dwie duże, równoległe, nieprzewodzące płyty z identycznymi rozkładami dodatniego ładunku, z gęstością powierzchniową  $\sigma$ . Jakie jest natężenie pola  $\vec{E}$  w punktach: a) nad płytami, b) między nimi, c) poniżej nich?



Rys. 24.31. Zadanie 26

27. Kwadratowa płyta metalowa o boku 8 cm i zaniedbywalnej grubości ma całkowity ładunek  $6 \cdot 10^{-6}$  C. a) Oszacuj wartość  $E$  natężenia pola elektrycznego tuż nad środkiem płyty (powiedzmy w odległości 0,5 mm) zakładając, że ładunek jest rozłożony jednorodnie na obydwu powierzchniach płyty. b) Oszacuj wartość natężenia pola  $E$  w odległości 30 m (dużej w stosunku do rozmiarów płyty) przyjmując, że płyta jest ładunkiem punktowym.

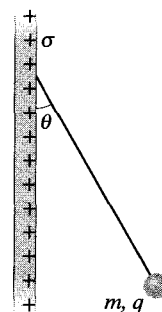
28. Duża, płaska, nieprzewodząca powierzchnia jest naładowana jednorodnie, z gęstością powierzchniową  $\sigma$ . W środku powierzchni wycięto mały okrągły otwór o promieniu  $R$  (rys. 24.32). Zaniedbując zakrzywienie linii pola w pobliżu wszystkich krawędzi, oblicz natężenie pola w punkcie  $P$ , w odległości  $z$  od środka otworu na jego osi. (Wskazówka: Zastosuj wzór (23.26) i zasadę superpozycji).



Rys. 24.32. Zadanie 28

29. Na rysunku 24.33 przedstawiono w przekroju małą nieprzewodzącą kulkę o masie  $m = 1$  mg i ładunku  $q = 2 \cdot 10^{-8}$  C (roz-

łożonym jednorodnie w całej jej objętości), zawieszoną na izolowanej nici, tworzącej kąt  $\theta = 30^\circ$  z pionową, jednorodnie naładowaną nieprzewodzącą płytą. Uwzględniając siłę ciężkości, działającą na kulkę i zakładając, że płyta rozciąga się daleko w kierunku pionowym i poziomym, oblicz gęstość powierzchniową ładunku  $\sigma$  na płycie.



Rys. 24.33. Zadanie 29

30. Dwie duże cienkie płyty metalowe są ustawione równoległe blisko siebie (rys. 24.16c). Na swych wewnętrznych powierzchniach płyty mają nadmiarowe ładunki przeciwnego znaku o gęstości powierzchniowej o wartości  $7 \cdot 10^{-22}$  C/m<sup>2</sup>. Płyta naładowana ujemnie jest z lewej strony. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ : a) na lewo od płyt, b) na prawo od płyt, c) między płytami?

31. W kierunku prostopadłym do dużej metalowej płyty naładowanej ujemnie z gęstością powierzchniową ładunku  $2 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup> wyrzuciono elektron. Jeśli początkowa energia kinetyczna elektronu wynosi 100 eV i jeśli elektron ma się zatrzymać (ze względu na odpychanie elektrostatyczne od płyty) dokładnie w chwili dotarcia do płyty, to w jakiej odległości od płyty powinien zostać on wyrzucony?

32. Dwie duże płyty metalowe, o polu powierzchni 1 m<sup>2</sup> znajdują się naprzeciw siebie, w odległości 5 cm i mają jednakowe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki na swych wewnętrznych powierzchniach. Jeśli wartość  $E$  natężenia pola elektrycznego między płytami wynosi 55 N/C, to jaka jest wartość ładunku na każdej płycie? Zaniedbaj efekty krawędziowe.

33\*. Płaska warstwa o grubości  $d$  jest naładowana jednorodnie z objętościową gęstością ładunku  $\rho$ . Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego we wszystkich punktach przestrzeni: a) wewnątrz, b) na zewnątrz warstwy, w funkcji odległości  $x$  od płaszczyzny symetrii warstwy.

### 24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

34. Strumień elektryczny przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu 10 cm, wytworzony przez znajdujący się w jej środku ładunek punktowy wynosi  $-750$  N·m<sup>2</sup>/C. a) Jeśli podwoimy promień powierzchni Gaussa, to jak duży będzie strumień elektryczny przez tę powierzchnię? Jaka jest wartość ładunku punkowego?

35. Sfera przewodząca o promieniu 10 cm jest naładowana. Jeśli natężenie pola elektrycznego w odległości 15 cm od środka sfery ma wartość  $3 \cdot 10^3$  N/C i jest skierowane radialnie do środka, to jaki jest wypadkowy ładunek sfery?

36. Dwie naładowane współśrodkowe sfery mają promienie 10 cm i 15 cm. Ładunek na wewnętrznej sferze wynosi  $4 \cdot 10^{-8}$  C, a na zewnętrznej sferze  $2 \cdot 10^{-8}$  C. Znajdź natężenie pola elektrycznego w odległości: a)  $r = 12$  cm, b)  $r = 20$  cm od środka sfer.

37. Ernest Rutherford napisał w swej pracy z 1911 r.: „Aby mieć jakieś wyobrażenie o siłach potrzebnych do odchylenia cząstki  $\alpha$  o duży kąt, rozważmy atom, jako układ złożony z punkowego dodatniego ładunku  $Ze$  w jego środku, otoczonego przez ładunek ujemny  $-Ze$  jednorodnie rozłożony w kuli o promieniu  $R$ . Natężenie pola elektrycznego  $E$  [...] w odległości  $r$  od środka dla punktu *wewnątrz* atomu [wynosi]:

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Sprawdź ten wzór.

38. Wzór (24.11) ( $E = \sigma/\epsilon_0$ ) określa natężenie pola elektrycznego w punktach w pobliżu naładowanej powierzchni przewodzącej. Zastosuj ten wzór do przewodzącej sfery o promieniu  $r$  i ładunku  $q$  i pokaż, że natężenie pola elektrycznego na zewnątrz sfery jest takie samo, jak natężenie pola ładunku punkowego, umieszczonego w środku sfery.

39. Proton o prędkości  $v = 3 \cdot 10^5$  m/s porusza się po orbicie, znajdującej się tuż nad naładowaną sferą o promieniu  $r = 1$  cm. Jaki jest ładunek na sferze? [www](#)

40. Ładunek punkowy  $+q$  znajduje się w środku elektrycznie obojętnej, sferycznej przewodzącej powłoki o wewnętrznym promieniu  $a$  i zewnętrznym promieniu  $b$ . Jaki ładunek występuje na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki? Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego w odległości  $r$  od środka powłoki, jeśli: c)  $r < a$ , d)  $b > r > a$ , e)  $r > b$ ? Naskicuj linie pola dla tych trzech obszarów. Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego, wytworzonego dla  $r > b$  przez: f) ładunek punkowy w środku i ładunek na powierzchni wewnętrznej, g) ładunek na powierzchni zewnętrznej? Na zewnątrz powłoki dodano teraz ładunek punkowy  $-q$ . Czy ten ładunek punkowy zmieni rozkład ładunku na: h) zewnętrznej, i) wewnętrznej powierzchni? Naskicuj linie pola w obecnej sytuacji. j) Czy na ten drugi ładunek punkowy działa niezerowa siła elektrostatyczna? k) Czy na pierwszy ładunek punkowy działa niezerowa wypadkowa siła elektrostatyczna? l) Czy w tym przypadku została naruszona trzecia zasada dynamiki Newtona?

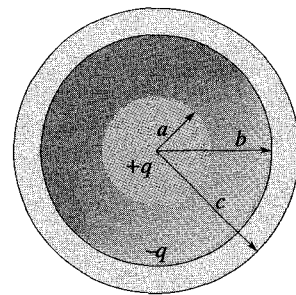
41. Nieprzewodząca kula o promieniu  $R$  jest niejednorodnie naładowana z gęstością objętościową  $\rho = \rho_s r/R$ , gdzie  $\rho_s$  jest stałą, a  $r$  jest odległością od środka kuli. Pokaż: a) że całkowity ładunek kuli wynosi  $Q = \pi\rho_s R^3$ , b) że:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2$$

określa wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz kuli. [www](#)

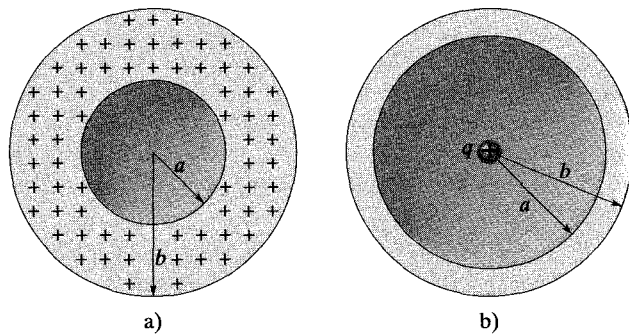
42. Atom wodoru można rozważać jako układ złożony z punkowego protonu o dodatnim ładunku  $+e$  w środku atomu i elektronu o ujemnym ładunku  $-e$ , rozłożonym wokół protonu z gęstością objętościową  $\rho = A \exp(-2r/a_0)$ , gdzie  $A$  jest stałą,  $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$  m jest *promieniem Bohra*, a  $r$  jest odległością od środka atomu. a) Korzystając z faktu, że atom wodoru jest elektrycznie obojętny, znajdź  $A$ . b) Znajdź następnie natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez atom w odległości (od protonu) równej promieniowi Bohra.

43. Na rysunku 24.34 przedstawiono kulę o promieniu  $a$  i ładunku  $+q$ , naładowaną jednorodnie objętościowo i współśrodkową z nią sferyczną przewodzącą powłokę o wewnętrznym promieniu  $b$  i zewnętrznym promieniu  $c$ . Ładunek wypadkowy powłoki wynosi  $-q$ . Znajdź wzory określające natężenie pola elektrycznego w funkcji odległości  $r$  od środka: a) wewnątrz kuli ( $r < a$ ), b) między kulą i powłoką ( $a < r < b$ ), c) wewnątrz powłoki ( $b < r < c$ ), d) na zewnątrz powłoki ( $r > c$ ). e) Jakie są ładunki na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki?



Rys. 24.34. Zadanie 43

44. Na rysunku 24.35a przedstawiono sferyczną powłokę naładowaną jednorodnie z gęstością objętościową  $\rho$ . Wykreśl zależność natężenia  $E$  pola, wytworzonego przez powłokę od odległości  $r$  od środka powłoki, w zakresie od 0 do 30 cm, przyjmując  $\rho = 1 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>3</sup>,  $a = 10$  cm i  $b = 20$  cm.

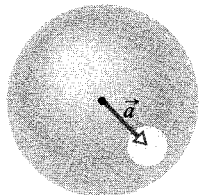


Rys. 24.35. Zadania 44 i 45

45. Na rysunku 24.35b przedstawiono nieprzewodzącą sferyczną powłokę, o wewnętrznym promieniu  $a$  i zewnętrznym promieniu  $b$ , naładowaną dodatnio z gęstością objętościową  $\rho = A/r$  (wewnątrz powłoki), gdzie  $A$  jest stałą, a  $r$  jest odległością od środka powłoki. Dodatkowo w środku powłoki znajduje się dodatni ładunek punkowy  $q$ . Jaka powinna być wartość  $A$ , aby pole elektryczne w powłoce ( $a \leq r \leq b$ ) było jednorodne? (Wskazówka: Stała  $A$  zależy od  $a$ , lecz nie zależy od  $b$ ).



46\*. Nieprzewodząca kula jest naładowana jednorodnie z gęstością objętościową  $\rho$ . Niech  $\vec{r}$  będzie wektorem od środka kuli do punktu  $P$  wewnątrz kuli. a) Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  jest dane wzorem  $\vec{E} = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$ . (Zauważ, że wynik jest niezależny od promienia kuli). b) W kuli wycięto następnie kulistą wnękę, jak przedstawiono na rysunku 24.36. Korzystając z zasady superpozycji pokaż, że natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach wnęki jest jednakowe i równe  $\vec{E} = \rho\vec{a}/(3\epsilon_0)$ , gdzie  $\vec{a}$  jest wektorem położenia środka wnęki względem środka kuli. (Zauważ, że ten wynik jest niezależny od promienia kuli i promienia wnęki).



Rys. 24.36. Zadanie 46

47\*. Sferycznie symetryczny, ale niejednorodny, objętościowy rozkład ładunku powoduje powstawanie pola elektrycznego o natężeniu  $E = Kr^4$ , skierowanego radialnie od środka sfery, gdzie  $r$  jest odległością od środka sfery i  $K$  jest stałą. Jaka jest gęstość objętościowa  $\rho$  tak rozłożonego ładunku?

### Zadanie dodatkowe

48. Tajemnica proszku czekoladowego. Eksplozje, wywołane przez wyładowania elektrostatyczne (iskry), stanowią poważne

niebezpieczeństwo w urządzeniach przeładowujących ziarno lub proszek. Eksplozja taka wystąpiła w proszku czekoladowym, w fabryce herbatników, w latach siedemdziesiątych XX wieku. W fabryce tej robotnicy zwykle opróżniali dostarczone worki z proszkiem do skrzyni ładunkowej, z której proszek był wdmuchiwany przez uziemione rury z polichloru winylu do silosa. Gdzieś na tej drodze wystąpiły dwa warunki konieczne, aby nastąpiła eksplozja: 1) Wartość natężenia pola elektrycznego wyniosła  $3 \cdot 10^6$  N/C lub więcej, tak że nastąpiło przebicie elektryczne i iskrzenie. 2) Energia iskry wyniosła 150 mJ lub więcej, tak że doszło do eksplozji proszku. Sprawdź, czy warunek (1) mógł być spełniony przy przepływie proszku przez rury z polichloru winylu.

Załóż, że strumień *ujemnie* naładowanych ziarenek proszku jest wdmuchiwany przez walcową rurę o promieniu  $R = 5$  cm. Przyjmij, że proszek i jego ładunek są rozłożone jednorodnie w rurze z gęstością objętościową ładunku  $\rho$ . a) Korzystając z prawa Gaussa, znajdź wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w rurze, jako funkcję odległości  $r$  od osi rury. b) Czy wartość natężenia maleje, czy rośnie wraz ze wzrostem  $r$ ? c) Czy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest skierowane radialnie do osi, czy od osi? d) Przyjmując gęstość objętościową ładunku  $\rho = 1,1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup> (typową w fabryce herbatników), znajdź maksymalną wartość natężenia pola elektrycznego i określ, gdzie występuje ta maksymalna wartość. e) Czy iskrzenie mogło wystąpić, a jeśli tak, to gdzie? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 57 w rozdziale 25).

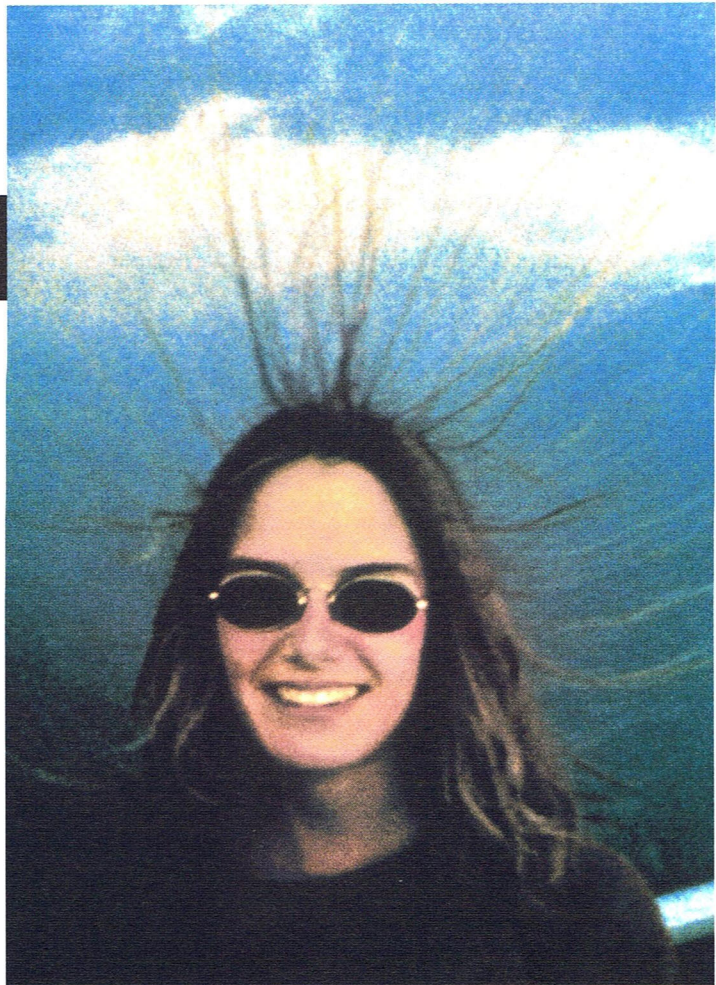
# 25

## Potencjał elektryczny

Oglądając z platformy widokowej Park Narodowy Sekwoi, kobieta poczuła, że podnoszą się jej włosy na głowie. Jej brat, rozbawiony tym widokiem, zrobił jej zdjęcie. Pięć minut po ich odejściu w platformę uderzył piorun, zabijając jedną osobę i raniąc siedem.

Co było przyczyną podniesienia się włosów na głowie kobiety?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 25.1. Elektryczna energia potencjalna

Prawo powszechnego ciężenia (Newtona) dla siły grawitacyjnej i prawo Coulomba dla siły elektrostatycznej są matematycznie identyczne. Stąd ogólne właściwości siły grawitacyjnej, jakie omawialiśmy wcześniej, powinny stosować się także do siły elektrostatycznej.

W szczególności uzasadniony jest wniosek, że siła elektrostatyczna jest *siłą zachowawczą*. Jeśli więc siła elektrostatyczna działa w jakimś układzie cząstek, między dwiema czy większą liczbą cząstek naładowanych, to układowi możemy przypisać **elektryczną energię potencjalną**  $E_p$ . Co więcej, jeśli układ zmienia swoją konfigurację ze stanu początkowego do innego stanu końcowego, to siła elektrostatyczna wykonuje pracę  $W$  nad cząstkami. Ze wzoru (8.1) wynika wtedy, że odpowiadająca temu procesowi zmiana  $\Delta E_p$  energii potencjalnej układu spełnia zależność:

$$\Delta E_p = E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz} = -W. \quad (25.1)$$

Podobnie, jak dla innych sił zachowawczych, praca wykonana przez siły elektrostatyczne jest *niezależna od toru cząstek*. Załóżmy, że cząstka naładowana, należąca do danego układu porusza się od punktu początkowego do punktu końcowego pod wpływem działającej na nią siły elektrostatycznej, wytworzonej przez resztę układu. Jeśli reszta układu jest nieruchoma, to praca  $W$  wykonana przez tę siłę jest taka sama dla *wszystkich* torów cząstki między punktami początkowym i końcowym.

Dla wygody, jako *konfigurację odniesienia* układu cząstek naładowanych wybieramy zwykle tę konfigurację, w której cząstki są nieskończenie od siebie oddalone. Przyjmujemy też zwykle, że *energia potencjalna odniesienia* jest równa zeru. Załóżmy, że kilka cząstek naładowanych, znajdujących się początkowo nieskończenie daleko od siebie (stan początkowy) zbliża się do siebie i tworzy układ cząstek, położonych w skończonych od siebie odległościach (stan końcowy). Niech początkowa energia potencjalna  $E_p \text{ pocz}$  będzie równa zeru i niech  $W_\infty$  reprezentuje pracę wykonaną przez siły elektrostatyczne przy ich zbliżaniu z nieskończoności. Na podstawie wzoru (25.1) końcowa energia potencjalna  $E_p$  układu jest więc równa:

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Podobnie, jak inne rodzaje energii potencjalnej, elektryczną energię potencjalną uważa się za rodzaj energii mechanicznej. Przypomnij sobie z rozdziału 8, że jeśli w układzie izolowanym działają tylko siły zachowawcze, to energia mechaniczna układu jest zachowana. W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy ten fakt często stosować.

### Sztuka rozwiązywania zadań

**Porada 1:** *Elektryczna energia potencjalna; praca wykonana przez pole elektryczne*

Elektryczna energia potencjalna jest związana z układem cząstek jako całością. Spotkamy się jednak (poczynając od przykładu 25.1) ze stwierdzeniami, które wiążą ją tylko z jedną cząstką

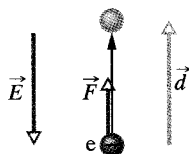
układu. Możemy na przykład przeczytać: „Elektron w polu elektrycznym ma energię potencjalną  $10^{-7} \text{ J}$ ”. Takie stwierdzenia są często możliwe do zaakceptowania, ale trzeba zawsze pamiętać, że energia potencjalna jest w rzeczywistości związana z układem — w tym przypadku z elektronem i cząstkami naładowanymi,

które wytwarzają pole elektryczne. Pamiętaj też, że ma sens przypisanie określonej wartości energii potencjalnej, jak  $10^{-7}$  J w tym przypadku, cząstce czy nawet układowi *tylko wtedy*, gdy znana jest energia potencjalna odniesienia.

Jeśli energia potencjalna związana jest tylko z jedną cząstką układu, to spotkasz się często ze sformułowaniem, że pracę nad cząstką wykonuje *pole elektryczne*. Oznacza to, że praca jest wykonywana przez siłę oddziaływania na cząstkę innych ładunków, które wytwarzają to pole.

## Przykład 25.1

Elektrony są bezustannie wybijane z cząsteczek powietrza w atmosferze przez cząstki promieniowania kosmicznego. Każdy elektron po uwolnieniu doznaje działania siły elektrostatycznej  $\vec{F}$ , wskutek istnienia pola elektrycznego, wytwarzanego w atmosferze przez naładowane cząstki, znajdujące się już na Ziemi. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma wartość  $E = 150$  N/C i jest skierowane w dół. Ile wynosi zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej uwolnionego elektronu, gdy siła elektrostatyczna powoduje, że przemieszcza się on pionowo do góry, na odległość  $d = 520$  m (rys. 25.1)?



**Rys. 25.1.** Przykład 25.1. Elektron w atmosferze doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , skierowanego do góry, pod działaniem siły  $\vec{F}$ , związanej z polem elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$

### ROZWIĄZANIE:

1. Zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej elektronu związana jest z pracą  $W$ , wykonaną przez pole elektryczne nad elektronem, zgodnie ze wzorem (25.1) ( $\Delta E_p = -W$ ).

2. Praca wykonana przez stałą siłę  $\vec{F}$  nad cząstką, przesuwaną się o  $\vec{d}$  wynosi:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (25.3)$$

3. Siła elektrostatyczna i natężenie pola elektrycznego są powiązane wzorem  $\vec{F} = q\vec{E}$ , gdzie  $q$  jest ładunkiem elektronu ( $= -1,60 \cdot 10^{-19}$  C). Podstawiając wyrażenie na  $\vec{F}$  do wzoru (25.3) i obliczając iloczyn skalarny, otrzymujemy:

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd \cos \theta, \quad (25.4)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkami  $\vec{E}$  i  $\vec{d}$ . Natężenie pola  $\vec{E}$  jest skierowane w dół, a przemieszczenie  $\vec{d}$  do góry, więc  $\theta = 180^\circ$ . Po podstawieniu tej i innych danych do wzoru (25.4) otrzymujemy:

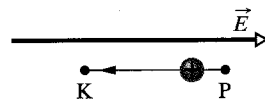
$$W = (-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})(520 \text{ m}) \cos 180^\circ = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Ze wzoru 25.1 wynika, że:

$$\Delta E_p = -W = -1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z tym wynikiem elektryczna energia potencjalna elektronu po wzniesieniu się na wysokość 520 m *maleje* o  $1,2 \cdot 10^{-14}$  J.

**SPRAWDZIAN 1:** Proton porusza się z punktu P do punktu K w jednorodnym polu elektrycznym skierowanym tak, jak pokazano na rysunku. a) Czy pole elektryczne wykonuje dodatnią, czy ujemną pracę nad protonem? b) Czy elektryczna energia potencjalna protonu wzrasta, czy maleje?



## 25.2. Potencjał elektryczny

Na podstawie przykładu 25.1 wnioskujemy, że energia potencjalna cząstki naładowanej w polu elektrycznym zależy od wartości ładunku cząstki. Jednak energia potencjalna przypadająca *na jednostkowy ładunek* w dowolnym punkcie pola elektrycznego ma już wartość niezależną od ładunku tej cząstki.

Założmy, że na przykład umieściliśmy cząstkę próbną o dodatnim ładunku  $1,60 \cdot 10^{-19}$  C w punkcie pola elektrycznego, w którym elektryczna energia potencjalna cząstki jest równa  $2,4 \cdot 10^{-17}$  J. Wtedy energia potencjalna przypadająca na jednostkowy ładunek wynosi:

$$\frac{2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150 \text{ J/C}.$$

Jeśli teraz zastąpimy cząstkę próbną cząstką o dwa razy większym ładunku dodatnim, czyli  $3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , to łatwo obliczyć, że druga cząstka ma elektryczną energię potencjalną  $4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ , czyli dwa razy większą niż pierwsza. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek będzie jednak nadal taka sama i równa  $150 \text{ J/C}$ .

Energia potencjalna na jednostkowy ładunek, czyli  $E_p/q$  jest więc niezależna od ładunku  $q$  zastosowanej cząstki i jest *cechą charakterystyczną tylko pola elektrycznego*, którym się zajmujemy. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek w wybranym punkcie pola elektrycznego nosi nazwę **potencjału elektrycznego**  $V$  (lub po prostu **potencjału**) w tym punkcie. Stąd:

$$V = \frac{E_p}{q}. \quad (25.5)$$

*Zauważ, że potencjał elektryczny jest skalarem, a nie wektorem.*

Różnica potencjałów elektrycznych  $\Delta V$  między dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa różnicy energii potencjalnej na jednostkowy ładunek między tymi dwoma punktami:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_{p \text{ końc}}}{q} - \frac{E_{p \text{ pocz}}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

Po zastosowaniu wzoru (25.1) w celu zastąpienia  $\Delta E_p$  przez  $-W$  we wzorze (25.6) możemy zdefiniować różnicę potencjałów między punktami początkowym i końcowym jako:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q} \quad (\text{definicja różnicy potencjałów}). \quad (25.7)$$

Różnica potencjałów między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego. Różnica potencjałów może być dodatnia, ujemna lub równa zero, zależnie od znaków i wartości wielkości  $q$  i  $W$ .

Jeśli przyjmiemy  $E_{p \text{ pocz}} = 0$  w nieskończoności jako naszą energię potencjalną odniesienia, to na podstawie wzoru (25.5) potencjał elektryczny musi tam być też równy zero. Wtedy ze względu na wzór (25.7) możemy zdefiniować potencjał elektryczny  $V$  w dowolnym punkcie pola elektrycznego wzorem:

$$V = -\frac{W_\infty}{q} \quad (\text{definicja potencjału}), \quad (25.8)$$

gdzie  $W_\infty$  jest pracą, wykonaną przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka przesuwa się z nieskończoności do punktu końcowego. Potencjał  $V$  może być dodatni, ujemny lub równy zero, zależnie od znaków i wartości  $q$  i  $W_\infty$ .

Zgodnie ze wzorem (25.8) jednostką potencjału w układzie SI jest dżul na kulomb. Taka jednostka pojawia się tak często, że używa się specjalnej nazwy

wolt (w skrócie V) dla tej jednostki i stąd:

$$1 \text{ wolt} = 1 \text{ dżul na kulomb.} \quad (25.9)$$

Ta nowa jednostka pozwala nam przyjąć inną jednostkę natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , które dotąd mierzyliśmy w niutonach na kulomb. Po dwóch przekształceniach jednostek otrzymujemy:

$$1 \text{ N/C} = \left(1 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{C}}{1 \text{ J}}\right) \left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N} \cdot \text{m}}\right) = 1 \text{ V/m.} \quad (25.10)$$

Czynnik przeliczeniowy w drugim nawiasie wynika ze wzoru (25.9), a w trzecim z definicji dżula. Odtąd będziemy wyrażali wartości natężenia pola elektrycznego w woltach na metr (V/m), a nie w niutonach na kulomb (N/C).

Na koniec możemy teraz zdefiniować jednostkę energii, która jest wygodna do pomiarów energii w obszarze atomowym i subatomowym: jeden *elektronowolt* (eV) jest energią równą pracy, potrzebnej do przesunięcia pojedynczego ładunku elementarnego  $e$ , na przykład elektronu czy protonu, między punktami o różnicy potencjałów równej jednemu woltowi. Ze wzoru (25.7) wynika, że wartość tej pracy wynosi  $q\Delta V$ , czyli:

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V}) = (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Potencjał elektryczny i elektryczna energia potencjalna

Potencjał elektryczny  $V$  i elektryczna energia potencjalna  $E_p$  są różnymi wielkościami i nie należy ich mylić.

▶ *Potencjał elektryczny* jest właściwością pola elektrycznego bez względu na obecność w nim naładowanego ciała;

jest mierzony w dżulach na kulomb (J/C), czyli w woltach (V).

▶ *Elektryczna energia potencjalna* jest energią naładowanego ciała w zewnętrznym polu elektrycznym (lub bardziej precyzyjnie energią układu, składającego się z ciała i zewnętrznego pola elektrycznego); jest mierzona w dżulach (J).

## Praca wykonana przez siłę zewnętrzną

Założmy, że przesuujemy cząstkę o ładunku  $q$  od punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym, działając na nią siłą. Podczas ruchu nasza siła wykonuje pracę  $W_p$  nad ładunkiem, a pole elektryczne wykonuje nad nim pracę  $W$ . Ze związku pracy i energii kinetycznej (7.10) wynika, że zmiana  $\Delta E_k$  energii kinetycznej cząstki wynosi:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_p + W. \quad (25.11)$$

Założmy teraz, że cząstka spoczywa przed wprowadzeniem w ruch i po jej zatrzymaniu. Wtedy  $E_{k \text{ końc}}$  i  $E_{k \text{ pocz}}$  są równe zeru i wzór (25.11) redukuje się do:

$$W_p = -W. \quad (25.12)$$

Jednym słowem, praca  $W_p$ , wykonana przez przyłożoną siłę podczas ruchu jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy  $W$ , wykonanej przez pole elektryczne, jeśli nie nastąpiła zmiana energii kinetycznej.

Używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia  $W_p$  do wzoru (25.1), możemy powiązać pracę wykonaną przez przyłożoną przez nas siłę ze zmianą energii potencjalnej cząstki podczas ruchu. Otrzymujemy:

$$\Delta E_p = E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}} = W_p. \quad (25.13)$$

Podobnie, używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia  $W_p$  do wzoru (25.7), możemy powiązać pracę  $W_p$  z różnicą potencjałów elektrycznych  $\Delta V$  między początkowym i końcowym położeniem cząstki. Otrzymujemy wtedy:

$$W_p = q \Delta V. \quad (25.14)$$

Praca  $W_p$  może być dodatnia, ujemna lub równa zeru, zależnie od znaków i wartości wielkości  $q$  i  $\Delta V$ . Jest to praca, jaką musimy wykonać przy przesuwaniu cząstki o ładunku  $q$ , między punktami o różnicy potencjałów  $\Delta V$ , bez spowodowania zmiany energii kinetycznej cząstki.

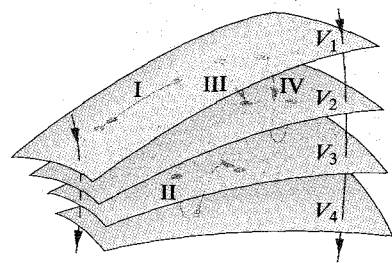
**SPRAWDZIAN 2:** W sprawdzianie 1 przesuwaliśmy proton z punktu początkowego do punktu końcowego w jednorodnym polu elektrycznym, skierowanym jak pokazano na rysunku. a) Czy nasza siła wykonuje przy tym dodatnią, czy ujemną pracę? b) Czy proton przesuwa się do punktu o większym, czy mniejszym potencjale?

## 25.3. Powierzchnie ekwipotencjalne

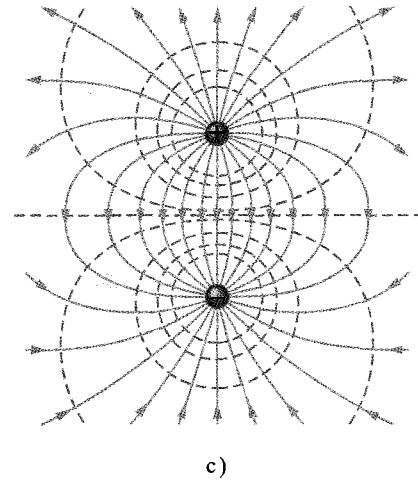
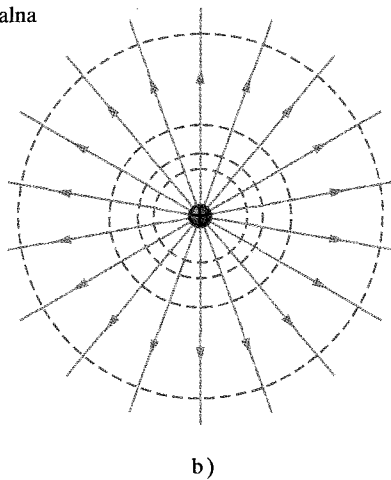
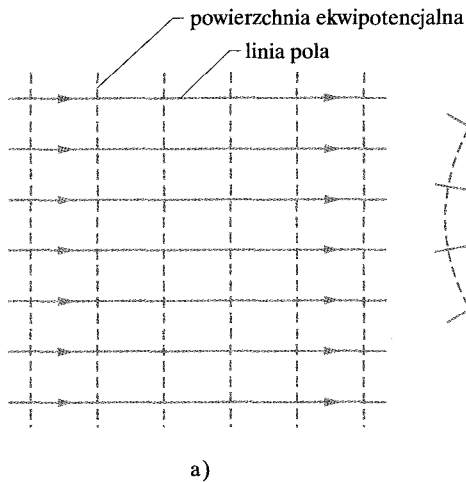
Sąsiadujące ze sobą punkty, które mają taki sam potencjał elektryczny, tworzą **powierzchnię ekwipotencjalną**, która może być albo wyobrażoną powierzchnią, albo rzeczywistą powierzchnią fizyczną. Jeśli cząstka porusza się między dwoma punktami początkowym i końcowym po tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to pole elektryczne nie wykonuje nad cząstką naładowaną żadnej pracy  $W$ . Wynika to ze wzoru (25.7), zgodnie z którym  $W = 0$ , jeśli  $V_{\text{końc}} = V_{\text{pocz}}$ . Z niezależności pracy (i stąd energii potencjalnej oraz potencjału) od drogi mamy  $W = 0$  dla dowolnej linii łączącej punkty początkowy i końcowy leżące na powierzchni ekwipotencjalnej, bez względu na to, czy tor cząstki leży całkowicie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Na rysunku 25.2 przedstawiono rodzinę powierzchni ekwipotencjalnych związanych z polem elektrycznym, wytworzonym przez pewien rozkład ładunków. Praca wykonywana przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka porusza się po torach I i II, jest równa zeru, ponieważ każdy z tych torów zaczyna się i kończy na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. Praca wykonywana podczas ruchu naładowanej cząstki po torach III i IV nie jest równa zeru, ale ma taką samą wartość dla obydwu tych torów, ponieważ początkowe i końcowe potencjały są identyczne dla tych dwóch torów, czyli torę III i IV łączą tę samą parę powierzchni ekwipotencjalnych.

Ze względu na symetrię powierzchnie ekwipotencjalne pola wytworzonego przez ładunek punktowy lub sferycznie symetryczny rozkład ładunku są współśrodkowymi sferami. Dla jednorodnego pola elektrycznego powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami prostopadłymi do linii pola. Powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do linii pola elektrycznego i stąd do

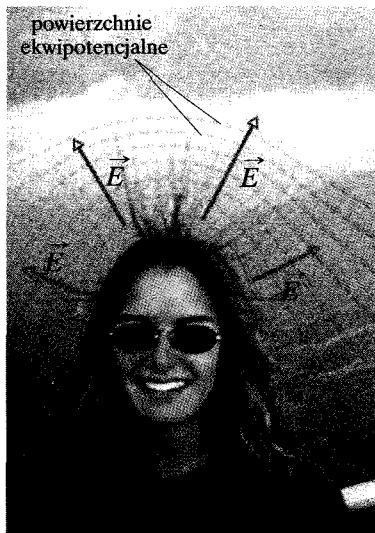


Rys. 25.2. Fragmenty czterech powierzchni ekwipotencjalnych, odpowiadających potencjałom elektrycznym  $V_1 = 100 \text{ V}$ ,  $V_2 = 80 \text{ V}$ ,  $V_3 = 60 \text{ V}$  i  $V_4 = 40 \text{ V}$ . Przedstawiono cztery torę, po których może się poruszać ładunek próbny. Zaznaczono też dwie linie pola elektrycznego



25.3. Linie pola elektrycznego (fioletowe) i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych (żółte) dla: a) pola jednorodnego, b) pola ładunku punkowego, c) pola dipola elektrycznego

natężenia  $\vec{E}$ , które jest zawsze styczne do tych linii. Jeśli natężenie  $\vec{E}$  nie byłoby prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, to miałyby składową leżącą wzdłuż tej powierzchni. Składowa ta wykonywałaby więc pracę nad cząstką naładowaną, przy jej ruchu po powierzchni. Jednak biorąc pod uwagę wzór (25.7), praca nie może być wykonywana, jeśli powierzchnia jest rzeczywiście ekwipotencjalna; wynika stąd jedyny możliwy wniosek, że natężenie  $\vec{E}$  musi być wszędzie prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Na rysunku 25.3 przedstawiono linie pola elektrycznego i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych dla jednorodnego pola elektrycznego, dla pola ładunku punkowego i dla pola dipola elektrycznego.



Rys. 25.4. Na zdjęciu otwierającym ten rozdział przedstawiono skutki działania chmur wytwarzających silne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , w pobliżu głowy kobiety. Wiele włosów ułożyło się wzdłuż linii tego pola, które są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych; natężenie pola jest największe tam, gdzie te powierzchnie są najbliższe siebie, czyli tuż nad głową

Powróćmy teraz do kobiety przedstawionej na fotografii otwierającej ten rozdział. Kobieta stała na platformie połączonej ze zboczem góry, miała zatem prawie ten sam potencjał, jak zbocze góry. Nad jej głową przesuwał się silnie naładowany układ chmur, który wytworzył wokół niej i wokół zbocza góry silne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym na zewnątrz od niej i od góry. Siły elektrostatyczne, związane z tym polem przesunęły pewne elektrony przewodnictwa w ciele kobiety w dół, pozostawiając kosmyki jej włosów naładowane dodatnio. Wartość natężenia  $\vec{E}$  była oczywiście duża, ale mniejsza od wartości  $3 \cdot 10^6$  V/m, która spowodowałaby przebicie elektryczne w powietrzu. (Wartość ta została przekroczona nieco później, gdy piorun uderzył w platformę).

Powierzchnie ekwipotencjalne otaczające kobietę na platformie można wyznaczyć z rozkładu jej włosów; kosmyki układają się wzdłuż kierunku natężenia  $\vec{E}$  i są stąd prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych — na rysunku 25.4 przedstawiono te powierzchnie ekwipotencjalne. Wartość natężenia  $E$  była oczywiście największa (powierzchnie ekwipotencjalne były wyraźnie najbliżej siebie) tuż nad jej głową, ponieważ włosy podniosły się tam bardziej, niż włosy po bokach.

Wynika stąd prosty wniosek. Jeśli pole elektryczne powoduje powstanie włosów na głowie, to lepiej się gdzieś schronić niż pozować do zdjęcia.



## 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

Różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami początkowym  $P$  i końcowym  $K$  w polu elektrycznym możemy obliczyć, jeśli znamy wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wzdłuż jakiegokolwiek drogi łączącej te punkty. W celu wykonania obliczeń wyznaczamy pracę, wykonaną przez pole nad dodatnim ładunkiem próbnym przy przesuwaniu ładunku od punktu początkowego do punktu końcowego i następnie stosujemy wzór (25.7).

Rozważmy dowolne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 25.5 przy zastosowaniu linii pola i dodatni ładunek próbnny  $q_0$ , który porusza się wzdłuż przedstawionego toru, od punktu początkowego do punktu końcowego. Dla nieskończenie małego przesunięcia  $d\vec{s}$ , w dowolnym punkcie toru na ładunek działa siła elektrostatyczna  $q_0\vec{E}$ . Z rozdziału 7 wiemy, że praca  $dW$ , wykonana nad cząstką przez siłę  $\vec{F}$ , przy przesunięciu  $d\vec{s}$  wynosi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (25.15)$$

Dla sytuacji z rysunku 25.5  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  i wzór (25.15) przyjmuje postać:

$$dW = q_0\vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.16)$$

Aby znaleźć całkowitą pracę  $W$ , wykonaną nad cząstką przez pole, podczas jej ruchu od punktu początkowego do punktu końcowego, sumujemy przez całkowanie prace, wykonane nad ładunkiem przy wszystkich przesunięciach  $d\vec{s}$  wzdłuż toru:

$$W = q_0 \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.17)$$

Jeśli podstawimy całkowitą pracę  $W$  ze wzoru (25.17) do wzoru (25.4), to otrzymamy:

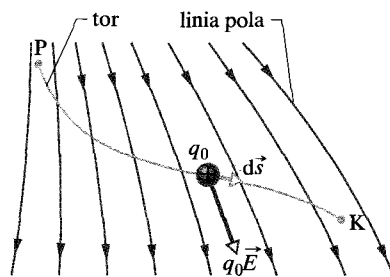
$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.18)$$

Stąd różnica potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  między dowolnymi dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa wziętej ze znakiem minus *całce krzywoliniowej* (całce wzdłuż toru cząstki) z  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  od punktu początkowego do punktu końcowego. Siła elektrostatyczna jest zachowawcza, dlatego też dla każdego toru otrzymujemy ten sam wynik (niezależnie od tego, czy całkę łatwo, czy trudno obliczyć).

Jeśli natężenie pola elektrycznego jest znane w pewnym obszarze, to wzór (25.18) pozwala obliczyć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami tego obszaru. Jeśli wybierzemy potencjał  $V_{\text{pocz}}$  w punkcie początkowym równy zeru, to wzór (25.18) przyjmuje postać:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.19)$$

w której pominęliśmy wskaźnik przy  $V_{\text{końc}}$ . Wzór (25.19) daje nam potencjał  $V$  w dowolnym punkcie końcowym pola elektrycznego *względem zerowego poten-*



Rys. 25.5. Ładunek próbnny  $q_0$  porusza się od punktu początkowego  $P$  do punktu końcowego  $K$  wzdłuż przedstawionego toru w niejednorodnym polu elektrycznym. Na ładunek próbnny przy przemieszczeniu o  $d\vec{s}$  działa siła elektrostatyczna  $q_0\vec{E}$ . Siła ta jest skierowana stycznie do linii pola w miejscu, w którym znajduje się ładunek próbnny

cjału w punkcie początkowym. Jeśli punkt początkowy wybierzemy w nieskończoności, to wzór (25.19) określa potencjał w dowolnym punkcie końcowym względem zerowego potencjału w nieskończoności.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono przekrój zbioru równoległych powierzchni ekwipotencjalnych i pięć torów, wzdłuż których będziemy przesuwać elektron z jednej powierzchni na drugą. a) Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego na tych powierzchniach? b) Określ dla każdego toru, czy wykonywana praca jest dodatnia, ujemna, czy równa zero. c) Uszereguj tory według wykonanej pracy, zaczynając od największej.

### Przykład 25.2

a) Na rysunku 25.6a przedstawiono dwa punkty początkowy P i końcowy K w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Punkty te leżą na tej samej linii pola elektrycznego (nie pokazanej) i znajdują się w odległości  $d$ . Znajdź różnicę potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  od punktu P do punktu K wzdłuż przedstawionego toru, który jest równoległy do kierunku natężenia pola.

wzdłuż tej linii od punktu początkowego P do punktu końcowego K. Przy przesuwanie ładunku próbnego wzdłuż toru na rysunku 25.6a przesunięcie  $d\vec{s}$  ma zawsze taki sam kierunek, jak  $\vec{E}$ . Stąd kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  jest równy zero i iloczyn skalarny we wzorze (25.18) wynosi:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \theta = E ds. \quad (25.20)$$

Wzory (25.18) i (25.20) dają nam wtedy:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} E ds. \quad (25.21)$$

Pole jest jednorodne, a więc natężenie  $E$  jest stałe wzdłuż toru i może zostać wyłączony przed całkę, co daje:

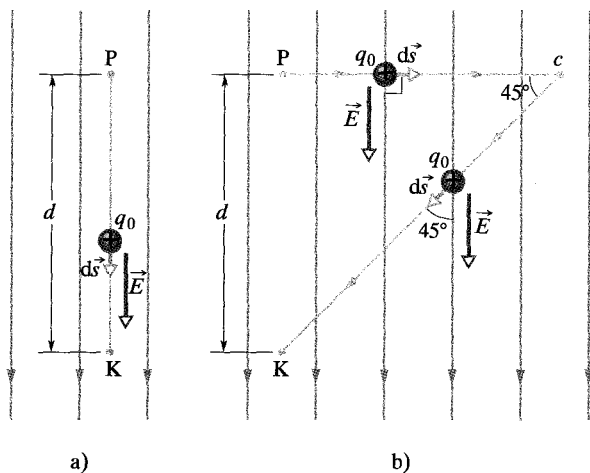
$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} ds = -Ed, \quad (\text{odpowiedź})$$

gdzie wartość całki jest po prostu długością  $d$  toru. Znak minus przy wyniku oznacza, że potencjał w punkcie końc na rysunku 25.6a jest mniejszy niż potencjał w punkcie pocz. Jest to wynik ogólny: potencjał zawsze maleje wzdłuż toru rozciągającego się w kierunku linii pola elektrycznego.

b) Znajdź teraz różnicę potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  z punktu początkowego do punktu końcowego wzdłuż linii  $P \rightarrow c \rightarrow K$ , przedstawionej na rysunku 25.6b.

### ROZWIĄZANIE:

☛ Ponownie zastosujemy podstawową ideę z punktu (a), ale teraz ładunek próbnego porusza się wzdłuż toru, składającego się z dwóch linii  $P \rightarrow c$  i  $c \rightarrow K$ . We wszystkich punktach wzdłuż linii  $P \rightarrow c$  przesunięcie  $d\vec{s}$  ładunku próbnego jest prostopadłe do  $\vec{E}$ . Stąd kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  jest równy  $90^\circ$  i iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  wynosi zero. Ze wzoru (25.18) wynika wtedy, że punkty P i c mają ten sam potencjał:  $V_c - V_{\text{pocz}} = 0$ .



Rys. 25.6. Przykład 25.2. a) Ładunek próbnego  $q_0$  porusza się po linii prostej od punktu P do punktu K, wzdłuż linii jednorodnego pola elektrycznego. b) Ładunek  $q_0$  porusza się wzdłuż toru  $P \rightarrow c \rightarrow K$  w tym samym polu elektrycznym

### ROZWIĄZANIE:

☛ Możemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma dowolnymi punktami w polu elektrycznym przez obliczenie całki z  $\vec{E}$  po  $d\vec{s}$  wzdłuż linii łączącej te dwa punkty, zgodnie ze wzorem (25.18). Zrobimy to, przesuując w myśli ładunek próbnego  $q_0$

Dla linii  $c \rightarrow K$  mamy  $\theta = 45^\circ$  i ze wzoru (25.18):

$$\begin{aligned} V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} &= - \int_c^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_c^{\text{końc}} E(\cos 45^\circ) ds = -E \cdot \cos 45^\circ \int_c^{\text{końc}} ds. \end{aligned}$$

Całka w tym równaniu jest po prostu długością linii  $c \rightarrow K$  i z rysunku 25.6b wynika, że długość ta wynosi  $d/\sin 45^\circ$ . Stąd:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E(\cos 45^\circ) \frac{d}{\sin 45^\circ} = -Ed. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z oczekiwaniem otrzymaliśmy taki sam wynik, jak w punkcie (a) — różnica potencjałów między dwoma punktami nie zależy od drogi między nimi. Wniosek: gdy chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami, przez przesunięcie ładunku próbnego między nimi, możemy zaoszczędzić czas i pracę dzięki wyborowi drogi, który upraszcza zastosowanie wzoru (25.18).

## 25.5. Potencjał pola ładunku punktowego

Zastosujemy obecnie wzór (25.18) w celu wyprowadzenia wyrażenia na potencjał elektryczny  $V$  w przestrzeni wokół cząstki naładowanej, względem potencjału zerowego w nieskończoności. Rozważmy punkt  $P$  w odległości  $R$  od nieruchomej cząstki o dodatnim ładunku  $q$  (rys. 25.7). Aby skorzystać ze wzoru (25.18), wyobraźmy sobie, że przesuujemy dodatni ładunek próbnny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności. Ponieważ nie jest istotny tor, jaki wybieramy, a więc wybierzmy najprostszy — wzdłuż prostej przechodzącej przez ładunek  $q$  i punkt  $P$ .

Aby zastosować wzór (25.18), musimy obliczyć iloczyn skalarny:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos \theta ds. \quad (25.22)$$

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  na rysunku 25.7 jest skierowane radialnie od wybranej cząstki. Stąd przesunięcie  $d\vec{s}$  cząstki próbnej wzdłuż jej toru ma ten sam kierunek co  $\vec{E}$ . Oznacza to, że we wzorze (25.22) kąt  $\theta = 0$  i  $\cos \theta = 1$ . Tor jest radialny, a więc możemy napisać  $ds = dr$ . Następnie podstawiając granice  $R$  i  $\infty$ , możemy zapisać wzór (25.18) w postaci:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_R^\infty E dr. \quad (25.23)$$

Przyjmijmy teraz  $V_{\text{końc}} = 0$  (w  $\infty$ ) i  $V_{\text{pocz}} = V$  (w odległości  $R$ ). Następnie do wzoru na wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbnny, podstawimy ze wzoru (23.3):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (25.24)$$

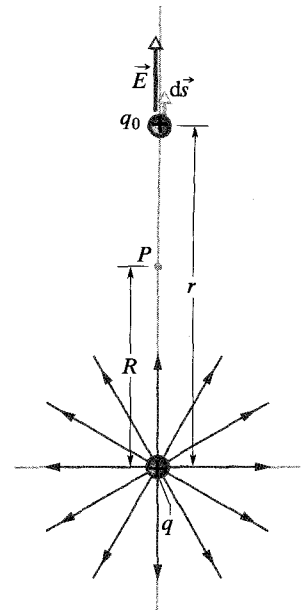
Po tych zmianach wzór (25.23) przyjmuje postać:

$$0 - V = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^\infty = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (25.25)$$

Wyznaczając  $V$  i zamieniając  $R$  na  $r$ , otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (25.26)$$

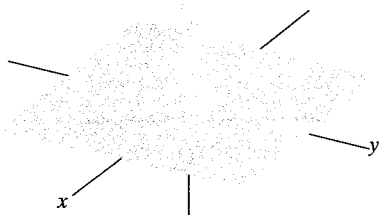
jako wyrażenie na potencjał  $V$  pola wytworzonego przez cząstkę o ładunku  $q$ , w dowolnej odległości  $r$  od cząstki.



Rys. 25.7. Dodatni ładunek punktowy  $q$  wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  i potencjał elektrycznym  $V$  w punkcie  $P$ . Potencjał obliczamy, przesuując ładunek próbnny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności. Ładunek próbnny jest przedstawiony w odległości  $r$  od ładunku punktowego; zaznaczono przemieszczenie  $d\vec{s}$

$V(r)$ 

25.8. Komputerowy wykres potencjału elektrycznego  $V(r)$  pola dodatniego ładunku punkowego, znajdującego się w początku płaskiego układu współrzędnych  $xy$ . Potencjał w punktach tej płaszczyzny jest odłożony na osi pionowej. (Zakrzywione linie dodano dla uzyskania lepszej widoczności wykresu). Nieskończona wartość potencjału  $V$  przewidywana przez wzór (25.26) dla  $r = 0$  nie została tu zaznaczona



Chociaż wyprowadziliśmy wzór (25.26) dla cząstki naładowanej dodatnio, to wyprowadzenie jest słuszne także dla cząstki naładowanej ujemnie, tzn. gdy  $q$  jest wielkością ujemną. Zauważ, że znak  $V$  jest taki sam, jak znak  $q$ :

➤ Cząstka dodatnio naładowana wytwarza dodatni potencjał elektryczny. Cząstka ujemnie naładowana wytwarza ujemny potencjał elektryczny.

Na rysunku 25.8 przedstawiono przestrzenny wykres zależności (25.26) dla dodatnio naładowanej cząstki — wartość  $V$  jest na osi pionowej. Zauważ, że wartość potencjału wzrasta, gdy  $r$  maleje. W rzeczywistości zgodnie ze wzorem (25.26) potencjał  $V$  staje się nieskończony przy  $r = 0$ , chociaż na rysunku 25.8 mamy w tym punkcie skończoną dużą wartość.

Wzór (25.26) określa również potencjał elektryczny *poza lub na zewnętrznej powierzchni* sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku. Możemy to udowodnić, korzystając z jednego z twierdzeń o powłoce z paragrafów 22.4 i 24.9 do zastąpienia danego sferycznego rozkładu ładunku przez ładunek całkowity umieszczony w środku. Wtedy możemy powtórzyć wyprowadzenie, prowadzące do wzoru (25.26), jeśli tylko nie rozważamy punktu wewnątrz danego rozkładu.

### Sztuka rozwiązywania zadań

#### Porada 3: Obliczanie różnicy potencjałów

W celu obliczenia różnicy potencjałów  $\Delta V$  między dowolnymi dwoma punktami, w polu izolowanego ładunku punkowego, na-

leży obliczyć ze wzoru (25.26) potencjał w każdym punkcie i następnie odjąć wyniki. Ze względu na to odejmowanie wartość  $\Delta V$  nie zależy od wyboru energii potencjalnej odniesienia.

## 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

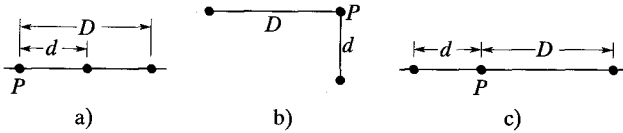
Wypadkowy potencjał układu ładunków punktowych w jakimś punkcie możemy obliczyć, korzystając z zasady superpozycji. Obliczamy oddzielnie potencjały, pochodzące od każdego ładunku w danym punkcie (przy zastosowaniu wzoru (25.26) z uwzględnieniem znaku ładunku) i następnie sumujemy te potencjały. Dla układu  $n$  ładunków wypadkowy potencjał wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ ładunków punktowych}), \quad (25.27)$$

gdzie  $q_i$  jest wartością  $i$ -tego ładunku, a  $r_i$  jest odległością danego punktu od  $i$ -tego ładunku. Suma we wzorze (25.27) jest *sumą algebraiczną*, a nie sumą

wektorową, jak suma przy obliczaniu natężenia pola elektrycznego dla układu ładunków punktowych. Na tym polega przewaga rachunkowa potencjału nad natężeniem pola elektrycznego: łatwiej jest zsumować kilka wielkości skalarnych niż zsumować kilka wielkości wektorowych, dla których trzeba uwzględnić kierunki i składowe.

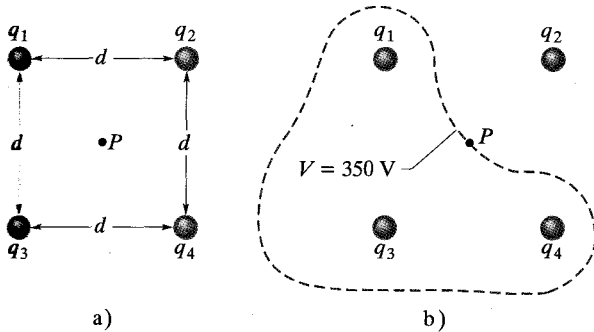
**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, wytworzonego przez protony w punkcie  $P$ , zaczynając od największego.



### Przykład 25.3

Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , znajdującym się w środku kwadratu, w którego wierzchołkach umieszczone są ładunki punktowe (rys. 25.9a)? Odległość  $d$  wynosi 1,3 m, a ładunki mają wartości:

$$q_1 = +12 \text{ nC}, \quad q_3 = +31 \text{ nC}, \\ q_2 = -24 \text{ nC}, \quad q_4 = +17 \text{ nC}.$$



**Rys. 25.9.** Przykład 25.3. a) Cztery ładunki punktowe znajdują się w wierzchołkach kwadratu. b) Zamknięta krzywa jest przekrojem płaszczyzny rysunku i powierzchni ekwipotencjalnej, zawierającej punkt  $P$ . (Krzywa jest naszkicowana tylko orientacyjnie)

### ROZWIĄZANIE:

➡ Potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $P$  jest algebraiczną sumą potencjałów elektrycznych pochodzących od czterech ładunków punktowych. (Potencjał elektryczny jest skalarem, zatem nie jest ważne, który z ładunków znajduje się w którym wierzchołku). Stąd ze wzoru (25.27) mamy:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r} \right).$$

Odległość  $r$  wynosi  $d/\sqrt{2}$ , czyli 0,919 m, a suma ładunków jest równa:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

zatem:

$$V = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(36 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,919 \text{ m}} \approx 350 \text{ V}.$$

(odpowieź)

W pobliżu każdego z trzech dodatnich ładunków na rysunku 25.9a potencjał ma bardzo duże wartości dodatnie. W pobliżu pojedynczego ładunku ujemnego potencjał ma bardzo duże wartości ujemne. Dlatego w kwadracie powinny znajdować się punkty, które mają taki sam potencjał, jak w punkcie  $P$ . Krzywa na rysunku 25.9b ilustruje przekrój płaszczyzny rysunku z powierzchnią ekwipotencjalną zawierającą punkt  $P$ . Dowolny punkt na tej krzywej ma taki sam potencjał, jak punkt  $P$ .

### Przykład 25.4

a) Na rysunku 25.10a przedstawiono 12 elektronów (o ładunku  $-e$ ), rozmieszczonych w jednakowych odległościach na okręgu o promieniu  $R$ . Jaki jest potencjał elektryczny i natężenie pola elektrycznego elektronów w środku  $C$  okręgu (względem  $V = 0$  w nieskończoności)?

### ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $C$  jest sumą algebraiczną potencjałów elektrycznych, pochodzących od każdego elektronu. (Potencjał elektryczny jest skalarem, dlatego też miejsca elektronów nie odgrywają roli). Elektrony mają takie same ładunki  $-e$  i wszystkie są umieszczone w takiej samej odległości

$R$  od punktu  $C$ , a więc wzór (25.27) daje nam:

$$V = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (25.28)$$

2. Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, dlatego też w tym przypadku miejsca elektronów są ważne. Ze względu na symetrię ustawienia na rysunku 25.10a wektor natężenia pola elektrycznego w punkcie  $C$  od dowolnego danego elektronu znosi się z wektorem natężenia pola od elektronu, leżącego na przeciwnym końcu średnicy i dlatego w punkcie  $C$ :

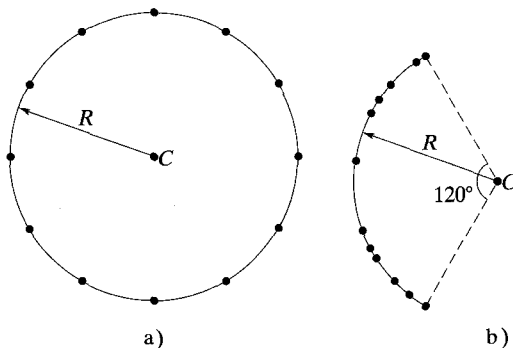
$$\vec{E} = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jeśli elektrony przesuniemy wzdłuż okręgu tak, że są one rozłożone nierównomiernie na łuku okręgu o kącie środkowym  $120^\circ$  (rys. 25.10b), to jaki będzie wtedy potencjał w punkcie  $C$ ? Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego w punkcie  $C$  (jeśli się w ogóle zmieni)?

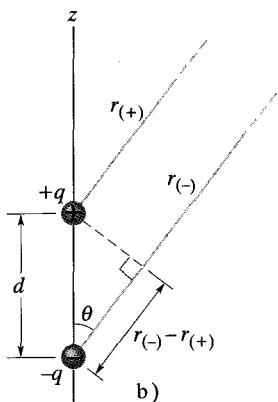
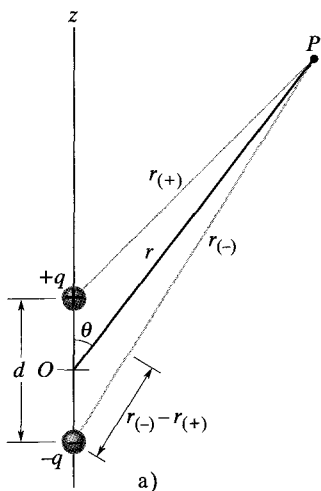
### ROZWIĄZANIE:

Potencjał jest nadal opisany wzorem (25.28), ponieważ odległość od punktu  $C$  żadnego z elektronów nie uległa zmianie, a ich usta-

wienie jest nieistotne. Natężenie pola elektrycznego przestaje być równe zero, ponieważ ustawienie elektronów nie jest już symetryczne. Niezerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest teraz skierowane w stronę ładunków.



Rys. 25.10. Przykład 25.4. a) Dwanaście elektronów rozłożono równomiernie na okręgu. b) Tutaj elektrony są rozmieszczone nierównomiernie na łuku tego samego okręgu



## 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego

Zastosujemy obecnie wzór (25.27) w celu obliczenia potencjału dipola elektrycznego w dowolnym punkcie  $P$  (rys. 25.11a). W punkcie  $P$  dodatni ładunek punktowy (znajdujący się w odległości  $r_{(+)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(+)}$  i ujemny ładunek punktowy (w odległości  $r_{(-)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(-)}$ . Wypadkowy potencjał w punkcie  $P$  zgodnie ze wzorem (25.27) wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}. \quad (25.29)$$

Dipole występujące w przyrodzie, na przykład odpowiadające wielu cząsteczkom, są całkiem małe i jesteśmy zwykle zainteresowani tylko punktami znajdującymi się w dużych odległościach od dipola,  $r \gg d$ , gdzie  $d$  jest odległością między ładunkami. Przy tych warunkach z rysunku 25.11b wynikają następujące przybliżenia:

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta \quad \text{i} \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2.$$

Jeśli podstawimy te wielkości do wzoru (25.29), to przybliżona wartość  $V$  będzie wynosić:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

Rys. 25.11. a) Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $r$  od środka  $O$  dipola. Prosta  $OP$  tworzy kąt  $\theta$  z osią dipola. b) Jeśli punkt  $P$  znajduje się daleko od dipola, to odcinki o długościach  $r_{(+)}$  i  $r_{(-)}$  są w przybliżeniu równoległe do odcinka o długości  $r$  i odcinek czarnej linii przerywanej jest w przybliżeniu prostopadły do odcinka o długości  $r_{(-)}$

gdzie kąt  $\theta$  jest mierzony od osi dipola jak na rysunku 25.11a. Wzór ten możemy teraz zapisać w postaci:

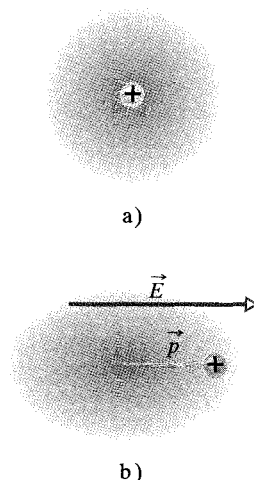
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{dipol elektryczny}), \quad (25.30)$$

gdzie  $p (= qd)$  jest wartością elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ , zdefiniowanego w paragrafie 23.5. Wektor  $\vec{p}$  jest skierowany wzdłuż osi dipola, od ujemnego do dodatniego ładunku (dlatego też kąt  $\theta$  jest mierzony od kierunku wektora  $\vec{p}$ ).

**SPRAWDZIAN 5:** Załóżmy, że wybraliśmy trzy punkty w równych (dużych) odległościach  $r$  od środka dipola z rysunku 25.11: punkt  $a$  znajduje się na osi dipola, powyżej ładunku dodatniego, punkt  $b$  znajduje się na osi dipola, poniżej ładunku ujemnego i punkt  $c$  znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do dipola, przechodzącej przez środek dipola. Uszereguj punkty według odpowiadających im wartości potencjału elektrycznego dipola, zaczynając od największej dodatniej.

### Indukowany moment dipolowy

Wiele cząsteczek, na przykład cząsteczka wody, ma *trwały* elektryczny moment dipolowy. Dla innych cząsteczek (zwanymi *cząsteczkami niepolarnymi*) i dla każdego odosobnionego atomu środki ładunku dodatniego i ujemnego pokrywają się (rys. 25.12a) i stąd nie powstaje żaden moment dipolowy. Jeśli jednak umieścimy atom lub cząsteczkę niepolarną w zewnętrznym polu elektrycznym, to pole odkształca orbity elektronu i rozsuwa środki ładunku dodatniego i ujemnego (rys. 25.12b). Elektrony są naładowane ujemnie, a więc ulegają przesunięciu w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola. To przesunięcie prowadzi do powstania momentu dipolowego  $\vec{p}$ , skierowanego w kierunku natężenia pola. Taki moment dipolowy nazywamy *indukowanym przez pole*, a o atomie lub cząsteczce mówimy, że są *spolaryzowane przez pole* (jedna część jest naładowana dodatnio, a druga ujemnie). Gdy usuniemy pole, indukowany moment dipolowy i polaryzacja znikną.



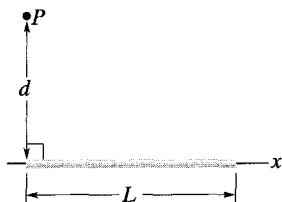
**Rys. 25.12.** a) Atom z dodatnio naładowanym jądrem (kolor zielony) i ujemnie naładowanymi elektronami (kolor złoty cieniowany). Środki ładunku dodatniego i ujemnego się pokrywają. b) Jeśli atom znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to orbity elektronów ulegną takiemu odkształceniu, że środki ładunku dodatniego i ujemnego przestaną się pokrywać. Pojawi się indukowany moment dipolowy  $\vec{p}$ . Odkształcenie zostało tu wyolbrzymione

## 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

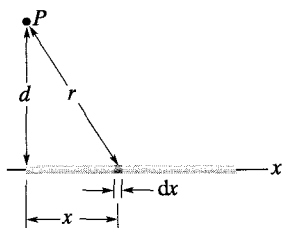
Jeśli rozkład ładunku  $q$  jest ciągły (jak np. dla jednorodnie naładowanego cienkiego pręta czy tarczy), to nie możemy zastosować sumowania ze wzoru (25.27) w celu obliczenia potencjału  $V$  w punkcie  $P$ . Zamiast tego musimy wybrać nieskończenie mały element ładunku  $dq$ , określić potencjał  $dV$ , wytworzony przez  $dq$  w punkcie  $P$  i potem scałkować go po całym rozkładzie ładunku.

Przyjmijmy ponownie, że potencjał jest równy zeru w nieskończoności. Jeśli potraktujemy element ładunku  $dq$  jako ładunek punktowy, to możemy skorzystać ze wzoru (25.26), w celu wyrażenia potencjału  $dV$ , wytworzonego przez  $dq$  w punkcie  $P$ :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (\text{dodatnie lub ujemne } dq), \quad (25.31)$$



a)



b)

Rys. 25.13. a) Cienki, jednorodnie naładowany pręt wytwarza potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $P$ . b) Element ładunku wytwarza potencjał  $dV$  w punkcie  $P$

gdzie  $r$  jest odległością między  $P$  i  $dq$ . W celu znalezienia całkowitego potencjału  $V$  w punkcie  $P$ , obliczamy całkę, aby zsumować potencjały wytworzone przez wszystkie elementy ładunku

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}. \quad (25.32)$$

Całkę należy obliczyć po całym rozkładzie ładunku. Zauważ, że nie ma potrzeby rozważania we wzorze (25.32) *żadnych składowych wektora*, gdyż potencjał elektryczny jest skalarem.

Zbadamy teraz dwa ciągle rozkłady ładunku: naładowaną linię i naładowaną tarczę.

### Naładowana linia

Na rysunku 25.13a przedstawiono cienki, nieprzewodzący pręt o długości  $L$ , naładowany jednorodnie dodatnio z gęstością liniową  $\lambda$ . Określimy potencjał elektryczny  $V$ , wytworzony przez pręt w punkcie  $P$ , leżącym na prostej prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego lewy koniec i odległym od lewego końca o  $d$ .

Rozważmy element  $dx$  pręta (rys. 25.13b). Ten (i każdy inny) element pręta ma ładunek:

$$dq = \lambda dx \quad (25.33)$$

i wytwarza potencjał elektryczny  $dV$  w punkcie  $P$ , który znajduje się w odległości  $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$  od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy skorzystać ze wzoru (25.31) do napisania potencjału  $dV$  w postaci:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}. \quad (25.34)$$

Ładunek w pręcie jest dodatni i wybraliśmy  $V = 0$  w nieskończoności; z paragrafu 25.5 wnioskujemy zatem, że potencjał  $dV$  we wzorze (25.34) musi być dodatni.

Znajdziemy teraz całkowity potencjał  $V$ , wytworzony przez pręt w punkcie  $P$ , przez scałkowanie wzoru (25.34) wzdłuż pręta, od  $x = 0$  do  $x = L$ , z zastosowaniem całki 17 z dodatku E. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{(x^2 + d^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(x + (x^2 + d^2)^{1/2}) \right]_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(L + (L^2 + d^2)^{1/2}) - \ln d \right]. \end{aligned}$$

Wynik ten możemy uprościć, stosując związek  $\ln A - \ln B = \ln A/B$ . Ostatecznie otrzymujemy:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right]. \quad (25.35)$$



Potencjał  $V$  jest sumą dodatnich wartości  $dV$ , a więc powinien być dodatni, ale czy wzór (25.35) daje dodatnie wartości  $V$ ? Argument logarytmu jest większy od jedności, więc logarytm jest liczbą dodatnią, zatem i potencjał  $V$  jest dodatni.

## Naładowana tarcza

W paragrafie 23.7 obliczyliśmy wartość natężenia pola elektrycznego w punktach leżących na osi symetrii, prostopadłej do plastikowej tarczy o promieniu  $R$ , naładowanej jednorodnie powierzchniowo, z gęstością  $\sigma$  na jednej (np. górnej) powierzchni. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na potencjał elektryczny  $V(z)$  w dowolnym punkcie leżącym na osi symetrii.

Rozważmy nieskończenie mały element składający się z płaskiego pierścienia o promieniu  $R'$  i szerokości radialnej  $dR'$  (rys. 25.14). Ładunek pierścienia wynosi:

$$dq = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

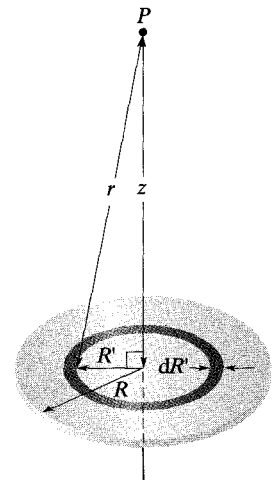
gdzie  $2\pi R'dR'$  jest polem górnej powierzchni pierścienia. Wszystkie części tego naładowanego elementu znajdują się w takiej samej odległości  $r$  od punktu  $P$  na osi tarczy. Korzystając z rysunku 25.14, możemy zastosować wzór (25.31) w celu napisania przyczynku do potencjału elektrycznego w punkcie  $P$ , pochodzącego od tego pierścienia:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \quad (25.36)$$

Wypadkowy potencjał w punkcie  $P$  znajdujemy przez dodanie (scałkowanie) przyczynków od wszystkich pierścieni, od  $R' = 0$  do  $R' = R$ :

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R'dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z). \quad (25.37)$$

Zauważ, że zmienną w drugiej całce we wzorze (25.37) jest  $R'$ , a nie współrzędna  $z$ , która pozostaje stała przy całkowaniu po powierzchni tarczy. (Przy obliczaniu całki założyliśmy dodatkowo, że  $z \geq 0$ ).



Rys. 25.14. Plastikowa tarcza o promieniu  $R$  jest jednorodnie naładowana na górnej powierzchni z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$ . Chcemy znaleźć potencjał  $V$  w punkcie  $P$  na osi tarczy

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 4: Kłopoty ze znakami potencjału elektrycznego

Gdy obliczamy potencjał  $V$  od naładowanej linii czy dowolnego innego ciągłego rozkładu ładunku w pewnym punkcie  $P$ , mogą zdarzyć się kłopoty ze znakiem. Oto przepis, pozwalający właściwie ustalić znak.

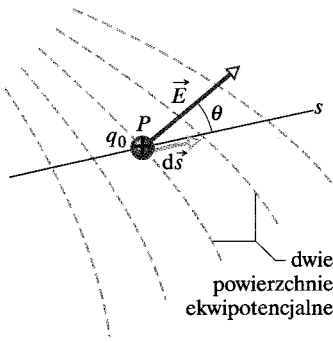
Jeśli ładunek jest ujemny, to czy symbole  $dq$  i  $\lambda$  powinny reprezentować wielkości ujemne, czy też powinniśmy wyraźnie wskazać znaki, pisząc  $-dq$  i  $-\lambda$ ? Można stosować obie metody, ale trzeba pamiętać znaczenie wybranej postaci zapisu, aby móc w wyniku końcowym poprawnie interpretować znak  $V$ .

Gdy cały rozkład ładunku ma jednakowy znak, można przyjmując, że symbole  $dq$  i  $\lambda$  reprezentują tylko wartości bezwzględne. Wynik obliczeń daje tylko wartość bezwzględną potencjału  $V$

w punkcie  $P$  i trzeba dodać znak przy  $V$ , zależnie od znaku ładunku. (Jeśli potencjał jest równy zeru w nieskończoności, to dodatni ładunek daje potencjał dodatni, a ładunek ujemny daje potencjał ujemny).

Jeśli przypadkowo zamienimy granice całkowania przy obliczaniu potencjału, to otrzymamy przeciwną wartość  $V$ . Wartość będzie poprawna po odrzuceniu znaku minus, a właściwy znak  $V$  należy ustalić, znając znak ładunku. Na przykład, otrzymalibyśmy znak minus we wzorze (25.35), jeśli zamienilibyśmy granice całkowania. Powinniśmy wtedy pominąć znak i zauważyć, że potencjał jest dodatni, ponieważ wytwarzający go ładunek jest dodatni.

## 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału



Rys. 25.15. Ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o  $d\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na drugą. (Odległość między powierzchniami została powiększona dla lepszego efektu). Przemieszczenie  $d\vec{s}$  tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$

W paragrafie 25.4 opisywaliśmy, jak znaleźć potencjał w punkcie końcowym, jeśli znamy natężenie pola elektrycznego wzdłuż toru od punktu odniesienia do punktu końcowego. W tym paragrafie postąpimy odwrotnie, będziemy obliczać natężenie pola elektrycznego, gdy znamy potencjał elektryczny. Jak pokazano na rysunku 25.3, rozwiązanie graficzne tego problemu jest proste. Jeśli znamy potencjał  $V$  we wszystkich punktach w pobliżu układu ładunków, to możemy narysować zbiór powierzchni ekwipotencjalnych. Linie pola elektrycznego, naskicowane prostopadłe do tych powierzchni ujawniają zmienność natężenia  $\vec{E}$ . Chcemy teraz znaleźć matematyczny równoważnik tej procedury graficznej.

Na rysunku 25.15 przedstawiono przekrój zbioru leżących blisko siebie powierzchni ekwipotencjalnych o różnicy potencjałów  $dV$  między każdą parą sąsiednich powierzchni. Zgodnie z rysunkiem natężenie pola  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie  $P$  jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, przechodzącej przez punkt  $P$ .

Założmy, że dodatni ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o  $d\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na sąsiednią. Ze wzoru (25.7) wynika, że praca pola elektrycznego nad ładunkiem próbnym podczas tego przemieszczenia wynosi  $-q_0 dV$ . Ze wzoru (25.16) i rysunku 25.15 wynika, że praca ta może być także zapisana w postaci iloczynu skalarnego  $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , czyli  $q_0 E \cos \theta ds$ . Przystępując do tych dwóch wyrażenia dla pracy, otrzymujemy:

$$-q_0 dV = q_0 E \cos \theta ds, \quad (25.38)$$

czyli:

$$E \cos \theta = -\frac{dV}{ds}. \quad (25.39)$$

Ponieważ  $E \cos \theta$  jest składową natężenia  $\vec{E}$  w kierunku przemieszczenia  $d\vec{s}$ , to wzór (25.39) można zapisać w postaci:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Dodaliśmy tu wskaźnik przy  $E$  i przeszliśmy do symboli pochodnej cząstkowej, aby podkreślić, że wzór (25.40) zawiera tylko zmianę potencjału  $V$  wzdłuż szczególnej osi (tu osi  $s$ ) i tylko składową natężenia  $\vec{E}$  wzdłuż tej osi. Wzór (25.40) (który jest w istocie odwrotnością wzoru (25.18)) można wyrazić słowami w następujący sposób:

➤ Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku jest wziętym ze znakiem minus stosunkiem zmiany potencjału elektrycznego przy przemieszczeniu w tym kierunku, do wartości tego przemieszczenia.

Jeśli wybierzemy jako oś  $s$  kolejno osie  $x$ ,  $y$  i  $z$ , to znajdziemy, że odpowiadające im składowe natężenia  $\vec{E}$  wynoszą:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

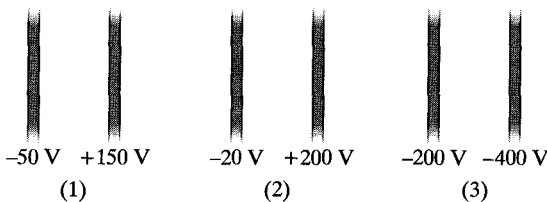
Jeśli więc znamy  $V$  dla wszystkich punktów w obszarze wokół rozkładu ładunku, czyli jeśli znamy funkcję  $V(x, y, z)$ , to możemy znaleźć składowe natężenia  $\vec{E}$  (i stąd samo  $\vec{E}$ ) w dowolnym punkcie, przez obliczenie pochodnych cząstkowych potencjału.

W prostym przypadku, gdy pole elektryczne jest jednorodne, wzór (25.40) przyjmuje postać:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie oś  $s$  jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnych. Składowa natężenia pola elektrycznego jest równa zero w dowolnym kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnych.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono trzy pary równoległych płyt w jednakowej odległości i potencjał każdej płyty. Pole elektryczne między płytami jest jednorodne i jego natężenie jest do nich prostopadłe. a) Uszereguj pary według wartości natężenia pola między płytami, zaczynając od największej. b) Dla której pary natężenie pola elektrycznego jest skierowane w prawo? c) Jeśli w połowie odległości między trzecią parą płyt zostanie uwolniony elektron, to czy tam pozostanie, będzie poruszał się w prawo ze stałą prędkością, będzie poruszał się w lewo ze stałą prędkością, będzie przyspieszał w prawo, czy będzie przyspieszał w lewo?



### Przykład 25.5

Potencjał elektryczny w dowolnym punkcie na osi symetrii prostopadłej do jednorodnie naładowanej tarczy jest określony wzorem (25.37):

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Wychodząc z tego wzoru, wyprowadź wzór na natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie na osi tarczy.

#### ROZWIĄZANIE:

Chcemy obliczyć natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , w zależności od odległości  $z$  wzdłuż osi tarczy. Dla dowolnej wartości  $z$  natężenie

$\vec{E}$  musi być skierowane wzdłuż tej osi, ponieważ tarcza ma symetrię obrotową względem niej. Wobec tego potrzebujemy obliczyć składową  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  w kierunku osi  $z$ . Ta składowa jest wzięta ze znakiem minus pochodną cząstkową potencjału elektrycznego względem odległości  $z$ . Korzystając z ostatniego równania we wzorze (25.41), możemy napisać:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz}(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to identyczne wyrażenie, jak wyprowadzone przez całkowanie w paragrafie 23.7, przy zastosowaniu prawa Coulomba.

## 25.10. Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych

W paragrafie 25.1 przedyskutowaliśmy elektryczną energię potencjalną naładowanej cząstki, gdy działa na nią siła elektrostatyczna. Założyliśmy wtedy, że ładunki wytwarzające pole znajdują się w ustalonych punktach, tak że ani siła,

ani odpowiadające jej natężenie pola elektrycznego nie mogą zostać zmienione przez obecność ładunku punktowego. W tym paragrafie znajdziemy elektryczną energię potencjalną *układu* ładunków, odpowiadającą polu elektrycznemu wytworzonymu przez te ładunki.

Dla prostego przykładu założmy, że zbliżamy do siebie dwa ciała, które mają ładunki o tym samym znaku. Praca, jaką musimy wykonać, jest zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej w układzie dwóch ciał (zakładając, że energia kinetyczna ciał nie ulega zmianie). Jeśli następnie uwolnimy ładunki, to możemy odzyskać tę zmagazynowaną energię, w całości lub w części, w postaci energii kinetycznej naładowanych ciał, gdyż będą się one od siebie oddalały.

Elektryczną energię potencjalną *układu ładunków punktowych*, utrzymywanych w ustalonych miejscach przez jakieś siły, definiujemy następująco:

► Elektryczna energia potencjalna układu unieruchomionych ładunków punktowych jest równa pracy, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, aby utworzyć ten układ, przynosząc każdy ładunek z nieskończonej odległości.

Zakładamy, że ładunki są nieruchome zarówno w początkowej konfiguracji, gdy znajdują się w nieskończonej odległości, jak i w końcowej, gdy są skupione w układzie.

Na rysunku 25.16 przedstawiono dwa ładunki punktowe  $q_1$  i  $q_2$ , znajdujące się w odległości  $r$ . Aby znaleźć elektryczną energię potencjalną układu dwóch ładunków, musimy w myśli zbudować ten układ, rozpoczynając od obydwu ładunków, znajdujących się początkowo w nieskończoności. Gdy przeniesiemy ładunek  $q_1$  z nieskończoności do odpowiadającego mu miejsca, nie wykonamy żadnej pracy, bo na ładunek  $q_1$  nie działa żadna siła elektrostatyczna. Jeśli jednak przesuniemy następnie ładunek  $q_2$  z nieskończoności do odpowiadającego mu miejsca, to musimy wykonać pracę, ponieważ ładunek  $q_1$  oddziałuje siłą elektrostatyczną na ładunek  $q_2$  podczas przesuwania.

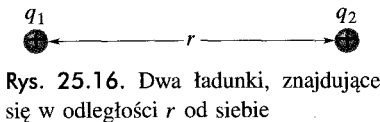
Pracę tę możemy obliczyć, korzystając ze wzoru (25.8), opuszczając znak minus (tak, że wzór określa pracę, jaką my wykonujemy, a nie pracę pola) i podstawiając  $q_2$  zamiast  $q$ . Wtedy nasza praca jest równa  $q_2 V$ , gdzie  $V$  jest potencjałem, wytworzonym przez ładunek  $q_1$  w punkcie, w którym umieszczamy ładunek  $q_2$ . Ze wzoru (25.26) ten potencjał jest równy:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}.$$

Stąd z naszej definicji elektryczna energia potencjalna pary ładunków punktowych z rysunku 25.16 wynosi:

$$E_p = W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Jeśli ładunki mają ten sam znak, to musimy wykonać dodatnią pracę przy ich zbliżaniu do siebie, ze względu na ich wzajemne odpychanie. Stąd zgodnie ze wzorem (25.43) energia potencjalna układu jest wtedy dodatnia. Jeśli ładunki mają przeciwne znaki, to musimy wykonać ujemną pracę przy ich zbliżaniu,



Rys. 25.16. Dwa ładunki, znajdujące się w odległości  $r$  od siebie

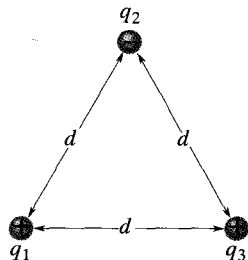
ze względu na ich przyciąganie się, jeśli w końcu mają być one nieruchome. Energia potencjalna układu jest wtedy ujemna. Z przykładu 25.6 wynika sposób rozszerzania tego rozumowania na więcej niż dwa ładunki.

## Przykład 25.6

Na rysunku 25.17 przedstawiono trzy ładunki punktowe, utrzymywane w swych położeniach przez nie pokazane siły. Jaka jest elektryczna energia potencjalna  $E_p$  tego układu ładunków? Przyjmijmy, że  $d = 12$  cm i że:

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q \quad \text{i} \quad q_3 = 2q,$$

gdzie  $q = 150$  nC.



Rys. 25.17. Przykład 25.6. Trzy ładunki znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego

### ROZWIĄZANIE:

➡ Energia potencjalna  $E_p$  układu jest równa pracy, jaką musimy wykonać przy tworzeniu układu, przesuując każdy ładunek z nieskończoności. Spróbujmy więc w myśli zbudować układ z rysunku 25.17, zaczynając od jednego z ładunków punktowych, powiedzmy  $q_1$ , na właściwym miejscu i pozostałych w nieskończoności. Następnie przesuujemy inny ładunek, powiedzmy  $q_2$ , z nieskończoności na odpowiadające mu miejsce. Ze wzoru (25.43),

po podstawieniu  $d$  zamiast  $r$ , energia potencjalna  $E_{p12}$ , związana z parą ładunków punktowych  $q_1$  i  $q_2$  wynosi:

$$E_{p12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Następnie przenosimy ostatni ładunek punktowy  $q_3$  z nieskończoności na jego miejsce. Praca, jaką musimy wykonać w tym ostatnim kroku, jest równa sumie pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_1$  i pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_2$ . Ze wzoru (25.43), po podstawieniu  $d$  zamiast  $r$ , suma ta wynosi:

$$W_{13} + W_{23} = E_{p13} + E_{p23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}.$$

Całkowita energia potencjalna  $E_p$  układu trzech ładunków jest sumą energii potencjalnych, związanych z trzema parami ładunków. Ta suma (która jest niezależna od kolejności skupiania ładunków) wynosi:

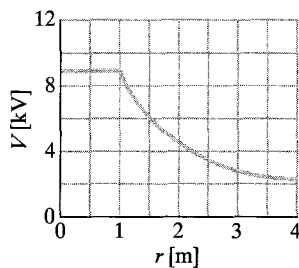
$$\begin{aligned} E_p &= E_{p12} + E_{p13} + E_{p23} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right) \\ &= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{0,12 \text{ m}} \\ &= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

(odpowiedź)

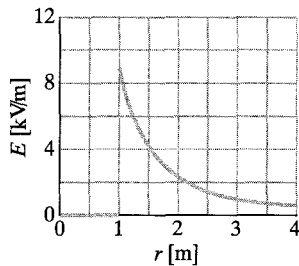
Ujemna energia potencjalna oznacza, że utworzenie układu wymaga wykonania ujemnej pracy, rozpoczynając od trzech ładunków w nieskończoności od siebie odległościach. Mówiąc inaczej, siła zewnętrzna musi wykonać 17 mJ pracy, aby rozdzielić całkowicie układ, kończąc na trzech ładunkach w nieskończoności od siebie odległościach.

## 25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

W paragrafie 24.6 doszliśmy do wniosku, że we wszystkich punktach wewnątrz izolowanego przewodnika natężenie  $\vec{E} = 0$ . Zastosowaliśmy następnie prawo Gaussa, aby udowodnić, że ładunek nadmiarowy na odizolowanym przewodniku leży całkowicie na jego powierzchni. (Jest to prawdą nawet wtedy, gdy przewodnik ma pustą wnękę). Teraz zastosujemy pierwszy z tych faktów, aby udowodnić ogólniejszą postać drugiego:



a)



b)

**Rys. 25.18.** a) Wykres potencjału  $V(r)$  wewnątrz i na zewnątrz naładowanej sferycznej powłoki o promieniu 1 m. b) Wykres natężenia  $E(r)$  dla tej samej powłoki

➤ Nadmiar ładunku umieszczony na izolowanym przewodniku rozkłada się na powierzchni tego przewodnika tak, że wszystkie punkty przewodnika — zarówno wewnątrz, jak i na powierzchni — uzyskują ten sam potencjał. Jest to prawdą nawet wtedy, gdy przewodnik ma wnękę i nawet, jeśli ta wnęka zawiera niezerowy ładunek wypadkowy.

Nasz dowód wynika natychmiast ze wzoru (25.18), który ma postać:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Ponieważ  $\vec{E} = 0$  dla wszystkich punktów w przewodniku, to otrzymujemy bezpośrednio  $V_{\text{końc}} = V_{\text{pocz}}$  dla wszystkich możliwych par punktów początkowego i końcowego w przewodniku.

Na rysunku 25.18a przedstawiono wykres potencjału, w zależności od odległości od środka izolowanej, sferycznej, przewodzącej powłoki o promieniu 1 m i ładunku  $1 \mu\text{C}$ . Dla punktów poza powłoką możemy obliczyć  $V(r)$  ze wzoru (25.26), ponieważ ładunek  $q$  zachowuje się dla zewnętrznych punktów tak, jakby był skupiony w środku powłoki. Ten wzór jest słuszny aż do powierzchni powłoki. Teraz przesunmy mały ładunek próbny przez powłokę — zakładając, że istnieje mały otworek — do jej środka. Nie jest potrzebna do tego żadna praca, ponieważ wewnątrz powłoki na ładunek próbny nie działa żadna wypadkowa siła elektrostatyczna. Stąd potencjał we wszystkich punktach wewnątrz powłoki ma taką samą wartość, jak na powierzchni, co przedstawiono na rysunku 25.18a.

Na rysunku 25.18b przedstawiono wykres natężenia pola elektrycznego, w zależności od odległości dla tej samej powłoki. Zauważ, że  $E = 0$  w każdym punkcie wewnątrz powłoki. Krzywe z rysunku 25.18b można narysować na podstawie krzywej, przedstawionej na rysunku 25.18a, różniczkując ją względem  $r$  i stosując wzór (25.40) (dla przypomnienia, pochodna dowolnej stałej jest równa zero). Krzywą z rysunku 25.18a można narysować na podstawie krzywych, przedstawionych na rysunku 25.18b, wykonując całkowanie względem  $r$ , i stosując wzór (25.19).

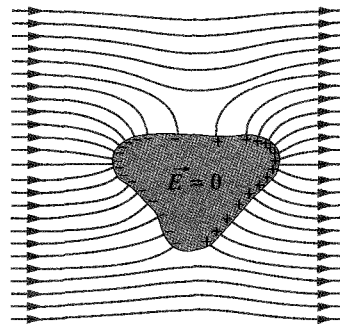
Na przewodnikach niesferycznych ładunek powierzchniowy nie rozkłada się jednorodnie na powierzchni przewodnika. Na ostrzach lub krawędziach gęstość powierzchniowa ładunku — i stąd natężenie pola elektrycznego w ich pobliżu, które jest do niej proporcjonalne — może osiągać bardzo duże wartości. Powietrze wokół takich ostrzy może zostać zjonizowane, tworząc wyładowanie koronowe, które golfiści i alpiniści widują na końcach gałęzi krzewów, końcach kijów golfowych i szczytach skał, gdy zbliża się burza z piorunami. Takie wyładowania koronowe, podobnie jak podnoszenie się włosów, są często zwiastunami uderzeń piorunów. W takich okolicznościach rozsądnie jest zamknąć się we wnęcie wewnątrz przewodzącej powłoki, gdzie zagwarantowane jest zerowe natężenie pola elektrycznego. Samochód (jeśli tylko nie ma plastikowej karoserii lub składanego dachu) jest do tego celu prawie idealny (rys. 25.19).

Jeśli izolowany przewodnik umieścimy w *zewnętrznym polu elektrycznym*, jak na rysunku 25.20, to wszystkie punkty przewodnika nadal mają jednakowy potencjał, bez względu na to, czy przewodnik ma nadmiarowy ładunek. Swo-

Podobne elektrony przewodnictwa rozkładają się na powierzchni w ten sposób, że wytwarzane przez nie pole elektryczne w punktach wewnątrz przewodnika znosi zewnętrzne pole elektryczne, które w przeciwnym przypadku tam by się wytworzyło. Co więcej, rozkład elektronów powoduje, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni jest do niej prostopadłe. Jeśli przewodnik z rysunku 25.20 zostałby w jakiś sposób usunięty, lecz pozostałyby ładunki powierzchniowe, to rozkład natężenia pola elektrycznego pozostałby całkowicie bez zmian, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz.



Rys. 25.19. Duża iskra uderza w karoserię samochodu i przechodzi do ziemi przez izolującą lewą przednią oponę (można tam dostrzec błysk). Osoba w samochodzie pozostaje nietknięta



Rys. 25.20. Nienaładowany przewodnik umieszczono w zewnętrznym polu elektrycznym. Swobodne elektrony w przewodniku rozkładają się na powierzchni tak, aby zredukować do zera wypadkowe natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika i wytworzyć wypadkowe natężenie pola na powierzchni, prostopadłe do niej

## Podsumowanie

**Elektryczna energia potencjalna** Zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej  $E_p$  ładunku punkowego, przy jego przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym wynosi:

$$\Delta E_p = E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz} = -W, \quad (25.1)$$

gdzie  $W$  jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną (związaną z polem elektrycznym) nad ładunkiem punkowym, przy przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego. Jeśli energia potencjalna jest zdefiniowana tak, że jest równa zeru dla ładunku w nieskończoności, to **elektryczna energia potencjalna**  $E_p$  ładunku punkowego w danym punkcie wynosi:

$$E_p = -W_\infty, \quad (25.2)$$

gdzie  $W_\infty$  jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną nad ładunkiem punkowym, przy przesunięciu go z nieskończoności do rozważanego punktu.

**Różnica potencjałów elektrycznych i potencjał elektryczny** **Różnicę potencjałów**  $\Delta V$  między punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym definiujemy wzorem:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q}, \quad (25.7)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem cząstki, nad którą przez pole jest wykonywana praca. **Potencjał** w punkcie wynosi:

$$V = -\frac{W_\infty}{q}. \quad (25.8)$$

Jednostką potencjału w układzie SI jest *wolt*: 1 wolt = 1 dżul na kulomb (1 V = 1 J/C).

Potencjał i różnicę potencjałów można także zapisać, korzystając z elektrycznej energii potencjalnej  $E_p$  cząstki o ładunku  $q$  w polu elektrycznym:

$$V = \frac{E_p}{q}, \quad (25.5)$$

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_p \text{ końc}}{q} - \frac{E_p \text{ pocz}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

**Powierzchnie ekwipotencjalne** Wszystkie punkty na **powierzchni ekwipotencjalnej** mają taki sam potencjał elektryczny. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przesuwanie go z jednej takiej powierzchni na drugą jest niezależna od położenia punktów początkowego i końcowego na tych powierzchniach i drogi, po jakiej przesunięto ładunek. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest zawsze skierowane prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.

**Obliczanie  $V$  na podstawie  $\vec{E}$ .** Różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami początkowym i końcowym wynosi:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.18)$$

gdzie całkę obliczamy po dowolnym torze łączącym te punkty. Jeśli wybierzemy  $V_{\text{pocz}} = 0$ , to dla potencjału w danym punkcie mamy:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.19)$$

**Potencjał pola ładunków punktowych** Potencjał elektryczny pola pojedynczego ładunku punktowego, w odległości  $r$  od tego ładunku wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (25.26)$$

Potencjał  $V$  ma taki sam znak, jak ładunek  $q$ . Potencjał pola, wytworzonego przez układ ładunków punktowych wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (25.27)$$

**Potencjał pola dipola elektrycznego** W odległości  $r$  od dipola elektrycznego o wartości elektrycznego momentu dipolowego  $p = qd$ , potencjał elektryczny dipola wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (25.30)$$

dla  $r \gg d$ , kąt  $\theta$  jest zdefiniowany na rysunku 25.11.

**Potencjał pola wytworzonego przez ładunek o ciągłym rozkładzie** Dla ciągłego rozkładu ładunku wzór (25.27) przyjmuje postać:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (25.32)$$

gdzie całkę obliczamy po całym rozkładzie.

**Obliczanie  $\vec{E}$  na podstawie  $V$**  Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku, jest wzięta z ujemnym znakiem pochodną potencjału względem przemieszczenia w tym kierunku:

$$E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Składowe  $E_x$ ,  $E_y$  i  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  można wyznaczyć ze wzorów:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Dla pola jednorodnego o natężeniu  $\vec{E}$  wzór (25.40) upraszcza się do postaci:

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie przesunięcie  $s$  jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Natężenie pola elektrycznego w kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnej jest równe zero.

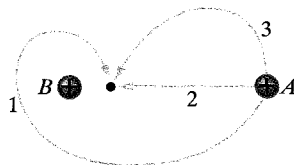
**Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych** Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych jest równa pracy, potrzebnej do utworzenia układu ładunków, będących początkowo w spoczynku i w nieskończonej odległości od siebie. Dla dwóch ładunków w odległości  $r$  mamy:

$$E_p = W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

**Potencjał naładowanego przewodnika** Nadmiarowy ładunek, znajdujący się na przewodniku, będzie w stanie równowagi rozłożony w całości na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Ładunek rozłoży się w taki sposób, że cały przewodnik, włącznie z punktami, które znajdują się wewnątrz niego, ma taki sam potencjał.

## Pytania

1. Na rysunku 25.21 przedstawiono trzy tory, wzdłuż których możemy zbliżyć dodatnio naładowaną kulę  $A$  do dodatnio naładowanej kuli  $B$ , która jest nieruchoma. a) Czy kula  $A$  jest przesuwana w stronę większego, czy mniejszego potencjału elektrycznego? Czy praca wykonana: b) przez nas, c) przez pole elektryczne (wytwarzane przez



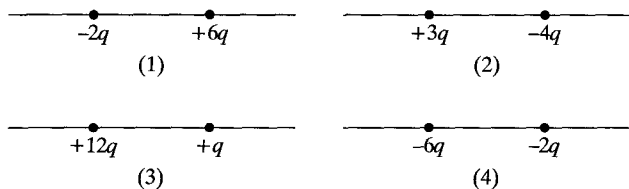
Rys. 25.21. Pytanie 1

drugą kulę) jest dodatnia, ujemna, czy równa zero? d) Uszereguj tory według pracy, wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

2. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek. Załóż, że potencjał  $V = 0$  w nieskończoności. Dla których par istnieje inny punkt o zerowym wypadkowym potencjale elektrycznym *na narysowanej osi*: a) między cząstkami, b) na prawo od nich? c) Jeśli taki punkt zerowego potencjału istnieje, to czy natężenie wypadkowego pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytwarzane przez cząstki w tym punkcie jest równe zero? d) Czy dla

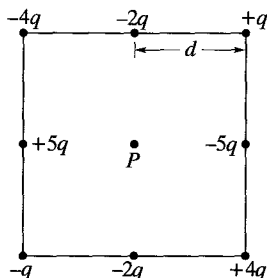


poszczególnych par istnieją punkty poza osią (oczywiście inne niż w nieskończoności), gdzie  $V = 0$ ?



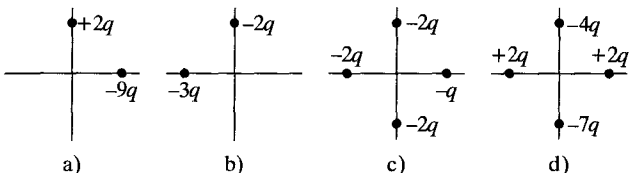
Rys. 25.22. Pytania 2 i 8

3. Na rysunku 25.23 przedstawiono kwadrat, na którego bokach znajdują się naładowane cząstki, przy czym odległość między sąsiednimi cząstkami wynosi  $d$ . Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $P$  w środku kwadratu, jeśli potencjał elektryczny w nieskończoności wynosi zero?



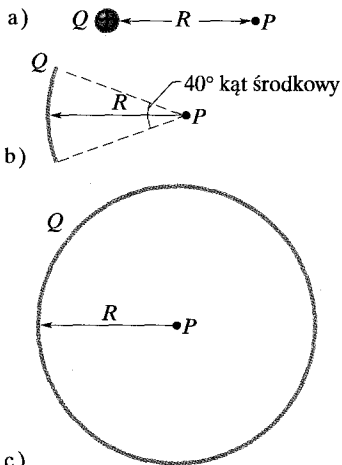
Rys. 25.23. Pytanie 3

4. Na rysunku 25.24 przedstawiono cztery układy naładowanych cząstek, znajdujących się w takiej samej odległości od początku układu współrzędnych. Uszereguj układy według wartości wypadkowego potencjału elektrycznego w początku układu współrzędnych, zaczynając od największego dodatniego. Przyjmij, że w nieskończoności potencjał jest równy zero.



Rys. 25.24. Pytanie 4

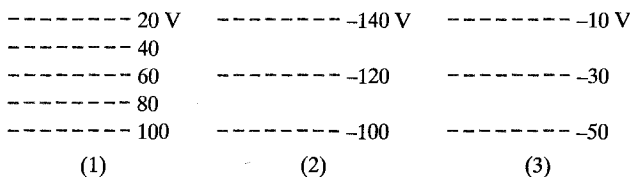
5. a) Jaki jest potencjał w punkcie  $P$ , pochodzący od ładunku  $Q$  znajdującego się w odległości  $R$  od punktu  $P$  (rys. 25.25a)? Przyjmij  $V = 0$  w nieskończoności. b) Na rysunku 25.25b ten sam ładunek  $Q$  jest rozłożony jednorodnie na łuku okręgu o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $40^\circ$ . Jaki jest potencjał w środku  $P$  krzywizny łuku? c) Na rysunku 25.25c ten sam ładunek  $Q$  został rozłożony jednorodnie na okręgu o promie-



Rys. 25.25. Pytanie 5

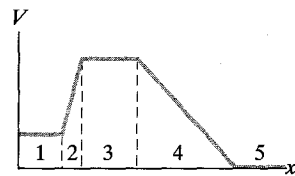
niu  $R$ . Jaki jest potencjał w środku  $P$  okręgu? d) Uszereguj te trzy rozkłady według wartości natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ , zaczynając od największego.

6. Na rysunku 25.26 przedstawiono trzy układy przekrojów powierzchni ekwipotencjalnych w obszarze przestrzeni o tych samych rozmiarach. a) Uszereguj te układy względem wartości natężenia pola elektrycznego w tym obszarze, zaczynając od największej. b) W którym układzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół strony?



Rys. 25.26. Pytanie 6

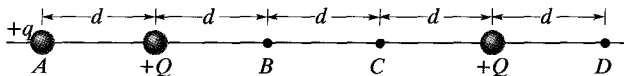
7. Na rysunku 25.27 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego  $V$  w zależności od  $x$ . a) Uszereguj pięć obszarów według wartości składowej natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi  $x$ , zaczynając od największej. Jaki jest kierunek natężenia pola wzdłuż osi  $x$ : b) obszarze 2, c) obszarze 4?



Rys. 25.27. Pytanie 7

8. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek znajdujących się w jednakowej odległości od siebie. a) Uporządkuj pary według ich elektrycznej energii potencjalnej, zaczynając od największej (dodatniej). b) Czy jeśli zwiększy się odległość między cząstkami w każdej z par, to energia potencjalna pary wzrośnie, czy zmaleje?

9. Na rysunku 25.28 przedstawiono układ trzech naładowanych cząstek. Jeśli przesuniemy cząstkę o ładunku  $+q$  z punktu  $A$  do punktu  $D$ , to czy następujące wielkości są dodatnie, ujemne czy zerowe: a) zmiana elektrycznej energii potencjalnej układu trzech cząstek, b) praca wykonana przez wypadkową siłę elektrostatyczną nad przesuwaną cząstką, c) praca wykonana przez nas? d) Jakie są odpowiedzi dla wielkości od (a) do (c) dla cząstki o ładunku  $+q$  przesuwanej z punktu  $B$  do punktu  $C$ ?



Rys. 25.28. Pytania 9 i 10

10. Czy praca wykonana przez nas w sytuacji z pytania 9 jest dodatnia, ujemna, czy równa zero, jeśli cząstka o ładunku  $+q$  porusza się: a) od  $A$  do  $B$ , b) od  $A$  do  $C$ , c) od  $B$  do  $D$ ? d) Uszereguj przemieszczenia (a), (b), (c) według wartości pracy wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

## 25.2. Potencjał elektryczny

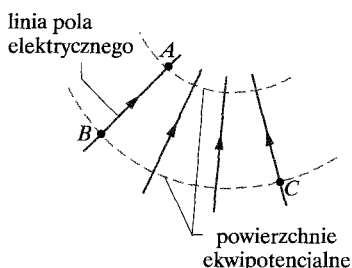
1. Rozważmy akumulator samochodowy o różnicy potencjałów 12 V, który może przesłać całkowity ładunek 84 Ah (amperogodzin) przez obwód z jednego bieguna do drugiego. a) Ilu kulombom jest równy ten ładunek? (Wskazówka: Zastosuj wzór (22.3)). b) Jeśli różnica potencjałów jest cały czas równa 12 V, to jak duża energia jest związana z przejściem tego ładunku?

2. Różnica potencjałów elektrycznych między ziemią i chmurą podczas pewnej burzy wynosiła  $1,2 \cdot 10^9$  V. Jaka jest wartość zmiany elektrycznej energii potencjalnej (w elektronowoltach) elektronu poruszającego się między ziemią i chmurą?

3. Dla pewnej błyskawicy różnica potencjałów między ziemią i chmurą wynosiła  $1 \cdot 10^9$  V, a wartość przepływającego ładunku była równa 30 C. a) O ile zmalała energia tego ładunku? b) Jeśli można byłoby wykorzystać całą tę energię do przyspieszenia spoczywającego początkowo samochodu o masie 1000 kg, to jaka byłaby końcowa prędkość samochodu? c) Jeśli cała ta energia mogłaby zostać wykorzystana do stopienia lodu, to ile lodu mogłoby zostać stopione przy  $0^\circ\text{C}$ ? Ciepło topnienia lodu wynosi  $3,33 \cdot 10^5$  J/kg.

## 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

4. Gdy elektron porusza się od punktu A do punktu B, wzdłuż linii pola elektrycznego na rysunku 25.29, pole elektryczne wykonuje nad nim pracę  $3,94 \cdot 10^{-19}$  J. Jakie są różnice potencjałów elektrycznych: a)  $V_B - V_A$ , b)  $V_C - V_A$ , c)  $V_C - V_B$ ?



Rys. 25.29. Zadanie 4

5. Nieprzewodząca nieskończona płyta jest naładowana z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma = 0,1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . W jakiej odległości znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 50 V?

6. Dwie duże, równoległe, przewodzące płyty są odległe od siebie o 12 cm i mają na powierzchniach wewnętrznych jednakowe ładunki o przeciwnych znakach. Na elektron umieszczony gdziekolwiek między tymi płytami działa siła elektrostatyczna

$3,9 \cdot 10^{-15}$  N. a) Znajdź natężenie pola elektrycznego w miejscu, w którym znajduje się elektron. b) Jaka jest różnica potencjałów między płytami? (Zaniedbaj efekty brzegowe).

7. W liczniku Geigera-Müllera na osi metalowej rury o średnicy 2 cm napięty jest drut o średnicy  $1,3 \cdot 10^{-4}$  cm. Jeśli różnica potencjałów między drutem i rurą wynosi 850 V, to jakie jest natężenie pola elektrycznego na powierzchni: a) drutu, b) rury? (Wskazówka: Skorzystaj z wyniku zadania 23 z rozdziału 24).

8. Natężenie pola elektrycznego wewnątrz nieprzewodzącej, jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu  $R$  jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

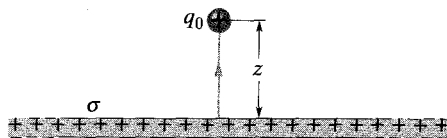
gdzie  $q$  jest całkowitym (dodatnim lub ujemnym) ładunkiem kuli, a  $r$  jest odległością od środka kuli. a) Przyjmując  $V = 0$  w środku kuli, znajdź potencjał elektryczny  $V(r)$  wewnątrz kuli. b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? c) Jeśli ładunek  $q$  jest dodatni, to któremu z tych punktów odpowiada większy potencjał?

9\*. Ładunek  $q$  jest rozłożony jednorodnie objętościowo w kuli o promieniu  $R$ . a) Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, pokaż, że potencjał w odległości  $r$  od środka kuli ( $r < R$ ) jest dany wzorem:

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(Wskazówka: Zob. paragraf 24.9). b) Dlaczego wynik ten różni się od wyniku z punktu (a) w zadaniu 8? c) Jaka jest różnica potencjałów między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? d) Dlaczego ten wynik nie różni się od wyniku z punktu (b) z zadania 8?

10. Na rysunku 25.30 przedstawiono z boku nieskończoną, nieprzewodzącą płytę, naładowaną dodatnio z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma$ . a) Korzystając ze wzorów (25.18) i (24.13), pokaż, że potencjał elektryczny pola tej nieskończonej płyty można zapisać wzorem  $V = V_0 - (\sigma/(2\epsilon_0))z$ , gdzie  $V_0$  jest potencjałem elektrycznym powierzchni płyty, a  $z$  jest odległością od płyty. b) Jaką pracę wykona pole elektryczne płyty przy przesuwaniu małego, dodatniego ładunku próbnego  $q_0$ , z początkowego położenia na płycie, do końcowego położenia w odległości  $z$  od płyty?



Rys. 25.30. Zadanie 10

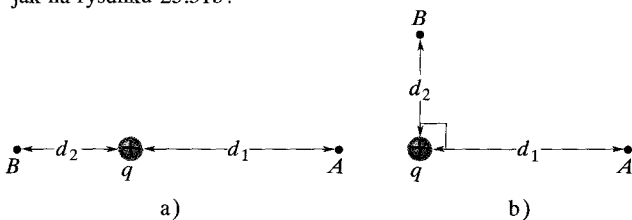
11\*. Gruba powłoka sferyczna o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) i ładunku  $Q$  jest naładowana jednorodnie objętościowo. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny  $V$  w za-

leżności od odległości  $r$  od środka powłoki, rozważając obszary: a)  $r > r_2$ , b)  $r_2 > r > r_1$ , c)  $r < r_1$ ? d) Czy te rozwiązania są ze sobą zgodne przy  $r = r_2$  i  $r = r_1$ ? (Wskazówka: Zob. paragraf 24.9).

## 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

12. Podczas ruchu statku kosmicznego przez rozrzedzony zjonizowany gaz jonosfery ziemskiej potencjał statku zmienia się o  $-1$  V w czasie jednego okrążenia Ziemi. Zakładając, że statek jest sferą o promieniu 10 m, oszacuj ładunek zbierany przez statek.

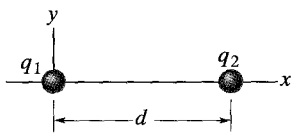
13. Rozważmy ładunek punktowy  $q = 1 \mu\text{C}$ , punkt  $A$  w odległości  $d_1 = 2$  m od  $q$  i punkt  $B$  w odległości  $d_2 = 1$  m. a) Jeśli te punkty są po przeciwnych stronach ładunku (rys. 25.31a), to jaka jest różnica potencjałów elektrycznych  $V_A - V_B$ ? b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych, jeśli punkty  $A$  i  $B$  są położone jak na rysunku 25.31b?



Rys. 25.31. Zadanie 13

14. Na rysunku 25.32 przedstawiono dwie naładowane cząstki umieszczone na osi  $x$ . Naskicuj linie pola elektrycznego i powierzchnie ekwipotencjalne w płaszczyźnie strony dla: a)  $q_1 = +q$  i  $q_2 = +2q$ , b)  $q_1 = +q$  i  $q_2 = -3q$ .

15. Cząstki na rys. 25.32 mają ładunki  $q_1 = +q$  i  $q_2 = -3q$ . Przyjmijmy, że  $V = 0$  w nieskończoności. Wyznacz położenie (wyrażając je przez odległość  $d$  między ładunkami) punktu na osi  $x$  (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy zeru.



Rys. 25.32. Zadania 14, 15 i 16

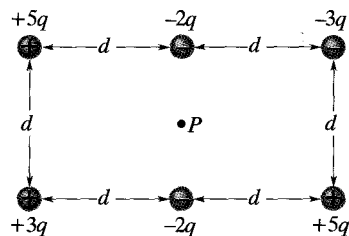
16. Dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się w odległości  $d$  (rys. 25.32). Wypadkowe natężenie pola elektrycznego cząstek jest równe zeru przy  $x = d/4$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź położenie (wyrażając je przez  $d$ ) punktu na osi  $x$  (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy zeru.

17. Kulista kropla wody, obdarzona ładunkiem 30 pC, ma potencjał 500 V na swej powierzchni (przy  $V = 0$  w nieskończoności). a) Jaki jest promień kropli? b) Jeśli dwie takie krople, o takim samym ładunku i promieniu połączą się, tworząc jedną kulistą kroplę, to jaki będzie potencjał na powierzchni nowej kropli? [ilw](#) [www](#)

18. Jakie są: a) ładunek, b) gęstość ładunku na powierzchni przewodzącej kuli o promieniu 0,15 m, jeśli jej potencjał wynosi 200 V (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?

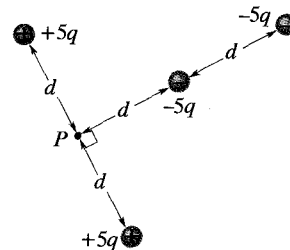
19. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma często wartość około 100 V/m. Jeśli takie byłoby natężenie na całej powierzchni, to jaki byłby potencjał elektryczny punktu na powierzchni (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?

20. Na rysunku 25.33 punkt  $P$  leży w środku prostokąta. Jaki jest wypadkowy potencjał elektryczny pola sześciu naładowanych cząstek, w punkcie  $P$  (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?



Rys. 25.33. Zadanie 20

21. Jaki jest wypadkowy potencjał w punkcie  $P$  pola układu czterech ładunków z rysunku 25.34, jeśli  $V = 0$  w nieskończoności?



Rys. 25.34. Zadanie 21

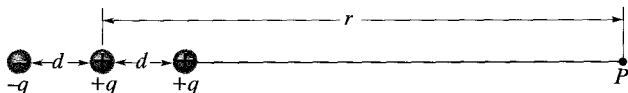
## 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego

22. Cząsteczka amoniaku  $\text{NH}_3$  ma trwały elektryczny moment dipolowy równy 1,47 D, gdzie 1 D = 1 debaj =  $3,34 \cdot 10^{-30}$  C·m. Oblicz potencjał elektryczny cząsteczki amoniaku na osi dipola, w punkcie oddalonym o 52 nm (przy  $V = 0$  w nieskończoności). [ilw](#)

23. Na rys. 25.35 przedstawiono trzy naładowane cząstki na osi poziomej. Dla punktów (jak np. punktu  $P$ ) na osi, dla których  $r \gg d$  wykaż, że potencjał elektryczny  $V(r)$  jest dany wzorem:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{2d}{r} \right).$$

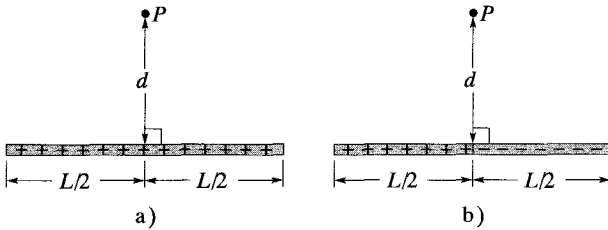
(Wskazówka: Układ ładunków potraktuj jako sumę odizolowanego ładunku i dipola.) [www](#)



Rys. 25.35. Zadanie 23

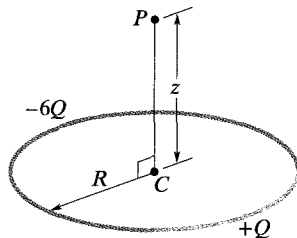
## 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

24. a) Na rysunku 25.36a przedstawiono dodatnio naładowany pręt plastikowy o długości  $L$ , naładowany jednorodnie z gęstością liniową  $\lambda$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności i korzystając z rysunku 25.13 i wzoru (25.35), znajdź potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , bez obliczeń na papierze. b) Na rysunku 25.36b przedstawiono identyczny pręt, ale z prawą połową naładowaną ujemnie i lewą — dodatnio; obie połowy mają taką samą wartość jednorodnej liniowej gęstości ładunku  $\lambda$ . Ile wynosi potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , jeśli  $V = 0$  w nieskończoności?



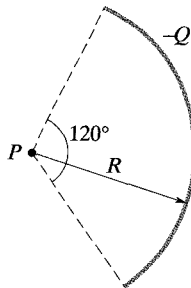
Rys. 25.36. Zadanie 24

25. Pręt plastikowy został wygięty w kształcie okręgu o promieniu  $R$ . Jest on jednorodnie naładowany ładunkiem dodatnim  $+Q$  na jednej czwartej obwodu i ładunkiem ujemnym  $-6Q$  na reszcie obwodu (rys. 25.37). Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny: a) w środku  $C$  okręgu, b) w punkcie  $P$  na osi symetrii okręgu, w odległości  $z$  od środka.



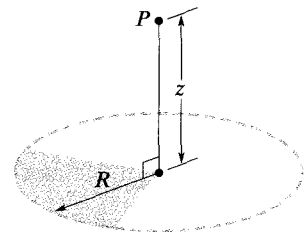
Rys. 25.37. Zadanie 25

26. Na rysunku 25.38 plastikowy pręt jednorodnie naładowany ładunkiem  $-Q$  został wygięty w łuk okręgu o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $120^\circ$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny w środku krzywizny  $P$  łuku.



Rys. 25.38. Zadanie 26

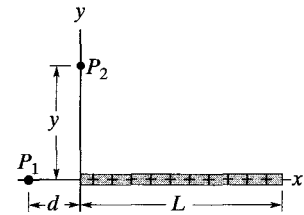
27. Po jednorodnym naładowaniu plastikowej tarczy z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma$  usunięto trzy ćwiartki tarczy. Pozostała ćwiartka jest przedstawiona na rysunku 25.39. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał pola wytworzonego przez tę ćwiartkę w punkcie  $P$  na osi symetrii tarczy, w odległości  $z$  od jej środka.



Rys. 25.39. Zadanie 27

28. Na rysunku 25.40 przedstawiono plastikowy pręt o długości  $L$ , umieszczony na osi  $x$ , naładowany jednorodnie dodatnim ładunkiem  $Q$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi  $x$  w punkcie  $P_1$ , odległym o  $d$  od jednego z końców pręta.

29. Plastikowy pręt, przedstawiony na rysunku 25.40 ma długość  $L$  i jest naładowany niejednorodnie z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie  $c$  jest dodatnią stałą. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi w punkcie  $P_1$ , odległym o  $d$  od jednego z końców pręta.



Rys. 25.40. Zadania 28, 29, 34 i 35

## 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

30. Dwie duże, równoległe, metalowe płyty znajdują się w odległości 1,5 cm od siebie i mają równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki na wewnętrznych powierzchniach. Przyjmijmy potencjał ujemnej płyty za równy zero. Jeśli potencjał w połowie odległości między płytami wynosi  $+5$  V, to ile wynosi natężenie pola elektrycznego w obszarze między płytami?

31. Potencjał elektryczny w punktach płaszczyzny  $xy$  wynosi  $V = (2 \text{ V/m}^2)x^2 - (3 \text{ V/m}^2)y^2$ . Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie (3 m, 2 m)?

32. Potencjał elektryczny  $V$  w przestrzeni między dwiema płaskimi, równoległymi płytami wynosi  $V = 1500x^2$ , gdzie  $V$  jest wyrażone w woltach, jeśli odległość  $x$  od jednej z płyt jest wyrażona w metrach. Oblicz wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie, dla którego  $x = 1,3$  cm.

33. a) Korzystając ze wzoru (25.32) pokaż, że potencjał elektryczny na osi symetrii cienkiego pierścienia o promieniu  $R$  i ładunku  $q$ , w punkcie odległym o  $z$  od środka pierścienia wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

b) Korzystając z otrzymanego wyniku, wyprowadź wyrażenie na  $E$  w punktach na osi pierścienia i porównaj wynik z natężeniem  $E$ , obliczonym w paragrafie 23.6.

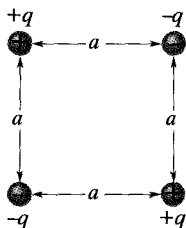
34. Pręt plastikowy o długości  $L$ , pokazany na rysunku 25.40, jest naładowany niejednorodnie, z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie  $c$  jest stałą dodatnią. a) Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny w punkcie  $P_2$  na osi  $y$ , w odległości  $y$  od jednego z końców pręta. b) Korzystając z otrzymanego wyniku, znajdź składową  $E_y$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_2$ . c) Dlaczego nie można znaleźć składowej  $E_x$  natężenia w punkcie  $P_2$ , korzystając z wyniku otrzymanego w punkcie (a)?

35. a) Korzystając z wyniku, otrzymanego w zadaniu 28, znajdź składową  $E_x$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$  na rys. 25.40. (Wskazówka: Najpierw za odległość  $d$  w wyniku podstaw zmienną  $x$ ). b) Korzystając z symetrii określ składową  $E_y$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$ .

## 25.10. Elektryczna energia potencjalna pola układu ładunków punktowych

36. a) Jaka jest elektryczna energia potencjalna dwóch elektronów, znajdujących się w odległości 2 nm? b) Czy energia potencjalna wzrasta, czy maleje, jeśli odległość wzrasta?

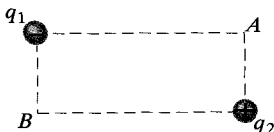
37. Wyprowadź wyrażenie na pracę, potrzebną do utworzenia konfiguracji czterech ładunków z rysunku 25.41 przy założeniu, że początkowo ładunki są od siebie nieskończenie odległe.



Rys. 25.41. Zadanie 37

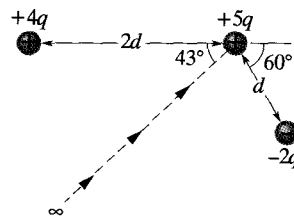
38. Jaka jest elektryczna energia potencjalna układu ładunków z rysunku 25.9a? Skorzystaj z wartości liczbowych z przykładu 25.3.

39. W dwóch wierzchołkach prostokąta na rysunku 25.42, o długościach boków 5 cm i 15 cm znajdują się ładunki  $q_1 = -5 \mu\text{C}$  i  $q_2 = +2 \mu\text{C}$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny: a) w wierzchołku A, b) w wierzchołku B. c) Jaka praca jest potrzebna do przesunięcia trzeciego ładunku  $q_3 = +3 \mu\text{C}$  z punktu B do punktu A, wzdłuż przekątnej prostokąta? d) Czy ta praca zwiększa, czy zmniejsza elektryczną energię potencjalną układu trzech ładunków? Czy praca przy przesunięciu ładunku  $q_3$  wzdłuż toru: e) wewnątrz prostokąta, ale nie wzdłuż przekątnej, f) poza prostokątem jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak wzdłuż przekątnej?



Rys. 25.42. Zadanie 39

40. Oblicz pracę, potrzebną do przesunięcia ładunku  $+5q$  z nieskończoności, wzdłuż przedstawionej na rysunku 25.43 linii przerywanej, w pobliżu dwóch nieruchomych ładunków  $+4q$  i  $-2q$ . Podstaw wartości: odległości  $d = 1,4 \text{ cm}$  i ładunku  $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .



Rys. 25.43. Zadanie 40

41. Cząstka o ładunku dodatnim  $Q$  znajduje się w punkcie  $P$ . Druga cząstka o masie  $m$  i ujemnym ładunku  $-q$  porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu  $r_1$ , o środku w punkcie  $P$ . Wyprowadź wyrażenie na pracę  $W$ , jaką musi wykonać siła zewnętrzna nad drugą cząstką, aby zwiększyć promień okręgu do  $r_2$ .

42. Oblicz: a) potencjał elektryczny pola wytworzonego przez jądro atomu wodoru w średniej odległości ( $r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ) elektronu od jądra w atomie (przyjmij  $V = 0$  w nieskończonej odległości), b) elektryczną energię potencjalną atomu, z elektronem w tej odległości, c) energię kinetyczną elektronu, jeśli porusza się on po orbicie kołowej o tym promieniu wokół jądra atomu. d) Jaka energia jest potrzebna do zjonizowania atomu wodoru (czyli usunięcia elektronu przez oddalenie go na nieskończoną odległość)? Wyraź wszystkie energie w elektronowoltach.

43. Cząstka o ładunku  $q$  znajduje się w punkcie  $P$ . Druga cząstka o masie  $m$  i tym samym ładunku  $q$  znajduje się początkowo w odległości  $r_1$  od punktu  $P$ , a następnie zostaje uwolniona. Określ jej prędkość, gdy znajdzie się ona w odległości  $r_2$  od punktu  $P$ . Przyjmij wartości:  $q = 3,1 \mu\text{C}$ ,  $m = 20 \text{ mg}$ ,  $r_1 = 0,9 \text{ mm}$  i  $r_2 = 2,5 \text{ mm}$ .

44. W płaszczyźnie  $yz$  leży cienki plastikowy pierścień o promieniu 1,5 m, o środku w początku układu, naładowany ładunkiem  $-9 \text{ nC}$ . Na osi  $x$ , w odległości 3 m od początku układu umieszczono ładunek  $-6 \text{ pC}$ . Oblicz pracę, jaka musi być wykonana nad ładunkiem punktowym przez zewnętrzną siłę przy przesuwniu ładunku punkowego do początku układu.

45. Dwie cienkie sfery metalowe A i B o masach  $m_A = 5 \text{ g}$  i  $m_B = 10 \text{ g}$  mają takie same dodatnie ładunki  $q = 5 \mu\text{C}$ . Sfery są połączone nieprzewodzącym sznurkiem o znikomo małej masie, o długości  $d = 1 \text{ m}$ , znacznie większej od promieni sfer. a) Oblicz elektryczną energię potencjalną układu. b) Jakie jest przyspieszenie każdej ze sfer w momencie tuż po przecięciu sznurka? c) Jaka jest prędkość każdej ze sfer po długim czasie od przecięcia sznurka?

46. Cienka przewodząca powłoka sferyczna o promieniu  $R$  znajduje się na izolującej podkładce i jest naładowana do potencjału  $-V$ . Z punktu  $P$ , w odległości  $r$  od środka sfery ( $r \gg R$ )

wystrzelono elektron z początkową prędkością  $v_0$ , w kierunku środka powłoki. Jaka musi być wartość  $v_0$ , aby elektron dotarł do powłoki?

47. Dwa elektrony znajdują się w odległości 2 cm od siebie. Trzeci elektron, wystrzelony z nieskończoności, zatrzymał się w połowie odległości między nimi. Jaka była początkowa prędkość tego elektronu?

48. Dwie naładowane, równoległe, płaskie, przewodzące powierzchnie znajdują się w odległości  $d = 1$  cm od siebie i wytwarzają różnicę potencjałów  $\Delta V = 625$  V między sobą. Z jednej powierzchni wystrzelono elektron, prostopadłe w kierunku drugiej. Jaka jest początkowa prędkość elektronu, jeśli zatrzymuje się on tuż przy drugiej powierzchni?

49. Z początkową prędkością  $3,2 \cdot 10^5$  m/s wystrzelono elektron w kierunku nieruchomego protonu. Jeśli początkowo elektron znajdował się w dużej odległości od protonu, to w jakiej odległości od protonu chwilowa prędkość elektronu będzie dwukrotnie większa od początkowej wartości?

## 25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

50. Pusta sferyczna wnęka metalowa ma potencjał +400 V względem ziemi (o potencjale  $V = 0$ ) i ładunek  $5 \cdot 10^{-9}$  C. Znajdź potencjał elektryczny w środku sfery.

51. Jaki jest nadmiarowy ładunek na przewodzącej kuli o promieniu  $r = 0,15$  m, jeśli potencjał kuli wynosi 1500 V dla  $V = 0$  w nieskończoności?

52. Rozważ dwie przewodzące kule 1 i 2, znajdujące się w dużej odległości od siebie. Średnica drugiej kuli jest dwa razy większa niż pierwszej. Mniejsza kula miała początkowo ładunek dodatni  $q$ , a większa była nienaładowana. Następnie połączono kule długim cienkim przewodnikiem. a) Jaki jest związek między końcowymi potencjałami  $V_1$  i  $V_2$  kul? b) Jakie są końcowe ładunki  $q_1$  i  $q_2$  na kulach, wyrażone przez  $q$ ? c) Jaki jest stosunek końcowej gęstości powierzchniowej ładunku na kuli 1, do gęstości na kuli 2?

53. Dwie metalowe kule, każda o promieniu 3 cm, mają środki oddalone o 2 m. Na jednej kuli jest ładunek  $+1 \cdot 10^{-8}$  C, a na drugiej ładunek  $-3 \cdot 10^{-8}$  C. Przyjmij, że duża odległość kul w stosunku do ich rozmiarów uzasadnia przyjęcie założenia o jednorodnym rozkładzie ładunku na każdej kuli (kule nie oddziałują na siebie nawzajem). Przy  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz: a) potencjał w punkcie, znajdującym się w połowie odległości między środkami kul, b) potencjał każdej kuli.

54. Naładowana kula metalowa o promieniu 15 cm ma całkowity ładunek  $3 \cdot 10^{-8}$  C. a) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli? b) Jeśli  $V = 0$  w nieskończoności, to ile wynosi potencjał elektryczny na powierzchni kuli? c) W jakiej odległości od powierzchni kuli potencjał elektryczny jest o 500 V mniejszy?

55. a) Jeśli Ziemia miałaby gęstość powierzchniową ładunku równą ładunkowi elektronu na metr kwadratowy (bardzo sztuczne założenie), to ile wynosiłby jej potencjał, jeśli przyjmiemy  $V = 0$  w nieskończoności? b) Ile wynosiłoby natężenie pola elektrycznego Ziemi tuż nad jej powierzchnią?

56. Dwie cienkie, izolowane, współśrodkowe, przewodzące sfery o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) mają ładunki  $q_1$  i  $q_2$ . Przy  $V = 0$  w nieskończoności, wyprowadź wyrażenia na  $E(r)$  i  $V(r)$ , gdzie  $r$  jest odległością od środka sfer. Wykreśl zależność  $E(r)$  i  $V(r)$  od  $r = 0$  do  $r = 4$  m, przyjmując  $R_1 = 0,5$  m,  $R_2 = 1$  m,  $q_1 = +2 \mu\text{C}$  i  $q_2 = +1 \mu\text{C}$ .

## Zadanie dodatkowe

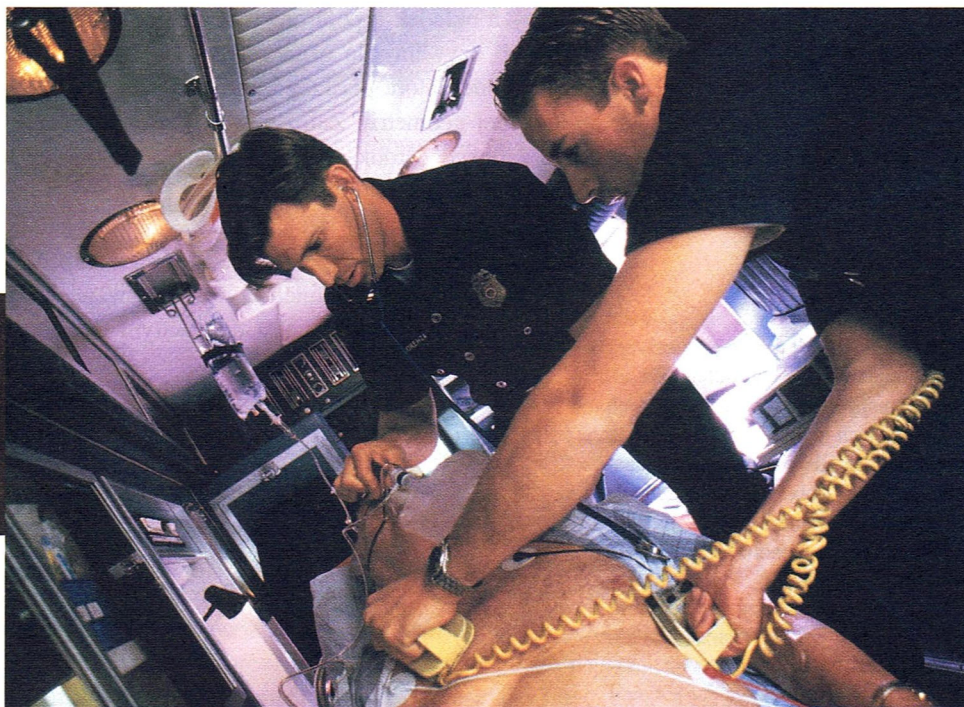
57. *Tajemnica proszku czekoladowego.* Historię rozpoczęliśmy w zadaniu 48 w rozdziale 24. a) Korzystając z odpowiedzi (a) z tego zadania, znajdź wyrażenie na potencjał elektryczny, w zależności od odległości  $r$  od osi rury. (Potencjał elektryczny jest równy zeru na uziemionej ściance rury). b) Ile wynosi różnica potencjałów elektrycznych między osią rury i jej wewnętrzną ścianką dla typowej objętościowej gęstości ładunku  $\rho = -1,1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup>? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 48 w rozdziale 26).

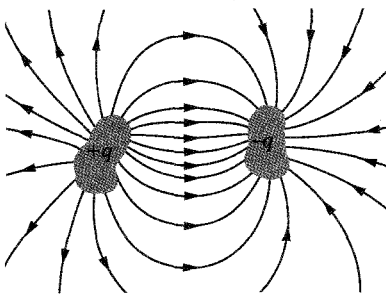
## 26 Pojemność elektryczna

Przy migotaniu (fibrylacji) komór serca, częściej postaci ataku serca, komory zaprzestają pompowania krwi, ponieważ ich włókna mięśniowe kurczą się i rozluźniają przypadkowo. Ratowanie ofiary migotania komór wymaga poddania mięśnia sercowego wstrząsowi, w celu przywrócenia mu normalnego rytmu. W tym celu przez klatkę piersiową trzeba przepuścić prąd o natężeniu 20 A, aby przekazać energię elektryczną 200 J w ciągu około 2 ms. Wymaga to mocy elektrycznej około 100 kW. Takie wymaganie można łatwo spełnić w szpitalu, ale nie na przykład przy zasilaniu elektrycznym w karetce pogotowia, przyjeżdżającej na ratunek choremu.

Jak można więc uzyskać moc konieczną do defibrylacji poza szpitalem?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





Rys. 26.1. Dwa przewodniki, odizolowane elektrycznie od siebie i od otoczenia, tworzą kondensator. Jeśli kondensator jest naładowany, to przewodniki, zwane *okładkami* mają ładunki o takich samych wartościach  $q$ , ale o przeciwnych znakach

## 26.1. Zastosowanie kondensatorów

Energię możemy magazynować w postaci energii potencjalnej przez: rozciąganie ciężki łuku, ściskanie sprężyny, sprężanie gazu lub podnoszenie w górę książki. Można także magazynować energię w postaci energii potencjalnej w polu elektrycznym i właśnie do tego celu służy **kondensator**.

Kondensator znajduje się np. w lampie błyskowej, zasilanej z przenośnego źródła. W przerwach między błyskami kondensator dość powoli gromadzi ładunek, wytwarzając coraz silniejsze pole elektryczne. Pole to i związana z nim energia jest utrzymywana do chwili, gdy zostaje nagle uwolniona, wyzwalając błysk.

W dzisiejszej dobie elektroniki i mikroelektroniki kondensatory mają wiele innych zastosowań niż magazynowanie energii potencjalnej. Są one na przykład istotnymi elementami w obwodach, które służą do dostrajania nadawczej i odbiorczej aparatury radiowej i telewizyjnej. Mikroskopijne kondensatory tworzą pamięci komputerów. Te bardzo małe urządzenia są wtedy ważne nie ze względu na zmagazynowaną w nich energię, ale ze względu na informację binarną, jakiej dostarcza obecność lub brak pola elektrycznego.

## 26.2. Pojemność elektryczna

Na rysunku 26.1 przedstawiono podstawowe elementy kondensatora — dwa odosobnione przewodniki dowolnego kształtu. Przewodniki te bez względu na ich kształt, ich płaskość lub zakrzywienie, nazywamy *okładkami*.

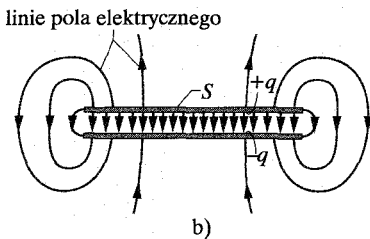
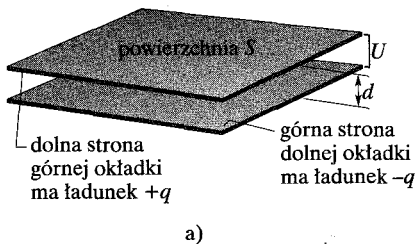
Na rysunku 26.2a przedstawiono mniej ogólny, ale bardzo typowy układ, zwany *kondensatorem płaskim*, który składa się z dwóch równoległych, przewodzących okładek o polu powierzchni  $S$  umieszczonych w odległości  $d$ . Symbol, jakiego używamy do oznaczenia kondensatora ( $\text{--}\text{--}$ ) wzorowany jest na budowie kondensatora płaskiego, lecz stosujemy go do oznaczania kondensatorów o dowolnej geometrii. Założymy na razie, że w obszarze między okładkami nie ma żadnego ośrodka materialnego (np. szkła czy plastiku). W paragrafie 26.6 zrezygnujemy z tego ograniczenia.

Gdy kondensator jest *naładowany*, jego okładki, mają ładunki  $+q$  i  $-q$  o jednakowych wartościach, lecz przeciwnych znakach. Będziemy jednak przez *ładunek kondensatora* rozumieli  $q$ , czyli bezwzględną wartość ładunków na okładkach. (Zauważ, że  $q$  nie jest całkowitym ładunkiem na kondensatorze, bo taki wynosi zero).

Okładki są przewodnikami, a więc są powierzchniami ekwipotencjalnymi: wszystkie punkty na okładce mają ten sam potencjał elektryczny. Co więcej, istnieje różnica potencjałów między dwiema okładkami. Odtąd bezwzględną wartość tej różnicy będziemy oznaczać przez  $U$ , a nie przez  $\Delta V$ , jak to robiliśmy dotychczas.

Ładunek  $q$  i różnica potencjałów  $U$  (zwana *napięciem*) dla kondensatora są do siebie proporcjonalne, czyli:

$$q = CU. \quad (26.1)$$



Rys. 26.2. a) Kondensator płaski składa się z dwóch okładek o polu powierzchni  $S$ , znajdujących się w odległości  $d$ . Okładki mają na swych wewnętrznych powierzchniach ładunki o takich samych wartościach  $q$ , ale o przeciwnych znakach. b) Linie pola pokazują, że pole elektryczne wytworzone przez naładowane okładki jest jednorodne w środkowym obszarze między okładkami. Jak widać z wygięcia linii pola przy krawędziach okładek, pole w pobliżu nich jest niejednorodne



Stałą proporcjonalności  $C$  nazywamy **pojemnością** kondensatora. Jej wartość zależy tylko od geometrii okładek, a *nie* od ich ładunku, czy różnicy potencjałów. Pojemność jest miarą ilości ładunku, jaki należy umieścić na okładkach, aby wytworzyć pewną różnicę potencjałów między nimi: *im większa jest pojemność, tym więcej potrzeba ładunku*.

Jednostką pojemności w układzie SI, wynikającą ze wzoru (26.1), jest kulomb na volt. Jednostka ta pojawia się tak często, że nadano jej specjalną nazwę *farad* (F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ kulomb na volt} = 1 \text{ C/V}. \quad (26.2)$$

Jak się przekonasz, farad jest bardzo dużą jednostką. W praktyce bardziej wygodnymi jednostkami są podwielokrotności farada, jak na przykład mikrofarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) lub pikofarad ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ).

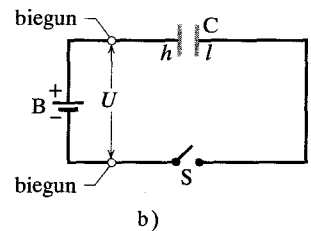
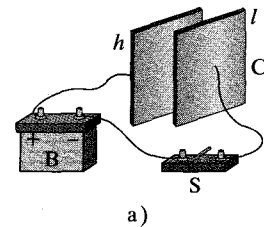
## Ładowanie kondensatora

Jedną z metod ładowania kondensatora jest umieszczenie go w obwodzie elektrycznym, zawierającym źródło prądu. *Obwód elektryczny* stanowi drogę, wzdłuż której może przepływać ładunek. *Źródło prądu* jest urządzeniem, które utrzymuje stałą różnicę potencjałów między *biegunami* źródła (punktami, przez które ładunek może wpływać do źródła lub z niego wypływać); zwykle w tym celu wykorzystuje się wewnętrzne reakcje elektrochemiczne, w których siły elektryczne mogą przesuwać wewnętrzne ładunki.

Na rysunku 26.3a obwód tworzą: źródło B, klucz S, nienaładowany kondensator C i przewody łączące te elementy. Ten sam obwód jest przedstawiony na *schemacie* na rysunku 26.3b, gdzie źródło, klucz i kondensator zostały zastąpione symbolami. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów  $U$  między swymi biegunami. Biegun o wyższym potencjale jest oznaczany znakiem  $+$  i zwykle bywa nazywany biegunem *dodatnim*; biegun o niższym potencjale jest oznaczany znakiem  $-$  i zwykle bywa nazywany biegunem *ujemnym*.

Obwód, przedstawiony na rysunkach 26.3a i b nazywamy *otwartym*, bo klucz S jest *otwarty*, czyli nie łączy elektrycznie przewodów do niego przyłączonych. Jeśli klucz zostanie *zamknięty*, łącząc elektrycznie te przewody, to obwód zostaje zamknięty i ładunek może przepływać przez klucz i przewody. Jak mówiliśmy w rozdziale 22, przepływ ładunku przez przewodnik metaliczny polega na przepływie elektronów. Gdy obwód z rysunku 26.3 zostanie zamknięty, pole elektryczne, wytworzone w przewodach przez źródło przesuwa elektrony wzdłuż przewodów. W szczególności elektrony z okładki  $h$  kondensatora są przesuwane przez pole do dodatniego bieguna źródła i stąd okładka  $h$ , tracąc elektrony, staje się naładowana dodatnio. Pole przesuwa także dokładnie tyle samo elektronów z bieguna ujemnego źródła na okładkę  $l$  kondensatora i stąd okładka  $l$ , gromadząc elektrony, staje się naładowana ujemnie w *takim samym stopniu*, jak okładka  $h$  (tracąc elektrony) staje się naładowana dodatnio.

Początkowo, gdy okładki były nienaładowane, różnica potencjałów między nimi wynosiła zero. W miarę, jak okładki są przeciwnie ładowane, różnica potencjałów wzrasta, aż osiągnie wartość różnicy potencjałów  $U$  między biegunami źródła. Wtedy okładka  $h$  i dodatni biegun źródła mają taki sam potencjał i nie



Rys. 26.3. a) Źródło B, klucz S oraz okładki  $h$  i  $l$  kondensatora C tworzą po połączeniu obwód. b) Schemat z elementami obwodu przedstawionymi za pomocą ich symboli

ma pola elektrycznego w przewodzie między nimi. Podobnie, okładka  $l$  i ujemny biegun źródła mają taki sam potencjał i nie ma pola elektrycznego w przewodzie między nimi. Przy zerowym natężeniu pola nie ma więc dalszego przepływu elektronów. Mówimy, że kondensator jest wtedy *całkowicie naładowany* i ma różnicę potencjałów  $U$  oraz ładunek  $q$ , które powiązane są wzorem (26.1).

W tej książce zakładamy, że zarówno podczas ładowania kondensatora, jak i potem ładunek nie może przesunąć się z jednej okładki na drugą przez odstęp między nimi. Będziemy także zakładać, że kondensator może zachować (czy *zmagazynować*) ładunek nieskończenie długo, chyba że zostanie umieszczony w obwodzie, w którym może zostać *rozładowany*.

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Czy pojemność  $C$  kondensatora wzrasta, maleje, czy pozostaje taka sama: a) jeśli ładunek  $q$  wzrośnie dwukrotnie, b) jeśli różnica potencjałów  $U$  wzrośnie trzykrotnie?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 1: Potencjał $V$ i różnica potencjałów $U$

W poprzednich rozdziałach symbol  $V$  oznaczał potencjał elektryczny w punkcie lub na powierzchni ekwipotencjalnej. W zagadnieniach dotyczących urządzeń elektrycznych  $U$  oznacza *różnicę potencjałów (napięcie)* między dwoma punktami lub dwiema powierzchniami ekwipotencjalnymi. Wzór (26.1) stanowi przykład takiego właśnie sposobu użycia tego symbolu. W paragrafie 26.3 spotkamy się z obydwoma oznaczeniami. Tam i w następnych rozdziałach trzeba zwracać uwagę na znaczenie tych symboli.

W tej książce i w innych miejscach można spotkać wiele zwrotów, dotyczących różnicy potencjałów. Różnicę potencjałów, a także „potencjał” lub „napięcie”, można *przyłożyć* do urządzenia lub mogą one występować *na* urządzeniu. Kondensator może być naładowany do różnicy potencjałów, na przykład „kondensator jest naładowany do 12 V.” Także źródło prądu może być scharakteryzowane przez różnicę potencjałów wytwarzaną przez źródło, na przykład „bateria 12-woltowa”. Trzeba zawsze pamiętać, co oznaczają takie zwroty: istnieje różnica potencjałów między dwoma punktami, takimi jak dwa punkty w obwodzie, czy na biegunach urządzenia, na przykład źródła prądu.

## 26.3. Obliczanie pojemności elektrycznej

Będziemy teraz obliczać pojemności kondensatorów, znając ich geometrię. Rozważymy różne rodzaje kondensatorów, a więc sensowne jest przedstawienie ogólnego schematu pracy. Nasz plan jest następujący: 1) przyjmujemy, że na okładkach znajduje się ładunek  $q$ , 2) obliczamy odpowiadające temu ładunkowi natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami, korzystając z prawa Gaussa, 3) znając  $\vec{E}$ , obliczamy różnicę potencjałów  $U$  między okładkami ze wzoru (25.18), 4) obliczamy  $C$  ze wzoru (26.1).

Na początek, przez poczynienie pewnych założeń możemy uprościć obliczenie zarówno natężenia pola elektrycznego, jak i różnicy potencjałów. Przedyskutujemy po kolei obliczanie każdej z tych wielkości.

### Obliczanie natężenia pola elektrycznego

Do powiązania natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami kondensatora z ładunkiem  $q$  na każdej z okładek, będziemy stosować prawo Gaussa

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \quad (26.3)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem, obejmowanym przez powierzchnię Gaussa, a  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  jest wypadkowym strumieniem elektrycznym przez tę powierzchnię. We wszystkich rozważanych przez nas przypadkach powierzchnia Gaussa będzie taka, że jeśli przechodzi przez nią strumień elektryczny, to natężenie  $\vec{E}$  ma na niej jednakową wartość i wektory  $\vec{E}$  oraz  $d\vec{S}$  są równoległe. Wzór (26.3) przyjmuje wtedy prostszą postać:

$$q = \varepsilon_0 E S \quad (\text{szczególny przypadek wzoru (26.3)}), \quad (26.4)$$

gdzie  $S$  jest polem tej części powierzchni Gaussa, przez którą przenika strumień. Dla wygody będziemy zawsze rysować powierzchnię Gaussa w ten sposób, aby obejmowała całkowicie ładunek na dodatniej okładce (zob. np. rys. 26.4).

## Obliczanie różnicy potencjałów

W oznaczeniach z rozdziału 25 (wzór (25.18)) różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest związana z natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$  wzorem:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (26.5)$$

gdzie całkę należy obliczyć po dowolnym torze, który zaczyna się na jednej okładce i kończy na drugiej. Będziemy zawsze wybierać tor wzdłuż linii pola elektrycznego, od okładki ujemnej do dodatniej. Dla takiego toru wektory  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  będą miały przeciwne kierunki i iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  będzie równy  $-Eds$ . Prawa strona wzoru (26.5) będzie więc dodatnia. Oznaczając przez  $U$  różnicę  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$ , wzór (26.5) możemy zapisać w postaci:

$$U = \int_{-}^{+} E ds \quad (\text{szczególny przypadek wzoru (26.5)}), \quad (26.6)$$

gdzie  $-$  i  $+$  przypominają nam, że nasz tor całkowania zaczyna się na okładce ujemnej i kończy na okładce dodatniej.

Jesteśmy teraz gotowi zastosować wzory (26.4) i (26.6) do pewnych szczególnych przypadków.

## Kondensator płaski

Założymy, zgodnie z rysunkiem 26.4, że okładki naszego kondensatora płaskiego są tak duże i umieszczone tak blisko siebie, że możemy zaniedbać zakrzywienie linii pola przy krawędziach okładek i traktować natężenie  $\vec{E}$  jako stałe w całym obszarze między okładkami.

Narysujemy powierzchnię Gaussa, obejmującą ładunek  $q$  na okładce dodatniej (rys. 26.4). Ze wzoru (26.4) wynika wtedy wyrażenie:

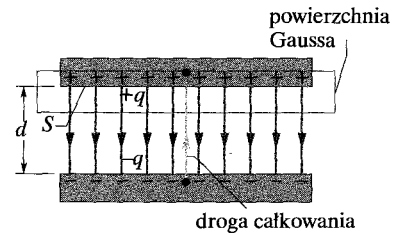
$$q = \varepsilon_0 E S, \quad (26.7)$$

gdzie  $S$  jest polem powierzchni okładki.

Wzór (26.6) przyjmuje postać:

$$U = \int_{-}^{+} E ds = E \int_0^d ds = Ed. \quad (26.8)$$

We wzorze (26.8) natężenie  $E$  można wyłączyć przed całkę, bo jest stałe; druga całka jest równa po prostu odległości  $d$  między okładkami.



Rys. 26.4. Naładowany kondensator płaski. Powierzchnia Gaussa obejmuje ładunek na okładce dodatniej. Całkowanie we wzorze (26.6) wykonujemy wzdłuż odcinka, od okładki ujemnej do okładki dodatniej

Jeśli teraz podstawimy  $q$  ze wzoru (26.7) i  $U$  ze wzoru (26.8) do związku  $q = CU$  (wzór (26.1)), to otrzymamy:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (\text{kondensator płaski}). \quad (26.9)$$

Widzisz, że pojemność rzeczywiście zależy tylko od wielkości geometrycznych, a mianowicie pola powierzchni okładki  $S$  i odległości  $d$  między okładkami. Zauważ, że  $C$  wzrasta, jeśli zwiększamy pole powierzchni okładki  $S$  lub zmniejszamy odległość  $d$ .

Przy okazji podkreślmy, że wzór (26.9) wskazuje jeden z powodów zapisania stałej elektrostatycznej w prawie Coulomba w postaci  $1/(4\pi\varepsilon_0)$ . Jeśli tego nie zrobilibyśmy, to wzór (26.9), który przez inżynierów jest częściej używany niż prawo Coulomba, nie miałby tak prostej postaci. Zauważ dalej, że wzór (26.9) pozwala wyrazić przenikalność  $\varepsilon_0$  w jednostkach bardziej przydatnych do zagadnień, związanych z kondensatorami, a mianowicie:

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m}. \quad (26.10)$$

Poprzednio tę stałą wyrażaliśmy w innych jednostkach:

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2). \quad (26.11)$$

## Kondensator walcowy

Na rysunku 26.5 przedstawiono w przekroju kondensator walcowy o długości  $L$ , zbudowany z dwóch współosiowych powierzchni walcowych, o promieniach  $a$  i  $b$ . Założymy, że  $L \gg b$ , co pozwoli nam zaniedbać zakrzywienie linii pola przy końcach powierzchni walcowych. Każda z okładek zawiera ładunek o wartości  $q$ . Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca (zamkniętego denkami) o długości  $L$  i promieniu  $r$  (rys. 26.5). Ze wzoru (26.4) mamy wtedy:

$$q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 E(2\pi rL),$$

gdzie  $2\pi rL$  jest polem zakrzywionej części powierzchni Gaussa. Strumień elektryczny przez denka jest równy zero. Wyznaczając stąd  $E$ , otrzymujemy:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}. \quad (26.12)$$

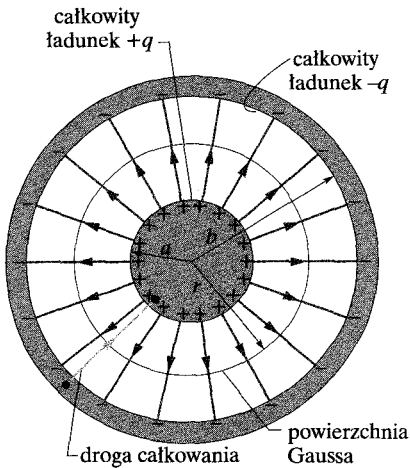
Podstawiając ten wynik do wzoru (26.6), mamy:

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (26.13)$$

gdzie zastosowaliśmy równość  $ds = -dr$  (całkowaliśmy w kierunku malejącego  $r$ ). Ze związku  $C = q/U$  otrzymujemy ostatecznie:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad (\text{kondensator walcowy}). \quad (26.14)$$

Widzisz, że pojemność kondensatora walcowego, podobnie jak kondensatora płaskiego, zależy tylko od wielkości geometrycznych, w tym przypadku od  $L$ ,  $b$  i  $a$ .



Rys. 26.5. Przekrój długiego kondensatora walcowego, pokazujący walcową powierzchnię Gaussa o promieniu  $r$  (obejmującą dodatnią okładkę) i radialną drogę całkowania, wzdłuż której całkujemy według wzoru (26.6). Rysunek może także służyć jako ilustracja kondensatora kulistego w przekroju

## Kondensator kulisty

Rysunek 26.6 może także ilustrować przekrój przez środek kondensatora, złożonego z dwóch współśrodkowych powłok sferycznych o promieniach  $a$  i  $b$ . Jako powierzchnię Gaussa wybieramy sferę o promieniu  $r$ , współśrodkową z dwiema powłokami i wtedy ze wzoru (26.4) mamy:

$$q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (4\pi r^2),$$

gdzie  $4\pi r^2$  jest polem sferycznej powierzchni Gaussa. Wyznaczając z tego wzoru  $E$ , otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (26.15)$$

w czym rozpoznajemy wyrażenie na natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek o rozkładzie sferycznym (wzór (24.15)).

Jeśli podstawimy to wyrażenie do wzoru (26.6), otrzymamy:

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}, \quad (26.16)$$

gdzie znów podstawiliśmy  $-dr$  zamiast  $ds$ . Jeśli teraz wstawimy wzór (26.16) do wzoru (26.1) i obliczymy  $C$ , to otrzymamy:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (\text{kondensator kulisty}). \quad (26.17)$$

## Izolowana kula

Pojemność możemy też przypisać *pojedynczej* izolowanej kuli (lub sferze) przewodzącej, o promieniu  $R$ , zakładając, że druga okładka kondensatora jest sferą przewodzącą o nieskończonym promieniu. Linie pola, opuszczające powierzchnię dodatnio naładowanego izolowanego przewodnika muszą się przecieć gdzieś kończyć; ściany pokoju, w którym znajduje się przewodnik, mogą efektywnie służyć za naszą sferę o nieskończonym promieniu.

W celu obliczenia pojemności izolowanego przewodnika, napiszemy najpierw wzór (26.17) w postaci:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

Jeśli następnie przejdziemy z  $b \rightarrow \infty$  i podstawimy  $R$  za  $a$ , to otrzymamy:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (\text{izolowana kula}). \quad (26.18)$$

Zauważ, że zarówno ten wzór, jak i inne wyprowadzone tu wzory na pojemność (wzory (26.9), (26.14) i (26.17)) zawierają stałą  $\varepsilon_0$ , pomnożoną przez wielkość o wymiarze długości.

**SPRAWDZIAN 2:** Czy ładunek zmagazynowany na kondensatorach naładowanych przez to samo źródło wzrasta, maleje czy pozostaje taki sam w każdej z następujących sytuacji: a) odległość między okładkami kondensatora płaskiego wzrasta, b) promień wewnętrznej powierzchni walcowej kondensatora walcowego wzrasta, c) promień zewnętrznej powłoki sferycznej kondensatora kulistego wzrasta?

## Przykład 26.1

Kondensator w układzie pamięci o swobodnym dostępie (RAM) ma pojemność 55 fF. Jeśli kondensator jest naładowany do różnicy potencjałów 5,3 V, to ile nadmiarowych elektronów znajduje się na jego ujemnej okładce?

### ROZWIĄZANIE:

➤ 1. Liczbę  $n$  nadmiarowych elektronów na ujemnej okładce możemy wyznaczyć, jeśli znamy całkowity ładunek nadmiarowy  $q$  na tej okładce. Wtedy  $n = q/e$ , gdzie  $e$  jest wartością ładunku każdego elektronu.

➤ 2. Ładunek  $q$  jest związany z różnicą potencjałów  $U$ , do której jest naładowany kondensator, wzorem (26.1) ( $q = CU$ ). Łącząc te dwa spostrzeżenia, otrzymujemy:

$$n = \frac{q}{e} = \frac{CU}{e} = \frac{(55 \cdot 10^{-15} \text{ F})(5,3 \text{ V})}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ elektronów.} \quad (\text{odpowiedź})$$

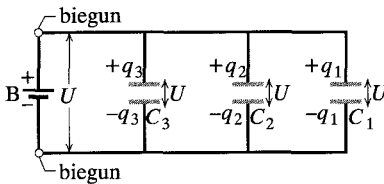
Jest to bardzo mała liczba elektronów. Małeńki pyłek kurzu zawiera około  $10^{17}$  elektronów (i taką samą liczbę protonów).

## 26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

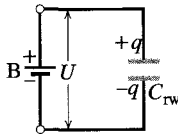
Jeśli w obwodzie występuje układ kondensatorów, to nieraz możemy zastąpić ten układ **kondensatorem równoważnym**, czyli pojedynczym kondensatorem o takiej samej pojemności, jak cały układ. Możemy w ten sposób uprościć obwód, otrzymując prostsze rozwiązania dla nieznanymi wielkości w obwodzie. Przedyskutujemy tu dwa podstawowe układy kondensatorów, które umożliwiają takie zastąpienie.

### Kondensatory połączone równolegle

Na rysunku 26.6a przedstawiono obwód elektryczny, w którym trzy kondensatory są połączone *równolegle* do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak zostały narysowane okładki kondensatorów. W rzeczywistości „równolegle” oznacza, że połączono przewodami bezpośrednio jedne okładki kondensatorów i podobnie drugie okładki, oraz że różnica potencjałów  $U$  jest przyłożona do tych dwóch połączonych przewodami okładek. Na każdym kondensatorze jest więc ta sama różnica potencjałów  $U$ , która wytwarza ładunek na kondensatorze. (Na rysunku 26.6a przyłożony potencjał jest stały, dzięki źródłu). Inaczej mówiąc:



a)



b)

Rys. 26.6. a) Trzy kondensatory połączone równolegle do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów  $U$  na swych biegunach i na *każdym* kondensatorze. b) Równoważny kondensator o pojemności  $C_{rw}$  zastępuje układ kondensatorów połączonych równolegle

➤ Jeśli różnica potencjałów  $U$  jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych równolegle, to taka sama różnica potencjałów  $U$  występuje na każdym kondensatorze. Całkowity ładunek  $q$ , zgromadzony w układzie jest sumą ładunków, zgromadzonych na poszczególnych kondensatorach.

Jeśli analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi równolegle, to możemy go uprościć w następujący sposób:

➤ Kondensatory połączone równolegle można zastąpić równoważnym kondensatorem o takim samym *całkowitym* ładunku  $q$  i takiej samej różnicy potencjałów  $U$ , jak dla kondensatorów układu.

Na rysunku 26.6b przedstawiono kondensator równoważny (o równoważnej pojemności  $C_{rw}$ ), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ ) z rysunku 26.6a. Aby wyprowadzić wyrażenie na  $C_{rw}$  z rysunku 26.6b, zastosujemy najpierw wzór (26.1) w celu obliczenia ładunku na każdym z trzech kondensatorów:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U \quad \text{i} \quad q_3 = C_3 U.$$

Całkowity ładunek w układzie połączonych równolegle kondensatorów z rysunku 26.6a wynosi więc:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Równoważna pojemność o takim samym, jak w układzie całkowitym ładunku i takiej samej przyłożonej różnicy potencjałów  $U$  wynosi więc:

$$C_{rw} = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3,$$

co możemy łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę  $n$  kondensatorów:

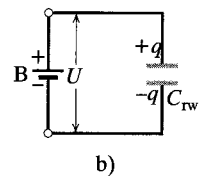
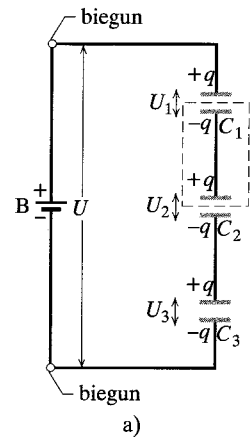
$$C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondensatorów połączonych równolegle}). \quad (26.19)$$

W celu obliczenia równoważnej pojemności układu kondensatorów połączonych równolegle, dodajemy więc po prostu ich pojemności.

### Kondensatory połączone szeregowo

Na rysunku 26.7a przedstawiono trzy kondensatory podłączone *szeregowo* do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak kondensatory zostały narysowane. W rzeczywistości „szeregowo” oznacza, że kondensatory są łączone ze sobą w szereg, jeden za drugim, i że różnica potencjałów  $U$  jest przyłożona do dwóch końców szeregu. (Na rysunku 26.7a ta różnica potencjałów jest utrzymywana przez źródło B). Różnice potencjałów, jakie pojawiają się na kondensatorach w szeregu, wytwarzają na nich jednakowe ładunki  $q$ .

➤ Jeśli różnica potencjałów  $U$  jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych szeregowo, to kondensatory mają identyczne ładunki  $q$ . Suma różnic potencjałów na wszystkich kondensatorach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów  $U$ .



**Rys. 26.7.** a) Trzy kondensatory podłączone szeregowo do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów  $U$  między najwyższą i najniższą okładką układu kondensatorów połączonych szeregowo. b) Równoważny kondensator o pojemności  $C_{rw}$  zastępuje układ kondensatorów połączonych szeregowo

nej okładce kondensatora 1 powoduje przesunięcie ujemnego ładunku z górnej okładki kondensatora 1 do źródła, pozostawiając górną okładkę z ładunkiem  $+q$ .

Oto dwa istotne fakty dotyczące kondensatorów połączonych szeregowo:

1. Jeśli ładunek przesuwa się z jednego kondensatora na drugi, w kondensatorach połączonych szeregowo, to może się poruszać tylko po jednej linii, takiej jak na przykład z kondensatora 3 do kondensatora 2 na rysunku 26.7a. Jeśli istnieją dodatkowe połączenia przewodzące, to kondensatory nie są połączone szeregowo (zob. przykład 26.2).
2. Źródło wytwarza bezpośrednio ładunki tylko na tych dwóch okładkach, z którymi jest połączone (na dolnej okładce kondensatora 3 i górnej okładce kondensatora 1, na rys. 26.7a). Ładunki, wytwarzane na innych okładkach powstają w wyniku przesunięć ładunków tam istniejących. Na przykład na rysunku 26.7a część obwodu otoczona linią przerywaną jest elektrycznie odizolowana od reszty obwodu. Stąd ładunek wypadkowy tej części nie może zostać zmieniony przez źródło — ładunek w tej części może mieć tylko zmieniony rozkład.

Gdy analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi szeregowo, możemy go uprościć w następujący sposób:

► Kondensatory połączone szeregowo można zastąpić równoważnym kondensatorem, który ma taki sam ładunek  $q$  i taką samą całkowitą różnicę potencjałów  $U$ , jak kondensatory połączone szeregowo.

Na rysunku 26.7b przedstawiono równoważny kondensator (o równoważnej pojemności  $C_{rw}$ ), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ ) z rys. 26.7a.

W celu obliczenia wyrażenia na  $C_{rw}$  z rysunku 26.7b skorzystamy najpierw ze wzoru (26.1) i znajdziemy różnicę potencjałów na każdym z kondensatorów:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2} \quad \text{ i } \quad U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Całkowita różnica potencjałów  $U$ , wytworzona przez źródło jest sumą tych trzech różnic potencjałów. Stąd:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Równoważna pojemność wynosi więc:

$$C_{rw} = \frac{q}{U} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

czyli:

$$\frac{1}{C_{rw}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Możemy łatwo rozszerzyć ten wynik na dowolną liczbę  $n$  kondensatorów:

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo}). \quad (26.20)$$



Korzystając ze wzoru (26.20), można pokazać, że równoważna pojemność układu kondensatorów połączonych szeregowo jest zawsze *mniejsza* od najmniejszej pojemności rozważanego układu.

**SPRAWDZIAN 3:** Źródło o różnicy potencjałów  $U$  dostarczyło ładunek  $q$  układowi dwóch identycznych kondensatorów. Jaka jest różnica potencjałów i ładunek na każdym kondensatorze, jeśli kondensatory są połączone: a) równolegle, b) szeregowo?

## Przykład 26.2

a) Oblicz równoważną pojemność dla układu kondensatorów, przedstawionego na rysunku 26.8a, do którego przyłożono różnicę potencjałów  $U$ . Przyjmij:

$$C_1 = 12 \mu\text{F}, \quad C_2 = 5,3 \mu\text{F} \quad \text{i} \quad C_3 = 4,5 \mu\text{F}.$$

### ROZWIĄZANIE:

☛ Dowolne kondensatory połączone szeregowo można zastąpić równoważnym im kondensatorem i dowolne kondensatory połączone równolegle można zastąpić równoważnym im kondensatorem. Dlatego powinniśmy najpierw sprawdzić, czy na rysunku 26.8a jakies kondensatory są połączone równolegle lub szeregowo.

Kondensatory 1 i 3 są połączone jeden za drugim, ale czy są połączone szeregowo? Nie. Różnica potencjałów  $U$ , przyłożona do kondensatorów, wytwarza ładunek na dolnej okładce kondensatora 3. Ten ładunek powoduje przesunięcie ładunku z górnej okładki kondensatora 3. Zauważ jednak, że przesuwany ładunek może poruszać się do dolnych okładek zarówno kondensatora 1, jak i kondensatora 2. Istnieje więcej niż jedna droga dla przesuwanego ładunku, a więc kondensator 3 *nie* jest połączony szeregowo z kondensatorem 1 (czy kondensatorem 2).

Czy kondensatory 1 i 2 są połączone równolegle? Tak. Ich górne okładki są bezpośrednio połączone przewodem i ich dolne okładki są bezpośrednio połączone przewodem, a różnica potencjałów jest przyłożona między parę górnych okładek i parę dolnych okładek. Stąd kondensator 1 i kondensator 2 są połączone równolegle i ze wzoru (26.19) wynika, że równoważna pojemność  $C_{12}$  dla tej pary wynosi:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12 \mu\text{F} + 5,3 \mu\text{F} = 17,3 \mu\text{F}.$$

Na rysunku 26.8b zastąpiliśmy kondensatory 1 i 2 równoważnym im kondensatorem, nazwijmy go kondensatorem 12 („jeden dwa”). (Połączenia w punktach  $A$  i  $B$  są dokładnie takie same na rysunkach 26.8a i 26.8b).

Czy kondensator 12 jest połączony szeregowo z kondensatorem 3? Stosując ponownie test dla kondensatorów połączonych szeregowo, dostrzeżesz, że ładunek przesuwany z górnej okładki kondensatora 3 musi przejść w całości na dolną okładkę kondensatora 12. Stąd kondensatory 12 i 3 są połączone szeregowo i możemy je zastąpić równoważnym im kondensatorem o pojemności  $C_{123}$  z rysunku 26.8c. Ze wzoru (26.20) otrzymujemy:

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17,3 \mu\text{F}} + \frac{1}{4,5 \mu\text{F}} = 0,28 \mu\text{F}^{-1},$$

skąd:

$$C_{123} = \frac{1}{0,28 \mu\text{F}^{-1}} = 3,57 \mu\text{F}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Różnica potencjałów, przyłożona do zacisków wejściowych na rysunku 26.8a wynosi  $U = 12,5 \text{ V}$ . Jaki jest ładunek na kondensatorze 1?

### ROZWIĄZANIE:

☛ 1. W celu obliczenia ładunku  $q_1$  na kondensatorze 1 musimy teraz cofnąć się do tego kondensatora, zaczynając od kondensatora 123. Podana różnica potencjałów  $U (= 12,5 \text{ V})$  jest przyłożona do układu trzech kondensatorów z rysunku 26.8a, a więc jest także przyłożona do kondensatora 123 z rysunku 26.8c. Stąd wzór (26.1) ( $q = CU$ ) daje nam:

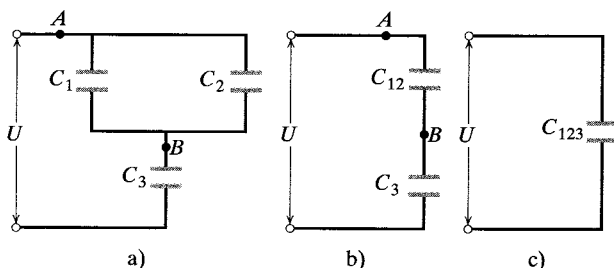
$$q_{123} = C_{123}U = (3,57 \mu\text{F}) \cdot (12,5 \text{ V}) = 44,6 \mu\text{C}.$$

☛ 2. Połączone szeregowo kondensatory 12 i 3 z rysunku 26.8b mają taki sam ładunek, jak równoważny im kondensator 123. Stąd kondensator 12 ma ładunek  $q_{12} = q_{123} = 44,6 \mu\text{C}$ . Ze wzoru (26.1) różnica potencjałów na kondensatorze 12 musi wynosić:

$$U_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44,6 \mu\text{C}}{17,3 \mu\text{F}} = 2,58 \text{ V}.$$

☛ 3. Różnica potencjałów na połączonych równolegle kondensatorach 1 i 2 jest taka sama, jak na równoważnym im kondensatorze 12. Stąd różnica potencjałów na kondensatorze 1  $U_1 = U_{12} = 2,58 \text{ V}$ . Ze wzoru (26.1) ładunek kondensatora 1 musi więc wynosić:

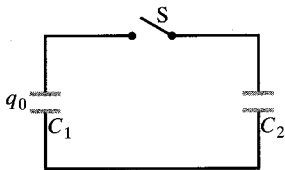
$$q_1 = C_1U_1 = (12 \mu\text{F})(2,58 \text{ V}) = 31 \mu\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$



**Rys. 26.8.** Przykład 26.2. a) Trzy kondensatory. b) Połączone równolegle kondensatory o pojemnościach  $C_1$  i  $C_2$  zastąpiono równoważnym kondensatorem o pojemności  $C_{12}$ . c) Połączone szeregowo kondensatory o pojemnościach  $C_{12}$  i  $C_3$  zastąpiono równoważnym kondensatorem o pojemności  $C_{123}$

## Przykład 26.3

Kondensator 1 o pojemności  $C_1 = 3,55 \mu\text{F}$  jest naładowany do różnicy potencjałów  $U_0 = 6,3 \text{ V}$ , przy użyciu źródła o takiej różnicy potencjałów. Następnie źródło zostaje odłączone, a przyłączony zostaje nienaładowany kondensator 2 o pojemności  $C_2 = 8,95 \mu\text{F}$  (rys. 26.9). Gdy klucz S zostaje zamknięty, ładunek przepływa między kondensatorami tak długo, aż uzyskają one taką samą różnicę potencjałów  $U$ . Znajdź  $U$ .



Rys. 26.9. Przykład 26.3. Do kondensatora 1 przyłożono różnicę potencjałów  $U_0$  i po naładowaniu kondensatora odłączono źródło. Następnie zamknięto klucz S i ładunek na kondensatorze 1 rozdzielił się między kondensatory 1 i 2

### ROZWIĄZANIE:

Obecna sytuacja różni się od opisanej w poprzednim przykładzie tym, że układ nie zawiera źródła, które utrzymywałoby stałą różnicę potencjałów. Tuż po zamknięciu klucza różnica potencjałów przyłożona do kondensatora 2 pochodzi od kondensatora 1, a z czasem maleje. W tym przypadku nie możemy mówić ani

o szeregowym, ani o równoległym połączeniu kondensatorów, gdyż w układzie nie ma źródła.

➔ Po zamknięciu klucza początkowy ładunek  $q_0$  na kondensatorze 1 rozdzieli się między kondensatory 1 i 2. Po osiągnięciu równowagi (gdy ładunki przestaną przepływać) na kondensatorach zgromadzą się ładunki  $q_1$  i  $q_2$ , które możemy związać z ładunkiem  $q_0$  wzorem:

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Stosując związek  $q = CU$  do każdego z członów tego wzoru, otrzymujemy:

$$C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U,$$

skąd

$$U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6,3 \text{ V})(3,55 \mu\text{F})}{3,55 \mu\text{F} + 8,95 \mu\text{F}} = 1,79 \text{ V} \text{ (odpowiedź)}$$

Gdy różnica potencjałów na kondensatorach osiągnie tę wartość, przepływ ładunku ustanie.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** Załóżmy w poprzednim przykładzie, że kondensator 2 został zastąpiony układem kondensatorów 3 i 4, połączonych szeregowo. a) Jaki jest związek między początkowym ładunkiem  $q_0$ , końcowym ładunkiem  $q_1$  na kondensatorze 1 i ładunkiem  $q_{34}$  na równoważnym kondensatorze 34 po zamknięciu klucza i ustaniu przepływu ładunku? b) Czy ładunek  $q_3$  na kondensatorze 3 jest większy, mniejszy, czy równy ładunkowi  $q_4$  na kondensatorze 4, gdy  $C_3 > C_4$ ?

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Obwody z wieloma kondensatorami

Dokonajmy przeglądu metody rozwiązywania problemu z przykładu 26.2, w którym kilka kondensatorów zostało podłączonych do źródła. Aby znaleźć pojemność pojedynczego równoważnego kondensatora, upraszczamy wyjściowy układ kondensatorów, zastępując je krok po kroku równoważnymi kondensatorami i korzystając ze wzoru (26.19), gdy znajdziemy kondensatory połączone równolegle oraz wzoru (26.20), gdy znajdziemy kondensatory połączone szeregowo. Następnie w celu obliczenia ładunku zgromadzonego na tym pojedynczym równoważnym kondensatorze korzystamy ze wzoru (26.1) i różnicy potencjałów  $U$  przyłożonej ze źródła.

Ten wynik określa nam wypadkowy ładunek, zgromadzony na układzie kondensatorów. Aby jednak znaleźć ładunek czy różnicę potencjałów na określonym kondensatorze, musimy teraz zacząć rozumować odwrotnie. Przy każdym kroku powrotnie stosujemy następujące dwie reguły: gdy kondensatory są połączone równolegle, mają taką samą różnicę potencjałów, jak równoważny kondensator i możemy skorzystać ze wzoru (26.1) w celu obli-

czenia ładunku na każdym kondensatorze; gdy kondensatory są połączone szeregowo, mają taki sam ładunek, jak równoważny kondensator i możemy skorzystać ze wzoru (26.1) w celu obliczenia różnicy potencjałów na każdym kondensatorze.

### Porada 3: Źródła prądu i kondensatory

Źródło prądu utrzymuje pewną różnicę potencjałów na swoich biegunach. Stąd, jeśli kondensator 1 z przykładu 26.3 zostanie podłączony do źródła o napięciu 6,3 V, to ładunek przepływa między kondensatorem i źródłem do momentu, aż kondensator uzyska taką samą różnicę potencjałów, jaką ma źródło.

Kondensator różni się od źródła tym, że w kondensatorze nie zachodzą reakcje elektrochemiczne potrzebne do uwolnienia cząstek naładowanych (elektronów) z atomów i cząsteczek. Stąd, gdy naładowany kondensator 1 z przykładu 26.3 zostanie odłączony od źródła i połączony z nienaładowanym kondensatorem 2 przy zamkniętym kluczu S, różnica potencjałów na kondensatorze 1 nie będzie stała. Wielkością, która *jest* zachowywana, jest ładunek  $q_0$  układu dwóch kondensatorów, czyli zasada zachowania jest spełniona dla ładunku, a *nie* dla potencjału elektrycznego.

## 26.5. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

Aby naładować kondensator, konieczne jest wykonanie pracy przez siłę zewnętrzną. Rozpoczynając od nienaładowanego kondensatora, wyobraź sobie, że — używając „magicznych szczypcyków” — usuwamy elektrony z jednej okładki i przenosimy je, jeden po drugim, na drugą okładkę. Pole elektryczne, powstające w obszarze między okładkami ma kierunek, który przeciwdziała dalszemu przenoszeniu. W miarę, jak ładunek gromadzi się na okładkach kondensatora, musimy wykonywać coraz większą pracę przy przenoszeniu dodatkowych elektronów. W rzeczywistości praca ta jest wykonywana nie przez „magiczne szczypczyki”, lecz przez źródło, kosztem zmagazynowanej w nim energii chemicznej.

Praca wykonana przy ładowaniu kondensatora zostaje zmagazynowana w postaci **elektrycznej energii potencjalnej**  $E_p$ , w polu elektrycznym między okładkami. Możemy odzyskać tę energię przez rozładowanie kondensatora w obwodzie, podobnie jak możemy odzyskać energię potencjalną, zmagazynowaną w napiętym łuku przez zwolnienie cięciwy, aby zamienić tę energię na energię kinetyczną strzały.

Założmy, że w pewnej chwili ładunek przeniesiony z jednej płytki kondensatora na drugą wyniósł  $q'$ . Różnica potencjałów  $U'$  między okładkami była wtedy równa  $q'/C$ . Jeśli przeniesiemy następnie dodatkowy ładunek  $dq'$ , to zgodnie ze wzorem (25.7) praca przy tym wykonana wyniesie:

$$dW = U'dq' = \frac{q'}{C}dq'.$$

Praca, potrzebna do przeniesienia całkowitego ładunku  $q$  kondensatora jest równa:

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^q q'dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Praca ta jest zmagazynowana jako energia potencjalna  $E_p$  w kondensatorze i stąd:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} \quad (\text{energia potencjalna}). \quad (26.21)$$

Stosując wzór (26.1), możemy tę energię zapisać także w postaci:

$$E_p = \frac{1}{2}CU^2 \quad (\text{energia potencjalna}). \quad (26.22)$$

Wzory (26.21) i (26.22) są poprawne bez względu na geometrię kondensatora.

Aby zrozumieć, na czym polega magazynowanie energii, rozważmy dwa płaskie kondensatory, które są identyczne poza tym, że w kondensatorze 1 odległość między okładkami jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Wtedy kondensator 1 ma dwa razy większą objętość obszaru między okładkami i, zgodnie ze wzorem (26.9), dwa razy mniejszą pojemność niż kondensator 2. Ze wzoru (26.4) wynika, że jeśli na obydwu kondensatorach znajdują się takie same ładunki  $q$ , to natężenia pól elektrycznych między ich okładkami są identyczne. Ze wzoru

(26.21) wynika, że energia potencjalna zmagazynowana w kondensatorze 1 jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Dla dwóch prawie identycznych kondensatorów o takim samym ładunku i takim samym natężeniu pola kondensator o dwa razy większej objętości między okładkami ma więc zmagazynowaną dwa razy większą energię potencjalną. Takie argumenty potwierdzają nasze wcześniejsze założenie:

► Energia potencjalna naładowanego kondensatora jest zmagazynowana w polu elektrycznym między okładkami kondensatora.

## Defibrylator medyczny

Zdolność kondensatora do magazynowania energii potencjalnej jest podstawą działania *defibrylatorów*, które są używane przez zespoły pogotowia ratunkowego do zatrzymania migotania komór u ofiar ataku serca. W przenośnej wersji defibrylatora bateria ładuje kondensator do dużej różnicy potencjałów, magazynując dużą ilość energii w czasie krótszym niż minuta. Bateria utrzymuje tylko małą różnicę potencjałów, lecz obwód elektroniczny, korzystając z niej cyklicznie, wytwarza na kondensatorze dużo większą różnicę potencjałów. Moc, czyli szybkość przekazu energii, jest także mała w tym procesie.

Przewodzące elektrody umieszcza się na klatce piersiowej chorego. Gdy zostanie zamknięty obwód, kondensator przekazuje porcję zmagazynowanej energii ciału chorego. Na przykład, gdy kondensator  $70 \mu\text{F}$  w defibrylatorze jest naładowany do  $5000 \text{ V}$ , zgodnie ze wzorem (26.22), energia zmagazynowana w kondensatorze wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}(70 \cdot 10^{-6} \text{ F})(5000 \text{ V})^2 = 875 \text{ J}.$$

Okolo 200 J tej energii jest przekazywane człowiekowi podczas impulsu trwającego okolo 2 ms. Moc impulsu wynosi:

$$P = \frac{E_p}{t} = \frac{200 \text{ J}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 100 \text{ kW}$$

i jest dużo większa niż moc samego źródła. Ta sama technika zastosowania kondensatora powoli ładującego się ze źródła, a następnie rozładowującego się z dużo większą mocą, jest powszechnie stosowana w fotografii błyskowej i stroboskopowej.

## Gęstość energii

W płaskim kondensatorze, przy zaniedbaniu efektów brzegowych, natężenie pola elektrycznego ma taką samą wartość we wszystkich punktach między okładkami. Stąd **gęstość energii**  $u$ , czyli energia potencjalna na jednostkę objętości między okładkami, powinna także być stała. Możemy znaleźć  $u$  przez podzielenie całkowitej energii potencjalnej przez objętość  $Sd$  obszaru między okładkami. Po zastosowaniu wzoru (26.22) otrzymujemy:

$$u = \frac{E_p}{Sd} = \frac{CU^2}{2Sd}.$$

Po podstawieniu  $C = \varepsilon_0 S/d$  zgodnie ze wzorem (26.9), powyższe równanie przyjmuje postać:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U}{d} \right)^2.$$

Jak wynika ze wzoru (25.42) wielkość  $U/d$  jest równa wartości natężenia pola elektrycznego  $E$ , czyli:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{gęstość energii}). \quad (26.23)$$

Chociaż wzór ten wyprowadziliśmy dla szczególnego przypadku kondensatora płaskiego, to jest on prawdziwy bez względu na źródło pola elektrycznego. Jeśli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , to możemy z tym punktem wiązać elektryczną energię potencjalną, a jej ilość na jednostkę objętości jest dana wzorem (26.23).

## Przykład 26.4

Izolowana kula przewodząca o promieniu  $R = 6,85$  cm ma ładunek  $q = 1,25$  nC.

a) Jaka energia potencjalna jest zmagazynowana w polu elektrycznym tego naładowanego przewodnika?

### ROZWIĄZANIE:

☛ Energia  $E_p$  zmagazynowana w kondensatorze zależy, zgodnie ze wzorem (26.21), od ładunku  $q$  na kondensatorze i pojemności  $C$  kondensatora. Podstawiając do wzoru (26.18) wyrażenie na  $C$ , ze wzoru (26.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(8\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(0,0685 \text{ m})} \\ &= 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 103 \text{ nJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest gęstość energii przy powierzchni kuli?

### ROZWIĄZANIE:

☛ Gęstość energii  $u$  zmagazynowanej w polu elektrycznym zależy od wartości  $E$  natężenia pola, zgodnie ze wzorem (26.23) ( $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ ), czyli musimy najpierw znaleźć  $E$  przy powierzchni kuli. Wartość ta jest dana wzorem (24.15):

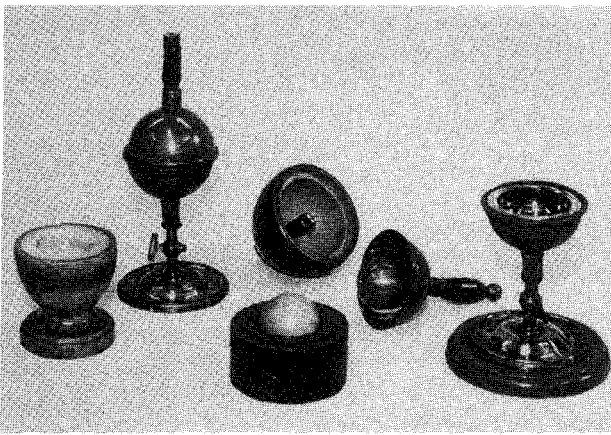
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Gęstość energii wynosi więc:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4} \\ &= \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(32\pi^2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(0,0685 \text{ m})^4} \\ &= 2,54 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^3 = 25,4 \mu\text{J/m}^3. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 26.6. Kondensator z dielektrykiem

Co stanie się z pojemnością kondensatora, jeśli przestrzeń między jego okładkami wypełnimy *dielektrykiem*, czyli materiałem izolującym, na przykład olejem mineralnym lub plastikiem? Pierwszy przeanalizował ten problem w 1837 r. Michael Faraday, któremu w dużym stopniu zawdzięczamy pojęcie pojemności i na cześć którego jednostkę pojemności w układzie SI nazwano faradem. Korzystając z prostych przyrządów, pokazanych na rys. 26.10 odkrył on, że pojemność kondensatora *wzrasta* o czynnik liczbowy  $\varepsilon_r$ , który nazywamy **przenikalnością elektryczną względną** materiału izolującego. W tabeli 26.1 podano wartości przenikalności elektrycznych dla kilkunastu materiałów dielektrycznych. Przenikalność elektryczna próżni jest z definicji równa jedności, dla powietrza zaś

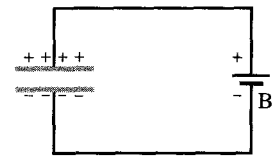


Rys. 26.10. Prosta aparatura elektrostatyczna używana przez Faradaya. Złożony przyrząd (drugi od lewej) jest sferycznym kondensatorem, składającym się z zewnętrznej miedzianej powłoki i znajdującej się wewnątrz miedzianej kuli. W przestrzeni między kulą i powłoką Faraday umieszczał materiały dielektryczne

Materiał	Przenikalność elektryczna względna $\epsilon_r$	Wytrzymałość na przebicie [kV/mm]
Powietrze (1 atm)	1,00054	3
Polistyren	2,6	24
Papier	3,5	16
Olej transformatorowy	4,5	
Pyreks	4,7	14
Mika	5,4	
Porcelana	6,5	
Krzem	12	
German	16	
Etanol	25	
Woda (20°C)	80,4	
Woda (25°C)	78,5	
Ceramika tytanowa	130	
Tytanian strontu	310	8

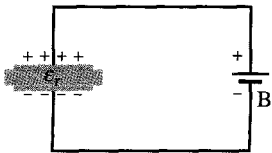
Dla próżni  $\epsilon_r = 1$

<sup>a</sup> mierzone (poza wodą) w temperaturze pokojowej.



$U = \text{const}$

a)



$q = \text{const}$

b)

(jest to głównie pusta przestrzeń) zmierzona wartość przenikalności elektrycznej względnej jest tylko nieco większa od jedności.

Inną konsekwencją wprowadzenia dielektryka jest konieczność ograniczenia różnicy potencjałów, jaka może być przyłożona do okładek, do pewnej wartości  $U_{\text{max}}$ , zwanej *napięciem przebicia*. Jeśli tę wartość istotnie przekroczymy, to nastąpi przebicie materiału dielektrycznego i między okładkami powstanie przewodząca ścieżka. Każdy materiał dielektryczny ma charakterystyczną *wytrzymałość na przebicie*, która jest maksymalną wartością natężenia pola elektrycznego, jakie dielektryk może wytrzymać bez przebicia. Kilka takich wartości podano w tabeli 26.1.

Zgodnie z dyskusją przy wzorze (26.18), pojemność dowolnego kondensatora można wyrazić wzorem:

$$C = \epsilon_0 \mathcal{L}, \quad (26.24)$$

gdzie  $\mathcal{L}$  ma wymiar długości i np.  $\mathcal{L} = S/d$  dla kondensatora płaskiego. Odkrycie Faradaya polegało na tym, że po całkowitym wypełnieniu dielektrykiem obszaru między okładkami kondensatora wzór (26.24) przyjmuje postać:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{L} = \epsilon_r C_{\text{pow}}, \quad (26.25)$$

gdzie  $C_{\text{pow}}$  jest wartością pojemności dla kondensatora z powietrzem (ściślej próżnią) między okładkami.

Rys. 26.11. a) Jeśli różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest utrzymywana, na przykład przez źródło B, to wsunięcie dielektryka zwiększa ładunek na okładkach. b) Jeśli ładunek na okładkach kondensatora jest stały (jak w tej sytuacji), to wsunięcie dielektryka zmniejsza różnicę potencjałów między okładkami. Pokazana skala jest skalą *woltomierza*, czyli przyrządu używanego do pomiaru różnicy potencjałów (w tym przypadku między okładkami). Kondensator nie może rozładować się przez woltomierz

Analiza rysunku 26.11 pozwala zrozumieć doświadczenia Faradaya. Na rysunku 26.11a bateria zapewnia stałą różnicę potencjałów  $U$  między okładkami kondensatora. Gdy między okładki włożymy płytę dielektryczną, ładunek  $q$  na okładkach zwiększy się o czynnik  $\epsilon_r$ ; dodatkowy ładunek do okładek kondensatora zostaje dostarczony przez źródło prądu. Na rysunku 26.13b nie ma źródła i dlatego ładunek  $q$  musi pozostać stały przy wsuwaniu płyty dielektrycznej; różnica potencjałów  $U$  między okładkami maleje więc o czynnik  $\epsilon_r$ . Obie te obserwacje są zgodne ze wzrostem pojemności, spowodowanym przez dielektryk (wiemy, że  $q = CU$ ).

Porównanie wzorów (26.24) i (26.25) wskazuje, że wpływ dielektryka można podsumować następująco:

➤ W obszarze wypełnionym całkowicie materiałem dielektrycznym o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r$  wszystkie równania elektrostatyki, zawierające przenikalność elektryczną próżni  $\epsilon_0$  należy zmodyfikować, zastępując  $\epsilon_0$  przez  $\epsilon_r \epsilon_0$ .

Ładunek punktowy wewnątrz dielektryka wytwarza więc pole elektryczne, którego natężenie zgodnie z prawem Coulomba ma wartość:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (26.26)$$

Wyrażenie na natężenie pola elektrycznego przy powierzchni izolowanego przewodnika, otoczonego dielektrykiem (zob. wzór (24.11)) wynosi wtedy:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r\epsilon_0}. \quad (26.27)$$

Obydwa te równania pokazują, że dla ustalonego rozkładu ładunków wpływ dielektryka polega na osłabieniu natężenia pola elektrycznego w stosunku do sytuacji bez dielektryka.

## Przykład 26.5

Kondensator płaski, którego pojemność  $C$  wynosi 13,5 pF, jest naładowany przez źródło do różnicy potencjałów między okładkami  $U = 12,5$  V. Po odłączeniu źródła między okładki kondensatora wsunięto porcelanową płytę ( $\epsilon_r = 6,5$ ). Jaka jest energia potencjalna układu kondensator–płyta przed wsunięciem płyty i po nim?

### ROZWIĄZANIE:

➤ 1. Energię potencjalną  $E_p$  kondensatora możemy powiązać z pojemnością  $C$  i z różnicą potencjałów  $U$  (wzór (26.22)), albo z ładunkiem  $q$  (wzór (26.21)):

$$E_{p \text{ pocz}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Znamy początkową różnicę potencjałów  $U = 12,5$  V, więc ze wzoru (26.22) znajdziemy początkową energię, zmagazynowaną w kondensatorze:

$$E_{p \text{ pocz}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 13,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (12,5 \text{ V})^2 \\ = 1,055 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 1055 \text{ pJ} \approx 1100 \text{ pJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Znajdźmy obecnie końcową energię potencjalną  $E_{p \text{ końc}}$  kondensatora (po włożeniu płyty).

➤ 2. Źródło zostało odłączone, więc ładunek na kondensatorze nie może ulec zmianie przy wsuwaniu dielektryka. Zmianie ulega natomiast różnica potencjałów. Musimy więc teraz użyć wzoru (26.21) (zawierającego  $q$ ), aby wypisać wzór na końcową energię potencjalną  $E_{p \text{ końc}}$ . Teraz w kondensatorze jest płyta, a więc jego pojemność wynosi  $\epsilon_r C$ . Otrzymujemy więc:

$$E_{p \text{ końc}} = \frac{q^2}{2\epsilon_r C} = \frac{E_{p \text{ pocz}}}{\epsilon_r} = \frac{1055 \text{ pJ}}{6,5} = 162 \text{ pJ} \approx 160 \text{ pJ}. \\ (\text{odpowiedź})$$

Po wsunięciu płyty energia potencjalna maleje o czynnik  $\epsilon_r$ .

Źródło „brakującej” energii jest oczywiste dla osoby, która wsuwała płytę. Kondensator wciągał lekko płytę i wykonał nad nią pracę

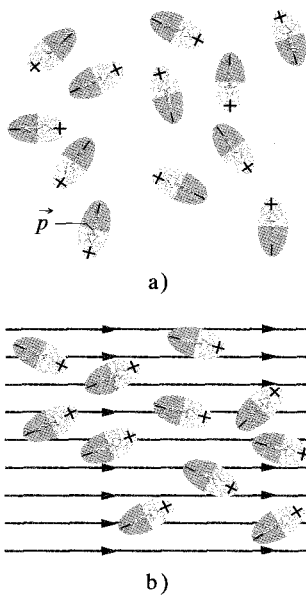
$$W = E_{p \text{ pocz}} - E_{p \text{ końc}} = (1055 - 162) \text{ pJ} = 893 \text{ pJ}.$$

Jeśli nie przytrzymać płyty między okładkami, to płyta oscylowałaby między nimi tam i z powrotem ze stałą energią mechaniczną 893 pJ i energia ta zmieniałaby się okresowo z energii kinetycznej poruszającej się płyty, na energię potencjalną, zgmagazynowaną w polu elektrycznym.

**SPRAWDZIAN 5:** Gdyby źródło w powyższym przykładzie było nadal podłączone, to czy: a) różnica potencjału między okładkami kondensatora, b) pojemność, c) ładunek na kondensatorze, d) energia potencjalna układu, e) natężenie pola elektrycznego między płytami wzrosłyby, zmalałyby, czy pozostałyby bez zmiany? (Wskazówka: W punkcie (e) należy zwrócić uwagę na to, że ładunek nie jest stały).

## 26.7. Dielektryki: obraz mikroskopowy

Co się dzieje z atomami i cząsteczkami, gdy włożymy dielektryk w pole elektryczne? Są dwie możliwości, zależnie od rodzaju cząsteczek.



**Rys. 26.12.** a) Cząsteczki obdarzone elektrycznym momentem dipolowym przy braku zewnętrznego pola elektrycznego mają przypadkowe ustawienia. b) Przyłożenie pola elektrycznego prowadzi do częściowego uporządkowania dipoli. Całkowitemu uporządkowaniu przeszkadza ruch termiczny

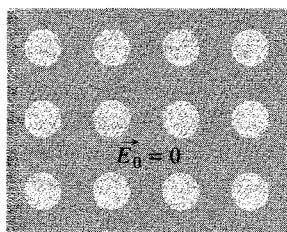
1. **Dielektryki polarne.** Cząsteczki pewnych dielektryków, np. wody, mają trwałe elektryczne momenty dipolowe. W takich materiałach (zwanymi *dielektrykami polarnymi*) dipole elektryczne mają tendencję do ustawiania się wzdłuż zewnętrznego pola elektrycznego, jak na rysunku 26.12. Wskutek swego przypadkowego ruchu termicznego cząsteczki ciągle się potracają nawzajem, a więc uporządkowanie nie jest całkowite, ale staje się coraz pełniejsze wraz ze wzrostem wartości natężenia przyłożonego pola (lub zmniejszeniem temperatury, a stąd liczby zderzeń). Uporządkowane dipole elektryczne wytwarzają pole elektryczne o natężeniu skierowanym przeciwnie do przyłożonego pola i mniejszej wartości.
2. **Dielektryki niepolarne.** Bez względu na to, czy cząsteczki mają trwałe elektryczne momenty dipolowe, czy też nie, po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrycznym zyskują indukowane momenty dipolowe. W paragrafie 25.7 (zob. rys. 25.12) pokazaliśmy, że dzieje się tak, ponieważ zewnętrzne pole ma tendencję do „rozciągania” cząsteczek i przesuwania nieco środka ładunku dodatniego i ujemnego.

Na rysunku 26.13a przedstawiono płytę z niepolarnego dielektryka, bez zewnętrznego pola elektrycznego. Następnie przyłożono pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}_0$ , przez umieszczenie płyty w kondensatorze, którego okładki były naładowane (rys. 26.13b). W wyniku tego nastąpiło małe przesunięcie środków rozkładów dodatniego i ujemnego ładunku w płycie, co doprowadziło do pojawienia się ładunku dodatniego na jednej ścianie płyty (wskutek występowania tam dodatnich końców dipoli) i ładunku ujemnego na przeciwnej ścianie (wskutek występowania tam ujemnych końców dipoli). Płyta jako całość pozostała obojętna, a wewnątrz niej nie ma nadmiarowego ładunku w żadnym makroskopowym elemencie objętości.

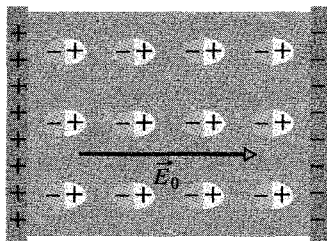
Na rysunku 26.13c pokazano, że indukowane ładunki powierzchniowe na ścianach płyty wytwarzają pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}'$ , skierowanym przeciwnie do natężenia przyłożonego pola elektrycznego  $\vec{E}_0$ . Wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń  $\vec{E}_0$  i  $\vec{E}'$ ) ma kierunek natężenia  $\vec{E}_0$ , ale ma mniejszą wartość.

Natężenie pola  $\vec{E}'$ , utworzonego zarówno przez ładunki powierzchniowe na rysunku 26.13c, jak i przez trwałe dipole elektryczne z rysunku 26.12 jest tak

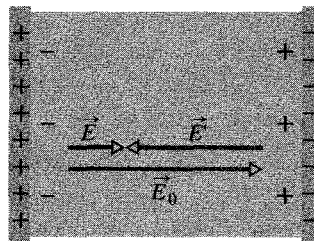




a)



b)



c)

**Rys. 26.13.** a) Płyta z niepolarnego dielektryka. Koła przedstawiają elektrycznie obojętne atomy w płycie. b) Przyłożenie pola elektrycznego przez naładowanie okładek kondensatora; pole częściowo rozciąga atomy, rozsuwając środki dodatniego i ujemnego ładunku. c) Rozsuniecie wytwarza ładunki powierzchniowe na ścianach płyty. Ładunki te wytwarzają pole o natężeniu  $\vec{E}'$ , które jest skierowane przeciwnie do natężenia przyłożonego pola  $\vec{E}_0$ . Wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń  $\vec{E}_0$  i  $\vec{E}'$ ) ma ten sam kierunek, jak wektor  $\vec{E}_0$ , ale mniejszą wartość

samo skierowane — ma ono kierunek przeciwny do natężenia przyłożonego pola  $\vec{E}_0$ . Stąd zarówno w dielektrykach polarnych, jak i w niepolarnych natężenie dowolnego przyłożonego do nich pola ulega osłabieniu, podobnie jak między okładkami kondensatora.

Możesz teraz zrozumieć, dlaczego dielektryczna płyta porcelanowa w przykładzie 26.5 jest wciągana do kondensatora: przy wchodzeniu w obszar między okładkami, pojawiające się na każdej ścianie płyty ładunki powierzchniowe mają znak przeciwny niż ładunek na pobliskiej okładce kondensatora i dlatego płyta i okładki przyciągają się nawzajem.

## 26.8. Dielektryki i prawo Gaussa

W naszej dyskusji prawa Gaussa w rozdziale 24 założyliśmy, że ładunki znajdują się w próżni. Teraz zobaczysz, jak zmodyfikować i uogólnić to prawo, gdy występują materiały dielektryczne, np. podane w tabeli 26.1. Na rysunku 26.14 przedstawiono płaski kondensator z okładkami o polu powierzchni  $S$ , zarówno z dielektrykiem, jak i bez niego. Założymy, że ładunek  $q$  na okładkach kondensatora jest w obydwu przypadkach taki sam. Pole między okładkami indukuje ładunki na ścianach dielektryka w jeden z dwóch sposobów, opisanych w paragrafie 26.7.

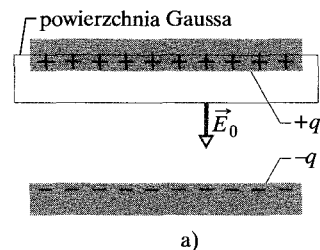
Dla przypadku przedstawionego na rys. 26.14a, czyli bez dielektryka, natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}_0$  między okładkami możemy znaleźć tak, jak zrobiliśmy to na rys. 26.5: otaczamy ładunek  $+q$  na górnej okładce powierzchnią Gaussa i następnie stosujemy prawo Gaussa. Jeśli  $E_0$  oznacza wartość natężenia pola, to

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E_0 S = q, \quad (26.28)$$

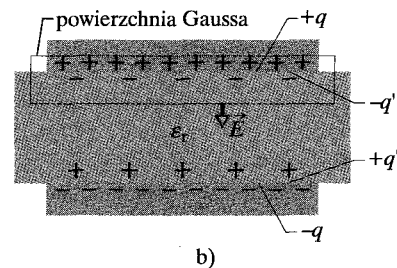
czyli

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (26.29)$$

Na rysunku 26.14b, czyli z dielektrykiem między okładkami, możemy znaleźć natężenie pola elektrycznego między okładkami (czyli wewnątrz dielektryka)



a)



b)

**Rys. 26.14.** Kondensator płaski a) bez płyty, b) z wsuniętą płytą dielektryczną. Ładunek  $q$  na okładkach jest z założenia taki sam w obydwu przypadkach

przy zastosowaniu tej samej powierzchni Gaussa. Teraz jednak powierzchnia ta obejmuje również ładunek indukowany  $-q'$  na górnej ścianie dielektryka. Ładunek na płycie przewodzącej nazywamy *ładunkiem swobodnym*, ponieważ może się on przesunąć, jeśli zmienimy potencjał elektryczny okładki; ładunek indukowany na powierzchni dielektryka nie jest swobodny, bo nie może opuścić tej powierzchni.

Całkowity ładunek, otoczony przez powierzchnię Gaussa na rysunku 26.14b wynosi  $q - q'$  i prawo Gaussa daje teraz:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E S = q - q', \quad (26.30)$$

czyli

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S}. \quad (26.31)$$

Obecność dielektryka powoduje osłabienie wartości natężenia przyłożonego pola  $E_0$  o czynnik  $\varepsilon_r$ , czyli możemy napisać

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}. \quad (26.32)$$

Porównanie wzorów (26.31) i (26.32) pokazuje, że:

$$q - q' = \frac{q}{\varepsilon_r}. \quad (26.33)$$

Wzór (26.33) określa poprawnie, że wartość  $q'$  indukowanego ładunku powierzchniowego jest mniejsza od wartości ładunku swobodnego  $q$  i jest równa zero przy braku dielektryka (wtedy  $\varepsilon_r = 1$  we wzorze (26.33)).

Po podstawieniu do wzoru (26.30) wyrażenia na  $q - q'$  ze wzoru (26.33), możemy zapisać prawo Gaussa w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad (\text{prawo Gaussa w dielektryku}). \quad (26.34)$$

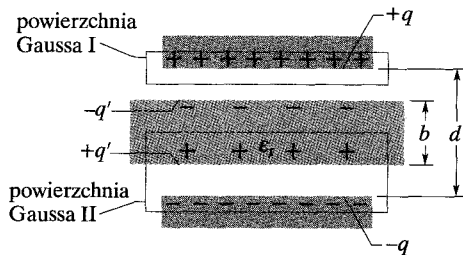
To ważne równanie, wyprowadzone przez nas dla płaskiego kondensatora, jest najogólniejszą postacią, w jakiej można zapisać prawo Gaussa. Zauważ, że:

1. Całka strumienia zawiera obecnie  $\varepsilon_r \vec{E}$ , a nie  $\vec{E}$ . (Wektor  $\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$  jest nie-raz nazywany *indukcją elektryczną*  $\vec{D}$  i wzór (26.34) można wtedy zapisać w postaci  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$ ).
2. Ładunek  $q$  otoczony przez powierzchnię Gaussa jest teraz *tylko ładunkiem swobodnym*. Indukowany ładunek powierzchniowy pomijamy z prawej strony wzoru (26.34), biorąc go pod uwagę przez wprowadzenie przenikalności elektrycznej względnej  $\varepsilon_r$  z lewej strony.
3. Wzór (26.34) różni się od wzoru (24.7), naszego oryginalnego sformułowania prawa Gaussa, tylko tym, że stała  $\varepsilon_0$  w tym ostatnim równaniu została zastąpiona przez  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ . Pozostawiliśmy  $\varepsilon_r$  pod całką we wzorze (26.34), aby uwzględnić przypadki, gdy wielkość  $\varepsilon_r$  nie jest stała na całej powierzchni Gaussa.

## Przykład 26.6

Na rysunku 26.15 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładki  $S$  i odległości między okładkami  $d$ . Do okładek przyłożono różnicę potencjałów  $U_0$ . Następnie odłączono źródło i między okładki wsunięto płytę o grubości  $b$  i przenikalności elektrycznej względnej  $\epsilon_r$ , jak pokazano na rysunku. Przyjmijmy

$$S = 115 \text{ cm}^2, \quad d = 1,24 \text{ cm}, \quad U_0 = 85,5 \text{ V}, \\ b = 0,78 \text{ cm}, \quad \epsilon_r = 2,61.$$



Rys. 26.15. Przykład 26.6. Kondensator płaski z płytą dielektryczną, która tylko częściowo wypełnia obszar między okładkami

a) Ile wynosi pojemność  $C_0$  kondensatora przed włożeniem płyty dielektrycznej?

**ROZWIĄZANIE:**

Ze wzoru (26.9) mamy:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}{1,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \\ = 8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8,21 \text{ pF.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaki ładunek swobodny znajduje się na okładkach?

**ROZWIĄZANIE:**

Ze wzoru (26.1) mamy:

$$q = C_0 U_0 = (8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F})(85,5 \text{ V}) = 7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C} = 702 \text{ pC.} \\ (\text{odpowiedź})$$

Źródło zostało odłączone przed wsunięciem płyty, a więc ładunek swobodny pozostaje niezmienny przy wsuwaniu płyty.

c) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego  $E_0$  w szczelinach między okładkami i płytą dielektryczną?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ 1. Należy zastosować prawo Gaussa w postaci wzoru (26.34) do powierzchni Gaussa I na rysunku 26.15 — powierzchnia ta przechodzi przez szczelinę i otacza *tylko* ładunek swobodny na górnej okładce kondensatora. Dla części powierzchni, od której pochodzi niezerowy wkład do całki, wektor powierzchni  $d\vec{S}$

i natężenie pola  $\vec{E}_0$  są obydwa skierowane w dół, a więc iloczyn skalarny we wzorze (26.34) wynosi:

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 dS \cos 0^\circ = E_0 dS.$$

Wzór (26.34) przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_0 \int dS = q.$$

Całka daje nam po prostu powierzchnię  $S$  okładki i dlatego otrzymujemy

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_0 S = q,$$

czyli:

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}.$$

➔ 2. Aby obliczyć  $E_0$ , musimy podstawić  $\epsilon_r = 1$ , ponieważ powierzchnia Gaussa I nie przechodzi przez dielektryk. Mamy stąd:

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1)(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)} \\ = 6900 \text{ V/m} = 6,9 \text{ kV/m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że wartość  $E_0$  nie zmienia się przy wprowadzaniu płyty, ponieważ ilość ładunku otoczonego powierzchnią Gaussa I na rysunku 26.15 się nie zmienia.

d) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego  $E_1$  w płycie dielektrycznej?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ Należy zastosować wzór (26.34) do powierzchni Gaussa II z rysunku 26.15. Ta powierzchnia otacza ładunek swobodny  $-q$  i ładunek indukowany  $+q'$ , ale ten ostatni pomijamy przy stosowaniu wzoru (26.34). Znajdujemy więc:

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\epsilon_0 \epsilon_r E_1 S = -q. \quad (26.35)$$

(Pierwszy znak minus w tym wzorze pochodzi z iloczynu skalarnego  $\vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$ , ponieważ teraz natężenie pola  $\vec{E}_1$  jest skierowane w dół, a wektor powierzchni  $d\vec{S}$  jest skierowany do góry). Wzór (26.35) daje nam:

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{6,9 \text{ kV/m}}{2,61} = 2,64 \text{ kV/m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

e) Ile wynosi różnica potencjałów  $U$  między okładkami kondensatora po wsunięciu płyty?

**ROZWIĄZANIE:**

➔ Należy znaleźć  $U$  przez scałkowanie natężenia wzdłuż odcinka prostej prostopadłej do okładek, od dolnej okładki do górnej okładki. W dielektryku długość odcinka prostej wynosi  $b$

i natężenie pola jest równe  $E_1$ . W dwóch szczelinach powyżej i poniżej dielektryka długość odcinka prostej wynosi łącznie  $d-b$  i natężenie pola jest równe  $E_0$ . Wzór (26.6) daje zatem:

$$\begin{aligned} U &= \int_{-}^{+} E ds = E_0(d-b) + E_1 b \\ &= (6900 \text{ V/m})(0,0124 \text{ m} - 0,0078 \text{ m}) \\ &\quad + (2640 \text{ V/m})(0,00780 \text{ m}) \\ &= 52,3 \text{ V}, \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli różnica potencjałów jest mniejsza od początkowej różnicy potencjałów 85,5 V.

f) Ile wynosi pojemność kondensatora z płytą dielektryczną między okładkami?

ROZWIĄZANIE:

➔ Pojemność  $C$  jest związana z ładunkiem swobodnym i różnicą potencjałów  $U$  wzorem (26.1), takim samym, jak przy braku dielektryka. Biorąc  $q$  z punktu (b) i  $U$  z punktu (e), otrzymujemy:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{52,3 \text{ V}} = 1,34 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 13,4 \text{ pF}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Pojemność kondensatora z dielektrykiem jest więc większa niż początkowa pojemność 8,21 pF.

✓ **SPRAWDZIAN 6:** Czy w opisanym wyżej przykładzie, wraz ze wzrostem grubości  $b$  płyty wzrastają, maleją, czy pozostają bez zmian: a) natężenie pola elektrycznego  $E_1$ , b) różnica potencjałów między okładkami, c) pojemność kondensatora?

## Podsumowanie

**Kondensator, pojemność** Kondensator składa się z dwóch izolowanych przewodników (okładek) o ładunkach  $+q$  i  $-q$ , o takich samych wartościach i przeciwnych znakach. Jego **pojemność**  $C$  jest zdefiniowana wzorem:

$$q = CU, \quad (26.1)$$

gdzie  $U$  jest różnicą potencjałów (napięciem) między okładkami. Jednostką pojemności w układzie SI jest farad (1 farad = 1 coulomb na volt (1 F = 1 C/V)).

**Obliczanie pojemności** Pojemność kondensatora o określonej konfiguracji obliczamy w następujący sposób: 1) zakładamy, że na okładkach umieszczono ładunek  $q$ , 2) znajdujemy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez ten ładunek, 3) obliczamy różnicę potencjałów  $U$ , 4) wyznaczamy  $C$  ze wzoru (26.1). Oto kilka szczególnych wyników:

**Kondensator płaski** o płaskich równoległych okładkach, o polu powierzchni  $S$  i odległości  $d$  między nimi ma pojemność:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (26.9)$$

**Kondensator walcowy** w postaci dwóch długich współosiowych powierzchni walcowych o długości  $L$  i promieniach  $a$  i  $b$  ma pojemność:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}. \quad (26.14)$$

**Kondensator kulisty** o współśrodkowych sferycznych okładkach o promieniach  $a$  i  $b$  ma pojemność:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (26.17)$$

Jeśli przyjmiemy  $b \rightarrow \infty$  i  $a = R$  we wzorze (26.17), to otrzymamy pojemność *izolowanej kuli* o promieniu  $R$ :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (26.18)$$

**Kondensatory połączone równoległe i szeregowo** Pojemności **równoważne**  $C_{rw}$  układów kondensatorów połączonych **równoległe** i **szeregowo** można obliczyć ze wzorów:

$$C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondensatorów połączonych równoległe}), \quad (26.19)$$

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo}). \quad (26.20)$$

Pojemności równoważne można zastosować także do obliczenia pojemności przy bardziej skomplikowanych połączeniach szeregowo-równoległych.

**Energia potencjalna i gęstość energii** Elektryczna energia potencjalna  $E_p$  naładowanego kondensatora

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 \quad (26.21, 26.22)$$

jest równa pracy, potrzebnej do jego naładowania. Energię tę można powiązać z natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$  w kondensatorze i wyciągnąć stąd wniosek, że energia ta jest zmagazynowana w polu elektrycznym. W próżni **gęstość energii**  $u$ , czyli energia potencjalna na jednostkę objętości, w obszarze pola elektrycznego o wartości natężenia  $E$  wynosi:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (26.23)$$

**Kondensator z dielektrykiem** Jeśli przestrzeń między okładkami kondensatora jest wypełniona całkowicie materiałem dielektrycznym, to pojemność  $C$  kondensatora jest większa o czynnik  $\epsilon_r$ , zwany **przenikalnością elektryczną względną**, która charakteryzuje materiał. W obszarze całkowicie wypełnionym dielektrykiem wszystkie równania elektrostatyki, zawierające  $\epsilon_0$  muszą być zmodyfikowane przez zastąpienie  $\epsilon_0$  przez  $\epsilon_r \epsilon_0$ .

Efekt dodania dielektryka można zrozumieć, analizując działanie pola elektrycznego na trwałe lub indukowane dipole elektryczne w dielektryku, w wyniku czego powstają indukowane ładunki na powierzchniach dielektryka, prowadzące przy ustalonym

ładunku swobodnym na okładkach do osłabienia pola w dielektryku.

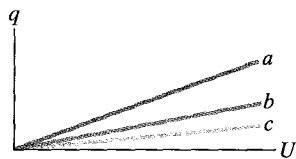
**Prawo Gaussa w dielektryku** Dla dielektryka prawo Gaussa można uogólnić do postaci:

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \quad (26.34)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem swobodnym; cały indukowany ładunek powierzchniowy jest uwzględniony przez wstawienie przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r$  do całki.

## Pytania

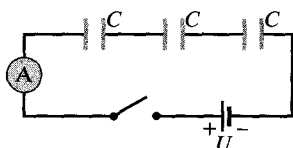
1. Na rysunku 26.16 przedstawiono wykresy ładunku w zależności od różnicy potencjałów dla trzech kondensatorów płaskich, których pola powierzchni okładek i odległości między nimi zostały podane w tabeli. Które wykresy odpowiadają którym kondensatorom?



Rys. 26.16. Pytanie 1

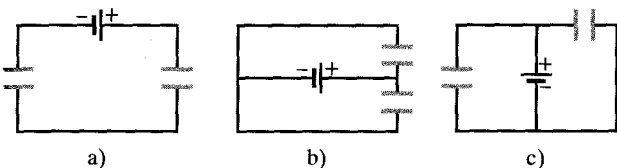
Kondensator	Pole powierzchni	Odległość
1	$S$	$d$
2	$2S$	$d$
3	$S$	$2d$

2. Na rysunku 26.17 przedstawiono obwód z otwartym kluczem, źródłem o różnicy potencjałów  $U$ , amperomierzem  $A$  i trzema takimi samymi nienaładowanymi kondensatorami o pojemności  $C$ . Jeśli zamkniemy klucz i obwód osiągnie stan równowagi, to jakie będą: a) różnica potencjałów na każdym kondensatorze, b) ładunek na lewej okładce każdego kondensatora? c) Jaki wypadkowy ładunek przepływa przez amperomierz podczas procesu ładowania?



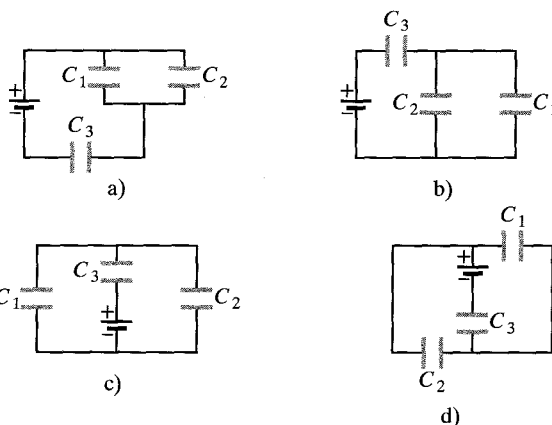
Rys. 26.17. Pytanie 2

3. Czy kondensatory w obwodach na rysunku 26.18 połączone są szeregowo, równoległe, czy w żaden z tych sposobów?



Rys. 26.18. Pytanie 3

4. a) Czy na rysunku 26.19a kondensatory  $C_1$  i  $C_3$  są połączone szeregowo? b) Czy kondensatory  $C_1$  i  $C_2$  na tym samym rysunku są połączone równoległe? c) Uszereguj pojemności równoważne czterech obwodów na rysunku 26.19, zaczynając od największej.



Rys. 26.19. Pytanie 4

5. Jaka jest pojemność równoważna dla trzech kondensatorów, każdy o pojemności  $C$ , jeśli są one podłączone do źródła: a) szeregowo, b) równoległe? c) Na którym kondensatorze równoważnym jest większy ładunek?

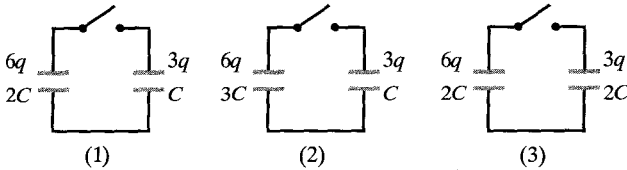
6. Do źródła podłączamy kondensatory o pojemnościach  $C_1$  i  $C_2$ ,  $C_1 > C_2$ , najpierw pojedynczo, potem szeregowo i następnie równoległe. Uszereguj te układy ze względu na zmagazynowany ładunek, zaczynając od największego.

7. Początkowo do źródła podłączony jest kondensator o pojemności  $C_1$ . Następnie zostaje dołączony kondensator o pojemności  $C_2$  i oba kondensatory są połączone równoległe. Czy: a) różnica potencjałów na kondensatorze  $C_1$ , b) ładunek  $q_1$  na kondensatorze  $C_1$  są teraz większe, mniejsze, czy takie same jak poprzednio? c) Czy pojemność równoważna  $C_{12}$  dla kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$  jest większa, mniejsza czy równa pojemności  $C_1$ ? d) Czy całkowity ładunek zgromadzony na kondensatorach  $C_1$  i  $C_2$  razem

jest większy, mniejszy czy równy ładunkowi zmagazynowanemu poprzednio na kondensatorze  $C_1$ ?

8. Odpowiedz na pytania 7, jeśli kondensator  $C_2$  dołączono szeregowo, a nie równolegle.

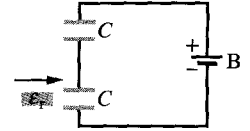
9. Na rysunku 26.20 przedstawiono trzy obwody, każdy składający się z klucza i dwóch kondensatorów, nafadowanych początkowo jak na rysunku (na którym podano również ich pojemność). W którym obwodzie (może w żadnym) po zamknięciu klucza ładunek na lewym kondensatorze a) wzrośnie, b) zmaleje, c) pozostanie taki sam?



Rys. 26.20. Pytanie 9

10. Dwie odizolowane metalowe kule A i B mają odpowiednio promień  $R$  i  $2R$  i taki sam ładunek  $q$ . a) Czy pojemność kuli A jest większa, mniejsza, czy równa pojemności kuli B? b) Czy gęstość energii tuż przy powierzchni kuli A jest większa, mniejsza, czy równa gęstości przy powierzchni kuli B? c) Czy gęstość energii w odległości  $3R$  od środka kuli A jest większa, mniejsza, czy równa gęstości w tej samej odległości od środka kuli B? d) Czy całkowita energia pola elektrycznego, wytworzonego przez kulę A jest większa, mniejsza, czy równa całkowitej energii dla kuli B?

11. Czy po włożeniu płyty dielektrycznej między okładki jednego z dwóch identycznych kondensatorów na rys. 26.21: a) pojemność, b) ładunek, c) różnica potencjałów, d) energia potencjalna tego kondensatora wzrosną, zmaleją, czy pozostaną takie same? e) Czy i jak zmienią się wymienione wyżej wielkości drugiego kondensatora?



Rys. 26.21. Pytanie 11

## Zadania

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

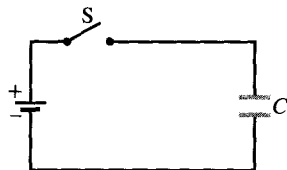
### 26.2. Pojemność

1. Elektrometr jest przyrządem używanym do pomiaru ładunku statycznego — niezany ładunek umieszcza się na okładkach kondensatora elektrometru i mierzy się różnicę potencjałów. Jaki minimalny ładunek może zostać zmierzony za pomocą elektrometru z kondensatorem o pojemności  $50 \text{ pF}$ , przy czułości pomiaru napięcia  $0,15 \text{ V}$ ?

2. Dwa metalowe przedmioty na rys. 26.22 mają wypadkowe ładunki  $+70 \text{ pC}$  i  $-70 \text{ pC}$ , co prowadzi do różnicy potencjałów  $20 \text{ V}$  między nimi. a) Ile wynosi pojemność układu? b) Jeśli ładunki zmienimy na  $+200 \text{ pC}$  i  $-200 \text{ pC}$ , to jaka będzie pojemność? c) Jaka będzie różnica potencjałów?



Rys. 26.22. Zadanie 2



Rys. 26.23. Zadanie 3

3. Kondensator na rys. 26.23 ma pojemność  $25 \mu\text{F}$  i jest początkowo nienaładowany. Bateria ma różnicę potencjałów  $120 \text{ V}$ . Jaki ładunek przepłynie przez przełącznik S po jego zamknięciu?

### 26.3. Obliczanie pojemności

4. Jeśli wyznaczysz stałą  $\epsilon_0$  z równania (26.9), to zauważysz, że jej wymiarem jest farad na metr ( $\text{F/m}$ ). Pokaż, że ta jednostka jest równoważna poprzednio otrzymanej jednostce dla  $\epsilon_0$ , a mianowicie kulombowi do kwadratu na niuton razy metr kwadrat ( $\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ ).

5. Kondensator płaski ma kołowe okładki o promieniu  $8,2 \text{ cm}$  umieszczone w odległości  $1,3 \text{ mm}$ . a) Oblicz jego pojemność. b) Jaki ładunek znajdzie się na okładkach, jeśli przyłożymy do nich różnicę potencjałów  $120 \text{ V}$ ?

6. Masz dwie płaskie okładki metalowe, każda o polu powierzchni  $1 \text{ m}^2$  i chcesz zbudować z nich kondensator płaski. Jeśli pojemność kondensatora ma wynosić  $1 \text{ F}$ , to jaka musi być odległość między okładkami? Czy taki kondensator można w rzeczywistości zbudować?

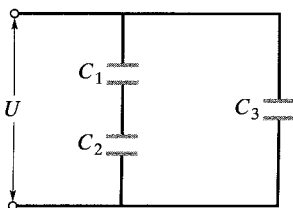
7. Kulista kropla rtęci o promieniu  $R$  ma pojemność, określoną wzorem  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ . Jeśli dwie takie krople połączą się w jedną większą kroplę, to jaka będzie jej pojemność?

8. Okładki kondensatora kulistego mają promień  $38 \text{ mm}$  i  $40 \text{ mm}$ . a) Oblicz jego pojemność. b) Jakie jest pole powierzchni okładek kondensatora płaskiego o takiej samej odległości okładek i takiej samej pojemności?

9. Załóż, że dwie powłoki sferyczne kondensatora kulistego mają w przybliżeniu jednakowe promienie. W tych warunkach urządzenie to można potraktować jako kondensator płaski, dla którego  $b - a = d$ . Pokaż, że wzór (26.17) rzeczywiście sprowadza się do wzoru (26.9) w tym przypadku.

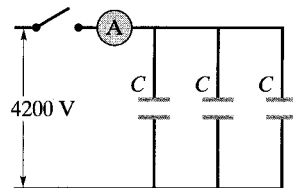
### 26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

10. Znajdź pojemność równoważną układu kondensatorów, przedstawionego na rysunku 26.24. Przyjmij  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$  i  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ .



Rys. 26.24. Zadanie 10 i 30

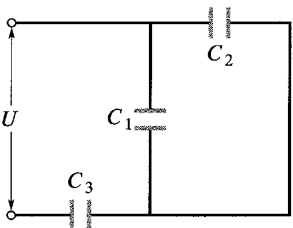
11. Ile kondensatorów o pojemności  $1 \mu\text{F}$  trzeba połączyć równolegle, aby zmagazynować ładunek  $1 \text{ C}$  po przyłożeniu różnicy potencjałów  $110 \text{ V}$ ?



Rys. 26.25. Zadanie 12

12. Każdy z nienaładowanych kondensatorów na rysunku 26.25 ma pojemność  $25 \mu\text{F}$ . Po zamknięciu klucza pojawiła się na nich różnica potencjałów  $4200 \text{ V}$ . Jaki ładunek przepłynął przez amperomierz A?

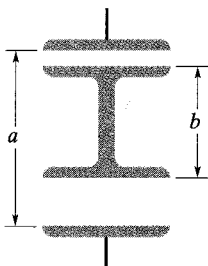
13. Znajdź równoważną pojemność układu, przedstawionego na rysunku 26.26. Przyjmij  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$  i  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ .



Rys. 26.26. Zadania 13, 14 i 28

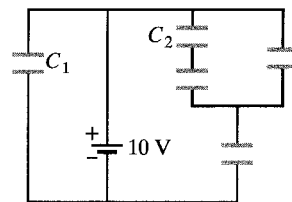
14. Załóż, że w kondensatorze 3 na rysunku 26.26 następuje przebicie elektryczne, czyli pojawia się ścieżka przewodząca. Jak zmienia się: a) ładunek, b) różnica potencjałów na kondensatorze 1? Przyjmij  $U = 100 \text{ V}$ .

15. Na rysunku 26.27 przedstawiono dwa kondensatory połączone szeregowo; część środkową o długości  $b$  można przesunąć w kierunku pionowym. Wykaż, że pojemność równoważna tego układu jest niezależna od położenia środkowej części i wynosi  $C = \epsilon_0 S / (a - b)$ , gdzie  $S$  jest polem powierzchni okładki.



Rys. 26.27. Zadanie 15

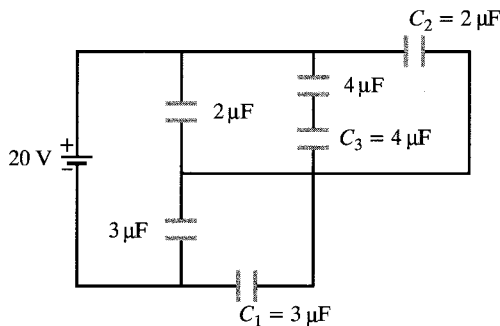
16. Na rysunku 26.28 bateria ma różnicę potencjałów  $10 \text{ V}$ , a każdy z pięciu kondensatorów ma pojemność  $10 \mu\text{F}$ . Jaki jest ładunek na a) kondensatorze 1, b) kondensatorze 2?



Rys. 26.28. Zadanie 16

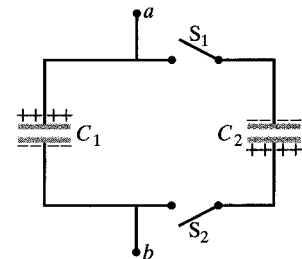
17. Kondensator o pojemności  $100 \text{ pF}$  naładowano do różnicy potencjałów  $50 \text{ V}$ , a następnie źródło odłączono. Kondensator ten połączono równolegle z drugim (początkowo nienaładowanym) kondensatorem. Jeśli różnica potencjałów na pierwszym kondensatorze zmalała do  $35 \text{ V}$ , to jaka jest pojemność drugiego kondensatora?

18. Na rysunku 26.29 bateria ma różnicę potencjałów  $20 \text{ V}$ . Znajdź: a) równoważną pojemność wszystkich kondensatorów, b) ładunek zmagazynowany na kondensatorze równoważnym. Oblicz różnicę potencjałów i ładunek na: c) kondensatorze 1, d) kondensatorze 2, e) kondensatorze 3.



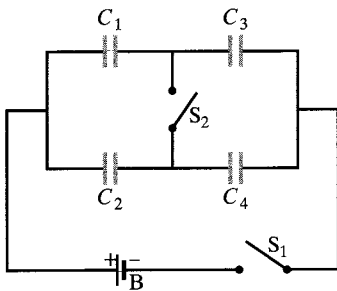
Rys. 26.29. Zadanie 18

19. Na rysunku 26.30 kondensatory o pojemnościach  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  i  $C_2 = 3 \mu\text{F}$  naładowano do różnicy potencjałów o wartości  $U = 100 \text{ V}$ , ale przeciwnym znaku, co zaznaczono na rysunku. Następnie zamknięto klucze  $S_1$  i  $S_2$ . a) Jaka jest teraz różnica potencjałów między punktami  $a$  i  $b$ ? Jakie są teraz ładunki na kondensatorach b) 1, c) 2?



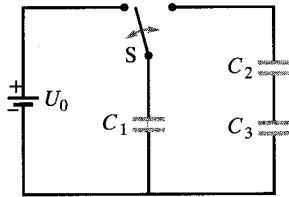
Rys. 26.30. Zadanie 19

20. Na rysunku 26.31 bateria B dostarcza różnicę potencjałów  $12 \text{ V}$ . Znajdź ładunek na każdym kondensatorze: a) po zamknięciu tylko klucza  $S_1$ , b) po zamknięciu także klucza  $S_2$ . Przyjmij  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$  i  $C_4 = 4 \mu\text{F}$ .



Rys. 26.31. Zadanie 20

21. Gdy na rysunku 26.32 klucz  $S$  jest przesunięty na lewo, okładki kondensatora 1 uzyskują różnicę potencjałów  $U_0$ . Kondensatory 2 i 3 są początkowo nienaładowane. Następnie klucz zostaje przesunięty w prawo. Jakie są końcowe ładunki  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$  na kondensatorach?



Rys. 26.32. Zadanie 21

## 26.5. Energia zgmagazynowana w polu elektrycznym

22. Ile energii jest zgmagazynowanej w metrze sześciennym powietrza przy dobrej pogodzie, w polu elektrycznym o wartości natężenia  $150 \text{ V/m}$ ?

23. Jaka pojemność jest potrzebna do zgmagazynowania energii  $10 \text{ kWh}$ , przy różnicy potencjałów  $1000 \text{ V}$ ?

24. Płaski kondensator powietrzny o polu powierzchni okładek  $40 \text{ cm}^2$  i ich odległości  $1 \text{ mm}$  jest naładowany do różnicy potencjałów  $600 \text{ V}$ . Znajdź: a) pojemność, b) wartość ładunku na każdej okładce, c) zgmagazynowaną energię, d) natężenie pola elektrycznego między okładkami, e) gęstość energii między okładkami.

25. Dwa kondensatory o pojemnościach  $2 \mu\text{F}$  i  $4 \mu\text{F}$  są połączone równolegle i jest do nich przyłożona różnica potencjałów  $300 \text{ V}$ . Oblicz całkowitą energię zgmagazynowaną w kondensatorach.

26. Układ połączonych równolegle kondensatorów o pojemności  $5 \mu\text{F}$  służy do magazynowania energii. Ile kosztuje naładowanie  $2000$  kondensatorów układu do  $50\,000 \text{ V}$ , jeśli cena energii elektrycznej wynosi  $0,3 \text{ zł/kWh}$ ?

27. Kondensator jest ładowany do momentu zgmagazynowana w nim energii  $4 \text{ J}$ . Następnie zostaje do niego dołączony równolegle drugi, nienaładowany kondensator. a) Jeśli ładunek rozłoży się równo, to jaka będzie teraz całkowita energia, zgmagazynowana w polach elektrycznych? b) Co stało się z nadwyżką energii?

28. Znajdź: a) ładunek, b) różnicę potencjałów, c) zgmagazynowaną energię dla każdego z kondensatorów na rysunku 26.26. Przyjmij wartości liczbowe z zadania 13 oraz  $U = 100 \text{ V}$ .

29. Kondensator płaski ma okładki o polu powierzchni  $S$  w odległości  $d$  i jest naładowany do różnicy potencjałów  $U$ . Bateria ładująca została odłączona i okładki rozsunięto na odległość  $2d$ . Wyraź przez  $S$ ,  $d$  i  $U$ : a) różnicę potencjałów, b) początkową  $E_p$  pocz i końcową  $E_p$  końc energię zgmagazynowaną w kondensatorze, c) pracę potrzebną do rozsunienia okładek.

30. Oblicz: a) ładunek, b) różnicę potencjałów, c) energię zgmagazynowaną dla każdego kondensatora na rysunku 26.24. Przyjmij wartości liczbowe z zadania 10 oraz  $U = 100 \text{ V}$ .

31. Kondensator walcowy ma okładki o promieniach  $a$  i  $b$  (rys. 26.4). Pokaż, że połowa zgmagazynowanej elektrycznej energii potencjalnej znajduje się w walcu o promieniu  $r = \sqrt{ab}$ .

32. Izolowana naładowana kula metalowa o średnicy  $10 \text{ cm}$  ma potencjał  $8000 \text{ V}$  względem  $V = 0$  w nieskończoności. Oblicz gęstość energii w polu elektrycznym, przy powierzchni kuli.

33. a) Pokaż, że okładki kondensatora płaskiego przyciągają się nawzajem siłą  $F = q^2 / (2\epsilon_0 S)$ . Oblicz w tym celu pracę, potrzebną do zwiększenia odległości między okładkami z  $x$  do  $x + dx$ , przy ustalonym ładunku  $q$ . b) Pokaż następnie, że *naprężenie elektrostatyczne* (siła na jednostkę powierzchni), działające na każdą okładkę kondensatora wynosi  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . (W rzeczywistości jest to siła na jednostkę powierzchni *dowolnego* przewodnika o *dowolnym* kształcie, znajdującego się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  przy powierzchni przewodnika).

## 26.6. Kondensator z dielektrykiem

34. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność  $1,3 \text{ pF}$ . Odległość między płytkami zwiększono dwukrotnie i włożono między nie wosk. Nowa pojemność wynosi  $2,6 \text{ pF}$ . Znajdź względną przenikalność elektryczną wosku.

35. Mając kondensator powietrzny o pojemności  $7,4 \text{ pF}$ , chcesz przekształcić go w kondensator mogący zgmagazynować energię do  $7,4 \mu\text{J}$  przy maksymalnej różnicy potencjałów  $652 \text{ V}$ . Którego dielektryka z tabeli 26.1 mógłbyś użyć do wypełnienia przestrzeni w kondensatorze?

36. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność  $50 \text{ pF}$ . a) Ile wynosi odległość między okładkami, jeśli każda z nich ma pole powierzchni  $0,35 \text{ m}^2$ ? b) Ile wynosić będzie jego pojemność, jeśli obszar między okładkami zostanie wypełniony materiałem o  $\epsilon_r = 5,6$ ?

37. Kabel koncentryczny (współosiowy) używany w linii przesyłowej ma promień wewnętrzny  $0,1 \text{ mm}$  i promień zewnętrzny  $0,6 \text{ mm}$ . Oblicz pojemność kabla, przypadającą na metr jego długości. Załóż, że przestrzeń między przewodnikami jest wypełniona polistyrenem.

38. Masz za zadanie skonstruować kondensator o pojemności około  $1 \text{ nF}$  i napięciu przebicia ponad  $10\,000 \text{ V}$ . Zamierzasz użyć



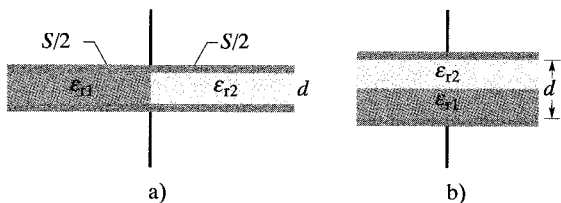
ścianek wysokiej szklanki z pyreksu jako dielektryka, pokrywając boczne ścianki wewnątrz i na zewnątrz folią aluminiową, i w ten sposób otrzymać okładki. Szklanka ma wysokość 15 cm, promień wewnętrzny 3,6 cm i zewnętrzny 3,8 cm. Jaka jest: a) pojemność, b) napięcie przebicia tego kondensatora?

39. Pewna substancja ma względną przenikalność elektryczną równą 2,8 i wytrzymałość na przebicie 18 MV/m. Jeśli użyjesz jej jako materiału dielektrycznego w kondensatorze płaskim, to jakie minimalne pole powierzchni muszą mieć okładki kondensatora, aby otrzymać pojemność  $7 \cdot 10^{-2} \mu\text{F}$  i kondensator mógł wytrzymać różnicę potencjałów 4 kV?

40. Kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $S$  jest wypełniony dwoma dielektrykami, jak na rys. 26.33a. Pokaż, że pojemność tego kondensatora wynosi

$$C = \frac{\epsilon_0 S \epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2}$$

Sprawdź ten wynik dla granicznych przypadków. (Wskazówka: Czy możesz uzasadnić traktowanie tego układu jako dwóch kondensatorów połączonych równoległe?)



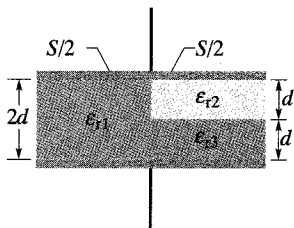
Rys. 26.33. Zadania 40 i 41

41. Kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $S$  jest wypełniony dwoma dielektrykami jak na rysunku 26.33b. Pokaż, że pojemność tego kondensatora wynosi:

$$C = \frac{2\epsilon_0 S \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{d (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}$$

Sprawdź ten wynik dla granicznych przypadków. (Wskazówka: Czy możesz uzasadnić traktowanie tego układu jako dwóch kondensatorów połączonych szeregowo?)

42. Ile wynosi pojemność kondensatora o polu powierzchni okładek  $S$ , przedstawionego na rys. 26.34? (Wskazówka: Zob. zadania 40 i 41).



Rys. 26.34. Zadanie 42

## 26.8. Dielektryki i prawo Gaussa

43. Kondensator płaski ma pojemność 100 pF, pole powierzchni okładek 100 cm<sup>2</sup> i szczelinę między okładkami, wypełnioną całkowicie miąką ( $\epsilon_r = 5,4$ ). Dla różnicy potencjałów 50 V oblicz: a) wartość natężenia pola elektrycznego  $E$  w miece, b) wartość

ładunku swobodnego na okładkach, c) wartość indukowanego ładunku powierzchniowego w miece.

44. Załóż w przykładzie 26.6, że bateria pozostaje podłączona podczas wkładania płyty dielektrycznej. Oblicz: a) pojemność, b) ładunek na okładkach kondensatora, c) natężenie pola elektrycznego w pustej przestrzeni między okładkami, d) natężenie pola elektrycznego w płycie po jej włożeniu.

45. Przestrzeń między dwiema współśrodkowymi przewodzącymi powłokami sferycznymi o promieniach  $b$  i  $a$  (gdzie  $b > a$ ) jest wypełniona substancją o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r$ . Między wewnętrzną i zewnętrzną powłoką istnieje różnica potencjałów  $U$ . Oblicz: a) pojemność układu, b) ładunek swobodny  $q$  na wewnętrznej powłoce, c) ładunek  $q'$ , indukowany przy powierzchni wewnętrznej powłoki.

46. Na równoległych płytkach o polu powierzchni 100 cm<sup>2</sup> znajdują się ładunki o jednakowej wartości  $8,9 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ , ale o przeciwnych znakach. Natężenie pola elektrycznego w materiale dielektrycznym, wypełniającym przestrzeń między płytkami ma wartość  $1,4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ . a) Oblicz względną przenikalność elektryczną materiału. b) Oblicz wartość ładunku indukowanego na każdej powierzchni dielektryka.

47. Płytę dielektryczną o grubości  $b$  włożono między okładki kondensatora o odległości  $d$  między okładkami. Pokaż, że pojemność kondensatora wynosi:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{\epsilon_r d - b(\epsilon_r - 1)}$$

(Wskazówka: Wzór ten można wyprowadzić, korzystając z metody przedstawionej w przykładzie 26.6). Czy wzór ten przewiduje poprawną wartość liczbową dla przykładu 26.6? Sprawdź, że wzór daje rozsądne wyniki dla szczególnych przypadków  $b = 0$ ,  $\epsilon_r = 1$  i  $b = d$ .

## Zadanie dodatkowe

48. Tajemnica proszku czekoladowego. Jest to ciąg dalszy historii, opisaney w zadaniu 48 w rozdziale 24 i w zadaniu 57 w rozdziale 25. Podczas badania przyczyn wybuchu w fabryce herbatników zmierzono potencjały elektryczne robotników pracujących przy opróżnianiu worków z proszkiem czekoladowym do luku ładowni, gdy wokół nich powstawała chmura pyłu. Każdy robotnik miał potencjał elektryczny około 7 kV względem ziemi, dla której przyjęto potencjał równy zeru. a) Zakładając, że każdy robotnik stanowił efektywnie kondensator o typowej pojemności 200 pF, znajdź energię zmagazynowaną w tym efektywnym kondensatorze. Jeśli pojedyncza iskra między robotnikiem i jakimkolwiek uziemionym przewodnikiem zneutralizowałaby robotnika, to energia ta byłaby uwolniona za pośrednictwem iskry. Iskra, która mogłaby zapalić chmurę proszku czekoladowego i spowodować eksplozję, zgodnie z pomiarami musiałaby mieć energię przynajmniej 150 mJ. b) Czy iskra, pochodząca od robotnika mogła spowodować eksplozję chmury proszku w luku ładowni? (Dalszy ciąg tej historii znajdziesz w zadaniu 44 w rozdziale 27).