

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**



**4**

Podstawy

**FIZYKI**

W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E   P W N

## Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

### Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m <sup>3</sup>
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepła właściwych $c_p/c_v$	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

### Woda

gęstość	1000 kg/m <sup>3</sup>
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

### Ziemia

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s <sup>2</sup>
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

### Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m



## Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
10 <sup>24</sup>	jotta	Y	10 <sup>-1</sup>	decy	d
10 <sup>21</sup>	zetta	Z	10 <sup>-2</sup>	centy	c
10 <sup>18</sup>	eksa	E	10 <sup>-3</sup>	mili	m
10 <sup>15</sup>	peta	P	10 <sup>-6</sup>	mikro	μ
10 <sup>12</sup>	tera	T	10 <sup>-9</sup>	nano	n
10 <sup>9</sup>	giga	G	10 <sup>-12</sup>	piko	p
10 <sup>6</sup>	mega	M	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>3</sup>	kilo	k	10 <sup>-18</sup>	atto	a
10 <sup>2</sup>	hekto	h	10 <sup>-21</sup>	zepto	z
10 <sup>1</sup>	deka	d	10 <sup>-24</sup>	jokto	y

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

Podstawy 4  
**FIZYKI**

Z języka angielskiego tłumaczyli

**Jerzy Prochorow, Rafał Bożek**



W A R S Z A W A 2003

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

Dane oryginału:  
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 4  
John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.  
Copyright © 2001 by John Wiley & Sons, Inc.  
All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przeład z języka angielskiego **Jerzy Prochorow** (rozdziały 34–37)  
**Rafał Bożek** (rozdział 38)

Redaktor naukowy **Mirosław Łukaszewski**

Redaktor **Anna Bogdanienko**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Tytuł dotowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. (0-prefiks-22) 69-54-321  
faks: (0-prefiks-22) 69-54-031  
e-mail: pwn@pwn.com.pl  
<http://www.pwn.pl>

ISBN 83-01-14060-7 t. 4  
ISBN 83-01-13997-8 t. 1–5

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie pierwsze  
Arkuszy drukarskich 28,25  
Druk ukończono w październiku 2003 r.  
Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa  
Druk i oprawa: Toruńskie Zakłady Graficzne „Zapolex” Sp. z o.o.

# SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

## TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

## TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Grawitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Drgania
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło  
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

## TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Indukcja i indukcijność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

## TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

## TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

Dodatki

Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych

Skorowidz

# SPIS TABEL

- 34.1. Współczynniki załamania światła  $n$  dla wybranych ośrodków optycznych  
(dla żółtej linii D sodu o długości fali  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) 23
- 36.1. Interferencja w cienkich warstwach (w powietrzu) — podsumowanie 93
- 37.1. Parametry trzech siatek dyfrakcyjnych ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ,  $m = 1$ ) 133
- 38.1. Współrzędne zdarzenia A 149
- 38.2. Równania transformacji Lorentza dla pary zdarzeń 162
- 38.3. Wartości energii spoczynkowej wybranych ciał 173

# SPIS TREŚCI

Przedmowa

## ROZDZIAŁ 34

Fale elektromagnetyczne 1

*Jak powstaje zakrzywiony, pyłowy warkocz komety?*

- 34.1. Tęcza Maxwella 2
- 34.2. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej.  
Opis jakościowy 3
- 34.3. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej.  
Opis ilościowy 7
- 34.4. Przepływ energii i wektor Poyntinga 11
- 34.5. Ciśnienie promieniowania 13
- 34.6. Polaryzacja 16
- 34.7. Odbicie i załamanie 21
- 34.8. Całkowite wewnętrzne odbicie 27
- 34.9. Polaryzacja przy odbiciu 29

Podsumowanie 30

Pytania 31

Zadania 33

## ROZDZIAŁ 35

Obrazy 40

*Jakie zniekształcenie rzeczywistości zawiera obraz Maneta „Bar w Folies-Bergère”?*

- 35.1. Dwa rodzaje obrazów 41
- 35.2. Zwierciadła płaskie 42
- 35.3. Zwierciadła sferyczne 44
- 35.4. Obrazy wytwarzane przez zwierciadła sferyczne 46
- 35.5. Sferyczne powierzchnie załamujące 51
- 35.6. Cienkie soczewki 53
- 35.7. Przyrządy optyczne 60
- 35.8. Trzy wyprowadzenia 64

Podsumowanie 67

Pytania 68

Zadania 69

## ROZDZIAŁ 36

Interferencja 74

*Skąd bierze się niebieskozielone zabarwienie skrzydeł motyla Morpho?*

- 36.1. Interferencja 75
  - 36.2. Światło jako fala 75
  - 36.3. Dyfrakcja 80
  - 36.4. Doświadczenie interferencyjne Younga 81
  - 36.5. Spójność 86
  - 36.6. Natężenie światła w obrazie interferencyjnym 86
  - 36.7. Interferencja w cienkich warstwach 91
  - 36.8. Interferometr Michelsona 98
- Podsumowanie 100
- Pytania 101
- Zadania 102

## ROZDZIAŁ 37

Dyfrakcja 110

*Dlaczego barwy na obrazach pointylistów zmieniają się, gdy się je ogląda z różnej odległości?*

- 37.1. Dyfrakcja i falowa teoria światła 111
  - 37.2. Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie: położenia minimumów 112
  - 37.3. Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Opis jakościowy 116
  - 37.4. Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Opis ilościowy 118
  - 37.5. Dyfrakcja na otworze kołowym 120
  - 37.6. Dyfrakcja na dwóch szczelinach 123
  - 37.7. Siatki dyfrakcyjne 127
  - 37.8. Siatki dyfrakcyjne: dyspersja i zdolność rozdzielcza 131
  - 37.9. Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego 134
- Podsumowanie 137
- Pytania 137
- Zadania 139

## ROZDZIAŁ 38

### Teoria względności 145

*Co ma szczególna teoria względności do nowoczesnych metod nawigacji?*

- 38.1. Czym zajmuje się teoria względności? 146
- 38.2. Postulaty 147
- 38.3. Jak „mierzyć” zdarzenie 148
- 38.4. Względność jednoczesności 150
- 38.5. Względność czasu 152
- 38.6. Względność długości 158
- 38.7. Transformacja Lorentza 160
- 38.8. Kilka wniosków z równań Lorentza 163
- 38.9. Względność prędkości 165
- 38.10. Zjawisko Dopplera dla światła 166
- 38.11. Nowe spojrzenie na pęd 171
- 38.12. Nowe spojrzenie na energię 172
- Podsumowanie 178
- Pytania 179
- Zadania 181

## Dodatki

- A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1
- B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3
- C. Niektóre dane astronomiczne A5
- D. Współczynniki zamiany jednostek A7
- E. Wzory matematyczne A11
- F. Właściwości pierwiastków A14
- G. Układ okresowy pierwiastków A17

**Odpowiedzi do sprawdzianów  
oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych B1**

**Skorowidz**



# PRZEDMOWA

Obecne, szóste wydanie *Podstaw fizyki* jest znacznie zmieni-  
nione — pod względem układu treści i organizacji ma-  
teriału — w stosunku do bardzo popularnego wydania  
piątego, zachowuje jednak wiele elementów klasycznego  
podręcznika Davida Hallidaya i Roberta Resnicka. Nie-  
mal wszystkie zmiany wynikają z sugestii wykładowców  
i studentów korzystających z wydania piątego oraz recen-  
zentów maszynopisu wydania szóstego, a także z wyników  
badań nad procesem nauczania. Czytelnicy mogą nadsy-  
łać swoje sugestie, poprawki oraz uwagi — pozytywne  
i negatywne — do wydawnictwa John Wiley and Sons  
(<http://www.wiley.com/college/hrw>) lub do Jearla Walkera  
(adres pocztowy: Physics Department, Cleveland State  
University, Cleveland, OH 44115, USA; faks: (USA) (216)  
687-2424; adres elektroniczny: [physics@wiley.com](mailto:physics@wiley.com)). Nie  
uda nam się pewnie odpowiedzieć na każdy list, ale wszyst-  
kie zachowamy i uważnie przeczytamy.

## Zmiany w organizacji materiału

► **Bardziej przejrzysty układ tekstu.** Poprzednie wy-  
dania oryginału były drukowane w dwóch szpaltach, co  
wielu studentów i wykładowców uważało za układ tekstu  
zbyt zagęszczony i prowadzący do rozproszenia uwagi  
czytelnika.

► **Potoczyste przedstawienie materiału.** Wszystkim  
podręcznikom zarzuca się zwykle, że zawierają zbyt wiele  
materiału. W odpowiedzi na takie uwagi krytyczne szóste  
wydanie podręcznika zostało skrócone na dwa sposoby:

1. Materiał dotyczący szczególnej teorii względności  
i fizyki kwantowej został usunięty z rozdziałów począt-  
kowych i umieszczony w dalszych rozdziałach, poświę-  
conych fizyce współczesnej.

2. W książce pozostawiono tylko najważniejsze przy-  
kłady, a pozostałe — bardziej wyspecjalizowane — prze-  
sunięto do towarzyszącego podręcznikowi *Zbioru za-*


*dań uzupełniających*, który jest opisany w dalszej części  
przedmowy.


► **Zapis wektorów.** Wektory są obecnie zapisywane jako  
symbol ze strzałką nad literą (np.  $\vec{F}$ ), a nie za pomocą  
czcionki półgrubej (jak **F**).

► **Użycie jednostek metrycznych.** W podręczniku stoso-  
wane są niemal wyłącznie jednostki metryczne. Jedynym  
wyjątkiem jest rozdział 1, w którym przedstawione są  
różne układy jednostek.

► **Układ i kolejność zadań.** Zebrane w podręczniku  
zadania, przeznaczone do rozwiązywania w ramach pracy  
domowej, są podzielone na grupy odnoszące się do kolej-  
nych paragrafów tekstu głównego, a w ramach tych grup  
są ułożone w kolejności wzrastającej trudności. Wiele za-  
dań z wydania piątego przesunięto jednak do *Zbioru za-*  
*dań uzupełniających*, przy czym nie porządkowano ich  
ani pod względem trudności, ani tematyki w ramach roz-  
działu (łączna liczba zadań w podręczniku i w *Zbiorze*  
*zadań uzupełniających* jest większa od liczby zadań w  
wydaniu piątym).

► **Rozwiązania zadań.** Rozwiązania części zadań o nu-  
merach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej.  
W tym przypadku na końcu treści zadania umieszczona jest  
ikonka informująca studenta i wykładowcę, gdzie może  
w razie potrzeby znaleźć rozwiązanie. Informacja o zna-  
czeniu poszczególnych ikonki jest zawarta na początku  
każdego zestawu zadań domowych. Ma ona postać:


 Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

 Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

Materiały te są opisane w dalszej części przedmowy.

## Zmiany natury dydaktycznej

➤ **Rozumowanie a proste ćwiczenia.** Głównym celem podręcznika jest nauczenie studenta rozumowania — od podstawowych zasad do rozwiązywania zagadnienia — przez stawianie go wobec kolejnych wyzwań. W związku z tym w większości zadań nacisk położony jest właśnie na umiejętność rozumowania. Niemniej jednak niektóre zadania są prostymi ćwiczeniami, wymagającymi jedynie podstawienia danych do wzoru.

➤ **Stwierdzenia kluczowe.** Rozwiązania wszystkich 360 przykładów w podręczniku i *Zbiorze zadań uzupełniających* zostały zredagowane od nowa, tak by zaczynały się od jednego lub więcej stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania zadania (oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza — ) , wykorzystujących podstawowe prawa wprowadzone w głównym toku wykładu.

➤ **Obszerniejsze rozwiązania przykładów.** Rozwiązania większości przykładów (czyli zadań rozwiązanych w podręczniku) są teraz bardziej szczegółowe niż w poprzednim wydaniu, gdyż postępują krok po kroku od podanych na początku rozwiązania stwierdzeń kluczowych aż do końcowej odpowiedzi, przy czym często przytoczone są obszernie fragmenty rozumowania przedstawionego w tekście głównym.

➤ **Zadania z zastosowań fizyki.** W wielu miejscach — w treści przykładów lub zadań domowych — przedstawione są zagadnienia z zakresu zastosowań fizyki, oparte na opublikowanych wynikach badań; porównaj np. przykład 11.6, zadanie 64 z rozdziału 4 i zadanie 56 z rozdziału 10. Przykładem zadań domowych tworzących serię zadań na ten sam temat są zadania 4, 32 i 48 z rozdziału 6.

## Zmiany w treści podręcznika

➤ **Rozdział 5 o sile i ruchu** zawiera teraz bardziej szczegółowe omówienie siły ciężkości, ciężaru i siły normalnej.

➤ **Rozdział 7 o energii kinetycznej i pracy** zaczyna się od bardzo ogólnych uwag na temat energii. Następnie definiuje się energię kinetyczną i pracę oraz omawia się związek między nimi w taki sposób, by bardziej niż w

wydaniu piątym nawiązać do drugiej zasady dynamiki Newtona, nie tracąc jednak spójności tych definicji z pojęciami termodynamicznymi.

➤ **Rozdział 8 o zachowaniu energii** nie zawiera silnie krytykowanej definicji pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą — zastąpiono ją omówieniem zmian energii pod wpływem siły niezachowawczej (użyte sformułowania nie uniemożliwiają jednak wykładowcy wprowadzenia pojęcia pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą).

➤ **Rozdział 10 o zderzeniach** zawiera teraz najpierw omówienie ogólnego przypadku zderzeń niesprężystych w jednym wymiarze, a dopiero później przypadku szczególnego zderzeń sprężystych w jednym wymiarze.

➤ **Rozdziały 16, 17 i 18 o ruchu harmonicznym i falach** zostały napisane na nowo, tak by ułatwić studentom przyswojenie sobie tych trudnych zagadnień.

➤ **Rozdział 21 o entropii** zawiera obecnie omówienie silnika Carnota jako idealnego silnika cieplnego o największej sprawności.

## Elementy towarzyszące tekstowi głównemu podręcznika

➤ **Ciekawostki.** Każdy rozdział zaczyna się od opisu ciekawego zjawiska lub doświadczenia, które zostaje później szczegółowo wyjaśnione w którymś miejscu tego rozdziału. Ma to za zadanie zachęcenie czytelnika do uważnego przeczytania całego rozdziału.

➤ **Sprawdziany** pojawiają się w miejscach, w których czytelnik powinien przerwać na chwilę lekturę i spróbować odpowiedzieć na pytanie: „czy potrafisz — wykorzystując informacje zawarte w przeczytanym właśnie paragrafie lub przykładzie — dać sobie radę z tym krótkim zadaniem, nie wymagającym obliczeń, lecz tylko chwili namysłu?” Jeśli nie, to należy jeszcze raz przestudiować ten materiał przed dalszą lekturą; porównaj np. sprawdzian 3 w rozdziale 5 oraz sprawdzian 1 w rozdziale 6. **Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów podane są na końcu książki.**

➤ **Przykłady**, czyli zadania rozwiązane w podręczniku, mają pomóc czytelnikowi w utrwaleniu pojęć wprowadzonych w głównym tekście oraz w stopniowym opano-

waniu umiejętności rozwiązywania zadań. Ich rozwiązania wychodzą od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania danego zadania, oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza (🔑), a następnie prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► Fragmenty zatytułowane *Sztuka rozwiązywania zadań* zawierają porady praktyczne, ułatwiające początkującemu studentowi fizyki nabycie umiejętności rozwiązywania typowych zadań i uniknięcie często spotykanych błędów.

► Na końcu tekstu głównego każdego rozdziału znajduje się *Podsumowanie*, w którym zebrane są podstawowe pojęcia i prawa wprowadzone w tym rozdziale. Lektura tego podsumowania nie może oczywiście zastąpić starannego przeczytania całego tekstu rozdziału.

► *Pytania* są podobne do sprawdzianów — uzyskanie odpowiedzi na postawione pytania nie wymaga wykonywania obliczeń, lecz dobrego zrozumienia omówionego materiału i niezbyt skomplikowanego rozumowania, czasem prostych obliczeń w pamięci. **Odpowiedzi na pytania o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.**

► *Zadania* są zebrane w grupy dotyczące kolejnych paragrafów, a w ramach takiej grupy są ustawione z grubsza w kolejności wzrastającej trudności. **Odpowiedzi do zadań o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.** Rozwiązania części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej (informacja o oznaczeniu zadań, których rozwiązania można znaleźć w różnych materiałach, jest podana na początku każdego zestawu zadań domowych). Zadania trudniejsze oznaczono gwiazdką.

► W niektórych rozdziałach na samym końcu zestawu zadań występują *zadania dodatkowe*. Nie są one przypisane do konkretnych paragrafów i dotyczą nieraz zagadnień z zastosowań fizyki.

## Zbiór zadań uzupełniających

Podręcznikowi będzie towarzyszył *Zbiór zadań uzupełniających*. Zbiór ten będzie zawierał inny zestaw pytań i zadań domowych oraz więcej przykładów. Oto jego cechy:

► *Przykłady uzupełniające* są częściowo przeniesione z podręcznika głównego, częściowo całkiem nowe. Wszystkie zaczynają się od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania zadania (oznaczonych ikonką 🔑) i prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► *Pytania* są trzech rodzajów:

1. *pytania typu sprawdzianów*, jak w głównej części podręcznika;

2. *pytania porządkujące*, wymagające zebrania równań potrzebnych w określonej sytuacji, mające charakter rozgrzewki przed jednym z dalszych zadań;

3. *pytania do dyskusji*, przywrócone z wydań czwartego i wcześniejszych na żądanie Czytelników.

► *Zadania* uzupełniają zestawy zadań przytoczone w głównej części książki; niektóre zostały przesunięte do zbioru z podręcznika głównego. Ich kolejność nie jest związana ani z ich trudnością, ani z kolejnością paragrafów czy pojęć w danym rozdziale. Niektóre nowe zadania dotyczą zagadnień z zakresu zastosowań fizyki. W niektórych rozdziałach końcowe zadania tworzą *zestawy zadań* dotyczących podobnych zagadnień. W innych rozdziałach na końcu podano *zadania z rozwiązaniami*.

## Wersje podręcznika

Szóste wydanie *Podstaw fizyki* w angielskiej wersji językowej jest dostępne w kilku wersjach, tak by zaspokoić różne potrzeby wykładowców i studentów. Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–38 (ISBN 0-471-32000-5). Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie 45 rozdziałów (ISBN 0-471-33236-4). Każde z tych wydań jest dostępne w postaci jednego tomu w twardej oprawie lub w następujących częściach:

► **tom 1 — rozdziały 1–21 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, 0-471-33235-6;**

► **tom 2 — rozdziały 22–45 (elektryczność i magnetyzm oraz fizyka współczesna), oprawa twarda, 0-471-36037-6;**

► **część 1 — rozdziały 1–12, oprawa miękka, 0-471-33234-8;**

- część 2 — rozdziały 13–21, oprawa miękka, 0-471-36041-4;
- część 3 — rozdziały 22–33, oprawa miękka, 0-471-36040-6;
- część 4 — rozdziały 34–38, oprawa miękka, 0-471-36039-2;
- część 5 — rozdziały 39–45, oprawa miękka, 0-471-36038-4.

Wydanie polskie powstało na podstawie tych pięciu części podręcznika.

## Materiały dodatkowe

Szóstemu wydaniu *Podstaw fizyki* towarzyszy w oryginale obszerny zestaw starannie przygotowanych materiałów uzupełniających, mających za zadanie ułatwić wykładowcom i studentom korzystanie z podręcznika.

## Materiały dla wykładowców

➤ *Instructor's Manual* (Poradnik wykładowcy, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik ten zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i kaset wideo, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów oraz przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika.

➤ *Instructor's Solutions Manual* (Zbiór rozwiązań dla wykładowcy, autor: James Whitenton, Southern Polytechnic University). W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów oraz w *Zbiorze zadań uzupełniających*. Ten zbiór mogą otrzymać tylko wykładowcy.

➤ *Test Bank* (*Bank testów*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy) zawierający ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów (patrz niżej).

➤ *Instructor's Resource CD* (CD z materiałami dla wykładowcy). Jest to CD-ROM zawierający:

- pełny tekst *Zbioru rozwiązań dla wykładowcy* w postaci plików L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-owych oraz w formacie PDF,

- komputerowy bank testów, w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh, z możliwością edycji tekstu, tak by wykładowca miał pełną swobodę tworzenia zestawów pytań testowych,
- wszystkie rysunki z podręcznika (poza fotografiami), przygotowane do przedstawienia na wykładzie oraz wydrukowania.

➤ *Przezrocza (transparencje)*. Ponad 200 kolorowych ilustracji z podręcznika w postaci folii do rzutnika przezroczy.

➤ *On-line Course Management* (Interaktywne zarządzanie zajęciami).


- Programy interaktywne WebAssign, CAPA oraz Web-Test, umożliwiające wykładowcom wyznaczanie oraz ocenianie zadań i testów za pośrednictwem Internetu.
- Wykładowcy mogą również uzyskać dostęp do materiałów edukacyjnych w systemie WebCT. Jest to obszerne oprogramowanie internetowe, umożliwiające organizowanie zajęć internetowych zawierających sesje dyskusyjne, tablice ogłoszeń, testy, ocenę postępów studentów itp. Dalsze informacje można uzyskać u przedstawicieli firmy Wiley.

## Materiały dla studentów

➤ *A Student Companion* (Poradnik studenta, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik dla studentów składający się z tradycyjnych materiałów drukowanych oraz studenckiej strony internetowej, stanowiących łącznie bogate środowisko interaktywne do nauki i zdobywania dodatkowych informacji. Na studenckiej stronie internetowej dostępne są quizy, symulacje, wskazówki do zadań domowych, oprogramowanie interaktywne *Interactive LearningWare* (patrz niżej) oraz odnośniki do innych stron internetowych, zawierających materiały edukacyjne z fizyki.

➤ *Student Solutions Manual* (Zbiór rozwiązań dla studenta, autorzy: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy i Edward Derrinigh, Wentworth Institute). Zbiór szczegółowych rozwiązań 30% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika.


➤ *Interactive LearningWare*. Jest to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych

krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać tym sposobem, są oznaczone ikonką .

► **CD-Physics, 3.0.** CD-ROM stanowiący elektroniczną wersję szóstego wydania *Podstaw fizyki*. Zawiera pełny tekst rozszerzonego wydania podręcznika, *Poradnik studenta*, *Zbiór rozwiązań dla studenta*, oprogramowanie Interactive LearningWare i liczne symulacje, przy czym wszystkie te materiały zawierają wiele wzajemnych odnośników.

► **Take Note!** (Zapisz to!). Notatnik w twardej oprawie umożliwiający studentom robienie notatek bezpośrednio

na dużych, czarno-białych wydrukach rysunków z podręcznika. Zawiera wszystkie ilustracje z zestawu przezroczysty. Użycie tego notatnika oszczędza studentowi wiele czasu zużywanego normalnie na przerysowywanie rysunków na wykładzie.

► **Physics Web Site**, strona internetowa podręcznika, dostępna pod adresem <http://www.wiley.com/college/hrw>, starannie zaprojektowana z myślą o użytkownikach szóstego wydania *Podstaw fizyki*, zapewniająca studentom pomoc w studiowaniu fizyki oraz udostępniająca im wiele materiałów dodatkowych. Zawiera także rozwiązania wielu zadań z podręcznika, oznaczonych ikonką .

## PODZIĘKOWANIA

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ wiele osób poza samymi jego autorami. J. Richard Christman z U.S. Coast Guard Academy po raz kolejny napisał dla nas wiele doskonałych materiałów uzupełniających. Trudno przecenić jego znajomość tej książki oraz wagę licznych porad dla studentów i wykładowców. James Tanner z Georgia Institute of Technology oraz Gary Lewis z Kennesaw State College umożliwili nam użycie innowacyjnego oprogramowania związanego z zadaniami w podręczniku. James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. John Merrill z Brigham Young University i Edward Derringer z Wentworth Institute of Technology bardzo nam pomogli przy wcześniejszych wydaniach tej książki, za co im składamy podziękowanie. Dziękujemy także George'owi W. Huckle'owi z Oxnard (California) i Frankowi G. Jacobsowi z Evanston (Illinois) za sprawdzenie odpowiedzi do przedstawionych w podręczniku zadań.

W wydawnictwie John Wiley mieliśmy wielkie szczęście pracować nad książką z naszym głównym redaktorem Cliffem Millsem. Cliff koordynował i wspierał nasze działania oraz dostarczał nam wszelkiej niezbędnej pomocy. Gdy potem Cliffowi powierzono w wydawnictwie inne zadania, do szczęśliwego końca pracy doprowadził nas jego utalentowany następcą, Stuart Johnson.

Ellen Ford koordynowała wstępne prace redakcyjne oraz próby druku wielobarwnego. Sue Lyons z działu marketingu była niezmiernie zaangażowana w pracę nad sukcesem tego wydania. Joan Kalkut stworzyła znakomity zestaw materiałów pomocniczych. Thomas Hempstead doskonale zarządzał procesem recenzji maszynopisu podręcznika oraz licznymi pracami administracyjnymi.

Lucille Buonocore, kierownik produkcji książki, i Monique Calello, redaktor ds. produkcji, znakomicie poradziły sobie z dopasowaniem do siebie różnych elementów podręcznika i pomogły doprowadzić z sukcesem do końca złożony proces produkcji książki, za co im serdecznie dziękujemy. Dziękujemy również Maddy Lesure za projekt graficzny książki, Helen Walden za redakcję tekstu, Edwardowi Starrowi i Annie Melhorn za kierowanie przygotowaniem rysunków, Georgii Kamvosoulis Mederer, Katrinie Avery i Lilian Brady za korektę składu, a także wszystkim pozostałym członkom zespołu produkcyjnego.

Hilary Newman oraz jej zespół zajmujący się wyborem fotografii do podręcznika z zapałem wyszukiwali ciekawe i niezwykle zdjęcia, znakomicie uwidaczniające prawa fizyki. Mamy również wielki dług wdzięczności wobec niezwykłego już Johna Balbalisa, którego talent graficzny i zrozumienie fizyki można odnaleźć w każdym z rysunków.

Szczególne podziękowania jesteśmy winni Edwardowi Millmanowi za pomoc w nadaniu tekstowi pod-

ręcznika jego ostatecznej postaci. Przeczytał on z nami cały podręcznik, każde jego słowo, zadając nam wiele pytań kierowanych z punktu widzenia korzystającego z książki studenta. Wiele z tych pytań i zasugerowanych przez niego zmian przyczyniło się wydatnie do zwiększenia jasności wykładu.

Szczególnie wielki dług wdzięczności mamy wobec wielu studentów korzystających z poprzednich wydań *Podstaw fizyki*, którzy zadali sobie trud podzielenia się z nami swoimi uwagami. Studenci są dla nas niezwykle ważni, gdyż to oni są ostatecznymi „konsumentami” pod-

ręcznika. Dziękując się z nami swoimi uwagami, pomagają nam stale doskonalić oferowaną przez nas książkę, dzięki czemu pieniądze wydane na jej zakup można uważać za coraz lepszą inwestycję. Nadal zachęcamy użytkowników tej książki do informowania nas o swoich uwagach i refleksjach przy jej lekturze, co powinno nam pomóc w dalszym ulepszaniu podręcznika w następnych latach.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Edward Adelson  
*Ohio State University*

Mark Arnett  
*Kirkwood Community College*

Arun Bansil  
*Northeastern University*

J. Richard Christman  
*U.S. Coast Guard Academy*

Robert N. Davie, Jr.  
*St. Petersburg Junior College*

Cheryl K. Dellai  
*Glendale Community College*

Eric R. Dietz  
*California State University at Chico*

N. John DiNardo  
*Drexel University*

Harold B. Hart  
*Western Illinois University*

Rebecca Hartzler  
*Edmonds Community College*

Joey Huston  
*Michigan State University*

Shawn Jackson  
*University of Tulsa*

Hector Jimenez  
*University of Puerto Rico*

Sudhakar B. Joshi  
*York University*

Leonard M. Kahn  
*University of Rhode Island*

Yiuchi Kubota  
*Cornell University*

Priscilla Laws  
*Dickinson College*

Edbeto Leal  
*Polytechnic University of Puerto Rico*

Dale Long  
*Virginia Tech*

Andreas Mandelis  
*University of Toronto*

Paul Marquard  
*Caspar College*

James Napolitano  
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Des Penny  
*Southern Utah University*

Joe Redish  
*University of Maryland*

Timothy M. Ritter  
*University of North Carolina at Pembroke*

Gerardo A. Rodriguez  
*Skidmore College*

John Rosendahl  
*University of California at Irvine*

Michael Schatz  
*Georgia Institute of Technology*

Michael G. Strauss  
*University of Oklahoma*

Dan Styer  
*Oberlin College*

Marshall Thomsen  
*Eastern Michigan University*

Fred F. Tomblin  
*New Jersey Institute of Technology*

B.R. Weinberger  
*Trinity College*

William M. Whelan  
*Ryerson Polytechnic University*

William Zimmerman, Jr.  
*University of Minnesota.*

#### **Opiniodawcami wydań piątego i wcześniejszych byli:**

Maris A. Abolins  
*Michigan State University*

Barbara Andereck  
*Ohio Wesleyan University*

Albert Bartlett  
*University of Colorado*

Michael E. Browne  
*University of Idaho*

Timothy J. Burns  
*Leeward Community College*

Joseph Bushi  
*Manhattan College*

Philip A. Casabella <i>Rensselaer Polytechnic Institute</i>	John Hubisz <i>North Carolina State University</i>	Michael O'Shea <i>Kansas State University</i>
Randall Caton <i>Christopher Newport College</i>	Joey Huston <i>Michigan State University</i>	Patrick Papin <i>San Diego State University</i>
J. Richard Christman <i>U.S. Coast Guard Academy</i>	Darrell Huwe <i>Ohio University</i>	George Parker <i>North Carolina State University</i>
Roger Clapp <i>University of South Florida</i>	Claude Kacser <i>University of Maryland</i>	Robert Pelcovits <i>Brown University</i>
W.R. Conkie <i>Queen's University</i>	Leonard Kleinman <i>University of Texas at Austin</i>	Oren P. Quist <i>South Dakota State University</i>
Peter Crooker <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Earl Koller <i>Stevens Institute of Technology</i>	Jonathan Reichart <i>SUNY-Buffalo</i>
William P. Crummett <i>Montana College of Mineral Science and Technology</i>	Arthur Z. Kovacs <i>Rochester Institute of Technology</i>	Manuel Schwartz <i>University of Louisville</i>
Eugene Dunnam <i>University of Florida</i>	Kenneth Krane <i>Oregon State University</i>	Darrell Seeley <i>Milwaukee School of Engineering</i>
Robert Endorf <i>University of Cincinnati</i>	Sol Krasner <i>University of Illinois at Chicago</i>	Bruce Arne Sherwood <i>Carnegie Mellon University</i>
F. Paul Esposito <i>University of Cincinnati</i>	Peter Loly <i>University of Manitoba</i>	John Spangler <i>St. Norbert College</i>
Jerry Finkelstein <i>San Jose State University</i>	Robert R. Marchini <i>Memphis State University</i>	Ross L. Spencer <i>Brigham Young University</i>
Alexander Firestone <i>Iowa State University</i>	David Markovitz <i>University of Connecticut</i>	Harold Stokes <i>Brigham Young University</i>
Alexander Gardner <i>Howard University</i>	Howard C. McAllister <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Jay D. Strieb <i>Villanova University</i>
Andrew L. Gardner <i>Brigham Young University</i>	W. Scott Mc Cullough <i>Oklahoma State University</i>	David Toot <i>Alfred University</i>
John Gieniec <i>Central Missouri State University</i>	James H. McGuire <i>Tulane University</i>	J.S. Turner <i>University of Texas at Austin</i>
John B. Gruber <i>San Jose State University</i>	David M. McKinstry <i>Eastern Washington University</i>	T.S. Venkataraman <i>Drexel University</i>
Ann Hanks <i>American River College</i>	Joe P. Meyer <i>Georgia Institute of Technology</i>	Gianfranco Vidali <i>Syracuse University</i>
Samuel Harris <i>Purdue University</i>	Roy Middleton <i>University of Pennsylvania</i>	Fred Wang <i>Prairie View A &amp; M</i>
Emily Haught <i>Georgia Institute of Technology</i>	Irvin A. Miller <i>Drexel University</i>	Robert C. Webb <i>Texas A &amp; M University</i>
Laurent Hodges <i>Iowa State University</i>	Eugene Mosca <i>United States Naval Academy</i>	George Williams <i>University of Utah</i>
		David Wolfe <i>University of New Mexico.</i>

# 34 Fale elektro- magnetyczne

Kiedy kometa przelatuje w pobliżu Słońca, z jej parującej lodowej powierzchni uwalniają się pył i naładowane elektrycznie cząstki. Naładowane cząstki porządkuje naładowany elektrycznie „wiatr słoneczny”, ustawiając je w prosty warkocz skierowany wzdłuż promienia na zewnątrz od Słońca.

Ale wiatr słoneczny nie wywiera żadnego wpływu na pył, który powinien wobec tego poruszać się po torze wyznaczonym przez orbitę komety.

**Dlaczego zatem, jak widać na zdjęciu, większość pyłu tworzy zakrzywiony dolny warkocz?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



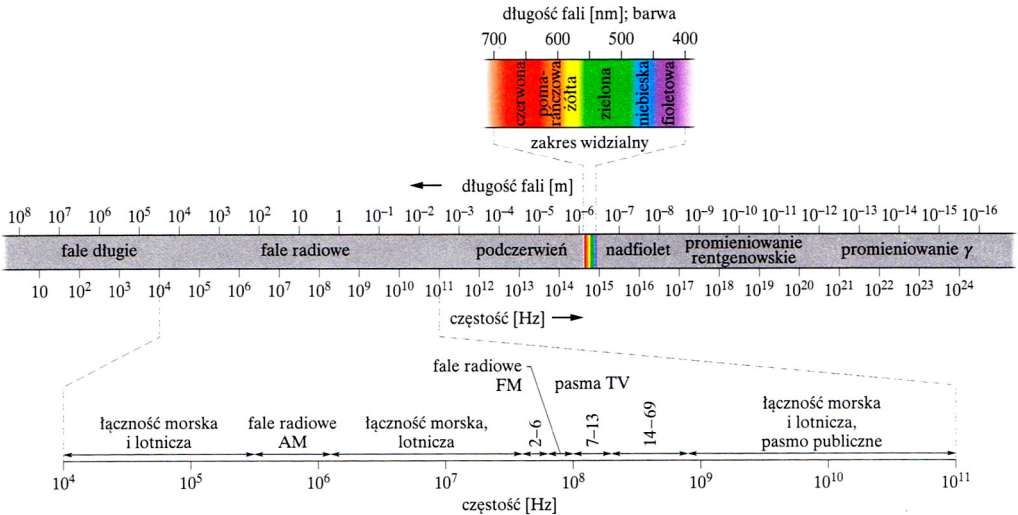


### 34.1. Tęcza Maxwella

Ukoronowaniem osiągnięć Jamesa Clerka Maxwella było pokazanie, że wiązka światła to rozchodząca się fala pól elektrycznego i magnetycznego — **fala elektromagnetyczna**, a tym samym, że optyka, która zajmuje się badaniem światła widzialnego, jest gałęzią elektromagnetyzmu. W tym rozdziale dokonamy przejścia od jednej do drugiej dziedziny — zamknijmy naszą dyskusję zjawisk ściśle elektrycznych i magnetycznych i stworzymy podstawy optyki.

Za czasów Maxwella (połowa XIX w.) jedynymi znanymi falami elektromagnetycznymi były: światło widzialne oraz promieniowanie podczerwone i nadfioletowe. Ale właśnie prace Maxwella zdopingowały Heinricha Hertza i doprowadziły go do odkrycia tego, co dzisiaj nazywamy falami radiowymi, i wykazania, że rozchodzą się one w laboratorium z prędkością taką samą jak światło.

Znamy szerokie *widmo* (albo zakres) fal elektromagnetycznych, zilustrowane na rysunku 34.1, które obdarzony wyobraźnią pisarz nazwał „tęczą Maxwella”. Zastanówmy się, jak dalece jesteście zanurzeni w falach elektromagnetycznych z całego ich widma. Dominującym źródłem promieniowania, w którym wykształciliśmy się i do którego przystosowaliśmy się jako gatunek, jest Słońce. Ale tkwimy też w gąszczu sygnałów radiowych i telewizyjnych. Mogą dosięgać nas mikrofały z radarów i telefonicznych stacji przekaźnikowych. Wokół są także fale wytwarzane w żarówkach, w nagrzanach silnikach samochodowych, w aparatach rentgenowskich, w lampach błyskowych, a także w zakopanych materiałach promieniotwórczych. Ponadto dociera do nas promieniowanie z gwiazd i innych obiektów naszej Galaktyki i z innych galaktyk. Fale elektromagnetyczne wędrują również w drugą stronę. Sygnały telewizyjne, wysłane z Ziemi około 1950 roku,



Rys. 34.1. Widmo promieniowania elektromagnetycznego

niosą teraz wiadomości o nas (aczkolwiek *bardzo* nikle, a wśród nich epizody z serialu telewizyjnego *I Love Lucy*) do wszystkich mieszkańców kosmosu, niezależnie od stopnia technicznego zaawansowania ich cywilizacji, na każdej z planet, które mogłyby okrążyć którąś z najbliższych 400 gwiazd.

Podziały skali długości fali na rysunku 34.1 (i odpowiednio skali częstotliwości) są kolejnymi potęgami liczby 10. Skala nie ma końców, nie ma bowiem żadnego naturalnego ograniczenia długości fali elektromagnetycznej z żadnej ze stron.

Na rysunku 34.1 niektóre zakresy widma fal elektromagnetycznych opatrzone są znajomymi etykietkami, jak np. *promieniowanie rentgenowskie* i *fale radiowe*. Te etykiety odnotowują z grubsza zdefiniowane zakresy długości fali, w których powszechnie używa się pewnych, określonych źródeł i detektorów fal elektromagnetycznych. Inne zakresy na rysunku 34.1, jak np. te oznaczone jako zakresy radiowe bądź telewizyjne, reprezentują określone długości pasm przypisanych prawnie do celów komercyjnych bądź innych zastosowań. W widmie elektromagnetycznym nie ma przerw i wszystkie fale elektromagnetyczne, niezależnie od tego, do jakiego zakresu widma należą, rozchodzą się w próżni (w *przestrzeni kosmicznej*) z taką samą prędkością  $c$ .

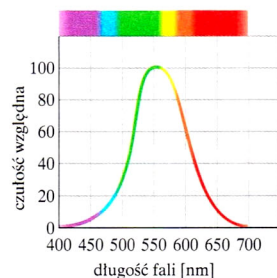
Dla nas szczególnie interesującym zakresem widma jest oczywiście zakres widzialny. Na rysunku 34.2 zilustrowano względną czułość ludzkiego oka na światło o różnych długościach fali. Środek obszaru widzialnego znajduje się przy ok. 555 nm, czemu odpowiada wrażenie barwne, które zwiemy barwą żółtozieloną.

Granice obszaru widzialnego nie są dobrze zdefiniowane, gdyż krzywa czułości oka dąży do zera zarówno po stronie fal dłuższych, jak i po stronie krótszych. Jeżeli na przykład przyjmiemy, że granicę taką stanowi poziom, przy którym czułość oka spada do 1% jej wartości maksymalnej, to granice te wynoszą wtedy 430 nm i 690 nm; oko może również wykrywać fale elektromagnetyczne o długościach fali nieco wykraczających poza te granice, jeżeli ich natężenia są dostatecznie duże.

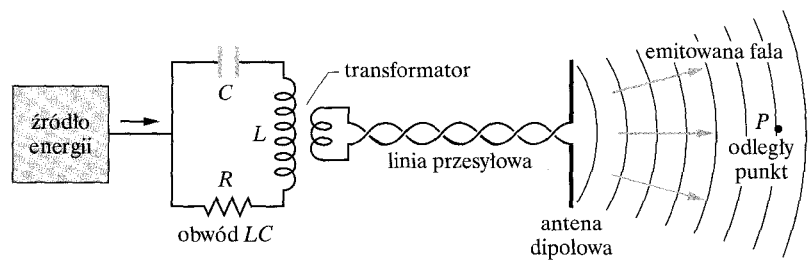
## 34.2. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej. Opis jakościowy

Niektóre fale elektromagnetyczne, między innymi promieniowanie rentgenowskie (promienie X), promieniowanie  $\gamma$  i światło widzialne są *wysyłane* (emitowane) przez źródła o rozmiarach atomowych albo jądrowych, a źródłami takimi rządzą prawa fizyki kwantowej. Zajmiemy się jednak na razie sposobem wytwarzania innych fal elektromagnetycznych. Dla uproszczenia dyskusji ograniczymy się do zakresu widma ( $\lambda \approx 1$  m), dla którego źródło *promieniowania* (fal emitowanych) ma zarówno makroskopowe, jak i rozsądne rozmiary.

Na rysunku 34.3 przedstawiono szkiecowo wytwarzanie takich fal. Sercem urządzenia jest *obwód drgający LC* o częstości kołowej  $\omega$  ( $= 1/\sqrt{LC}$ ). Jak zilustrowano na rysunku 33.1, w takim obwodzie ładunki i prądy zmieniają się w czasie sinusoidalnie z taką częstością. Musi przy tym istnieć zewnętrzne źródło energii — na przykład generator prądu zmiennego — które dostarcza energii, kompensując straty związane zarówno z wydzielaniem ciepła w obwodzie, jak i z energią, jaką unosi na zewnątrz fala elektromagnetyczna.



Rys. 34.2. Względna czułość przeciętnego ludzkiego oka na fale elektromagnetyczne o różnej długości. Ta część widma promieniowania elektromagnetycznego, na którą czułe jest ludzkie oko, nosi nazwę *zakresu widzialnego*

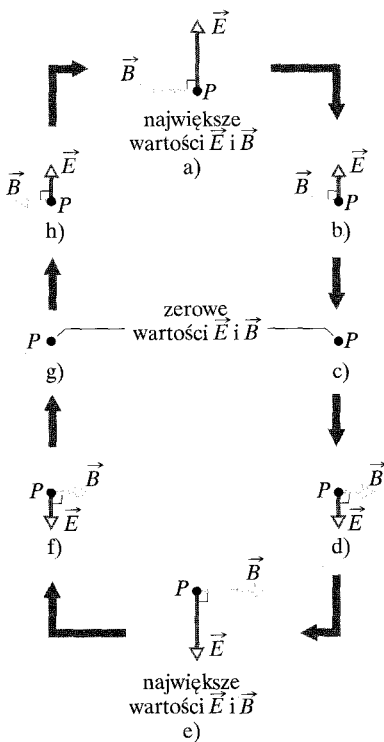


Rys. 34.3. Układ do wytwarzania fali elektromagnetycznej z zakresu krótkich fal radiowych: obwód LC wytwarza sinusoidalnie zmienny prąd w antenie, która wysyła falę.  $P$  jest odległym punktem, w którym detektor rejestruje falę

Obwód drgający z rysunku 34.3 jest sprzężony przez transformator i linię przesyłową z anteną, której zasadniczym elementem są dwa cienkie, sztywne pręty przewodzące. Poprzez to sprzężenie sinusoidalnie zmieniający się w obwodzie prąd wywołuje sinusoidalne oscylacje ładunku w prętach anteny z częstotliwością kołową  $\omega$  obwodu LC. Również związany z tym ruchem ładunków prąd powstający w prętach anteny zmienia sinusoidalnie, z częstotliwością  $\omega$ , swój kierunek i natężenie. Antena staje się dipolem elektrycznym, którego elektryczny moment dipolowy zmienia się sinusoidalnie co do wartości i kierunku wzdłuż anteny.

Wartość i kierunek wektora momentu dipolowego są zmienne, wobec tego zmienne są również kierunek i wartość wektora natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol. Jednocześnie zmienne są kierunek i wartość wektora indukcji pola magnetycznego, które wytwarzane jest przez zmienny prąd. Jednak zmiany wektorów pól elektrycznego i magnetycznego nie występują wszędzie jednocześnie — zmiany te rozchodzą się od anteny z prędkością światła  $c$ . Zmienne pola tworzą wspólnie falę elektromagnetyczną, która rozchodzi się na zewnątrz od anteny z prędkością  $c$ . Częstotliwość kołowa  $\omega$  tej fali jest taka sama, jak częstotliwość drgań obwodu LC.

Na rysunku 34.4 pokazano, jak zmieniają się w czasie natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  i indukcja pola magnetycznego  $\vec{B}$  przy przechodzeniu fali o określonej długości przez odległy punkt  $P$  (na rysunku 34.3); w każdym miejscu rysunku 34.4 fala rozchodzi się w naszą stronę od płaszczyzny kartki. (Odległy punkt na rysunku 34.3 wybraliśmy dlatego, aby można było zaniedbać sugerowaną na tym rysunku krzywiznę czoła fali. Fala obserwowana w takich punktach nazywa się falą płaską, co znacznie upraszcza jej opis). Zwróćmy uwagę na kilka ważnych cech pól przedstawionych na rysunku 34.4, które występują zawsze, niezależnie od tego, jak wytwarzana jest fala:



Rys. 34.4. a)–h) Zmiany natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$  w odległym punkcie  $P$  z rysunku 34.3 w ciągu jednego okresu fali elektromagnetycznej. Fala biegnie od płaszczyzny kartki w naszym kierunku. Oba wektory pola zmieniają sinusoidalnie swoje kierunki i wartości. Zauważ, że są one zawsze prostopadłe do siebie oraz do kierunku rozchodzenia się fali

1. Wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  są zawsze prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Zatem, tak jak dyskutowano w rozdziale 17, fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną.
2. Wektor natężenia pola elektrycznego jest zawsze prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego.
3. Iloczyn wektorowy  $\vec{E} \times \vec{B}$  zawsze wyznacza kierunek rozchodzenia się fali.
4. Natężenie pola elektrycznego i indukcja pola magnetycznego zmieniają się zawsze sinusoidalnie, tak jak w przypadku dyskutowanych w rozdziale 17

fal poprzecznych. Ponadto wektory pól zmieniają się z taką samą częstością, a ich oscylacje są zgodne w *fazie*.

Rozważając powyższe charakterystyki, możemy przyjąć, że na rysunku 34.3 fala elektromagnetyczna zmierzająca do punktu  $P$  rozchodzi się w dodatnim kierunku osi  $x$ , a na rysunku 34.4 wektor natężenia pola elektrycznego wykonuje oscylacje równoległe do osi  $y$ , wektor indukcji pola magnetycznego zaś — równoległe do osi  $z$  (w prawoskrętnym układzie współrzędnych). W tej konwencji możemy zapisać natężenie pola elektrycznego i indukcję pola magnetycznego jako sinusoidalne funkcje położenia  $x$  (wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali) i czasu  $t$ :

$$E = E_m \sin(kx - \omega t), \quad (34.1)$$

$$B = B_m \sin(kx - \omega t), \quad (34.2)$$

w których  $E_m$  i  $B_m$  są amplitudami  $E$  i  $B$ , natomiast  $\omega$  i  $k$  są odpowiednio, tak jak w rozdziale 17, częstością kołową i liczbą falową fali. Z danych wyżej równań wynika, że nie tylko oba pola tworzą falę elektromagnetyczną, ale że każde z nich tworzy własną falę. Równanie (34.1) opisuje *składową elektryczną* fali elektromagnetycznej, a równanie (34.2) — *składową magnetyczną*. Z naszej dalszej dyskusji wyniknie, że te dwie składowe nie mogą istnieć niezależnie od siebie.

Wiemy z równania (17.12), że prędkość rozchodzenia się fali jest równa  $\omega/k$ . Jest to jednak fala elektromagnetyczna, dlatego też jej prędkość (w próżni) jest zazwyczaj oznaczana symbolem  $c$ , zamiast zwykłego symbolu  $v$ . W następnym paragrafie przekonamy się, że prędkość  $c$  jest równa

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (\text{prędkość fali}) \quad (34.3)$$

i wynosi około  $3,0 \cdot 10^8$  m/s. Albo mówiąc inaczej:

➤ Wszystkie fale elektromagnetyczne, w tym również światło widzialne, rozchodzą się w próżni z taką samą prędkością  $c$ .

Przekonamy się również, że prędkość fali  $c$  jest związana z amplitudami  $E_m$  i  $B_m$  zależnością

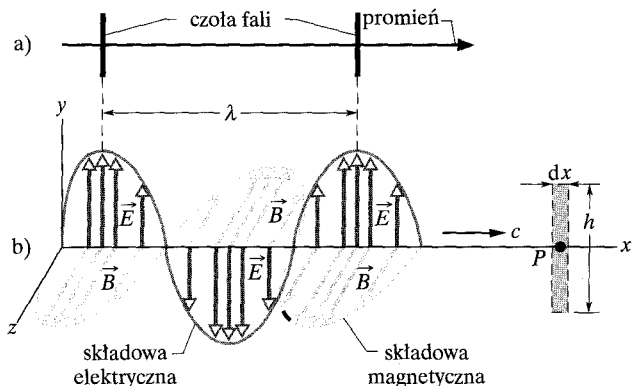
$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad (\text{stosunek amplitud}). \quad (34.4)$$

Jeżeli podzielimy przez siebie stronami równania (34.1) i (34.2), a następnie podstawimy do otrzymanego wyniku równanie (34.4), to okaże się, że wartości  $E$  i  $B$  są zawsze, w każdej chwili i w każdym punkcie, związane ze sobą zależnością

$$\frac{E}{B} = c \quad (\text{stosunek wartości}). \quad (34.5)$$

Falę elektromagnetyczną możemy przedstawić tak jak na rysunku 34.5a, podając jej kierunek rozchodzenia się (*promień*) albo *czoła fali* (umowne powierzchnie,

Rys. 34.5. a) Fala elektromagnetyczna reprezentowana przez kierunek rozchodzenia się fali i dwa czoła fali; pokazane na rysunku czoła fali dzieli odległość równa jednej długości fali  $\lambda$ . b) Ta sama fala przedstawiona jako „migawkowe zdjęcie” wektorów jej pola elektrycznego  $\vec{E}$  i magnetycznego  $\vec{B}$  w punktach na osi  $x$ , wzdłuż której fala rozchodzi się z prędkością  $c$ . Gdy przechodzi ona przez punkt  $P$ , pola zmieniają się tak, jak pokazano to na rysunku 34.4. Składowa elektryczna fali to jej pole elektryczne, a składowa magnetyczna to jej pole magnetyczne. Z żółtego prostokąta o środku w punkcie  $P$  skorzystamy w dyskusji rysunku 34.6



na których wartość natężenia pola elektrycznego jest taka sama), albo obie te charakterystyki równocześnie. Odległość pomiędzy dwoma czołami fali na rysunku 34.5 jest równa jednej długości fali  $\lambda (= 2\pi/k)$ . (Fale rozchodzące się w przybliżeniu w tym samym kierunku tworzą wiązkę, na przykład wiązkę laserową).

Falę możemy również przedstawiać w postaci takiej, jak na rysunku 34.5b, która jest „migawkowym zdjęciem” wektorów natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego w określonej chwili. Obwiednie łączące końce wektorów odpowiadają sinusoidalnym drganiom opisywanym przez równania (34.1) i (34.2); składowe  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  fali są zgodne w fazie i wzajemnie prostopadłe, a także prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali.

Przy interpretacji rysunku 34.5b należy zachować pewną ostrożność. Podobne rysunki, dla fali poprzecznej w linii dyskutowanej w rozdziale 17, obrazowały odchylenia części liny w górę i w dół przy rozchodzeniu się w niej fali (*tam coś rzeczywiście się poruszało*). Natomiast rysunek 34.5b jest bardziej abstrakcyjny. W chwili ilustrowanej przez rysunek wektory obu pól (elektrycznego i magnetycznego) mają w każdym punkcie wzdłuż osi  $x$  określoną wartość i kierunek (zawsze prostopadły do osi  $x$ ). Postanowiliśmy te wielkości wektorowe obrazować w każdym punkcie przez parę strzałek i wobec tego dla różnych punktów musimy rysować strzałki o różnej długości, wszystkie skierowane na zewnątrz od osi  $x$ , tak jak kolce na łodyżce róży. Ale strzałki pokazują tylko wartości wektorów w punktach, które leżą na osi  $x$ . Ani strzałki, ani też krzywe sinusoidalne nie pokazują bocznych ruchów czegokolwiek, również same strzałki nie łączą żadnych punktów osi  $x$  z punktami poza tą osią.

Rysunki takie jak 34.5 pomagają nam jedynie w obrazowaniu bardzo skomplikowanych w rzeczywistości sytuacji. Zajmijmy się najpierw polem magnetycznym. Indukcja pola magnetycznego zmienia się sinusoidalnie, wobec tego (zgodnie z prawem indukcji Faradaya) indukuje ono prostopadłe pole elektryczne, którego natężenie również zmienia się sinusoidalnie. Natężenie pola elektrycznego również zmienia się sinusoidalnie, wobec tego (zgodnie z prawem indukcji Maxwella) indukuje ono prostopadłe pole magnetyczne, którego indukcja też zmienia się sinusoidalnie. I tak dalej. Oba pola stale wytwarzają się nawzajem dzięki zjawisku indukcji i powstające w ten sposób sinusoidalne zmiany  $E$  i  $B$  rozchodzą się jako fala — fala elektromagnetyczna. Gdyby nie ten zadziwiający wynik, nie

moglibyśmy widzieć; nie moglibyśmy w rzeczywistości w ogóle istnieć, gdyż do naszej egzystencji potrzebujemy fal elektromagnetycznych wysyłanych przez Słońce, dzięki którym na Ziemi panuje odpowiednia temperatura.

## Niezwykła fala

Fale, którymi zajmowaliśmy się w rozdziałach 17 i 18, wymagają istnienia *ośrodka* materialnego, przez który lub wzdłuż którego mogą się rozchodzić. Mieliliśmy do czynienia z falami rozchodzącymi się wzdłuż liny, przez Ziemię i przez powietrze. Ale fala elektromagnetyczna (którą dalej w tym rozdziale będziemy nazywać *falą świetlną* lub po prostu *światłem*) jest zadziwiająco inna, bo na to, by mogła się rozchodzić, nie potrzebuje żadnego ośrodka. Może ona oczywiście rozchodzić się w takich ośrodkach, jak powietrze czy szkło, ale może też wędrować przez przestrzeń kosmiczną dzielącą nas od gwiazd, a więc przez próżnię.

Kiedy wreszcie zaakceptowano szczególną teorię względności, długo po jej opublikowaniu w 1905 roku przez Einsteina, uświadomiono sobie, że prędkość fal świetlnych jest czymś wyjątkowym. Jednym z powodów jest to, że światło ma taką samą prędkość niezależnie od układu odniesienia, względem którego jest mierzona. Jeżeli wyślesz wiązkę światła wzdłuż wybranej osi i o wyznaczenie jej prędkości poprosisz kilku obserwatorów, którzy poruszają się wzdłuż tej osi z różnymi prędkościami, jedni w kierunku biegu wiązki, inni w kierunku przeciwnym, to wszyscy oni wyznaczą *taką samą prędkość* światła. Wynik ten jest zadziwiający i całkowicie różny od wyniku, jaki uzyskaliby ci obserwatorzy, gdyby mierzili prędkość każdej innej fali; w przypadku każdej innej fali prędkość obserwatora względem niej wpływa na wynik jego pomiaru.

Wzorzec długości (metra) został obecnie zdefiniowany tak, że prędkość światła (każdej fali elektromagnetycznej) w próżni ma ściśłą wartość

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Tym samym, mierząc obecnie czas przebiegu impulsu światła między dwoma punktami, nie wyznaczasz w rzeczywistości prędkości światła, ale odległość pomiędzy tymi dwoma punktami.

## 34.3. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej. Opis ilościowy

Wyprowadzimy teraz równania (34.3) i (34.4), a co ważniejsze zbadamy wzajemne oddziaływanie pól elektrycznego i magnetycznego, dzięki któremu wytwarzane jest światło.

### Równanie (34.4) i indukowane pole elektryczne

Na rysunku 34.6 środek prostokąta o bokach  $dx$  i  $h$ , nakreślonego linią przerywaną na płaszczyźnie  $xy$ , pokrywa się z punktem  $P$  na osi  $x$  (tak jak pokazano po prawej stronie rysunku 34.5b). W miarę jak fala elektromagnetyczna przemieszcza się w prawo, strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przenikający przez prostokąt zmienia się i zgodnie z prawem indukcji Faradaya w obszarze obejmowanym przez prostokąt pojawia się indukowane pole elektryczne. Przyjmijemy, że na-

teżenie indukowanego pola elektrycznego, określone wzdłuż dłuższych boków prostokąta jest równe odpowiednio  $\vec{E}$  oraz  $\vec{E} + d\vec{E}$  i są to właśnie składowe elektryczne fali elektromagnetycznej.

Rozważmy teraz te pola w chwili, gdy składowej magnetycznej fali przemieszczającej się przez prostokąt odpowiada mały wycinek zaznaczony kolorem czerwonym na rysunku 34.5b. W rozważanej chwili indukcja pola magnetycznego przenikającego przez prostokąt skierowana jest zgodnie z dodatnim kierunkiem osi  $z$  i jej wartość się zmniejsza (tuż przed dotarciem do czerwonego wycinka jej wartość była większa). Z tego powodu zmniejsza się również strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przenikający przez prostokąt. Zgodnie z prawem Faradaya tej zmianie strumienia przeciwdziałają indukowane pole elektryczne, które wytwarza pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , skierowane zgodnie z dodatnim kierunkiem osi  $z$ .

Jeżeli wyobrazilibyśmy sobie, że boki prostokąta tworzą pętlę przewodzącą, to zgodnie z regułą Lenza rozumowanie, które przeprowadziliśmy wyżej, prowadzi do wniosku, że w pętli takiej pojawiłby się indukowany prąd elektryczny o kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Oczywiście nie ma tutaj żadnej przewodzącej pętli, ale z analizy tej wynika, że wektory natężenia  $\vec{E}$  i  $\vec{E} + d\vec{E}$  indukowanych pól elektrycznych są rzeczywiście zorientowane tak, jak pokazano to na rysunku 34.6, a długość wektora  $\vec{E} + d\vec{E}$  jest większa od długości  $\vec{E}$ . W przeciwnym razie wypadkowe pole elektryczne indukowane wzdłuż boków prostokąta nie mogłoby przeciwdziałać zmniejszaniu się strumienia magnetycznego.

Zastosujemy teraz prawo indukcji Faradaya do prostokąta z rysunku 34.6:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (34.6)$$

obiegając prostokąt przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Górny i dolny bok prostokąta nie wnoszą żadnego wkładu do całki, bo  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  są tam prostopadłe. A zatem całka ma wartość

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E + dE)h - Eh = hdE. \quad (34.7)$$

Strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przenikający przez powierzchnię prostokąta jest równy

$$\Phi_B = (B)(hdx), \quad (34.8)$$

gdzie  $B$  jest długością wektora  $\vec{B}$  w prostokącie, a  $hdx$  jest polem jego powierzchni. Różniczkowanie równania (34.8) względem  $t$  daje

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = hdx \frac{dB}{dt}. \quad (34.9)$$

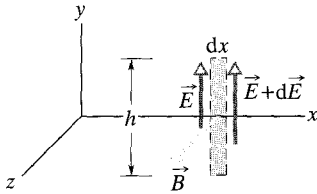
Jeżeli do równania (34.6) podstawimy równania (34.7) i (34.9), to

$$hdE = -hdx \frac{dB}{dt},$$

czyli

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \quad (34.10)$$

W rzeczywistości, jak to wynika z równań (34.1) i (34.2), zarówno  $B$ , jak i  $E$  są funkcjami *dwóch* zmiennych,  $x$  oraz  $t$ . Jednak przy obliczaniu  $dE/dx$  musimy



Rys. 34.6. Kiedy fala elektromagnetyczna rozchodząca się w prawo przechodzi przez punkt  $P$  (z rys. 34.5), sinusoidalne zmiany indukcji pola magnetycznego  $B$  przenikającego przez prostokąt ze środkiem w punkcie  $P$  indukują pola elektryczne wzdłuż prostokąta. W chwili ilustrowanej na rysunku wartość  $B$  zmniejsza się i wobec tego natężenie indukowanego pola elektrycznego po prawej stronie prostokąta jest większe niż po lewej

założyć, że  $t$  jest stałe, gdyż rysunek 34.6 jest „zdjęciem migawkowym”. Tak samo przy obliczaniu  $dB/dt$  musimy założyć, że  $x$  jest stałe, ponieważ w tym przypadku mamy do czynienia z szybkością zmian  $B$  w wybranym miejscu, w punkcie  $P$  na rysunku 34.5b. W tych warunkach odpowiednie pochodne są *pochoďnymi cząstkowymi* i równanie (34.10) należy zapisać w postaci

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (34.11)$$

Znak minus w tym równaniu jest prawidłowy i konieczny, bo  $E$  rośnie wraz z  $x$  w prostokącie na rysunku 34.6, a  $B$  maleje wraz z czasem  $t$ .

Z równania (34.1) otrzymujemy

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_m \cos(kx - \omega t),$$

a z równania (34.2)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \cos(kx - \omega t).$$

Wobec tego równanie (34.11) sprowadza się do postaci

$$kE_m \cos(kx - \omega t) = \omega B_m \cos(kx - \omega t). \quad (34.12)$$

Dla fali biegnącej stosunek  $\omega/k$  jest jej prędkością, którą przyjęliśmy oznaczać przez  $c$ . Zatem równanie (34.12) ma postać

$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad (\text{stosunek amplitud}), \quad (34.13)$$

a to jest właśnie równanie (34.4).

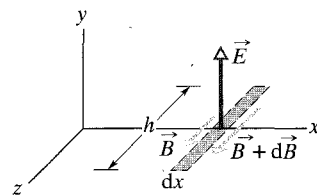
## Równanie (34.3) i indukowane pole magnetyczne

Na rysunku 34.7 pokazano jeszcze jeden prostokąt, którego środek znajduje się również w punkcie  $P$  (z rys. 34.5), tym razem jednak prostokąt ten znajduje się w płaszczyźnie  $xz$ . Kiedy fala elektromagnetyczna przemieszcza się w prawo przez ten prostokąt, przenikający przezeń strumień elektryczny  $\Phi_E$  zmienia się i zgodnie z prawem indukcji Maxwella w obszarze prostokąta pojawia się indukowane pole magnetyczne. To indukowane pole magnetyczne jest właśnie składową magnetyczną fali elektromagnetycznej.

Na rysunku 34.7 pokazano kierunek wektora natężenia pola elektrycznego z rysunku 34.5 w tej samej chwili, do której odnosi się rysunek 34.6 obrazujący pole magnetyczne. Przypomnijmy, że w tej wybranej chwili indukcja pola magnetycznego na rysunku 34.6 maleje. Oba pola są w zgodnej fazie, wobec tego natężenie pola elektrycznego na rysunku 34.7 musi również być malejące i to samo dotyczy strumienia elektrycznego  $\Phi_E$ . Stosując tę samą argumentację jak przy dyskusji rysunku 34.6, przekonamy się, że zmienny strumień  $\Phi_E$  będzie indukował pole magnetyczne o wektorach  $\vec{B}$  oraz  $\vec{B} + d\vec{B}$  zorientowanych tak jak na rysunku 34.7, przy czym  $\vec{B} + d\vec{B}$  będzie większe od  $\vec{B}$ .

Zastosujmy tym razem prawo indukcji Maxwella,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (34.14)$$



**Rys. 34.7.** Sinusoidalna zmiana natężenia pola elektrycznego w obszarze prostokąta o środku w punkcie  $P$  z rysunku 34.5 indukuje pole magnetyczne wzdłuż prostokąta. Ilustracja odpowiada chwili obrazowanej przez rysunek 34.6: wartość  $E$  zmniejsza się i wobec tego wartość indukcji indukowanego pola magnetycznego po prawej stronie prostokąta jest większa niż po lewej



obiegając prostokąt z rysunku 34.7 przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Wkład do całki pochodzi tylko od dłuższych boków prostokąta, a jej wartość jest równa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = -(B + dB)h + Bh = -hdB. \quad (34.15)$$

Strumień  $\Phi_E$  przenikający przez prostokąt wynosi

$$\Phi_E = (E)(hdx), \quad (34.16)$$

gdzie  $E$  jest średnią długością wektora  $\vec{E}$  w obszarze prostokąta. Różniczkowanie równania (34.16) względem  $t$  daje

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = hdx \frac{dE}{dt}.$$

Podstawiając to równanie oraz równanie (34.15) do (34.14), znajdujemy

$$-hdB = \mu_0 \varepsilon_0 \left( hdx \frac{dE}{dt} \right),$$

co po zamianie na pochodne cząstkowe, tak jak w równaniu (34.11), daje

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (34.17)$$

Tak jak poprzednio, znak minus jest konieczny, bo  $B$  rośnie wraz z  $x$  w prostokącie na rysunku 34.7, a  $E$  maleje wraz z czasem  $t$ .

Korzystając z równań (34.1) i (34.2), otrzymamy z równania (34.17)

$$-k B_m \cos(kx - \omega t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_m \cos(kx - \omega t),$$

co możemy zapisać w postaci

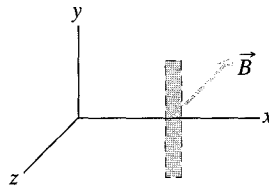
$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 (\omega/k)} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 c},$$

z której, przy zastosowaniu równania (34.13), otrzymujemy natychmiast

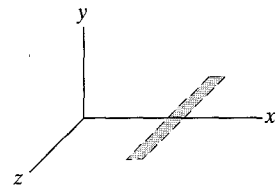
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (\text{prędkość fali}), \quad (34.18)$$

czyli dokładnie równanie (34.3).

**SPRAWDZIAN 1:** Rysunek (1) przedstawia wektor indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$  w płaszczyźnie  $xz$ , w innej chwili niż na rysunku 34.6. Jest on skierowany równoległe do osi  $z$  i jego wartość wzrasta. a) Uzupełnij rysunek (1), rysując, tak jak na rysunku 34.6, wektory indukowanych pól elektrycznych (ich kierunki i względne długości). b) Uzupełnij rysunek (2), rysując, tak jak na rysunku 34.7, wektor natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej dla tej samej chwili. Narysuj również wektory indukowanych pól magnetycznych, podając ich kierunki i względne długości.



(1)



(2)

## 34.4. Przepływ energii i wektor Poyntinga

Każdy plażowicz zażywający kąpieli słonecznej wie o tym, że fala elektromagnetyczna może przynosić energię i dostarczać ją każdemu ciału, na które pada. Szybkość przepływu energii takiej fali przez jednostkową powierzchnię opisana jest przez wektor  $\vec{S}$ , nazywany **wektorem Poyntinga** (od nazwiska fizyka Johna Henry'ego Poyntinga (1852–1914), który pierwszy badał jego właściwości). Wektor  $\vec{S}$  jest zdefiniowany jako

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{wektor Poyntinga}). \quad (34.19)$$

Jego długość  $S$  wiąże się z szybkością, z jaką energia fali przepływa przez jednostkową powierzchnię w danej chwili:

$$S = \left( \frac{\text{energia/czas}}{\text{pole powierzchni}} \right)_{\text{chw}} = \left( \frac{\text{moc}}{\text{pole powierzchni}} \right)_{\text{chw}}. \quad (34.20)$$

Widać stąd, że w układzie SI jednostką  $\vec{S}$  jest wat na metr kwadratowy ( $\text{W/m}^2$ ).

➤ Kierunek wektora Poyntinga  $\vec{S}$  fali elektromagnetycznej w każdym punkcie jest kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w tym punkcie.

W fali elektromagnetycznej wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  są wzajemnie prostopadłe, więc długość wektora  $\vec{E} \times \vec{B}$  jest równa  $EB$ . Wobec tego długość wektora  $\vec{S}$  wyrażamy wzorem

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB, \quad (34.21)$$

przy czym  $S$ ,  $E$  i  $B$  są wartościami chwilowymi. Wielkości  $E$  i  $B$  są ze sobą tak ściśle związane, że wystarczy zająć się tylko jedną z nich; wybierzemy zatem  $E$  głównie dlatego, że większość przyrządów służących do detekcji fal elektromagnetycznych wykorzystuje składową elektryczną fali, a znacznie mniej składową magnetyczną. Korzystając z tego, że  $B = E/c$  (równanie (34.5)), możemy równanie (34.21) zapisać w postaci

$$S = \frac{1}{c\mu_0} E^2 \quad (\text{chwilowa szybkość przepływu energii}). \quad (34.22)$$

Po podstawieniu  $E = E_m \sin(kx - \omega t)$  do równania (34.22) moglibyśmy otrzymać wyrażenie opisujące szybkość przepływu energii jako funkcję czasu. W praktyce bardziej użyteczna jest jednak znajomość średniej energii przenoszonej w określonym czasie. W tym celu musimy znaleźć uśrednioną w czasie wartość  $S$  (którą będziemy zapisywać jako  $S_{\text{sr}}$ ), nazywaną również **natężeniem**  $I$  fali. Zgodnie z równaniem (34.20) natężenie  $I$  jest równe

$$I = S_{\text{sr}} = \left( \frac{\text{energia/czas}}{\text{pole powierzchni}} \right)_{\text{sr}} = \left( \frac{\text{moc}}{\text{pole powierzchni}} \right)_{\text{sr}}. \quad (34.23)$$

Z równania (34.22) otrzymujemy

$$I = S_{\text{sr}} = \frac{1}{c\mu_0} [E^2]_{\text{sr}} = \frac{1}{c\mu_0} [E_m^2 \sin^2(kx - \omega t)]_{\text{sr}}. \quad (34.24)$$

Średnia wartość funkcji  $\sin^2 \theta$  po całym okresie jest równa  $1/2$  (zob. rys. 33.14). Zdefiniujemy dodatkowo nową wielkość — *wartość średnią kwadratową* pola  $E_{\text{sr.kw}}$  jako

$$E_{\text{sr.kw}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (34.25)$$

Możemy teraz napisać równanie (34.24) w postaci

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{\text{sr.kw}}^2. \quad (34.26)$$

Ponieważ  $E = cB$ , a  $c$  jest tak ogromną liczbą, więc moglibyście dojść do wniosku, że energia związana z polem elektrycznym jest dużo większa niż energia związana z polem magnetycznym. Wniosek taki jest błędny; energie obu pól są dokładnie sobie równe. Aby to pokazać, posłużymy się równaniem (26.23), które opisuje gęstość energii  $u (= \epsilon_0 E^2/2)$  pola elektrycznego. Zastępując  $E$  przez  $cB$ , możemy napisać

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (cB)^2.$$

Podstawiając  $c$  z równania (34.3), otrzymujemy

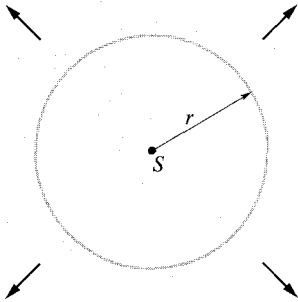
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} B^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Z równania (31.56) wiemy, że  $B^2/2\mu_0$  jest gęstością energii  $u_B$  pola magnetycznego  $\vec{B}$ , wobec tego widzimy, że  $u_E = u_B$  w każdym punkcie fali elektromagnetycznej.

### Zmiana natężenia wraz z odległością

To, jak się zmienia natężenie promieniowania elektromagnetycznego wraz z odległością od rzeczywistego źródła promieniowania, jest często złożonym problemem — szczególnie wtedy, gdy źródło (np. takie jak punktowy reflektor na scenie) ukierunkowuje wiązkę światła. Ale w pewnych sytuacjach możemy przyjąć, że źródło jest *źródłem punktowym*, które emituje światło *izotropowo*, tzn. wysyła światło o jednakowym natężeniu we wszystkich kierunkach. Kuliste czoła fali rozchodzącej się z takiego izotropowego punkтового źródła  $S$  pokazane są w przekroju na rysunku 34.8 dla pewnej chwili.

Założmy, że energia fal jest zachowywana przy ich rozchodzeniu się od tego źródła. Wyróżnimy również pewną umowną powierzchnię kuli o promieniu  $r$ , której środkiem jest źródło, tak jak to pokazano na rysunku 34.8. Cała wyemitowana przez źródło energia musi przejść przez tę powierzchnię. Wobec tego szybkość, z jaką energia promieniowania jest przenoszona przez tę powierzchnię kulistą musi być równa szybkości, z jaką energia jest wysyłana przez źródło — jest więc ona równa mocy  $P_{\text{zr}}$  źródła. Zatem natężenie  $I$  na powierzchni kuli musi być równe

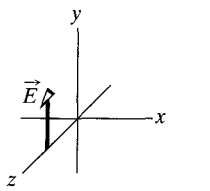


Rys. 34.8. Punktowe źródło  $S$  wysyła fale elektromagnetyczne równomiernie we wszystkich kierunkach. Kuliste czoła fali przechodzą przez umowną powierzchnię kulistą o promieniu  $r$ , której środkiem jest źródło  $S$

$$I = \frac{P_{\text{zr}}}{4\pi r^2}, \quad (34.27)$$

gdzie  $4\pi r^2$  jest polem powierzchni kuli. Z równania (34.27) wynika, że natężenie promieniowania elektromagnetycznego z izotropowego źródła punktowego jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku pokazano wektor natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej w pewnym punkcie w pewnej określonej chwili. Fala niesie energię w ujemnym kierunku osi  $z$ . Jaki jest kierunek wektora natężenia pola magnetycznego fali w tym punkcie i w tej chwili?



### Przykład 34.1

Obserwator znajduje się w odległości 1,8 m od izotropowego punktowego źródła światła o mocy  $P_{\text{zr}} = 250$  W. Oblicz wartości średnie kwadratowe natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego fali świetlnej z tego źródła w miejscu, w którym znajduje się obserwator.

#### ROZWIĄZANIE:

Dwa pierwsze, podstawowe dla tego problemu spostrzeżenia są następujące:

➤ 1. Wartość średnia kwadratowa natężenia pola elektrycznego,  $E_{\text{sr.kw}}$ , fali świetlnej jest związana z natężeniem światła zależnością (34.26) ( $I = E_{\text{sr.kw}}^2/c\mu_0$ ).

➤ 2. Źródło punktowe emituje światło o jednakowym natężeniu we wszystkich kierunkach, wobec tego natężenie  $I$  w każdej odległości  $r$  od źródła jest związane z mocą  $P_{\text{zr}}$  źródła równaniem (34.27) ( $I = P_{\text{zr}}/4\pi r^2$ ).

Połączenie tych dwóch spostrzeżeń prowadzi nas do

$$I = \frac{P_{\text{zr}}}{4\pi r^2} = \frac{E_{\text{sr.kw}}^2}{c\mu_0},$$

a stąd

$$E_{\text{sr.kw}} = \sqrt{\frac{P_{\text{zr}}c\mu_0}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{(250 \text{ W})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})}{(4\pi)(1,8 \text{ m})^2}} = 48,1 \text{ V/m} \approx 48 \text{ V/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

➤ 3. Trzecim ważnym spostrzeżeniem jest tutaj fakt, że w każdej chwili i w każdym punkcie natężenie pola elektrycznego i indukcję pola magnetycznego fali elektromagnetycznej wiąże ze sobą zgodnie ze wzorem (34.5) prędkość światła ( $E/B = c$ ). Wobec tego również i wartości średnie kwadratowe  $E_{\text{sr.kw}}$  i  $B_{\text{sr.kw}}$  są związane ze sobą równaniem (34.5) i możemy napisać

$$\begin{aligned} B_{\text{sr.kw}} &= \frac{E_{\text{sr.kw}}}{c} \\ &= \frac{48,1 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ T}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Zwróć uwagę, że wielkość  $E_{\text{sr.kw}} = 48 \text{ V/m}$  jest znaczna, wedle zwykłych standardów laboratoryjnych, natomiast wartość  $B_{\text{sr.kw}} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ T}$  jest całkiem mała. Ta różnica pomaga zrozumieć, dlaczego większość przyrządów służących do detekcji i pomiarów fal elektromagnetycznych opiera się na reakcji na działanie składowej elektrycznej fali. Jednak stwierdzenie, że składowa elektryczna fali elektromagnetycznej jest „silniejsza” niż składowa magnetyczna, jest stwierdzeniem błędnym. Nie wolno porównywać ze sobą wielkości, które są mierzone w różnych jednostkach. Przekonaliśmy się natomiast, że składowe elektryczna i magnetyczna są równoprawne z punktu widzenia procesu rozchodzenia się fali, gdyż ich średnie energie, które można porównywać, są dokładnie sobie równe.

## 34.5. Ciśnienie promieniowania

Fale elektromagnetyczne mają zarówno energię, jak i pęd. To oznacza, że oświetlając jakieś ciało, możemy wywierać na nie ciśnienie — **ciśnienie promieniowania**. Ciśnienie to musi być jednak bardzo małe — nie czujemy na przykład błysku lampy, kiedy jesteśmy fotografowani.

Żeby znaleźć wyrażenie opisujące ciśnienie promieniowania, wykonajmy eksperyment myślowy. Skierujmy wiązkę promieniowania elektromagnetycznego, na przykład światła, na jakieś ciało i oświetlajmy je przez czas  $\Delta t$ . Załóżmy następnie, że ciało to może poruszać się swobodnie i że promieniowanie zostało przez to ciało w całości **zaabsorbowane** (pochłonięte). To oznacza, że w czasie  $\Delta t$  ciało uzyskało od promieniowania energię  $\Delta U$ . Maxwell wykazał, że ciało uzyskuje również pęd. Zmiana pędu  $\Delta p$  ciała jest związana ze zmianą energii następującą zależnością:

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}), \quad (34.28)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła. Kierunek zmiany pędu ciała pokrywa się z kierunkiem wiązki *padającej*, którą ciało absorbuje.

Ale promieniowanie niekoniecznie musi być pochłonięte przez ciało, może również ulec **odbiciu** od niego, tzn. zmienić swój pierwotny kierunek. Jeżeli promieniowanie zostanie w całości odbite wzdłuż swego pierwotnego kierunku, to zmiana pędu będzie dwukrotnie większa niż podana wyżej, tzn.

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c} \quad (\text{całkowite odbicie wsteczne}). \quad (34.29)$$

Dokładnie tak samo ciało doznaje dwukrotnie większej zmiany pędu wtedy, gdy odbija się od niego doskonale sprężysta piłka tenisowa, tak jak wtedy, gdy uderza weń niesprężyste ciało (np. mokra, kleista gruda) o takiej samej masie i prędkości. Kiedy padające promieniowanie jest częściowo absorbowane i częściowo odbijane, pęd ciała zmienia się w przedziale między  $\Delta U/c$  i  $2\Delta U/c$ .

Jak wiemy, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona zmiana pędu wiąże się z siłą równaniem

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (34.30)$$

Żeby znaleźć wyrażenie wiążące siłę wywieraną przez promieniowanie z jego natężeniem  $I$ , przyjmijmy, że na drodze promieniowania znajduje się prostopadła płaszczyzna o polu  $S$ . W czasie  $\Delta t$  do płaszczyzny tej dociera energia

$$\Delta U = IS\Delta t. \quad (34.31)$$

Jeżeli energia zostanie w całości zaabsorbowana, to równanie (34.28) przybiera postać  $\Delta p = IS\Delta t/c$  i z równania (34.30) wynika, że wartość siły działającej na powierzchnię  $S$  wynosi

$$F = \frac{IS}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}). \quad (34.32)$$

Podobnie, przy całkowitym odbiciu wstecznym promieniowania równanie (34.29) pokazuje, że  $\Delta p = 2IS\Delta t/c$  i z równania (34.30) otrzymujemy

$$F = \frac{2IS}{c} \quad (\text{całkowite odbicie wsteczne}). \quad (34.33)$$

Przy jednoczesnej częściowej absorpcji i częściowym odbiciu, wartość siły działającej na powierzchnię  $S$  zawiera się w przedziale między  $IS/c$  i  $2IS/c$ .

Siła działająca ze strony promieniowania na jednostkę powierzchni ciała to wywierane nań ciśnienie promieniowania  $p_p$ . Znajdziemy je dla sytuacji opisywanych przez równanie (34.32) i (34.33), dzieląc obie strony każdego z tych równań przez  $S$ . Otrzymujemy w ten sposób

$$p_p = \frac{I}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}) \quad (34.34)$$

oraz

$$p_p = \frac{2I}{c} \quad (\text{całkowite odbicie wsteczne}). \quad (34.35)$$

Nie należy mylić symbolu  $p_p$  oznaczającego ciśnienie promieniowania z symbolem  $p$  oznaczającym pęd. Tak jak w przypadku ciśnienia cieczy w rozdziale 15, jednostką SI ciśnienia promieniowania jest niuton na metr kwadratowy ( $\text{N/m}^2$ ), czyli paskal (Pa).

Rozwój technologii laserowych umożliwił badaczom osiągnięcie ciśnienia promieniowania znacznie większego niż ciśnienie, powiedzmy, lamp błyskowych aparatów fotograficznych. Bierze się to stąd, że wiązki światła laserowego można zogniskować na obszarze o średnicy zaledwie kilku długości fali, co jest niewykonalne dla wiązek światła wytwarzanych nawet przez bardzo małe włókno żarowe. Jest więc możliwe dostarczanie olbrzymich ilości energii do małych obiektów umieszczanych w takich miejscach ogniskowania wiązki.

**SPRAWDZIAN 3:** Światło o równomiernym natężeniu pada prostopadle na całkowicie pochłaniającą je powierzchnię i oświetla ją w całości. Czy po zmniejszeniu pola tej powierzchni a) ciśnienie promieniowania oraz b) siła, jaką promieniowanie działa na powierzchnię, ulegają zwiększeniu, zmniejszeniu, czy też się nie zmieniają?

### Przykład 34.2

Pył uwalniany z komety nie porusza się za nią po orbicie, ponieważ ciśnienie światła słonecznego odpycha go radialnie od Słońca. Przyjmij, że ziarno pyłu jest kulą o promieniu  $R$ , gęstości  $\rho = 3,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  i całkowicie pochłania światło słoneczne napotkane na swej drodze. Jaka jest wartość  $R$ , dla której siła grawitacyjna  $\vec{F}_g$ , jaką Słońce przyciąga ziarno pyłu, jest dokładnie równoważona przez siłę  $\vec{F}_p$  wywieraną na nie przez promieniowanie słoneczne?

#### ROZWIĄZANIE:

Możemy założyć, że Słońce jest dostatecznie odległe od ziarna pyłu i że wobec tego może być traktowane jak izotropowe, punktowe źródło światła. Z kolei, ponieważ powiedziano, że ciśnienie promieniowania odpycha ziarno pyłu radialnie od Słońca, wobec tego wiemy, że siła  $\vec{F}_p$  wywierana przez promieniowanie na ziarno pyłu jest skierowana wzdłuż promienia od środka Słońca. Jednocześnie siła grawitacyjnego przyciągania  $\vec{F}_g$  skierowana jest wzdłuż promienia do środka Słońca. Możemy zatem zapisać wa-

runek równowagi tych dwóch sił jako

$$F_p = F_g. \quad (34.36)$$

Rozważmy teraz każdą z tych sił oddzielnie.

*Siła promieniowania:* W celu obliczenia lewej strony równania (34.36) skorzystamy z trzech podstawowych spostrzeżeń:

1. Ziarno pyłu absorbuje całkowicie światło, wobec tego wielkość siły  $F_p$  będziemy mogli wyznaczyć, korzystając z równania (34.32), wiążącego tę siłę z natężeniem światła słonecznego  $I$  w miejscu, gdzie znajduje się ziarno pyłu, i z powierzchnią  $S$  jego przekroju poprzecznego ( $F = IS/c$ ).

2. Zakładamy, że Słońce jest izotropowym, punktowym źródłem światła, więc możemy skorzystać z równania (34.27) ( $I = P_{\text{S}}/4\pi r^2$ ), które wiąże moc Słońca  $P_{\text{S}}$  z natężeniem światła słonecznego  $I$  w odległości  $r$  od Słońca, gdzie znajduje się ziarno pyłu.

3. Ziarno pyłu jest kuliste, wobec tego pole powierzchni jego przekroju poprzecznego  $S$  jest równe  $\pi R^2$  (a nie połowie pola jego powierzchni).

Wszystko to razem daje

$$F_p = \frac{IS}{c} = \frac{P_S \pi R^2}{4\pi r^2 c} = \frac{P_S R^2}{4r^2 c}. \quad (34.37)$$

*Siła grawitacyjna:* Tutaj podstawą jest prawo powszechnego ciążenia (równanie (14.1)), które daje wielkość oddziaływania grawitacyjnego między Słońcem i ziarnem pyłu

$$F_g = \frac{GM_S m}{r^2}, \quad (34.38)$$

gdzie  $M_S$  jest masą Słońca, a  $m$  — masą ziarna pyłu. Z kolei masa ziarna związana jest z jego gęstością i objętością  $V (= \frac{4}{3}\pi R^3)$  zależnością

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Stąd obliczamy masę  $m$  i po wstawieniu do równania (34.38) otrzymujemy

$$F_g = \frac{GM_S \rho (\frac{4}{3}\pi R^3)}{r^2}. \quad (34.39)$$

Podstawienie równań (34.37) i (34.39) do równania (34.36) i rozwiązanie go ze względu na  $R$  daje

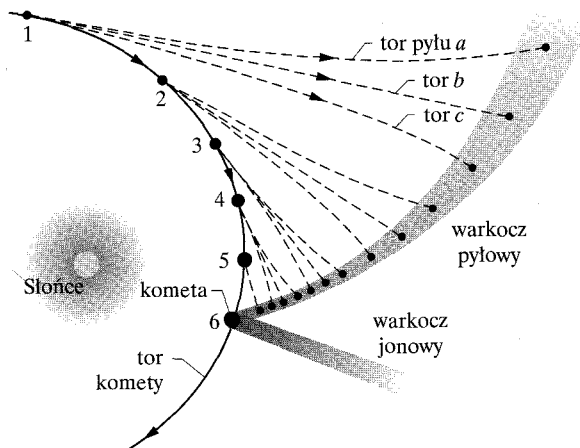
$$R = \frac{3P_S}{16\pi c \rho G M_S}.$$

Korzystając z podanej wartości  $\rho$  i znanych wartości  $G$  (dodatek B) oraz  $M_S$  (dodatek C), obliczamy mianownik:

$$\begin{aligned} & (16\pi)(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})(3,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \\ & \times (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \\ & = 7 \cdot 10^{33} \text{ N/s}, \end{aligned}$$

a korzystając z wartości  $P_S$  podanej w dodatku C, otrzymamy

$$R = \frac{(3)(3,9 \cdot 10^{26} \text{ W})}{7 \cdot 10^{33} \text{ N/s}} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 34.9. Przykład 34.2. Kometa znajduje się obecnie w punkcie 6. Pył, który się uwolnił w pięciu poprzednich położeniach komety, został odepchnięty na zewnątrz przez ciśnienie promieniowania wywierane przez światło słoneczne, przebył drogi zaznaczone linią przerywaną i tworzy obecnie zakrzywiony pyłowy warkocz komety

Zauważ, że wynik ten jest niezależny od odległości  $r$  ziarna pyłu od Słońca.

Ziarna pyłu o promieniu  $R \approx 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  poruszają się po torach w przybliżeniu liniowych, takich jak tor  $b$  na rysunku 34.9. Z równań (34.37) i (34.39) wynika, że siła  $F_g$  zmienia się jak  $R^3$ , natomiast siła  $F_p$  jak  $R^2$  i wobec tego dla dużych wartości  $R$  siła  $F_g$  jest większa niż siła  $F_p$  i tor większych ziaren pyłu zakrzywia się w stronę Słońca, tak jak tor  $c$  na rysunku 34.9. Natomiast dla mniejszych wartości  $R$  przeważa siła  $F_p$  i tory ziaren pyłu odchylają się od Słońca, tak jak tor  $a$  na rysunku 34.9. W sumie ziarna o różnych rozmiarach tworzą warkocz pyłowy komety.

## 34.6. Polaryzacja

Telewizyjne anteny VHF w Anglii są ustawione pionowo, natomiast w Ameryce Północnej ich orientacja jest pozioma. Różnica ta wiąże się z różnym kierunkiem drgań fal elektromagnetycznych przenoszących sygnał telewizyjny. W Anglii konstrukcja sprzętu transmisyjnego jest taka, że wysyłane fale mają polaryzację pionową, tzn. kierunek drgań ich pola elektrycznego jest pionowy. Dlatego też orientacja anteny odbiorczej musi być pionowa, bo wtedy padająca na nią fala (niosąca sygnał telewizyjny) może wzbudzić w niej prąd (i tym samym dostarczyć sygnał do odbiornika telewizyjnego). W Ameryce Północnej fale te są spolaryzowane poziomo.

Na rysunku 34.10a pokazano falę elektromagnetyczną, której pole elektryczne drga równoległe do osi pionowej  $y$ . Płaszczyznę, w której leżą wektory  $\vec{E}$ , nazywamy **płaszczyzną drgań** fali (wtedy mówimy, że fala jest *spolaryzowana liniowo* w kierunku  $y$ ). *Polaryzację* fali (stan polaryzacji) można przedstawiać

przez pokazanie kierunków drgań pola elektrycznego, na przykład tak, jak to zilustrowano na rysunku 34.10b, na którym oglądamy płaszczyznę drgań wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali. Na rysunku tym podwójna strzałka pionowa pokazuje, że w mijającej nas fali pole elektryczne drga pionowo, zmieniając w sposób ciągły swoją orientację „w górę” i „w dół” wzdłuż osi  $y$ .

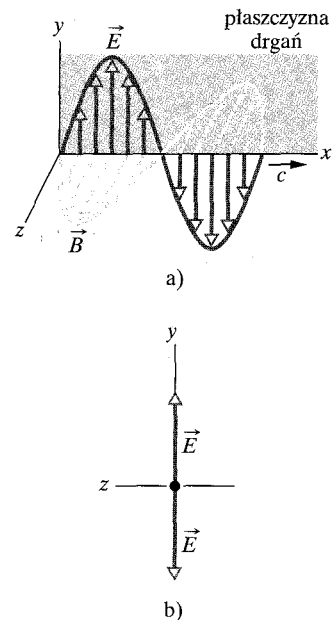
## Światło spolaryzowane

Fale elektromagnetyczne emitowane przez nadajnik telewizyjny są spolaryzowane, ale fale elektromagnetyczne emitowane przez zwykłe źródła światła (takie jak Słońce czy żarówka) są **niespolaryzowane**; wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest zawsze prostopadły do kierunku rozchodzenia się fal, ale jego kierunek zmienia się przypadkowo. Tym samym, kiedy próbujemy zobrazować drgania pola elektrycznego w jakimś zadanym czasie, oglądając je wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, wówczas zamiast prostego obrazu jednej podwójnej strzałki, jak na rysunku 34.10b, dostajemy chaotyczny obraz wielu podwójnych strzałek, tak jak to widać na rysunku 34.11a.

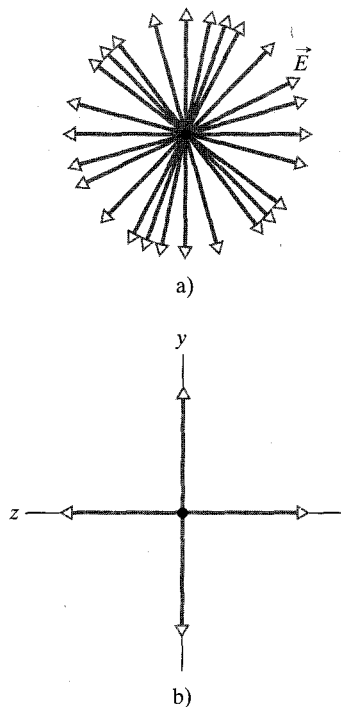
W zasadzie ten chaotyczny obraz można uprościć, rozkładając każdy z wektorów natężenia pola elektrycznego na składowe w kierunku osi  $y$  i  $z$ . Po takim zabiegu w rozchodzącej się fali wypadkowa składowa  $y$  drga wzdłuż osi  $y$ , a wypadkowa składowa  $z$  wzdłuż osi  $z$ . Światło niespolaryzowane można wtedy zobrazować przez parę podwójnych strzałek, tak jak to pokazano na rysunku 34.11b. Podwójna strzałka wzdłuż osi  $y$  reprezentuje drgania wypadkowej składowej  $y$  natężenia pola elektrycznego, a podwójna strzałka wzdłuż osi  $z$  drgania wypadkowej składowej  $z$  natężenia pola elektrycznego. W ten sposób zmieniliśmy światło niespolaryzowane na superpozycję dwóch fal spolaryzowanych, których płaszczyzny polaryzacji są wzajemnie prostopadłe — jedna płaszczyzna zawiera oś  $y$ , a druga oś  $z$ . Jednym z powodów takiej zamiany jest fakt, że znacznie łatwiej jest narysować rysunek 34.11b niż rysunek 34.11a.

Podobne rysunki można wykonać dla zobrazowania światła **częściowo spolaryzowanego** (tzn. takiego, w którym drgania pola elektrycznego nie są ani całkowicie przypadkowe, jak na rysunku 34.11a, ani też całkowicie uporządkowane wzdłuż jednej osi, jak na rysunku 34.10b). W takiej sytuacji jedna z par podwójnych, wzajemnie prostopadłych strzałek będzie dłuższa niż druga.

Niespolaryzowane światło widzialne można zamienić na światło spolaryzowane, przepuszczając je przez *folię polaryzującą*, jak pokazano na rysunku 34.12. Takie folie, znane pod nazwą polaroidów, zostały wynalezione w 1932 roku przez Edwina Landa, wówczas jeszcze studenta. Folia polaryzująca zawiera pewne długie cząsteczki umieszczone w plastiku. W trakcie wyrobu jest ona wyciągana, przez co cząsteczki zostają uporządkowane w równoległych szeregach (tak jak bruzdy na zaoranym polu). Kiedy światło przechodzi przez polaroid,

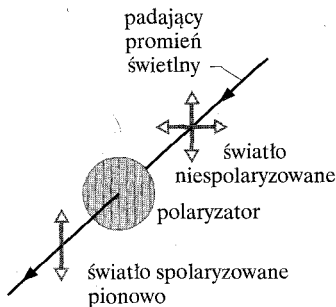


Rys. 34.10. a) Płaszczyzna drgań spolaryzowanej fali elektromagnetycznej. b) Żeby zobrazować polaryzację, oglądamy płaszczyznę drgań wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, a podwójna strzałka obrazuje kierunki drgań wektora natężenia pola elektrycznego



Rys. 34.11. a) Światło niespolaryzowane składa się z fal, których wektory natężenia pola elektrycznego mają przypadkowe kierunki drgań. Na rysunku wszystkie fale rozchodzą się wzdłuż tej samej osi prostopadłej do kartki (w kierunku do nas) i wszystkie mają taką samą amplitudę  $E$  wektora natężenia pola elektrycznego. b) Inny sposób przedstawiania światła niespolaryzowanego jako superpozycji dwóch fal spolaryzowanych, których płaszczyzny drgań są wzajemnie prostopadłe





Rys. 34.12. Światło niespolaryzowane przepuszczone przez polaryzator (np. polaroid) zostaje spolaryzowane. Kierunek jego polaryzacji jest wówczas równoległy do kierunku polaryzacji polaryzatora (ten kierunek polaryzacji polaryzatora (ten kierunek polaryzacji wskazują linie pionowe na polaryzatorze)

składowe wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż jednego kierunku są przepuszczane, natomiast składowe prostopadłe do tego kierunku są absorbowane przez cząsteczki.

Nie będziemy tu omawiać molekularnego mechanizmu tego zjawiska, lecz po prostu przypiszemy folii polaryzującej *kierunek polaryzacji* — kierunek, który mają składowe wektora natężenia pola elektrycznego przez nią przepuszczane:

► Składowa wektora natężenia pola elektrycznego równoległa do kierunku polaryzacji jest przepuszczana przez folię polaryzującą (polaroid); składowa prostopadła do tego kierunku jest absorbowana.

Pole elektryczne fali świetlnej wychodzącej z polaroidu zawiera więc tylko te składowe, które są równoległe do kierunku polaryzacji folii. A zatem światło jest spolaryzowane w tym kierunku. Na rysunku 34.12 przez polaroid przepuszczane są pionowe składowe wektora natężenia pola elektrycznego; składowe poziome są absorbowane. Fale przechodzące są zatem spolaryzowane pionowo.

### Natężenie światła przechodzącego przez polaryzator

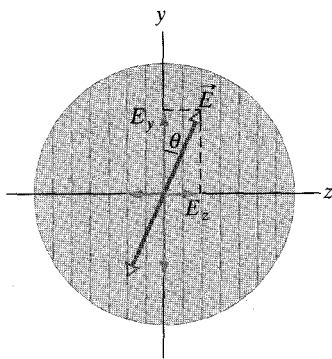
Zajmiemy się teraz natężeniem światła przechodzącego przez folię polaryzującą (którą dalej będziemy nazywali po prostu polaryzatorem). Zaczniemy od światła niepolaryzowanego, takiego jak na rysunku 34.11b, w którym drgania wektora pola elektrycznego możemy rozłożyć na składowe w kierunkach  $y$  i  $z$ . Ustalmy przy tym, że oś  $y$  jest równoległa do kierunku polaryzacji polaryzatora. W takiej sytuacji przez polaryzator przechodzą tylko składowe  $y$  pola elektrycznego fali świetlnej; składowe  $z$  zostają zaabsorbowane. Zgodnie z rysunkiem 34.11b, gdy fala jest całkowicie niespolaryzowana, orientacje wektorów pola elektrycznego są całkowicie przypadkowe i wypadkowe sumy składowych  $y$  i  $z$  są sobie równe. Jeżeli zatem wypadkowa składowa  $z$  zostaje zaabsorbowana, to początkowe natężenie światła padającego na płytkę  $I_0$  zmniejszy się do połowy po przejściu przez polaryzator. Wobec tego natężenie światła  $I$  po przejściu przez polaryzator jest równe

$$I = \frac{1}{2} I_0. \quad (34.40)$$

Nazwijmy umownie ten wynik *regułą połowy*; możemy z niej korzystać *tylko* wtedy, gdy światło padające na polaryzator jest niespolaryzowane.

Zajmiemy się teraz sytuacją, kiedy światło padające na polaryzator jest już spolaryzowane. Na rysunku 34.13 polaryzator znajduje się w płaszczyźnie kartki, a padająca na niego fala świetlna jest spolaryzowana tak, jak to wskazuje kierunek wektora natężenia jej pola elektrycznego  $\vec{E}$ . Możemy rozłożyć  $\vec{E}$  na dwie składowe, równoległą i prostopadłą do kierunku polaryzacji polaryzatora. Składowa równoległa  $E_y$  jest przepuszczana przez polaryzator, natomiast składowa prostopadła  $E_z$  jest przez niego absorbowana. Wektor  $\vec{E}$  tworzy z kierunkiem polaryzacji polaryzatora kąt  $\theta$ , wobec tego składowa przechodząca jest dana jako

$$E_y = E \cos \theta. \quad (34.41)$$



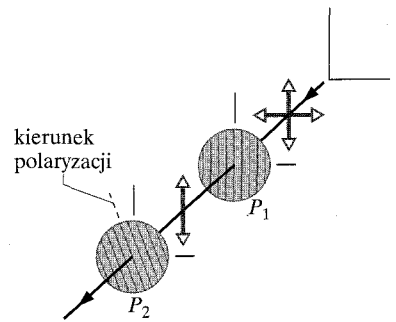
Rys. 34.13. Światło spolaryzowane pada na polaryzator. Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  światła można rozłożyć na składową  $E_y$  (równoległą do kierunku polaryzacji polaryzatora) i  $E_z$  (prostopadłą do tego kierunku). Składowa  $E_y$  będzie przepuszczana przez polaryzator, a składowa  $E_z$  będzie absorbowana

Przypomnijmy, że natężenie fali elektromagnetycznej (a więc i naszej fali świetlnej) jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego (równanie (34.26)). Wobec tego w rozważanym przez nas przypadku natężenie  $I$  światła przechodzącego przez płytkę jest proporcjonalne do  $E_y^2$ , a natężenie  $I_0$  światła padającego na płytkę jest proporcjonalne do  $E^2$ . Możemy zatem przepisać równanie (34.41) w postaci

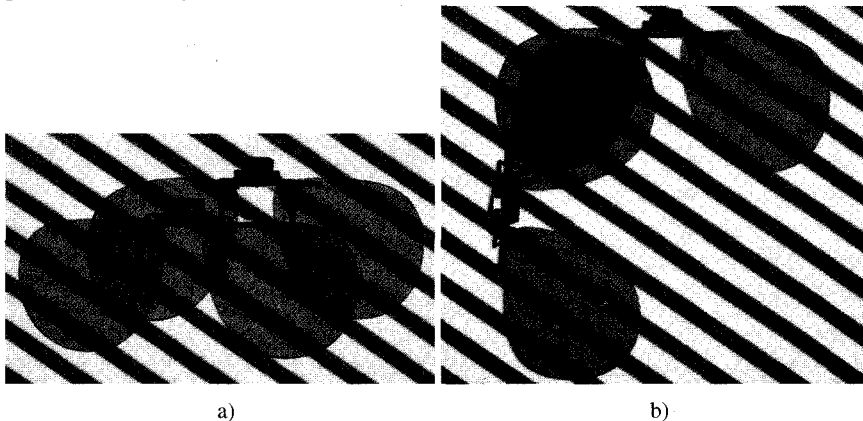
$$I = I_0 \cos^2 \theta. \quad (34.42)$$

Nazwijmy umownie ten wynik *regułą kwadratu cosinusa*; możemy z niej korzystać *tylko* wtedy, gdy światło padające na polaryzator jest już światłem spolaryzowanym. Natężenie światła przechodzącego  $I$  osiąga maksimum (równe natężeniu światła padającego  $I_0$ ) wtedy, gdy padająca fala świetlna jest spolaryzowana równoległe do kierunku polaryzacji polaryzatora (tzn. gdy kąt  $\theta$  w równaniu (34.42) jest równy  $0^\circ$  lub  $180^\circ$ ). Natężenie  $I$  wynosi zero wtedy, gdy padająca fala jest spolaryzowana prostopadłe do kierunku polaryzacji polaryzatora ( $\theta = 90^\circ$ ).

Na rysunku 34.14 światło niespolaryzowane przechodzi przez układ dwóch polaryzatorów  $P_1$  i  $P_2$ . (W układzie takim pierwszy z nich często jest nazywany *polaryzatorem*, a drugi *analizatorem*). Kierunek polaryzacji polaryzatora  $P_1$  jest pionowy, wobec tego światło przechodzące przez polaryzator  $P_1$  jest spolaryzowane pionowo, co obrazuje pionowa podwójna strzałka. Natężenie tego światła po przejściu przez polaryzator  $P_2$  zależy od kąta, jaki tworzy kierunek polaryzacji tego światła z kierunkiem polaryzacji polaryzatora  $P_2$ .



Rys. 34.14. Światło po przejściu przez polaryzator  $P_1$  jest spolaryzowane pionowo, co obrazuje pionowa podwójna strzałka. Natężenie tego światła po przejściu przez polaryzator  $P_2$  zależy od kąta, jaki tworzy kierunek polaryzacji tego światła z kierunkiem polaryzacji polaryzatora  $P_2$



Rys. 34.15. Polaryzacyjne okulary przeciwsłoneczne składają się z folii polaryzujących, których kierunki polaryzacji są pionowe a) Nałożone na siebie dwie pary okularów przepuszczają całkiem dobrze światło wtedy, gdy ich kierunki polaryzacji są takie same, a b) zatrzymują większość światła wtedy, gdy są skrzyżowane

W przypadku gdy oba kierunki polaryzacji na rysunku 34.14 tworzą dowolny kąt z zakresu od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , pewna część światła przepuszczanego przez polaryzator  $P_1$  będzie przechodziła przez polaryzator  $P_2$ . Natężenie tego światła jest określone równaniem (34.42).

Światło można polaryzować nie tylko za pomocą polaroidów, ale również innymi sposobami, na przykład przez odbicie (o czym będzie mowa w paragrafie 34.9) oraz przez rozpraszanie na atomach i cząsteczkach. Przy rozpraszaniu światło napotykające obiekt, na przykład taki jak cząsteczka, rozchodzi się dalej w wielu na ogół przypadkowych kierunkach. Przykładem jest tutaj rozpraszanie światła słonecznego przez cząsteczki atmosfery, wywołujące poświatę nieba.

Chociaż samo światło słoneczne jest niespolaryzowane, to w wyniku takiego rozpraszania światło z większej części nieba jest co najmniej częściowo spolaryzowane. Pszczoły wykorzystują polaryzację światła rozpraszanego przez atmosferę do nawigacji od i do ula. Całkiem podobnie korzystali z tego efektu Wikingowie żeglujący po Morzu Północnym wtedy, kiedy w noc polarną Słońce znajdowało się poniżej horyzontu (z powodu dużej szerokości geograficznej Morza Północnego). Ci dawni żeglarze odkryli, że pewien kryształ (zwany dzisiaj kordieritem) zmienia barwę przy obrocie w świetle spolaryzowanym. Patrząc na niebo przez taki kryształ i obracając go wokół osi wyznaczającej kierunek obserwacji, mogli oni zlokalizować położenie skrytego za horyzontem Słońca i w ten sposób określić kierunek południowy.

### Przykład 34.3

Na rysunku 34.16a światło początkowo niespolaryzowane przechodzi przez układ złożony z trzech płytek polaryzujących (polaryzatorów). Kierunek polaryzacji pierwszego polaryzatora jest równoległy do osi  $y$ , kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora jest obrócony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt  $60^\circ$  w stosunku do osi  $y$ , a trzeciego jest równoległy do osi  $x$ . Jaka część początkowego natężenia światła  $I_0$  wychodzi z tego układu i jaka jest polaryzacja tego światła?

#### ROZWIĄZANIE:

Óto podstawowe uwagi:

- 1. Problem rozwiązujemy, rozważając kolejno każdy z polaryzatorów od pierwszego, do którego dociera światło, do ostatniego z nich.
- 2. Do określenia natężenia światła przechodzącego przez każdy z polaryzatorów korzystamy albo z reguły połowy, jeżeli padające nań światło jest niespolaryzowane, albo z reguły kwadratu cosinusa, jeżeli jest ono już spolaryzowane.
- 3. Światło po przejściu przez polaryzator jest zawsze spolaryzowane równoległe do kierunku polaryzacji polaryzatora.

*Pierwszy polaryzator:* Zgodnie z rysunkiem 34.11b stan polaryzacji światła (niespolaryzowanego) padającego na pierwszy polaryzator jest taki, jak na rysunku 34.16b. Jest to światło niespolaryzowane, wobec tego natężenie  $I_1$  światła przechodzącego

przez pierwszy polaryzator jest dane przez regułę połowy (równanie (34.40))

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

Kierunek polaryzacji pierwszego polaryzatora jest równoległy do osi  $y$  i taka sama jest wobec tego polaryzacja światła przechodzącego; co ilustruje rysunek 34.16c.

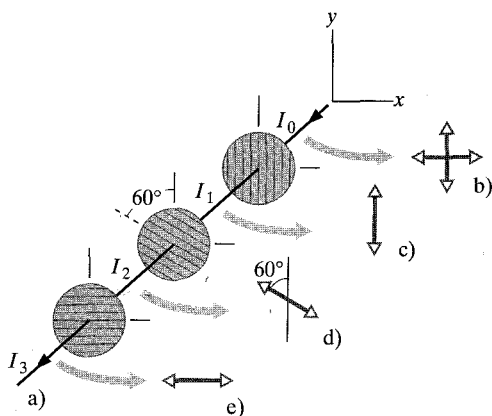
*Drugi polaryzator:* Światło docierające do drugiego polaryzatora jest spolaryzowane, zatem natężenie światła  $I_2$  po przejściu przez ten polaryzator jest dane przez regułę kwadratu cosinusa (równanie (34.42)). Kąt  $\theta$ , który występuje w równaniu (34.42), jest kątem między kierunkiem polaryzacji światła padającego (równoległym do osi  $y$ ) i kierunkiem polaryzacji drugiego polaryzatora ( $60^\circ$  od osi  $y$ , przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara), tzn.  $\theta = 60^\circ$ . A zatem

$$I_2 = I_1 \cos^2 60^\circ.$$

Kierunek polaryzacji światła po przejściu przez drugi polaryzator jest równoległy do kierunku polaryzacji tego polaryzatora, tak jak pokazano na rysunku 34.16d.

*Trzeci polaryzator:* Światło padające na trzeci polaryzator jest spolaryzowane, wobec tego jego natężenie  $I_3$  po przejściu przez polaryzator jest dane przez regułę kwadratu cosinusa. Tym razem kąt  $\theta$  to kąt między kierunkiem polaryzacji światła (rys. 34.16d) i kierunkiem polaryzacji trzeciego polaryzatora (równoległym do osi  $x$ ) i jest on równy  $30^\circ$ . Wobec tego

$$I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ.$$



Rys. 34.16. Przykład 34.3. a) Początkowo niespolaryzowane światło o natężeniu  $I_0$  przechodzi przez układ złożony z trzech polaryzatorów. Na rysunku oznaczenia  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  to natężenia światła po przejściu przez kolejne polaryzatory. Pokazano również polaryzację światła niespolaryzowanego wchodzącego do układu (b), oraz po przejściu przez kolejne polaryzatory (c–e)

Ostatecznie po przejściu przez układ trzech polaryzatorów światło jest spolaryzowane równoległe do osi  $x$  (rys. 34.16e). Jego natężenie znajdziemy, podstawiając do ostatniego równania najpierw  $I_2$ , a następnie  $I_1$ :

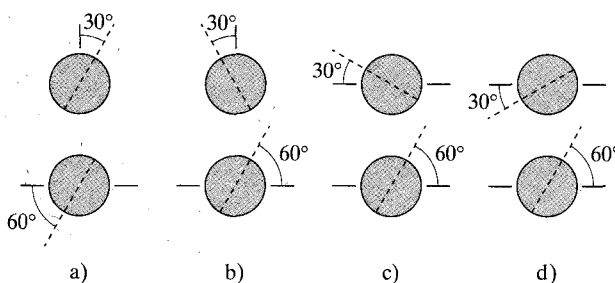
$$I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ = (I_1 \cos^2 60^\circ) \cos^2 30^\circ \\ = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ \cos^2 30^\circ = 0,094 I_0.$$

Stąd

$$\frac{I_3}{I_0} = 0,094. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać, tylko 9,4% natężenia światła padającego na układ trzech polaryzatorów opuszcza ostatecznie ten układ. (A jakie byłoby natężenie światła wychodzącego z układu, gdybyśmy usunęli z niego drugi z polaryzatorów?)

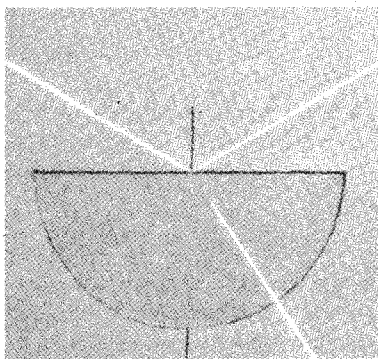
**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku pokazano cztery pary polaryzatorów (widziane od przodu). Każda para umieszczona jest na drodze światła niespolaryzowanego (tak jak układ trzech polaryzatorów z rys. 34.16a). Kierunek polaryzacji każdego polaryzatora (zaznaczony linią przerywaną) podany jest w odniesieniu albo do osi poziomej  $x$ , albo do osi pionowej  $y$ . Podaj kolejność par w porządku malejącego ułamka natężenia światła padającego, jaki jest przez nie przepuszczany.



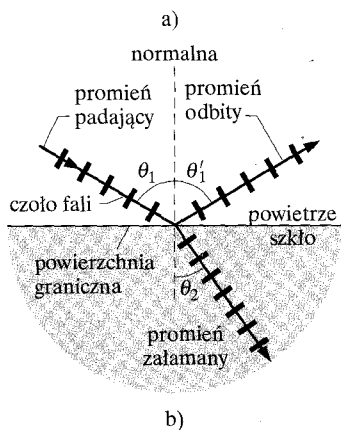
## 34.7. Odbicie i załamanie

Chociaż światło wychodzące ze źródła rozchodzi się we wszystkich kierunkach, to możemy je często traktować tak, jak gdyby rozchodziło się ono po linii prostej; tak traktowaliśmy falę świetlną na rysunku 34.5a. Opisywanie właściwości fal świetlnych w ramach takiego przybliżenia to podstawa *optyki geometrycznej*. W rozdziale tym i w całym następnym rozdziale 35 będziemy się zajmowali optyką geometryczną światła widzialnego.

Na czarno-białej fotografii (rys. 34.17a) pokazano falę świetlną, która w przybliżeniu rozchodzi się wzdłuż linii prostych. Wąska wiązka światła (wiązka *padająca*) rozchodząca się w powietrzu na prawo w dół, dociera pod pewnym kątem do *płaskiej* powierzchni płytki szklanej. Część tej wiązki ulega **odbiciu** od powierzchni płytki, tworząc wiązkę odbitą skierowaną w prawo do góry. Pozostała część światła z wiązki padającej przechodzi przez powierzchnię płytki i rozchodzi się w szkło, tworząc wiązkę skierowaną na prawo w dół. Fakt, że światło może w ten sposób wnikać do szkła i rozchodzić się w nim, sprowadza się do stwierdzenia, że szkło jest *przezroczyste*; oznacza to, że możemy przez nie patrzeć. (W tym rozdziale będziemy zajmować się wyłącznie materiałami, albo inaczej ośrodkami przezroczystymi).



Rys. 34.17. a) Czarno-biała fotografia ilustrująca odbicie i załamanie wiązki światła padającej na płaską, poziomą powierzchnię szklaną. (Początkowa część promienia załamane go we wnętrzu szkła nie jest zbyt wyraźnie widoczna na tej fotografii). Na dolnej zakrzywionej powierzchni szklanej promień jest prostopadły do powierzchni i załamanie na tej powierzchni nie wywołuje odchylenia promienia. b) Szkic sytuacji z fotografii (a) przy użyciu promieni świetlnych. Na rysunku zaznaczono kąty: padania ( $\theta_1$ ), odbicia ( $\theta'_1$ ) i załamania ( $\theta_2$ )



Zjawisko przechodzenia światła przez powierzchnię rozgraniczającą dwa różne ośrodki (albo inaczej przez *granicę ośrodków*) nazywamy **załamaniem (refrakcją)** światła i mówimy, że światło uległo **załamaniu**. W wyniku załamania na granicy ośrodków zmienia się kierunek rozchodzenia się wiązki światła, z wyjątkiem sytuacji, kiedy wiązka pada na granicę ośrodków prostopadle. Z tego powodu mówi się o wiązce światła, iż ulega ona „odchyleniu” w wyniku załamania. Zauważmy, że odchylenie, jak to zilustrowano na rysunku 34.17 zachodzi tylko na granicy ośrodków; w szkłe wiązka rozchodzi się prostoliniowo.

Na rysunku 34.17b wiązki światła z fotografii (a) zostały przedstawione odpowiednio przez: *promień padający*, *promień odbity* i *promień załamany* (a także przez czoła fali). Kierunek promienia wyznaczamy względem prostej prostopadłej do powierzchni granicznej ośrodków w punkcie odbicia i załamania, tzn. względem *normalnej* do powierzchni. Jak to zilustrowano na rysunku 34.17b, wszystkie kąty, tzn. **kąt padania**  $\theta_1$ , **kąt odbicia**  $\theta'_1$  oraz **kąt załamania**  $\theta_2$  są *mierzone względem normalnej*. Płaszczyznę, która zawiera promień padający i normalną, nazywamy *płaszczyzną padania*. Na rysunku 34.17b jest to płaszczyzna kartki.

Wyniki doświadczeń świadczą o tym, że zjawiskami odbicia i załamania rządzą dwa prawa:

**Prawo odbicia:** Promień odbity leży w płaszczyźnie padania, a kąt odbicia jest równy kątowi padania. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 34.17b oznacza to, że

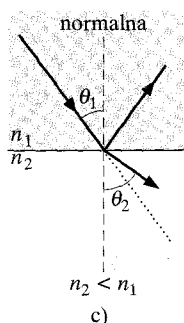
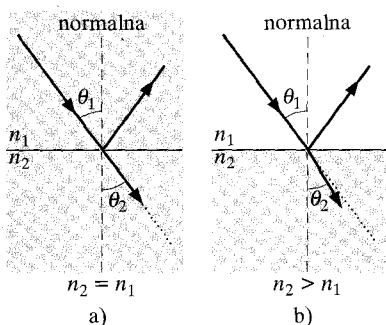
$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (\text{odbicie}). \quad (34.43)$$

(Od tej pory będziemy na ogół opuszczać znak prim przy kącie odbicia).

**Prawo załamania:** Promień załamany leży w płaszczyźnie padania, a kąt załamania  $\theta_2$  jest związany z kątem padania  $\theta_1$  zależnością

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (\text{załamanie}). \quad (34.44)$$

Tutaj  $n_1$  i  $n_2$  są bezwymiarowymi stałymi nazywanymi **współczynnikami załamania światła** charakteryzującymi ośrodku, na których granicy zachodzi załamanie światła. Równanie (34.44) opisujące załamanie, znane jako prawo Snella,



Rys. 34.18. Załamanie światła przy przejściu z ośrodka o współczynniku załamania światła  $n_1$  do ośrodka o współczynniku załamania światła  $n_2$ . a) Wiązka światła nie ulega odchyleniu, gdy  $n_2 = n_1$ ; światło rozchodzi się wówczas bez odchylenia od pierwotnego kierunku (wzdłuż linii kropkowanej), zgodnego z kierunkiem promienia padającego. **Wiązka załamuje się** b) w kierunku do normalnej wtedy, gdy  $n_2 > n_1$  i c) w kierunku **od normalnej** wtedy, gdy  $n_2 < n_1$

wyprowadzimy w rozdziale 36. Przekonamy się wówczas, że współczynnik załamania światła dla każdego ośrodka jest równy  $c/v$ , gdzie  $v$  jest prędkością światła w ośrodku, a  $c$  jest prędkością światła w próżni.

W tabeli 34.1 podano współczynniki załamania światła dla próżni i niektórych typowych ośrodków optycznych. Dla próżni współczynnik załamania jest równy 1; dla powietrza jest on bardzo bliski 1 (często będziemy używali takiej przybliżonej wartości). Żadna substancja nie ma współczynnika załamania światła mniejszego od 1.

Tabela 34.1. Współczynniki załamania światła  $n$  dla wybranych ośrodków optycznych (dla żółtej linii D sodu o długości fali  $\lambda = 589 \text{ nm}$ )

Ośrodek	$n$	Ośrodek	$n$
próżnia	1 (ściśle)	szkło typowe (kron)	1,52
powietrze (0°C, 1 atm)	1,00029	chlorek sodu	1,54
woda (temp. 20°C)	1,33	polistyren	1,55
aceton	1,36	dwusiarczek węgla	1,63
alkohol etylowy	1,36	ciężkie szkło (flint)	1,65
roztwór cukru (30%)	1,38	szafir	1,77
kwarc topiony	1,46	bardzo ciężkie szkło	1,89
roztwór cukru (80%)	1,49	diamant	2,24

Przekształcenie równania (34.44) do postaci

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (34.45)$$

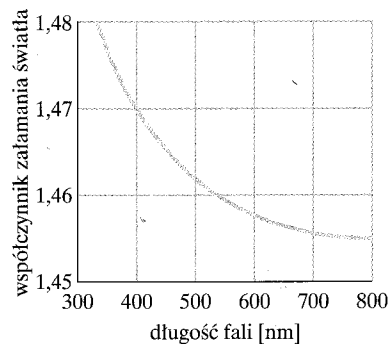
pozwała porównać kąt załamania  $\theta_2$  z kątem padania  $\theta_1$ . Jak widać, ich związek zależy od stosunku wartości  $n_1$  i  $n_2$ . Możliwe są trzy sytuacje:

1. Jeżeli  $n_2$  jest równe  $n_1$ , to  $\theta_2$  jest równe  $\theta_1$ . W takim przypadku załamanie nie następuje, promień nie zostaje odchyłony od swojego pierwotnego kierunku, tak jak to pokazano na rysunku 34.18a.
2. Jeżeli  $n_2$  jest większe od  $n_1$ , to  $\theta_2$  jest mniejsze od  $\theta_1$ . W takim przypadku po załamaniu promień jest odchyłany od swojego pierwotnego kierunku (od kierunku promienia padającego) w stronę do normalnej, tak jak pokazano na rysunku 34.18b.
3. Jeżeli  $n_2$  jest mniejsze od  $n_1$ , to  $\theta_2$  jest większe od  $\theta_1$ . W takim przypadku po załamaniu promień jest odchyłany od swojego pierwotnego kierunku (od kierunku promienia padającego) w stronę od normalnej, tak jak pokazano na rysunku 34.18c.

Załamanie nigdy *nie może* odchylić promienia załamanego od jego pierwotnego kierunku tak dalece, aby mógł się on znaleźć po tej samej stronie normalnej co promień padający.

## Rozszczepienie światła

Współczynnik załamania światła  $n$  w każdym ośrodku, z wyjątkiem próżni, zależy od długości fali światła. Ta zależność  $n$  od długości fali oznacza, że pro-

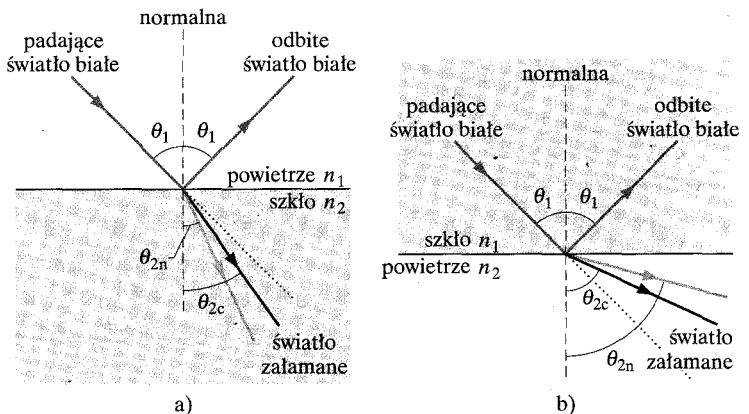


Rys. 34.19. Zależność współczynnika załamania światła od długości fali dla topionego kwarcu. Na wykresie pokazano, że światło o mniejszych długościach fali, dla którego współczynnik załamania światła jest większy, jest załamywane silniej przy wnikaniu lub wychodzeniu z kwarcu niż światło o większych długościach fali

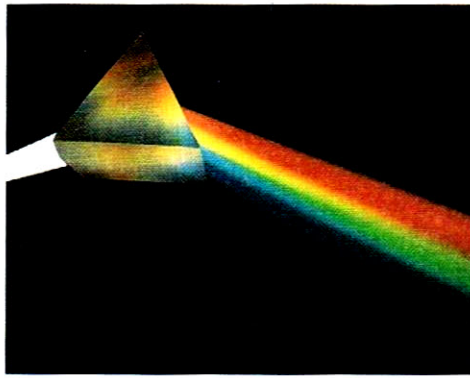
mienie świetlne, którym odpowiadają różne długości fali, będą załamywane pod różnymi kątami na tej samej powierzchni granicznej dwóch ośrodków. Jeżeli zatem wiązka światła zawiera promienie o różnych długościach fali, to w wyniku załamania zostanie ona **rozszczepiona** (to zjawisko rozszczepienia nazywane jest *dyspersją chromatyczną*). W przypadku takiego załamania światła, jak zilustrowane na rysunkach 34.17 i 34.18, rozszczepienie nie występuje, ponieważ rozważane tam wiązki świetlne są *monochromatyczne (jednobarwne)*, tzn. tworzy je światło o jednej długości fali.

Na ogół współczynnik załamania światła dla danego ośrodka jest *większy* dla fal krótszych (np. odpowiadających światłu o barwie niebieskiej) niż dla fal dłuższych (np. dla światła czerwonego). Na rysunku 34.19 zilustrowano zależność współczynnika załamania światła od długości fali na przykładzie ośrodka optycznego, którym jest topiony kwarc. Taki przebieg tej zależności oznacza, że gdy wiązka światła składająca się z dwóch *składowych* — światła niebieskiego i światła czerwonego — jest załamywana na powierzchni rozgraniczającej powietrze od topionego kwarcu, wówczas składowa niebieska (promień świetlny odpowiadający fali światła niebieskiego) jest załamywana silniej niż składowa czerwona, niezależnie od tego, czy światło przechodzi z powietrza do kwarcu, czy na odwrót.

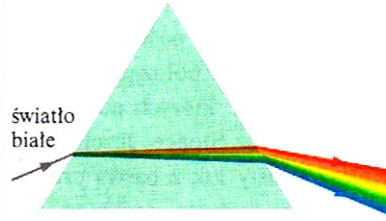
Na wiązkę *światła białego* składają się wszystkie (albo niemal wszystkie) barwy z zakresu widzialnego widma, z jednakowym w przybliżeniu natężeniem. Wiązkę taką widzimy jako białą bez wyróżnienia barw składowych. Na rysunku 34.20a wiązka światła białego pada od strony powietrza na powierzchnię graniczną powietrze–szkło. (Stronice tej książki są białe, zatem wiązka światła białego jest przedstawiana jako promień szary. Wiązki światła monochromatycznego są tu przedstawiane jako promień czerwony). W wiązce załamanej pokazane zostały tylko skrajne składowe wiązki światła białego — niebieska i czerwona. Składowa niebieska jest odchylana silniej, dlatego też jej kąt załamania  $\theta_{2n}$  jest *mniejszy* niż kąt załamania składowej czerwonej  $\theta_{2c}$ . (Przypominamy, że kąty załamania są mierzone względem normalnej do powierzchni granicznej). Na rysunku 34.20b wiązka światła białego pada od strony szkła na powierzchnię



Rys. 34.20. Rozszczepienie światła białego. Składowa niebieska jest załamywana silniej niż składowa czerwona. a) Przy przejściu z powietrza do szkła kąt załamania składowej niebieskiej jest mniejszy niż kąt załamania składowej czerwonej. b) Przy przejściu ze szkła do powietrza kąt załamania składowej niebieskiej jest większy niż składowej czerwonej



a)



b)

Rys. 34.21. a) Trójkątny pryzmat rozdzielający światło białe na barwy składowe. b) Rozszczepienie zachodzi na pierwszej powierzchni załamującej i jest zwiększane na drugiej powierzchni

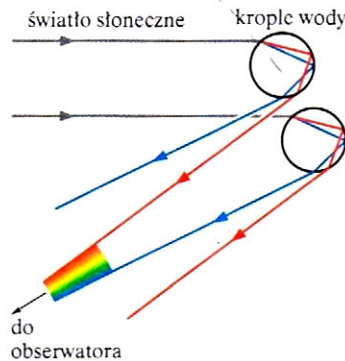
graniczną szkło–powietrze. I tym razem składowa niebieska jest odchylna silniej niż składowa czerwona, ale teraz kąt  $\theta_{2n}$  jest większy od kąta  $\theta_{2c}$ .

Rozdzielenie barw można zwiększyć, używając na przykład pryzmatu szklanego o trójkątnym przekroju poprzecznym, takiego jak na rysunku 34.21a. Rozszczepienie na pierwszej powierzchni załamującej (po lewej stronie na rys. 34.21a. b) zostaje następnie zwiększone przez rozszczepienie na drugiej powierzchni.

Chyba najbardziej zachwycającym przykładem rozszczepienia światła jest tęcza. Jeżeli na drodze promieni słonecznych pojawią się krople padającego deszczu, to część światła ulega załamaniu przy wnikaniu do kropli, a następnie odbija



a)



b)

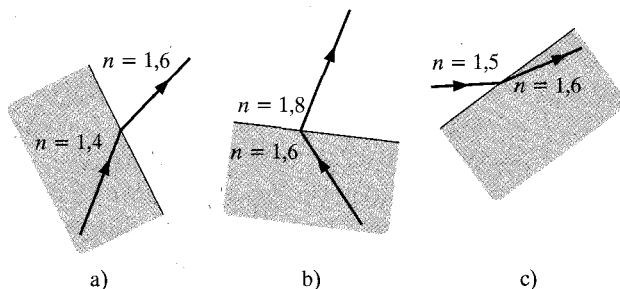
Rys. 34.22. a) Tęcza ma zawsze kształt kołowego łuku utworzonego wokół kierunku, w którym patrzyłbyś wtedy, gdybyś spoglądał prosto od strony Słońca. W zwykłych warunkach ogląda się zazwyczaj tylko niezbyt długi fragment łuku, ale jeśli obserwacje prowadzi się z wysokości, to można zaobserwować nawet pełen okrąg. b) Rozdzielanie barw w wyniku załamania światła przy wnikaniu i wychodzeniu z kropli deszczu prowadzi do powstania tęczy. Na rysunku zilustrowano sytuację, w której Słońce jest na horyzoncie (promienie słoneczne są wówczas poziome). Pokazane są kierunki promieni niebieskich i czerwonych z dwóch kropli. Na obserwowane promienie niebieskie i czerwone składa się załamanie światła w wielu innych kroplach (i to samo dotyczy innych barw pośrednich)



się od wewnętrznej powierzchni kropli i ulega kolejnemu załamaniu przy wyjściu z kropli (rys. 34.22). Tak jak w pryzmacie, pierwsze załamanie rozszczepia światło słoneczne na barwy składowe, a drugie załamanie zwiększa ich rozszczepienie.

Tęcza, którą oglądasz, jest utworzona przez światło załamane w bardzo wielu kroplach; barwa czerwona pochodzi z kropeł, których położenie katowe na niebie jest wyższe, barwa niebieska — z kropeł o nieco niższym położeniu katowym, a wszystkie barwy pośrednie między tymi dwiema skrajnymi barwami — z kropeł o pośrednich położeniach katowych. Światło o różnych barwach dociera do ciebie z kropli, których położenie katowe jest bliskie  $42^\circ$  po stronie dokładnie przeciwnej niż Słońce. Jeżeli opad jest intensywny i jasno oświetlony, to obserwujesz kolisty łuk z barwą czerwoną na górze i niebieską u dołu. Twoja tęcza jest zawsze osobista, ponieważ inny obserwator odbiera światło z innych kropeł.

**SPRAWDZIAN 5:** Która (może żadna) z ilustracji zjawiska załamania pokazana na danych niżej rysunkach jest przypadkiem fizycznie możliwym?



### Przykład 34.4

a) Na rysunku 34.23a wiązka światła monochromatycznego ulega odbiciu i załamaniu w punkcie A na powierzchni granicznej między ośrodkiem 1 o współczynniku załamania światła  $n_1 = 1,33$  i ośrodkiem 2 o współczynniku  $n_2 = 1,77$ . Promień padający tworzy z powierzchnią graniczną kąt  $50^\circ$ . Jaki jest kąt odbicia w punkcie A? Jaki jest w tym punkcie kąt załamania?

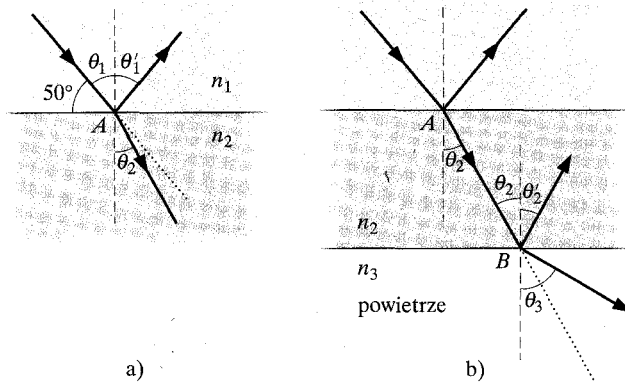
#### ROZWIĄZANIE:

Podstawowym spostrzeżeniem jest fakt, że przy każdym odbiciu kąt odbicia jest równy kątowi padania. Ponadto, kąty dla obu promieni (padającego i odbitego) są mierzone względem normalnej do powierzchni w punkcie odbicia. Na rysunku 34.23a normalna do powierzchni została narysowana linią przerywaną. Zauważ zatem, że kąt padania nie jest równy  $50^\circ$ , lecz wynosi  $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ . Wobec tego kąt odbicia jest równy

$$\theta'_1 = \theta_1 = 40^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Światło, przechodząc w punkcie A z ośrodka 1 do ośrodka 2, ulega załamaniu. Przy rozważaniu załamania podstawową obserwacją jest fakt że kąt padania i kąt załamania można powiązać ze współczynnikami załamania światła obu ośrodków równaniem (34.44)

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1. \quad (34.46)$$



**Rys. 34.23.** Przykład 34.4. a) Światło odbija się i załamuje w punkcie A na powierzchni granicznej między dwoma ośrodkami 1 i 2. b) Światło, które przechodzi przez ośrodek 2, odbija się i załamuje w punkcie B na powierzchni granicznej między ośrodkami 2 i 3 (powietrze)

Tak jak poprzednio i w tym przypadku kąty między promieniami świetlnymi i normalną do powierzchni granicznej mierzymy w punkcie załamania. Kątem załamania na rysunku 34.23a jest kąt

oznaczony przez  $\theta_2$ . Rozwiązując równanie (34.46), otrzymujemy


$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) = \arcsin\left(\frac{1,33}{1,77} \sin 40^\circ\right) \\ = 28,88^\circ \approx 29^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten oznacza, że wiązka światła zbliża się w stronę normalnej (w ośrodku 1 tworzyła ona z normalną kąt  $40^\circ$ , a po wejściu do ośrodka 2 tworzy kąt  $29^\circ$ ). Powodem tej zmiany jest to, że światło przeszło do ośrodka o większym współczynniku załamania światła.


b) Światło, które w punkcie  $A$  weszło do ośrodka 2, osiąga w punkcie  $B$  granicę między ośrodkiem 2 i ośrodkiem 3, którym jest powietrze (patrz rys. 34.23b). Powierzchnia graniczna, która zawiera punkt  $B$ , jest równoległa do powierzchni rozgraniczającej ośrodki 1 i 2. Tak jak poprzednio, w punkcie  $B$  część światła ulega odbiciu, a część załamaniu. Jaki jest kąt odbicia? Jaki jest kąt załamania w punkcie  $B$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Musimy najpierw powiązać jeden z kątów w punkcie  $B$  ze znanym kątem w punkcie  $A$ . Obie powierzchnie graniczne są do siebie równoległe, wobec tego kąt padania w punkcie  $B$  musi być równy

kątowi załamania  $\theta_2$ , tak jak to zaznaczono na rysunku 34.23b. Do określenia kąta odbicia skorzystamy z tej samej podstawowej obserwacji, z której skorzystaliśmy przy rozwiązaniu punktu (a), tzn.  z prawa odbicia. Zatem kąt odbicia w punkcie  $B$  jest równy

$$\theta'_2 = \theta_2 = 28,88^\circ \approx 29^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Światło, przechodząc z ośrodka 2 do powietrza, ulega załamaniu, a kąt załamania wynosi  $\theta_3$ . I tym razem punktem wyjścia do rozwiązania  jest prawo załamania. Przepisujemy zatem równanie (34.46) w postaci

$$n_3 \sin \theta_3 = n_2 \sin \theta_2.$$

Rozwiązując je ze względu na  $\theta_3$ , otrzymujemy

$$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin \theta_2\right) = \arcsin\left(\frac{1,77}{1} \sin 28,88^\circ\right) \\ = 58,75^\circ \approx 59^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten oznacza, że wiązka światła po przejściu do powietrza oddala się od normalnej (w ośrodku 2 tworzyła ona z normalną kąt  $29^\circ$ , a po wejściu do powietrza tworzy kąt  $59^\circ$ ). Powodem tej zmiany jest to, że światło przeszło do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła (jakim jest powietrze).

## 34.8. Całkowite wewnętrzne odbicie

Na rysunku 34.24 promień światła monochromatycznego, wysyłane w szkle przez punktowe źródło  $S$ , padają na granicę między szkłem i powietrzem. Promień  $a$ , prostopadły do powierzchni granicznej między obydwoma ośrodkami, częściowo ulega odbiciu, a częściowo przechodzi do powietrza bez zmiany kierunku.

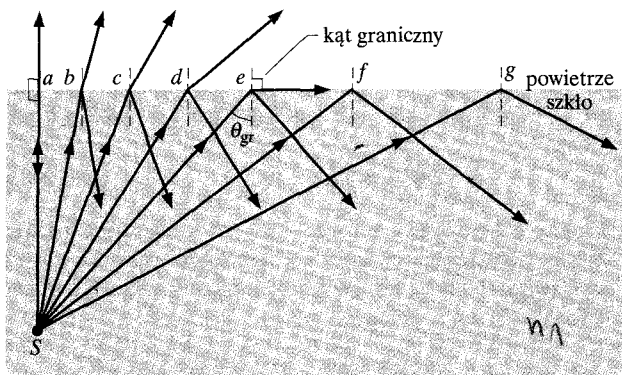
Promień od  $b$  do  $e$ , dla których kolejno wzrasta kąt padania na powierzchnię graniczną, doznają zarówno odbicia, jak i załamania. Ich kąt padania wzrasta, wobec tego rośnie również ich kąt załamania i dla promienia  $e$  jest on równy  $90^\circ$ , co oznacza, że promień załamany ślizga się po powierzchni granicznej między ośrodkami. Kąt padania, przy którym dochodzi do takiej sytuacji, jest nazywany **kątem granicznym**  $\theta_{gr}$ . Dla kątów większych od kąta  $\theta_{gr}$ , tzn. w przypadku promieni  $f$  i  $g$ , nie ma już promienia załamane i całe światło ulega odbiciu — to zjawisko nazywamy zjawiskiem **całkowitego wewnętrznego odbicia**.

Aby wyznaczyć kąt  $\theta_{gr}$ , skorzystamy z równania (34.44); oznaczymy wskaźnikiem 1 szkło, a wskaźnikiem 2 powietrze, zamiast  $\theta_1$  podstawimy  $\theta_{gr}$ , a za  $\theta_2$  podstawimy  $90^\circ$ :

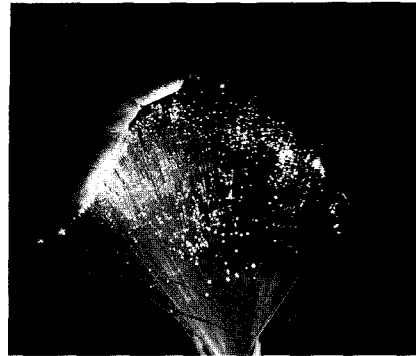
$$n_1 \sin \theta_{gr} = n_2 \sin 90^\circ,$$

skąd

$$\theta_{gr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{kąt graniczny}). \quad (34.47)$$



Rys. 34.24. Całkowne wewnętrzne odbicie światła wysyłanego z punkтового źródła światła  $S$  umieszczonego w szkłe zachodzi dla wszystkich kątów większych od kąta granicznego  $\theta_{gr}$ . Przy kącie granicznym promień załamany ślizga się po powierzchni granicznej szkło–powietrze



Rys. 34.25. Światło wprowadzone na jednym końcu światłowodu (wiązki szklanych włókien) jest, w wyniku wielokrotnego całkowitego odbicia od ścianek włókien, przesyłane do jego przeciwnego końca z małymi stratami

Wartość funkcji sinus nie może przekraczać jedności, zatem w tym równaniu  $n_2$  nie może być większe od  $n_1$ . To ograniczenie oznacza, że zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia nie zachodzi wtedy, gdy światło znajduje się w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania światła. Gdyby na rysunku 34.24 źródło światła  $S$  było umieszczone w powietrzu, to wszystkie wychodzące z niego promienie padające na granicę powietrze–szkło (również i promienie  $f$  i  $g$ ) byłyby zarówno odbijane, jak i załamane na granicy ośrodków.

Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia znalazło wiele zastosowań w technikach medycznych. Na przykład lekarz może szukać wrzodu w żołądku, posługując się *światłowodami*, czyli wiązkami włókien szklanych (rys. 34.25), wprowadzanymi przez gardło i przełyk do przewodu pokarmowego pacjenta. Światło wprowadzone przez zewnętrzny koniec jednego ze światłowodów doznaje wielokrotnego całkowitego odbicia we włóknach światłowodu i mimo że wprowadzony do przewodu pokarmowego światłowód jest skręcony, większość światła dociera do drugiego końca światłowodu i oświetla wnętrze żołądka. Pewna część tego światła, odbita od oświetlanego wnętrza żołądka, trafia do drugiego światłowodu i na takiej samej zasadzie jak w pierwszym światłowodzie wędruje na zewnątrz organizmu pacjenta, a tam jest odbierana i przetwarzana na obraz oglądany przez lekarza na ekranie monitora.

### Przykład 34.5

Na rysunku 34.26 trójkątny pryzmat szklany jest umieszczony w powietrzu; promień padający prostopadłe na ścianę boczną pryzmatu wnika do jego wnętrza i ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu od podstawy pryzmatu, która stanowi powierzchnię graniczną szkło–powietrze. Co możesz powiedzieć o współczynniku załamania światła  $n$  dla szkła, wiedząc, że kąt  $\theta_1$  jest, tak jak to zilustrowano na rysunku, równy  $45^\circ$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Promień świetlny doznaje w pryzmacie całkowitego wewnętrznego odbicia, zatem kąt graniczny  $\theta_{gr}$  musi być mniejszy od kąta padania, który wynosi  $45^\circ$ .
2. Korzystając z prawa załamania, możemy powiązać współczynnik załamania światła  $n$  dla szkła z kątem  $\theta_{gr}$ , co prowadzi do równania (34.47). Podstawienie do tego równania  $n_2 = 1$  (dla

powietrza) oraz  $n_1 = n$  (dla szkła) daje

$$\theta_{gr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{n}.$$

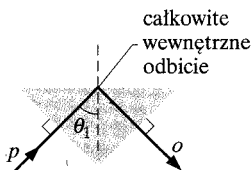
Kąt  $\theta_{gr}$  musi być mniejszy od kąta padania  $45^\circ$ , wobec tego mamy

$$\arcsin \frac{1}{n} < 45^\circ,$$

skąd

$$\frac{1}{n} < \sin 45^\circ,$$

**Rys. 34.26.** Przykład 34.5. Promień padający  $p$  ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na granicy szkło–powietrze i staje się promieniem odbitym



czyli

$$n > \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1,4. \quad (\text{odpowiedź})$$

Współczynnik załamania światła dla szkła musi być większy od 1,4, w przeciwnym razie promień padający na podstawę pryzmatu nie będzie ulegał całkowitemu wewnętrznemu odbiciu.

**SPRAWDZIAN 6:** Przypuśćmy, że pryzmat w rozwiązanym wyżej przykładzie ma współczynnik załamania światła  $n = 1,4$ . Czy światło będzie nadal ulegać całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, gdy nie zmieniając kierunku promienia padającego, obrócimy pryzmat (w płaszczyźnie rysunku 34.26): a) o  $10^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara i b) o  $10^\circ$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara?

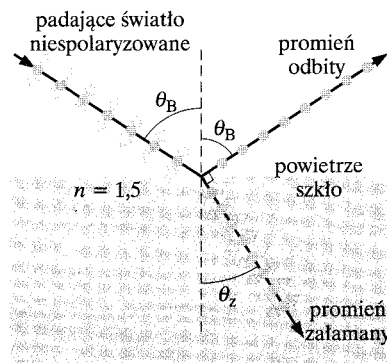
## 34.9. Polaryzacja przy odbiciu

Obserwując światło słoneczne odbite od powierzchni, na przykład wody, przez jakikolwiek polaryzator (np. polaryzacyjne okulary słoneczne), możesz zmieniać jego blask, obracając polaryzator wokół kierunku obserwacji. Jest to możliwe z tej przyczyny, że światło przy odbiciu od powierzchni zostaje całkowicie lub częściowo spolaryzowane.

Na rysunku 34.27 pokazano promień światła niespolaryzowanego padający na powierzchnię szkła. Rozłóżmy wektory pola elektrycznego światła na dwie składowe: 1) *składowe prostopadłe* do płaszczyzny padania, to znaczy do płaszczyzny kartki — na rysunku 34.27 te składowe są przedstawione za pomocą kropek (tak jak byśmy widzieli końce wektorów); 2) *składowe równoległe* do płaszczyzny padania, to znaczy do płaszczyzny kartki; są przedstawione jako podwójne strzałki. Światło jest niespolaryzowane, dlatego też obie składowe mają jednakową wartość.

Światło odbite ma również dwie składowe, ale ich wartości nie są takie same. Oznacza to, że światło odbite jest częściowo spolaryzowane — amplitudy drgań wektora pola elektrycznego w jednym kierunku są większe niż w innych kierunkach. Kiedy jednak światło pada pod pewnym określonym kątem, nazywanym *kątem Brewstera*  $\theta_B$ , wówczas w świetle odbitym występują tylko składowe prostopadłe, tak jak to zilustrowano na rysunku 34.27. Światło jest wtedy całkowicie spolaryzowane prostopadłe do płaszczyzny padania. Składowe równoległe światła padającego nie giną, ale (wraz ze składowymi prostopadłymi) występują w świetle załamanym.

Szkło, woda i inne ośrodki dielektryczne, omawiane w paragrafie 26.7, mogą przy odbiciu polaryzować światło częściowo lub całkowicie. Obserwując światło słoneczne odbite od takiej powierzchni, widzimy jasne miejsce na powierzchni odbijającej. Jeżeli powierzchnia jest pozioma, tak jak na rysunku 34.27, to światło odbite jest całkowicie lub częściowo spolaryzowane poziomo. Dlatego przeciwsłoneczne okulary polaryzacyjne mają pionowy kierunek polaryzacji, co pozwala eliminować taki oślepiający blask poziomych powierzchni.



- składowa prostopadła do powierzchni kartki
- ◐ składowa równoległa do powierzchni kartki

**Rys. 34.27.** Rozchodzący się w powietrzu promień światła niespolaryzowanego pada na powierzchnię szklaną pod kątem Brewstera  $\theta_B$ . Pole elektryczne fali wzdłuż promienia zostało rozłożone na składowe: prostopadłą do płaszczyzny kartki (płaszczyzna padania, odbicia i załamania) i równoległą do płaszczyzny kartki. Światło odbite zawiera tylko składowe prostopadłe i wobec tego jest spolaryzowane w tym kierunku. Światło załamane zawiera pierwotne składowe równoległe do płaszczyzny kartki, a także składowe prostopadłe o mniejszym natężeniu; to światło jest częściowo spolaryzowane

## Prawo Brewstera

Doświadczalnie możemy się przekonać, że dla światła padającego pod kątem Brewstera  $\theta_B$  promień odbity i promień załamany są wzajemnie do siebie prostopadłe. Na rysunku 34.27 kąt odbicia jest równy  $\theta_B$ , a kąt załamania  $\theta_z$ , zatem otrzymujemy

$$\theta_B + \theta_z = 90^\circ. \quad (34.48)$$

Te dwa kąty łączy również równanie (34.44). Jeżeli w równaniu (34.44) przyjmiemy, że wskaźnik 1 odnosi się do ośrodka, w którym rozchodzą się oba promienie, padający i odbity, to możemy równanie to przepisać jako

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_z.$$

Połączenie tych dwóch równań prowadzi do

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos \theta_B,$$

co ostatecznie daje

$$\theta_B = \arctg \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{kąt Brewstera}). \quad (34.49)$$

(Zwróć uwagę na fakt, że wskaźniki w równaniu (34.49) nie są już dowolne, gdyż podjęliśmy decyzję, co one oznaczają). Jeżeli promienie padający i odbity rozchodzą się w powietrzu, to możemy przyjąć, że  $n_1$  jest równy jedności, a  $n_2$  oznaczyć przez  $n$ , co pozwoli nam zapisać równanie (34.49) w postaci

$$\theta_B = \arctg n \quad (\text{prawo Brewstera}). \quad (34.50)$$

Ta uproszczona wersja równania (34.49) znana jest jako **prawo Brewstera** (żarówno prawo, jak i kąt noszą nazwisko sir Davida Brewstera. Brewster odkrył doświadczalnie opisane prawo w 1812 r.).

## Podsumowanie

**Fale elektromagnetyczne** Fala elektromagnetyczna składa się z drgających (oscylujących) pól elektrycznych i magnetycznych. Różne możliwe częstotliwości fal elektromagnetycznych tworzą *widmo*, którego małym wycinkiem jest światło widzialne. Wartości natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$  fali elektromagnetycznej rozchodzącej się wzdłuż osi  $x$  zależą od  $x$  i od  $t$ :

$$E = E_m \sin(kx - \omega t)$$

oraz

$$B = B_m \sin(kx - \omega t), \quad (34.1, 34.2)$$

gdzie  $E_m$  i  $B_m$  są amplitudami  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . Zmienne pole elektryczne indukuje pole magnetyczne i na odwrót. Prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w próżni  $c$  jest równa

$$c = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (34.5, 34.3)$$

gdzie  $E$  jest wartością natężenia pola elektrycznego i  $B$  — wartością indukcji pola magnetycznego w tej samej chwili.

**Przepływ energii** Szybkość, z jaką energia fali elektromagnetycznej jest przenoszona przez jednostkową powierzchnię, dana

jest przez wektor Poyntinga  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (34.19)$$

Kierunek wektora  $\vec{S}$  (a tym samym kierunek rozchodzenia się fali i przepływu energii) jest prostopadły do kierunków wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . Uśredniona w czasie szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię  $S_{sr}$  nazywa się *natężeniem I* fali:

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{sr,kw}^2, \quad (34.26)$$

gdzie  $E_{sr,kw} = E_m/\sqrt{2}$ . *Punktowe źródło* fal elektromagnetycznych emituje fale *izotropowo*, tzn. z jednakowym natężeniem we wszystkich kierunkach. Natężenie fali w odległości  $r$  od punkowego źródła o mocy  $P_{zr}$  jest równe

$$I = \frac{P_{zr}}{4\pi r^2}. \quad (34.27)$$

**Ciąśnienie promieniowania** Promieniowanie elektromagnetyczne działa siłą i wywiera ciśnienie na powierzchnie napotykaną na swej drodze. Jeżeli promieniowanie jest w całości absorbowane

przez powierzchnię, to działająca na powierzchnię siła jest równa

$$F = \frac{IS}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}), \quad (34.32)$$

gdzie  $I$  jest natężeniem promieniowania, a  $S$  jest polem powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się promieniowania. Jeżeli promieniowanie ulega całkowitemu odbiciu wstecznemu od powierzchni, to siła działająca na powierzchnię jest równa

$$F = \frac{2IS}{c} \quad (\text{całkowite odbicie wsteczne}). \quad (34.33)$$

Ciśnienie promieniowania  $p_p$  to siła działająca na jednostkową powierzchnię:

$$p_p = \frac{I}{c} \quad (\text{całkowita absorpcja}) \quad (34.34)$$

oraz

$$p_p = \frac{2I}{c} \quad (\text{całkowite odbicie wsteczne}). \quad (34.35)$$

**Polaryzacja** Fale elektromagnetyczne są **spolaryzowane** wtedy, gdy wszystkie wektory natężeń ich pól elektrycznych drgają w tej samej płaszczyźnie, zwanej *płaszczyzną drgań*. Fale świetlne wysyłane przez zwykłe źródła nie są spolaryzowane.

**Polaryzatory** Kiedy na drodze światła znajduje się polaryzator (np. folia polaryzacyjna, polaroid), wówczas przepuszczane są tylko te składowe wektora elektrycznego światła, które są równoległe do **kierunku polaryzacji** polaryzatora; składowe prostopadłe do kierunku polaryzacji są pochłaniane. Światło wychodzące z polaryzatora jest spolaryzowane równoległe do kierunku polaryzacji polaryzatora.

Jeżeli światło padające na polaryzator jest niespolaryzowane, to natężenie światła przechodzącego przez polaryzator jest równe połowie jego początkowego natężenia  $I_0$ :

$$I = \frac{1}{2} I_0. \quad (34.40)$$

Jeżeli światło padające na polaryzator jest spolaryzowane, to natężenie światła przechodzącego przez polaryzator zależy od kąta, jaki tworzy kierunek polaryzacji światła z kierunkiem polaryzacji polaryzatora:

$$I = I_0 \cos^2 \theta. \quad (34.42)$$

**Optyka geometryczna** Optyka geometryczna jest przybliżonym opisem światła, w którym fale świetlne są traktowane jak prostoliniowe promienie.

**Odbicie i załamanie** Kiedy promień świetlny pada na granicę między dwoma przezroczystymi ośrodkami, wówczas obserwujemy na ogół pojawienie się promienia **odbitego** i promienia **załamanego**. Oba te promienie pozostają w płaszczyźnie padania.

**Kąt odbicia** jest równy kątowi padania, a **kąt załamania** jest związany z kątem padania zależnością

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (\text{załamanie}), \quad (34.44)$$

gdzie  $n_1$  i  $n_2$  są współczynnikami załamania światła ośrodków, w których rozchodzą się odpowiednio promień padający i promień załamany.

**Całkowite wewnętrzne odbicie** Jeżeli fala świetlna przechodzi z ośrodka o większym współczynniku załamania światła do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła, to doznaje **całkowitego wewnętrznego odbicia** wtedy, gdy kąt jej padania na granicę ośrodków przekracza wartość **kąta granicznego**  $\theta_{gr}$

$$\theta_{gr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{kąt graniczny}). \quad (34.47)$$

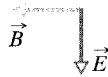
**Polaryzacja przy odbiciu** Odbita fala świetlna jest całkowicie spolaryzowana (przy czym wektory  $\vec{E}$  pól elektrycznych są prostopadłe do płaszczyzny padania) wtedy, gdy pada ona na powierzchnię graniczną dwóch ośrodków pod **kątem Brewstera**  $\theta_B$ :

$$\theta_B = \arctg \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{kąt Brewstera}). \quad (34.49)$$

## Pytania

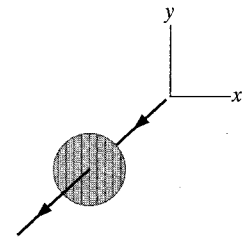
1. Pole magnetyczne fali świetlnej oscyluje równoległe do kierunku osi  $y$ , a zatem opisane jest wzorem  $B_y = B_m \sin(kz - \omega t)$ . a) Jaki jest kierunek rozchodzenia się tej fali? b) Jaki jest kierunek oscylacji pola elektrycznego związanego z tym polem magnetycznym?

2. Na rysunku 34.28 pokazano wektory pól elektrycznego i magnetycznego fali elektromagnetycznej w pewnym wybranym momencie. Czy fala rozchodzi się w kierunku za kartkę książki, czy też w kierunku przeciwnym?



Rys. 34.28. Pytanie 2

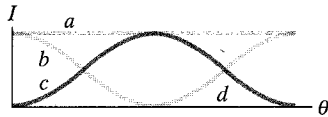
3. a) Na rysunku 34.29 światło pada na polaryzator, którego kierunek polaryzacji jest równoległy do kierunku osi  $y$ . Obracamy polaryzator o  $40^\circ$  wokół wskazanego na rysunku kierunku rozchodzenia się światła. Czy w trakcie tego obrotu natężenie światła przechodzącego przez polaryzator będzie malało, rosło, czy też nie będzie się zmieniać, wtedy gdy światło jest pierwotnie: a) niespolaryzowane, b) spolaryzowane równoległe do osi  $x$ , c) spolaryzowane równoległe do osi  $y$ ?



Rys. 34.29. Pytanie 3

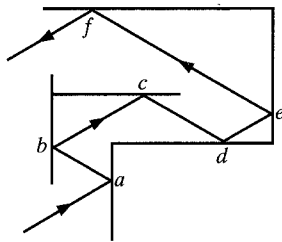
4. Przyjmij, że światło na rysunku 34.16a padające na polaryzator 1 jest spolaryzowane równoległe do osi  $x$ . Zapisz stosunek końcowego natężenia światła  $I_3$ , po przejściu przez cały układ, do początkowego natężenia  $I_0$  jako  $I_3/I_0 = A \cos^n \theta$ . Jakie będą  $A$ ,  $n$  oraz  $\theta$  wtedy, gdy kierunek polaryzacji pierwszego polaryzatora skrećmy: a) o  $60^\circ$  przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, w stosunku do jego pierwotnego kierunku?

5. Przypuśćmy, że obracamy drugi polaryzator na rysunku 34.16a, zaczynając od położenia, w którym jego kierunek polaryzacji jest równoległy do osi  $y$  ( $\theta = 0$ ), a kończąc na położeniu, w którym kierunek ten jest równoległy do osi  $x$  ( $\theta = 90^\circ$ ). Która z trzech krzywych na rysunku 34.30 prawidłowo opisuje zmiany natężenia światła przechodzącego przez układ trzech polaryzatorów podczas takiego obrotu drugiego polaryzatora?



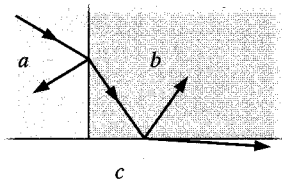
Rys. 34.30. Pytanie 5

6. Na rysunku 34.31 zilustrowano wielokrotne odbicia promienia świetlnego w labiryncie, którego szklane ściany są do siebie albo nawzajem prostopadłe, albo równoległe. Jakie są kąty odbicia promienia w punktach  $b, c, d, e$  i  $f$ , jeżeli kąt padania promienia w punkcie  $a$  wynosi  $30^\circ$ ?



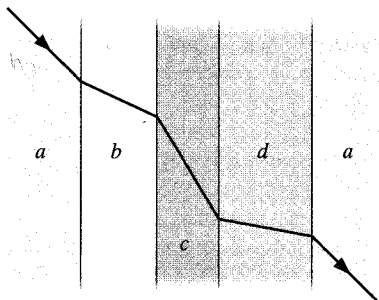
Rys. 34.31. Pytanie 6

7. Na rysunku 34.32 pokazane są promienie światła monochromatycznego przechodzące przez trzy ośrodki  $a, b$  i  $c$ . Uszereguj te ośrodki według malejącego współczynnika załamania światła.



Rys. 34.32. Pytanie 7

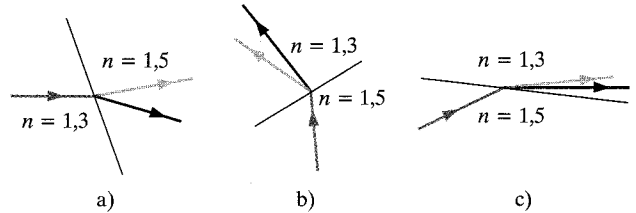
8. Na rysunku 34.33 światło przechodzi z ośrodka  $a$  kolejno przez trzy równoległe warstwy innych ośrodków i wchodzi ponownie



Rys. 34.33. Pytanie 8

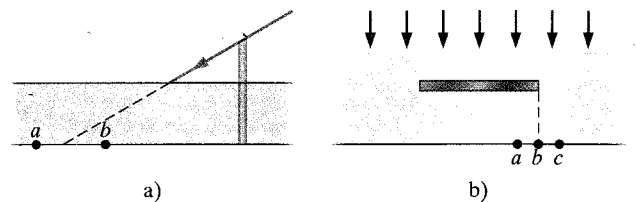
do ośrodka  $a$ . Pokazano załamanie światła na granicy kolejnych ośrodków (odbicie zostało pominięte). Uszereguj te ośrodki wedle malejącego współczynnika załamania światła.

9. Na każdej z trzech części rysunku 34.34 pokazano załamanie światła na granicy dwóch ośrodków. Promień padający (promień szary na rysunku) zawiera składową czerwoną i niebieską. Dla każdego ośrodka podane zostały przybliżone wartości współczynnika załamania dla światła białego. Które z trzech rysunków ilustrują możliwy fizycznie przypadek załamania?



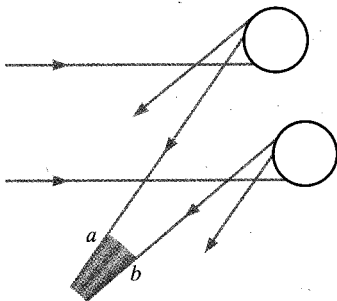
Rys. 34.34. Pytanie 9

10. Na rysunku 34.35a pokazano promień światła słonecznego, który zaledwie prześlizguje się ponad pionowym prętem umieszczonym w basenie z wodą. a) Czy promień ten trafi na dnie basenu w pobliżu punktu  $a$ , czy też punktu  $b$ ? b) Która ze składowych promienia słonecznego, czerwona czy niebieska, znajdzie się bliżej pręta? c) Na rysunku 34.35b pokazany jest płaski przedmiot (np. żyletka) pływający w płytkiej wodzie i oświetlony pionowo z góry. W wyniku działania siły ciężkości i napięcia powierzchniowego powierzchnia wody ugina się tak, jak na rysunku. W pobliżu którego z punktów ( $a, b$  lub  $c$ ) znajdzie się krawędź cienia przedmiotu? (Na prawo od krawędzi cienia koncentruje się wiele promieni światła słonecznego, wytwarzając szczególnie jasny obszar zwany *kaustyką*).



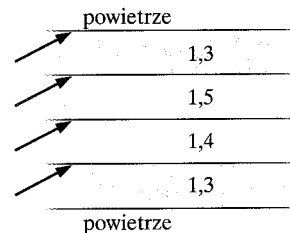
Rys. 34.35. Pytanie 10

11. Na rysunku 34.36 pokazano niektóre promienie światła słonecznego odpowiedzialne za powstawanie *tęczy pierwotnej* (wynikającej z jednokrotnego odbicia promienia we wnętrzu kropki wody). Słabsza i rzadziej spotykana *tęcza wtórna* (wynikająca z dwukrotnego odbicia promienia we wnętrzu kropki) może pojawiać się ponad tęczą pierwotną, a tworzona jest przez promienie, które wchodzi do kropli i wychodzą z nich tak, jak zilustrowano to na rysunku 34.36 (na którym nie zaznaczono barw). Który z promieni,  $a$  czy  $b$ , odpowiada światłu czerwonemu?



Rys. 34.36. Pytanie 11

12. Układ czterech długich, poziomych warstw z różnych materiałów (o podanych współczynnikach załamania światła) na rysunku 34.37 znajduje się w powietrzu. Do każdej warstwy z jej lewego końca wprowadzany jest promień świetlny, tak jak to zilustrowano na rysunku. W której warstwie (podaj jej współczynnik załamania światła) możliwe jest całkowite uwięzienie promienia w taki sposób, że po wielokrotnych odbiciach całe wprowadzone do niej światło opuści ją na prawym końcu?



Rys. 34.37. Pytanie 12

## Zadania

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
 ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
 ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
 wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
 Ware (na tej samej stronie)

### 34.1 Tęcza Maxwella

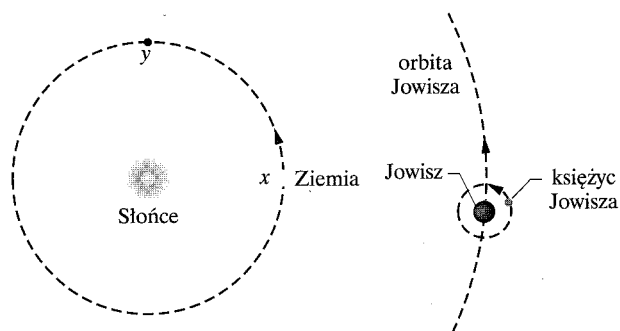
1. a) W jakim czasie sygnał radiowy przebywa drogę od nadajnika do anteny odbiorczej odległej o 150 km? b) Księżyc w pełni oglądamy w odbitym świetle słonecznym. Ile czasu zajęło światłu przebycie drogi ze Słońca do naszego oka? Odległości Ziemia–Księżyc i Ziemia–Słońce wynoszą odpowiednio  $3,8 \cdot 10^5$  km i  $1,5 \cdot 10^8$  km. c) Ile czasu potrzebuje światło na pokonanie tam i z powrotem odległości z Ziemi do statku kosmicznego na orbicie wokół Saturna, który jest odległy od Ziemi o  $1,3 \cdot 10^9$  km? d) Jak się przypuszcza, Mgławica Kraba odległa o ok. 6500 lat świetlnych jest wynikiem wybuchu gwiazdy supernowej, który zarejestrowali chińscy astronomowie w 1054 r. naszej ery. W którym mniej więcej roku zdarzył się rzeczywiście ten wybuch?

2. Projekt Seafarer (Żeglarz) był ambitnym programem budowy olbrzymiej anteny, zakopanej pod ziemią na obszarze o powierzchni ok. 10 000 km<sup>2</sup>. Antena ta miała służyć do transmisji sygnałów do łodzi podwodnych w głębokim zanurzeniu. Jakie byłyby: a) częstota oraz b) okres emitowanego promieniowania, gdyby jego efektywna długość fali była równa  $1 \cdot 10^4$  promienia Ziemi? Zazwyczaj promieniowanie elektromagnetyczne nie wnika zbyt głęboko do takich przewodników, jak woda morska.

3. a) Dla jakiej długości fali świetlnej oko przeciętnego obserwatora ma połowę swojej maksymalnej czułości? b) Dla jakich długości, częstości i okresu drgań fali świetlnej przypada maksimum czułości oka?

4. Pewien laser helowo-neonowy emituje czerwone światło o długości fali z wąskiego pasma o maksimum występującym przy 632,8 nm i szerokości 0,01 nm. Podaj szerokość tego pasma w skali częstości światła.

5. Metoda wyznaczania prędkości rozchodzenia się światła opracowana w 1676 r. przez Roemera, polegała na obserwacjach pozornego czasu obiegu jednego z księżyców Jowisza wokół tej planety. Rzeczywisty czas obiegu wynosi 42,5 h. a) Ile wyniesie zmiana pozornego czasu obiegu tego księżyca wtedy, gdy Ziemia na swej orbicie wokół Słońca przejdzie od punktu  $x$  do punktu  $y$  na rysunku 34.38, przy założeniu, że prędkość światła jest skończona? b) Jakie obserwacje trzeba wykonać, żeby obliczyć prędkość rozchodzenia się światła? Zaniedбай przy tym zmiany położenia Jowisza na jego orbicie. Rysunek 34.38 jest tylko szkicem, na którym skala odległości nie jest zachowana.



Rys. 34.38. Zadanie 5

### 34.2 Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej. Opis jakościowy

6. Oblicz długość fali elektromagnetycznej emitowanej przez antenę na rysunku 34.3, wiedząc, że  $L = 0,253 \mu\text{H}$ , a  $C = 25 \text{ pF}$ .



7. Ile powinna wynosić indukcyjność w obwodzie drgającym zawierającym kondensator o pojemności 17 pF, ażeby układ ten mógł generować fale elektromagnetyczne o długości 550 nm (tzn. światło widzialne)? Skomentuj swoją odpowiedź.

### 34.3 Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej. Opis ilościowy

8. Maksymalne natężenie pola elektrycznego pewnej płaskiej fali elektromagnetycznej wynosi  $3,2 \cdot 10^{-4}$  V/m. Znajdź maksymalną wartość indukcji pola magnetycznego tej fali.

9. Natężenie pola elektrycznego pewnej płaskiej fali elektromagnetycznej jest dane jako:  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$  oraz  $E_z = 2 \cos[\pi \cdot 10^{15}(t - x/c)]$ , gdzie  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s (wszystkie wielkości wyrażono w układzie SI). Fala rozchodzi się w dodatnim kierunku osi  $x$ . Podaj odpowiednie wyrażenia opisujące składowe indukcji pola magnetycznego tej fali.

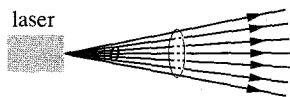
### 34.4 Przepływ energii i wektor Poyntinga

10. Wyznaczając kierunek wektora Poyntinga  $\vec{S}$  dla sytuacji zilustrowanych na rysunkach od 34.4 do 34.7, pokaż, że kierunki drgań pól elektrycznych i magnetycznych są zawsze zgodne z założonym kierunkiem rozchodzenia się fal.

11. Niektóre lasery na szkle neodymowym mogą w impulsie o długości fali 0,26  $\mu\text{m}$  i czasie trwania 1 ns wysłać promieniowanie o mocy 100 TW. Ile energii dostarcza taki impuls?

12. Najbliższa sąsiadująca z nami gwiazda *Proxima Centauri* znajduje się w odległości 4,3 lat świetlnych. Sugerowano, że programy telewizyjne z naszej planety mogły być obejrzone przez hipotetyczne inteligentne istoty zasiedlające hipotetyczną planetę okrążającą tę gwiazdę. Ile wynosiłoby natężenie sygnału telewizyjnego docierającego z Ziemi do *Proxima Centauri*, gdyby telewizyjna stacja nadawcza na Ziemi miała moc 1 MW?

13. Promieniowanie wysyłane przez laser rozchodzi się w postaci wąskiego stożka o kołowym przekroju poprzecznym. Kąt wierzchołkowy stożka  $\theta$  nazywa się *kątem rozbieżności wiązki* (rys. 34.39). Przypuśćmy, że laser argonowy wysyłający promieniowanie o długości fali 514,5 nm jest nakierowany, w ramach eksperymentu wyznaczania odległości, w stronę Księżyca. Jaką powierzchnię na Księżycu oświetli wiązka tego lasera, jeżeli kąt rozbieżności wiązki wynosi 0,88  $\mu\text{rad}$ ?



Rys. 34.39. Zadanie 13

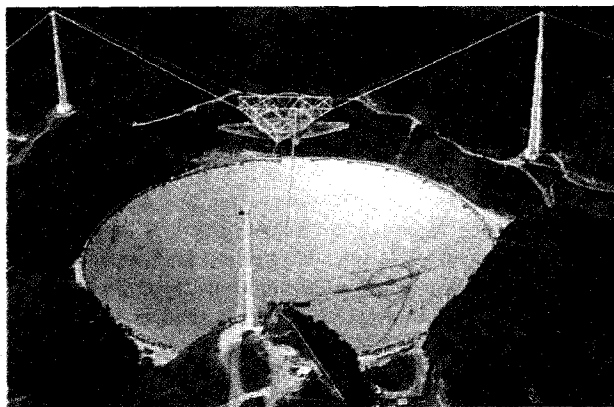
14. Ile wynosi natężenie biegnącej płaskiej fali elektromagnetycznej, jeżeli  $B_m$  jest równe  $1 \cdot 10^{-4}$  T?

15. W płaskiej fali radiowej maksymalna wartość składowej elektrycznej wynosi 5 V/m. Oblicz: a) maksymalną wartość składowej magnetycznej oraz b) natężenie fali.

16. Światło słoneczne nieco powyżej atmosfery ziemskiej ma natężenie  $1,4 \text{ kW/m}^2$ . Oblicz  $E_m$  i  $B_m$  dla tego światła, przyjmując, że jest ono falą płaską.

17. Maksymalne natężenie pola elektrycznego w odległości 10 m od izotropowego punktowego źródła światła wynosi 2 V/m. Ile wynosi w tym miejscu: a) maksymalna wartość indukcji pola magnetycznego i b) średnie natężenie światła? c) Ile wynosi moc tego źródła?

18. Frank D. Drake, badacz uczestniczący w programie SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence — poszukiwanie pozaziemskiej inteligencji) powiedział kiedyś, że wielki radioteleskop w Arecibo w Portoryko (rys. 34.40) „może wykryć sygnał, którego moc docierająca do powierzchni Ziemi wynosi zaledwie jeden pikowat.” a) Jaką moc odbierałaby antena radioteleskopu w Arecibo przy takim sygnale? Średnica anteny wynosi 300 m. b) Jaką moc musiałoby mieć źródło znajdujące się w środku naszej Galaktyki, aby na Ziemię dotarł taki sam sygnał? Nasza odległość od środka Galaktyki wynosi  $2,2 \cdot 10^4$  lat świetlnych. Przyjmij, że źródło emituje promieniowanie równomiernie we wszystkich kierunkach.



Rys. 34.40. Zadanie 18. Radioteleskop w Arecibo

19. Lecący samolot odbiera w odległości 10 km od naziemnej stacji nadawczej sygnał radiowy o natężeniu  $10 \mu\text{W/m}^2$ . Oblicz: a) amplitudę pola elektrycznego tego sygnału odbieranego w samolocie, b) odpowiednią amplitudę pola magnetycznego oraz c) całkowitą moc nadajnika, przy założeniu, że wysyła on sygnał równomiernie we wszystkich kierunkach.

### 34.5 Ciśnienie promieniowania

20. Czarny, całkowicie pochłaniający kawałek kartonu o polu powierzchni  $S = 2 \text{ cm}^2$  ustawiono na drodze wiązki światła o natężeniu  $10 \text{ W/cm}^2$ . Oblicz ciśnienie wywierane przez światło na ten kawałek kartonu.

21. Ciśnienie promieniowania laserów o wielkiej mocy wykorzystywane jest do ściskania plazmy (gazu naładowanych elektrycznie cząstek). Laser wytwarzający impulsy promieniowania o mocy

szczytowej  $1,5 \cdot 10^3$  MW jest zogniskowany na gęstej plazmie elektronowej na obszarze  $1 \text{ mm}^2$ . Wyznacz ciśnienie wywierane na plazmę w warunkach, gdy plazma odbija wstecz całe światło laserowe.

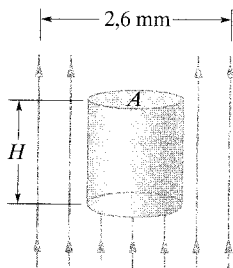
22. Promieniowanie słoneczne docierające do Ziemi ma tuż nad atmosferą ziemską natężenie  $1,4 \text{ kW/m}^2$ . a) Oblicz siłę działającą na Ziemię wynikającą z ciśnienia promieniowania słonecznego. Przyjmij, że Ziemia (wraz ze swą atmosferą) zachowuje się jak płaski dysk i że padająca na nią energia jest w całości absorbowana. b) Porównaj obliczoną siłę z siłą grawitacyjną, jaką Słońce przyciąga Ziemię.

23. Ile wynosi ciśnienie promieniowania wysyłanego przez żarówkę o mocy  $500 \text{ W}$  w odległości  $1,5 \text{ m}$  od niej? Przyjmij, że powierzchnia, na którą wywierane jest to ciśnienie, znajduje się naprzeciwko żarówki (która promieniuje równomiernie we wszystkich kierunkach), i że powierzchnia ta idealnie absorbuje docierające do niej promieniowanie.

24. Laser helowo-neonowy, powszechnie używany w laboratoriach, wytwarza wiązkę światła o długości fali  $633 \text{ nm}$  i mocy  $5 \text{ mW}$ . Wiązka jest ogniskowana przy użyciu soczewki w płamkę o przekroju kołowym, o średnicy równej w przybliżeniu 2 długościom fali świetlnej. Oblicz: a) natężenie zogniskowanej wiązki, b) ciśnienie promieniowania wywieranego przez wiązkę laserową na małą, idealnie absorbującą kulkę o rozmiarach takich, jak wielkość płamki ogniska wiązki, c) siłę działającą na tę kulkę, oraz d) przyspieszenie nadawane jej przez tę siłę. Przyjmij, że kulka ma gęstość  $5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

25. Płaska fala elektromagnetyczna o długości fali  $3 \text{ m}$  rozchodzi się w próżni w dodatnim kierunku osi  $x$ , a wektor natężenia jej pola elektrycznego ma kierunek osi  $y$  i amplitudę  $300 \text{ V/m}$ . a) Ile wynosi częstota  $\nu$  tej fali? b) Jakie są kierunek i amplituda wektora indukcji pola magnetycznego fali? c) Jakie są wartości  $k$  i  $\omega$ , jeżeli  $E = E_m \sin(kx - \omega t)$ ? d) Ile wynosi uśredniona po czasie szybkość przepływu energii tej fali (wyrażona w watach na metr kwadratowy)? e) Ile wynosi szybkość przekazywania pędu przez tę falę ustawionej na jej drodze całkowicie absorbującej kartce papieru o powierzchni  $2 \text{ m}^2$  i jakie jest ciśnienie promieniowania wywierane na kartkę?

26. Na rysunku 34.41 wiązka laserowa o mocy  $4,6 \text{ W}$  i średnicy  $2,6 \text{ mm}$  oświetla od dołu podstawę (o średnicy  $d < 2,6 \text{ mm}$ ) doskonale odbijającego walca. Ciśnienie promieniowania wiązki laserowej sprawia, że walec „wisi” w powietrzu. Gęstość walca jest równa  $1,2 \text{ g/cm}^3$ . Ile wynosi jego wysokość  $H$ ?



Rys. 34.41. Zadanie 26

27. Udowodnij, że ciśnienie promieniowania wywierane na powierzchnię przez padającą prostopadle na tę powierzchnię falę elektromagnetyczną jest równe gęstości energii fali. (Ten związek

ciśnienia z gęstością energii jest spełniany niezależnie od tego, jaki ułamek padającej energii jest odbijany).

28. Udowodnij, że średnie ciśnienie strumienia pocisków uderzających prostopadle w płaską powierzchnię jest równe podwojonej gęstości energii kinetycznej tego strumienia. Załóż, że wszystkie pociski grzną w powierzchni. Porównaj ten wynik z wynikiem zadania 27.

29. Mały statek kosmiczny o masie  $1,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$  (wraz z astronautą) dryfuje w przestrzeni kosmicznej, a działające na niego siły grawitacyjne są znikomo małe. Astronauta włącza laser emitujący wiązkę promieniowania o mocy  $10 \text{ kW}$ . Jaką prędkość osiągnie w ciągu 1 dnia statek kosmiczny na skutek tego, że wiązka laserowa unosi ze sobą pęd?

30. Proponowano w swoim czasie, aby do napędu pojazdów kosmicznych w Układzie Słonecznym wykorzystać ciśnienie promieniowania, używając żagli wykonanych z folii. Jak duży musiałby być taki żagiel, ażeby działająca nań ze strony promieniowania słonecznego siła równoważyła siłę przyciągania grawitacyjnego Słońca? Przyjmij, że statek wraz z żaglem ma masę  $1500 \text{ kg}$  i że żagiel idealnie zorientowany prostopadle do promieni słonecznych odbija je całkowicie. Potrzebne dane znajdziesz w dodatku C. (Przy większym żaglu pojazd kosmiczny będzie się stale oddalał od Słońca).

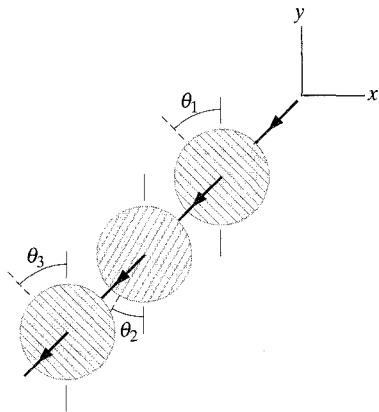
31. Cząstka w Układzie Słonecznym doznaje jednoczesnego przyciągania grawitacyjnego ze strony Słońca i działania siły wynikającej z ciśnienia promieni słonecznych. Załóż, że cząstka taka jest kulą o gęstości  $1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  i że całe padające promieniowanie jest przez nią absorbowane. a) Pokaż, że jeśli promień kuli jest mniejszy od pewnego promienia krytycznego  $R$ , to kula zostanie wyrzucona poza obręb Układu Słonecznego. b) Oblicz ten promień krytyczny.

### 34.6 Polaryzacja

32. Równania opisujące pole magnetyczne fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w próżni mają postać:  $B_x = B \sin(ky + \omega t)$ ,  $B_y = B_z = 0$ . a) Jaki jest kierunek rozchodzenia się fali? b) Napisz równania dla pola elektrycznego tej fali. c) Czy fala ta jest spolaryzowana? Jeśli tak, to jaki jest kierunek polaryzacji?

33. Wiązka światła niespolaryzowanego o natężeniu  $10 \text{ mW/m}^2$  jest przepuszczana przez polaroid, tak jak na rysunku 34.12. a) Znajdź maksymalną wartość natężenia pola elektrycznego wiązki po przejściu przez polaroid. b) Ile wynosi ciśnienie promieniowania wywierane na polaroid?

34. Na rysunku 34.42 początkowo niespolaryzowane światło pada na trzy polaryzatory, których kierunki polaryzacji tworzą z kierunkiem osi  $y$  kąt  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 50^\circ$ . Jaki procent natężenia światła padającego przechodzi przez ten układ polaryzatorów? (Wskazówka: Zwróć uwagę, jak określone są kąty).



Rys. 34.42. Zadania 34 i 35

35. Na rysunku 34.42 początkowo niespolaryzowane światło pada na trzy polaryzatory, których kierunki polaryzacji tworzą z kierunkiem osi  $y$  kąty  $\theta_1 = 40^\circ$ ,  $\theta_2 = 20^\circ$  i  $\theta_3 = 40^\circ$ . Jaki procent natężenia światła padającego przechodzi przez ten układ polaryzatorów? (Wskazówka: Zwróć uwagę, jak określone są kąty).

36. Wiązka światła spolaryzowanego jest przepuszczana przez układ dwóch polaryzatorów. Kierunek polaryzacji tej wiązki tworzy z kierunkiem polaryzacji pierwszego polaryzatora kąt  $\theta$ , a z kierunkiem polaryzacji drugiego polaryzatora kąt  $90^\circ$ . Ile wynosi kąt  $\theta$ , jeżeli wiadomo, że natężenie światła przechodzącego przez układ obu polaryzatorów jest równe 0,1 natężenia wiązki padającej na układ?

37. Pozioma wiązka pionowo spolaryzowanego światła o natężeniu  $43 \text{ W/m}^2$  przechodzi przez układ dwóch polaryzatorów. Kierunek polaryzacji pierwszego polaryzatora tworzy z kierunkiem pionu kąt  $70^\circ$ , a kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora jest poziomy. Ile wynosi natężenie światła przechodzącego przez ten układ polaryzatorów?

38. Ile wynosi natężenie światła przechodzącego przez układ w zadaniu 37, jeżeli wiązka padająca jest niespolaryzowana?

39. Wiązkę światła częściowo spolaryzowanego można traktować jak mieszaninę światła spolaryzowanego i niespolaryzowanego. Przypuśćmy, że taką wiązkę przepuszczamy przez filtr polaryzacyjny, który obracamy o  $360^\circ$ . Jaka część tej wiązki światła stanowi światło spolaryzowane, jeżeli w trakcie takiego obrotu natężenie światła ulega zmianie o czynnik 5?

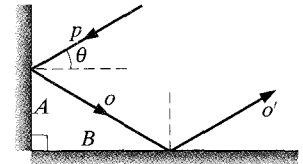
40. Światło na plaży, w wyniku odbić od piasku i wody, zostaje częściowo spolaryzowane. Przypuśćmy, że na pewnej plaży, pewnego dnia przed zachodem Słońca, składowa pozioma wektora natężenia pola elektrycznego fali świetlnej jest 2,3 raza większa od składowej pionowej. Plaźowicz, który zażywa kąpieli słonecznej w pozycji stojącej, nakłada okulary polaryzacyjne; okulary eliminują składową poziomą natężenia pola elektrycznego fali świetlnej. a) Jaki ułamek światła dociera do oczu plaźowicza po nałożeniu okularów? b) Plaźowicz w okularach kładzie się na boku

na piasku. Ile wynosi teraz ułamek światła docierającego do jego oczu, w stosunku do światła, które docierało do jego oczu przed nałożeniem okularów?

41. Chcemy obrócić kierunek polaryzacji wiązki światła o  $90^\circ$ , przepuszczając ją przez jeden lub kilka polaryzatorów. a) Ile co najmniej polaryzatorów będziemy musieli użyć, aby osiągnąć taki cel? b) Ile co najmniej polaryzatorów będziemy musieli użyć, jeżeli natężenie wiązki przechodzącej ma być większe niż 60% natężenia wiązki padającej?

### 34.7 Odbicie i załamanie

42. Na rysunku 34.43 promień świetlny doznaje odbicia od dwóch wzajemnie prostopadłych powierzchni odbijających  $A$  i  $B$ . Wyznacz kąt, jaki tworzy promień padający  $p$  z promieniem odbitym  $o'$ .



Rys. 34.43. Zadanie 42

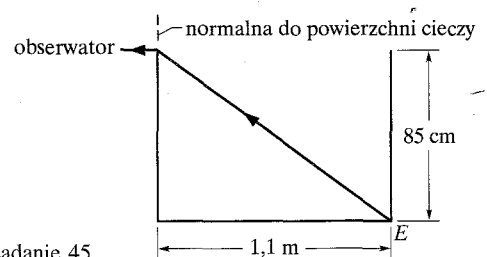
43. Wiązka światła rozchodząca się w próżni pada na płytkę szklaną pod kątem  $32^\circ$ . Kąt, jaki tworzy z normalną do powierzchni wiązka rozchodząca się w szkłe, jest równy  $21^\circ$ . Ile wynosi współczynnik załamania światła w szkłe?

44. Około roku 150 n.e. Klaudiusz Ptolemeusz dokonał pomiarów kątów padania  $\theta_1$  i kątów załamania  $\theta_2$  światła przechodzącego przez granicę powietrze-woda. Wyniki tych pomiarów zebrane są w danej niżej tabelce:

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
$10^\circ$	$8^\circ$	$50^\circ$	$35^\circ$
$20^\circ$	$15^\circ 30'$	$60^\circ$	$40^\circ 30'$
$30^\circ$	$22^\circ 30'$	$70^\circ$	$45^\circ 30'$
$40^\circ$	$29^\circ$	$80^\circ$	$50^\circ$

a) Czy te wyniki są zgodne z prawem załamania? b) A jeżeli tak, to ile wynosi współczynnik załamania światła? Wyniki te są same w sobie interesujące, gdyż jest to najprawdopodobniej najstarszy znany przykład udokumentowanego pomiaru fizycznego.

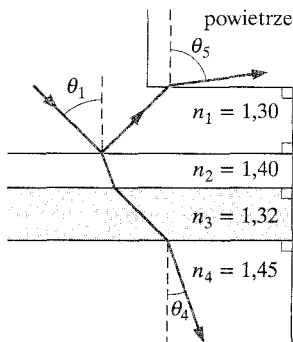
45. Prostokątny zbiornik wypełniono nieznaną cieczą aż po wierzch (rys. 34.44). Kiedy obserwator patrzy z poziomu gór-



Rys. 34.44. Zadanie 45

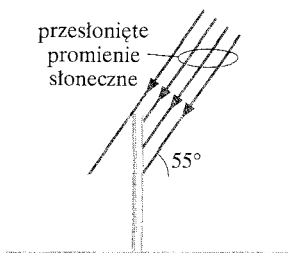
nej powierzchni cieczy, widzi dolną krawędź  $E$  na skraju obrazu zbiornika. Na rysunku pokazany jest promień załamujący się w stronę obserwatora na górnej powierzchni cieczy. Wyznacz współczynnik załamania światła tej cieczy.

46. Na rysunku 34.45 światło pada pod kątem  $\theta_1 = 40,1^\circ$  na powierzchnię graniczną między dwoma przezroczystymi ośrodkami. Od tego miejsca część światła rozchodzi się w dół przez trzy kolejne warstwy przezroczystych ośrodków, część zaś ulega odbiciu i wydostaje się do powietrza. Jaka jest wartość kątów: a)  $\theta_5$  i b)  $\theta_4$ ?



Rys. 34.45. Zadanie 46

47. Z basenu z wodą wystaje pionowo pręt o długości 2 m (rys. 34.46), którego długość nad powierzchnią wody wynosi 50 cm. Promienie słoneczne padają na wodę w basenie pod kątem  $55^\circ$  do jej powierzchni. Oblicz długość cienia tego pręta na dnie basenu.



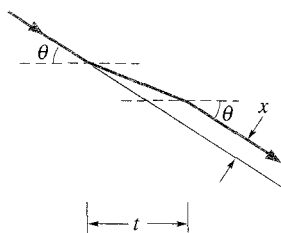
Rys. 34.46. Zadanie 47

48. Promień światła białego pada pod kątem  $35^\circ$  na ścianę pryzmatu z topionego kwarcu, którego przekrój jest trójkątem równobocznym. Naszkicuj bieg światła w tym pryzmacie, pokazując promienie, które odpowiadają światłu a) niebieskiemu, b) żółtozielonemu i c) czerwonemu.

49. Udowodnij, że promień światła padający na powierzchnię szklanej płytki płasko-równoległej o grubości  $t$  wychodzi z niej bez zmiany kierunku, a jest jedynie przesunięty, tak jak pokazano na rysunku 34.47. Pokaż, że dla małych kątów padania  $\theta$  przesunięcie to jest dane wzorem

$$x = t\theta \frac{n-1}{n},$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania światła dla szkła, a kąt  $\theta$  jest mierzony w radianach.



Rys. 34.47. Zadanie 49

50. Na rysunku 34.48 brzegi zbiornika wypełnionego wodą tworzą dwa wzajemnie prostopadłe zwierciadła. a) Promień świetlny

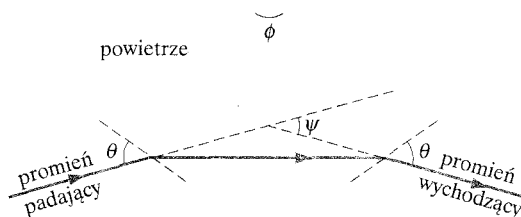
pada z góry prostopadle do powierzchni wody. Pokaż, że promień, który opuszcza zbiornik, jest równoległy do promienia padającego. Załóż, że promień ulega w wodzie dwóm odbiciom od zwierciadlanych ścian zbiornika. b) Powtórz analizę dla promienia padającego ukośnie w płaszczyźnie kartki.

Rys. 34.48. Zadanie 50

51. Na rysunku 34.49 promień świetlny biegnący w powietrzu pada na ścianę boczną trójkątnego pryzmatu szklanego. Kąt padania  $\theta$  jest dobrany tak, że promień wychodzi przez drugą ścianę boczną pryzmatu pod takim samym kątem  $\theta$ , jak kąt padania. Pokaż, że współczynnik załamania światła dla szkła pryzmatu jest dany wzorem

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi + \phi)}{\sin \frac{1}{2}\phi},$$

gdzie  $\phi$  jest nazywany *kątem łamiącym* pryzmatu, a  $\psi$  jest *kątem odchylenia* pryzmatu — całkowitym kątem zmiany kierunku biegu promienia po przejściu przez pryzmat. (W warunkach określonych przez rysunek 34.49 ma on najmniejszą możliwą wartość i jest wtedy nazywany *kątem najmniejszego odchylenia*).

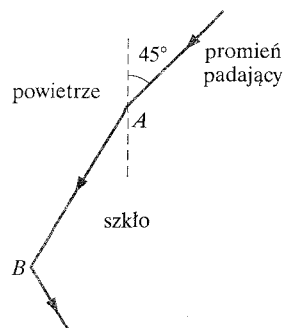


Rys. 34.49. Zadanie 51 i 58

### 34.8 Całkowite wewnętrzne odbicie

52. Współczynnik załamania światła dla benzenu jest równy 1,8. Ile wynosi kąt graniczny dla światła, które rozchodzi się w benzenu w stronę płaskiej warstwy powietrza ponad benzenem?

53. Na rysunku 34.50 promień świetlny wchodzi do sztabki szklanej w punkcie  $A$ , a następnie doznaje całkowitego wewnętrznego odbicia w punkcie  $B$ . Oszacuj na podstawie tej informacji minimalną wartość współczynnika załamania światła dla szkła.



Rys. 34.50. Zadanie 53

54. Punktowe źródło światła jest umieszczone 80 cm pod powierzchnią wody. Znajdź średnicę okręgu wytycznego na powierzchni wody przez wychodzące z niej światło.

55. Na rysunku 34.51 promień świetlny jest prostopadły do ściany  $ab$  szklanego pryzmatu ( $n = 1,52$ ). Znajdź największą wartość kąta  $\phi$ , przy której promień świetlny ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na ścianie  $ac$ , w przypadku gdy pryzmat jest umieszczony w: a) powietrzu, b) wodzie.



Rys. 34.51. Zadanie 55

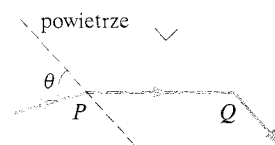
56. Promień światła białego rozchodzi się w topionym kwarcu umieszczonym w powietrzu. Wtedy gdy wszystkie barwne składowe światła białego ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu od jego powierzchni, promień odbity jest nadal promieniem światła białego. Gdyby jednak któraś ze składowych z krainców zakresu widzialnego (niebieska lub czerwona) ulegała załamaniu i częściowo przechodziła przez powierzchnię graniczną kwarc–powietrze, to w świetle odbitym udział tej składowej byłby mniejszy. Światło odbite nie byłoby już wtedy białe, ale nabierałoby zabarwienia odpowiadającego przeciwnemu krańcowi zakresu widzialnego. (Jeżeli załamaniu ulegałaby składowa niebieska, to wiązka odbita miałaby zabarwienie czerwone i odwrotnie). Czy możliwe jest, aby wiązka odbita miała zabarwienie a) niebieskawe lub b) czerwone? c) Jeżeli tak, to jaki musiałby być kąt padania wiązki światła białego na powierzchnię kwarcu (zob. rys. 34.19).

57. Sześcienna kostka o długości krawędzi równej 10 mm wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania światła 1,5 i dokładnie w środku ma małą skazę. a) Które części każdej ze ścian tej kostki należy przestłonić, ażeby niezależnie od kierunku obserwacji nie było widać tej skazy? (Pomiń światło, które odbija się wewnątrz kostki, a następnie ulega załamaniom i wychodzi z kostki do powietrza). b) Jaki ułamek całkowitej powierzchni kostki musi zostać przestłonięty?

58. Przyjmijmy, że pryzmat na rysunku 34.49 ma kąt łamiący  $\phi = 60^\circ$ , a współczynnik załamania światła materiału, z którego jest wykonany, wynosi  $n = 1,6$ . a) Jaki jest najmniejszy kąt padania  $\theta$ , pod którym promień świetlny może wejść do pryzmatu przez lewą i opuścić go przez prawą ścianę boczną? b) Jaki musi być kąt padania  $\theta$ , aby kąt załamania promienia opuszczającego pryzmat był identyczny z kątem padania  $\theta$ , tak jak to się dzieje na rysunku 34.49? (Patrz zadanie 51).

59. Na rysunku 34.52 do pryzmatu o kącie łamiącym  $90^\circ$ , w punkcie  $P$ , pod kątem padania  $\theta$  wchodzi światło. W punkcie  $Q$  część światła załamuje się pod kątem  $90^\circ$ . a) Podaj zależność współczynnika załamania światła w pryzmacie od kąta  $\theta$ . b) Jaka jest maksymalna możliwa wartość liczbowo tego współczynnika za-

łamania światła? Opisz, co będzie się działo ze światłem w punkcie  $Q$  wtedy, gdy kąt padania w tym punkcie będzie c) nieznacznie większy, d) nieznacznie mniejszy.



Rys. 34.52. Zadanie 59

### 34.9 Polaryzacja przy od-

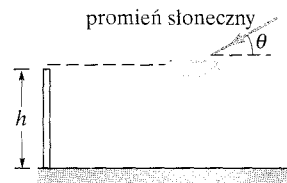
60. a) Przy jakim kącie padania światło odbite od powierzchni wody będzie całkowicie spolaryzowane? b) Czy kąt ten zależy od długości fali światła?

61. Światło rozchodzące się w wodzie o współczynniku załamania światła 1,33 pada na płytkę szklaną o współczynniku załamania światła 1,53. Przy jakim kącie padania światło odbite będzie całkowicie spolaryzowane?

62. Oblicz górną i dolną granicę wartości kątów Brewstera dla światła białego padającego na topiony kwarc. Przyjmij, że granice zakresu światła widzialnego to 400 nm i 700 nm.

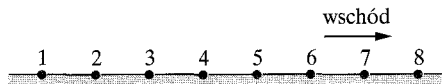
### Zadania dodatkowe

63. Albatros szybuje poziomo ze stałą prędkością 15 m/s nad powierzchnią Ziemi, w płaszczyźnie pionowej, która zawiera również Słońce (rys. 34.53). Szybuje on w kierunku ściany o wysokości  $h = 2$  m, prześlizgując się tuż nad nią. O tej porze dnia promienie słoneczne tworzą z powierzchnią Ziemi kąt  $\theta = 30^\circ$ . Z jaką prędkością przesuwa się cień albatrosa po a) powierzchni Ziemi, a następnie b) w górę po ścianie? Nieco później po takim samym torze szybuje z taką samą prędkością jastrząb. I wtedy zauważasz, że kiedy cień jastrzębia osiąga ścianę, wędruje on po niej z wyraźnie większą prędkością niż poprzednio cień albatrosa. c) Czy teraz Słońce jest na niebie wyżej, czy niżej, niż wtedy, kiedy przelatywał albatros? d) Jaki kąt  $\theta$  tworzą teraz promienie słoneczne z powierzchnią Ziemi, jeżeli cień jastrzębia przesuwa się po ścianie z prędkością 45 m/s?



Rys. 34.53. Zadanie 63

64. W poszukiwaniu grobowców. W poszukiwaniach archeologicznych nie oznaczone groby i podziemne grobowce można lokalizować bez ich naruszania, korzystając z radaru. Układ radarowy wysyła impuls dokładnie w głąb ziemi; impuls jest częściowo odbijany (do góry) na podziemnych przeszkodach. Mówiąc inaczej, impuls jest odbijany do góry na poziomych granicach, na których jego prędkość rozchodzenia się ulega zmianie. Układ odbiorczy radaru wykrywa odbicie i rejestruje odstęp czasu między wysłaniem i odebraniem sygnału (impulsu). Powtarzając taką procedurę w kilku miejscach badanej powierzchni ziemi, archeolog może wyznaczyć kształt podziemnego obiektu.



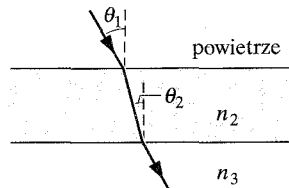
Rys. 34.54. Zadanie 64

Taki radar zastosowano w ośmiu miejscach leżących wzdłuż linii prostej na badanej powierzchni, numerując je w kierunku z zachodu na wschód, tak jak to pokazano na rysunku 34.54. Odstęp między kolejnymi miejscami pomiaru wynosił 2 m. Pod linią pomiarów znajduje się pusty grobowiec z poziomymi i pionowymi płyt kamiennych o jednakowych grubościach; płyty poziome tworzą dno i pokrywą grobowca, a płyty pionowe jego ściany boczne. W tabelce danej niżej zebrane są odstępy czasowe  $\Delta t$  (w nanosekundach) zarejestrowane dla impulsów w poszczególnych ośmiu stanowiskach pomiaru. Na przykład na stanowisku 4 po wystąpieniu w głąb ziemi impulsu radarowego zarejestrowano cztery impulsy odbite, pierwszy po 63,00 ns, a ostatni po 86,54 ns od momentu wysłania impulsu.

Przyjmij, że prędkość rozchodzenia się impulsu radarowego w glebie ponad, pod i obok grobowca wynosi 10 cm/ns; w płytach kamiennych jest ona równa 10,6 cm/ns, a w powietrzu wewnątrz grobowca 30 cm/ns. Wyznacz: a) głębokość, na jakiej znajduje się górna powierzchnia pokrywy grobowca, b) poziomą długość grobowca w kierunku zachód–wschód oraz c) pionowe wymiary wewnętrzne komory grobowca.

Numer stanowiska	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta t$	—	63,00	63,00	63,00	63,00	63,00	63,00	—
	—	115,8	66,77	66,77	66,77	66,77	93,19	
			82,77	82,77	74,77	74,77		
			86,54	86,54	101,2	78,54		

65. Na rysunku 34.55 promień świetlny rozchodzący się w powietrzu pada na płaską warstwę z materiału 2, który ma współczynnik załamania światła  $n_2 = 1,5$ . Pod tą warstwą znajduje się warstwa z materiału 3 o współczynniku załamania światła  $n_3$ . Na granicy powietrze–materiał 2 promień pada pod kątem Brewstera (dla tej powierzchni granicznej). Również na granicy materiał 2–materiał 3 promień pada pod kątem Brewstera właściwym dla tej powierzchni granicznej. Jaka jest wartość  $n_3$ ?



Rys. 34.55. Zadanie 65

66. W jakiej odległości musiałbyś trzymać dłonie, aby odległość między nimi odpowiadała nanosekundzie świetlnej?

# 35 Obrazy

Obraz Edouarda Maneta *Bar w Folies-Bergère* zachwycał wszystkich od chwili swego powstania w 1882 r. Część jego uroku stanowi kontrast między gotową do zabawy widownią a barmanką, której oczy zdradzają ogarniające ją zmęczenie. Ale o jego uroku stanowią również ukryte przez Maneta subtelne zniekształcenia rzeczywistości — zniekształcenia, które sprawiają, że scena przedstawiona na obrazie wydaje się „dziwna”, i to jeszcze zanim się zorientujesz, co jest „nie w porządku”.

Czy potrafisz  
odnaleźć te subtelne  
zniekształcenia  
fizycznej  
rzeczywistości?

Odpowiedź znajdziesz w tym  
rozdziale.



## 35.1. Dwa rodzaje obrazów

Żebyś mógł widzieć, powiedzmy pingwina, do twojego oka musi dotrzeć przynajmniej pewna część promieni świetlnych biegnących od pingwina, które zostaną skierowane następnie na siatkówkę znajdującą się w tylnej części twojego oka. Twój aparat widzenia, zaczynający się siatkówką, a kończący się w tylnej części kory mózgowej, automatycznie i nieświadomie przetwarza informację przeniesioną przez światło. Identyfikuje on krawędzie, kierunki, struktury, kształty oraz barwy i szybko dostarcza do twojej świadomości **obraz** (reprodukcję odzyskaną ze światła) pingwina — spostrzegasz i rozpoznajesz pingwina, widzisz go w kierunku, z którego przyszło światło i we właściwej odległości.

Twój system wzrokowy podejmuje takie przetwarzanie i rozpoznawanie również wtedy, gdy promienie świetlne nie pochodzą bezpośrednio od pingwina, lecz docierają do twojego oka po odbiciu od lustra czy załamaniu przez soczewki lornetki. Widzisz jednak wtedy pingwina w kierunku, z którego nadchodzą promienie świetlne po odbiciu lub załamaniu, i w odległości, która może być całkiem różna od prawdziwej odległości, w jakiej znajduje się pingwin.

Jeżeli na przykład promienie zostały odbite od powierzchni zwykłego płaskiego lustra, to wydaje się, że pingwin znajduje się z drugiej strony powierzchni lustra, bo promienie, które docierają do twojego oka, pochodzą właśnie z tamtego kierunku. Oczywiście pingwina tam nie ma. Ten rodzaj obrazu, który nazywa się **obrazem pozornym**, istnieje naprawdę tylko w twoim mózgu, ale *mówimy* o nim, że powstaje w miejscu, w którym go widzimy.

**Obraz rzeczywisty** różni się tym (od obrazu pozornego), że może powstawać na powierzchni, takiej jak kartka czy ekran kinowy. Obraz rzeczywisty możesz widzieć (inaczej sale kinowe byłyby puste), ale jego obecność nie zależy wcale od twojego postrzegania, istnieje on w określonym miejscu niezależnie od tego, czy ty tam jesteś, czy też nie.

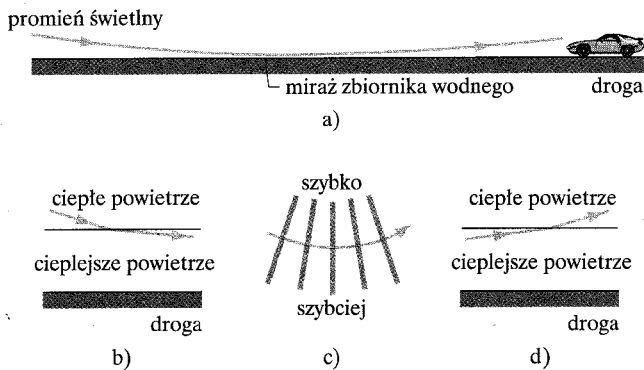
W tym rozdziale poznamy kilka dróg wytwarzania obrazów rzeczywistych i pozornych, które powstają w wyniku odbicia (np. od zwierciadeł) oraz załamania (np. w soczewkach). Dokonamy również wyraźnego rozróżnienia między obrazami rzeczywistymi i pozornymi. Najpierw jednak poznamy przykład obrazu pozornego powstającego w sposób naturalny.

### Miraż

Popularnym przykładem mirażu (fatamorgany) jest obraz pozorny zbiornika wodnego (stawu, jeziora itd.), który w gorący, słoneczny dzień — jak się wydaje — leży na drodze (lub na piasku pustyni) przed tobą, ale do którego nigdy nie możesz dojść. Taki zbiornik wody to *miraż* (pewien typ złudzenia optycznego), który tworzą promienie świetlne pochodzące z niskich obszarów nieboskłonu na wprost ciebie (rys. 35.1a). Zbliżając się do powierzchni drogi promienie te przechodzą przez coraz gorętsze warstwy powietrza, nagrzewające się przez kontakt z zazwyczaj stosunkowo gorącą jej powierzchnią. Wraz ze wzrostem temperatury powietrza zmniejsza się nieco współczynnik załamania światła (i odpowiednio wzrasta nieco prędkość rozchodzenia się światła). Tym



**Rys. 35.1.** a) Promień świetlny biegnący z dolnego obszaru nieba ulega załamaniu przy przechodzeniu przez warstwy powietrza ogrzewane przez nawierzchnię drogi (nie osiągając tej nawierzchni). Obserwator, do którego dociera to światło, odbiera je jakby przychodziło ze zbiornika wodnego na drodze. b) Odchylenie (narysowane przesadnie) promienia świetlnego biegnącego w dół przez obszary coraz gorętszego powietrza. c) Przesunięcie czoła fali i związane z tym odchylenie promienia, które wynika z tego, że dolne końce czoła fali poruszają się szybciej w gorętszym powietrzu. d) Odchylenie promienia świetlnego biegnącego w górę przez obszary coraz chłodniejszego powietrza



samym promienie świetlne, które zbliżają się do powierzchni drogi, napotykają warstwy powietrza o coraz mniejszym współczynniku załamania światła i są one w ciągły sposób odchylane ku górze od powierzchni drogi (rys. 35.1b) do kierunku poziomego.

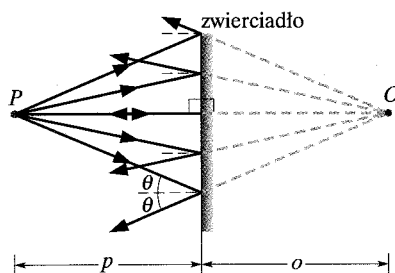
Po osiągnięciu kierunku poziomego, nieco ponad powierzchnią drogi, promień jest nadal odchylany, gdyż dolna część każdego czoła fali znajduje się w nieco cieplejszym powietrzu i rozchodzi się z nieco większą prędkością niż górna część czoła fali (rys. 35.1c). Ten niejednorodny ruch czoła fali powoduje odchylenie promienia do góry. I to odchylenie do góry trwa dalej, gdyż wznoszący się teraz promień świetlny przechodzi przez warstwy powietrza, których współczynnik załamania światła stopniowo wzrasta (rys. 35.1d).

Twój aparat widzenia, odbierając tak biegnące światło, automatycznie wnioskuje, iż przyszło ono z kierunku, który jest przedłużeniem promieni świetlnych docierających do oka, i ustala, że nadeszło ono z powierzchni drogi. Jeżeli przy tym światło ma niebieskie zabarwienie nieba, to i miraż wydaje się niebieskawy, tak jak woda. Nagrzane powietrze jest turbulентne, wobec tego miraż migocze, co wygląda jak falowanie powierzchni wody. Niebieskie zabarwienie i falowanie potęgują złudzenie zbiornika wodnego, ale ty oglądasz tylko obraz pozorny dolnego obszaru nieba.

## 35.2. Zwierciadła płaskie

**Zwierciadło** jest to powierzchnia, która odbija światło w jednym kierunku (nie rozpraszając go na wiele stron i nie absorbując go). Lśniąca (polerowana) powierzchnia metalowa działa jak zwierciadło, a na przykład betonowa ściana nie jest zwierciadłem. W niniejszym paragrafie poznamy obrazy, jakie mogą powstawać przy odbiciu światła od **zwierciadła płaskiego** (płaskiej powierzchni odbijającej).

Na rysunku 35.2 punktowe źródło światła  $P$ , które będziemy nazywać *przedmiotem*, znajduje się w odległości  $p$  od płaskiego zwierciadła. Światło padające na zwierciadło jest przedstawione za pomocą promieni wychodzących z punktu  $P$ , a światło odbite — za pomocą promieni odbitych biegnących od zwierciadła. Jeżeli przedłużymy promienie odbite poza powierzchnię zwierciadła, to



**Rys. 35.2.** Punktowe źródło światła  $P$ , nazywane *przedmiotem*, w odległości  $p$  od płaskiego zwierciadła. Promienie świetlne wychodzące z punktu  $P$  po osiągnięciu powierzchni zwierciadła ulegają odbiciu od niej. Jeżeli do twego oka trafia część tak odbitych promieni świetlnych, to widzisz punktowe źródło światła  $O$  za zwierciadłem w odległości  $o$ . Widziane przez ciebie źródło światła  $O$  jest obrazem pozornym przedmiotu  $P$

stwierdzimy, że te przedłużenia przecinają się w jednym punkcie w odległości  $o$  od powierzchni zwierciadła.

Kiedy spoglądasz w zwierciadło na rysunku 35.2, wtedy do twoich oczu dociera pewna część odbitego światła. To, co widzisz, przekłada się na punktowe źródło światła umieszczone w punkcie przecięcia się przedłużeń promieni odbitych. Widziane przez ciebie punktowe źródło to obraz  $O$  przedmiotu  $P$ . Nazywamy go *obrazem punktowym*, bo jest punktem, i jest to obraz pozorny, bo promienie w rzeczywistości nie przechodzą przez ten punkt. (Jak się przekonasz w dalszej części wykładu, w przypadku obrazów rzeczywistych promienie przechodzą przez punkt przecięcia).

Na rysunku 35.3 pokazano dwa promienie wybrane spośród wielu innych promieni z rysunku 35.2. Jeden z nich pada w punkcie  $b$  prostopadłe na powierzchnię zwierciadła. Drugi promień pada na powierzchnię zwierciadła w dowolnie wybranym punkcie  $a$  pod kątem  $\theta$ . Pokazane są również przedłużenia tych promieni. Trójkąty prostokątne  $aPb$  i  $aOb$  mają wspólny bok oraz trzy równe kąty i wobec tego są trójkątami przystającymi (o jednakowych rozmiarach), a zatem i pozostałe ich boki mają parami równą długość. Stąd

$$Ob = Pb, \quad (35.1)$$

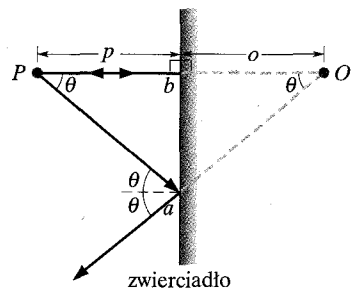
gdzie  $Ob$  i  $Pb$  są odległościami od powierzchni zwierciadła do obrazu i do przedmiotu. Z równania (35.1) wynika, że obraz znajduje się za zwierciadłem w takiej samej odległości, w jakiej przed zwierciadłem znajduje się przedmiot. Zgodnie z umową *odległości przedmiotu*  $p$  są wielkościami dodatnimi, natomiast *odległości obrazu*  $o$  dla obrazów pozornych (tak jak właśnie w tym przypadku) są wielkościami ujemnymi. Wobec tego równanie (35.1) można zapisać w postaci  $|o| = p$  albo w postaci

$$o = -p \quad (\text{zwierciadło płaskie}). \quad (35.2)$$

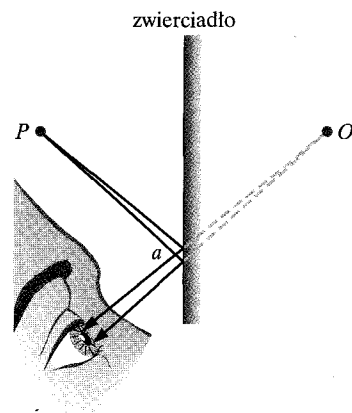
Oko może zebrać tylko te promienie, które po odbiciu od zwierciadła w punkcie  $a$  znajdują się bardzo blisko siebie. Dla oka, którym spoglądasz w zwierciadło z takiej pozycji jak na rysunku 35.4, tylko niewielka część obszaru wokół punktu  $a$  (mniejsza od rozmiarów źrenicy oka) jest powierzchnią czynną podczas tworzenia obrazu. Jeśli chcesz się o tym przekonać, to zamknij jedno oko, a drugim oglądaj obraz bardzo małego przedmiotu, na przykład ostrza ołówka. Przesuwaj następnie po powierzchni zwierciadła koniuszek swego palca, tak aby przykryć oglądany obraz. Przekonasz się, że tylko mały obszar zwierciadła pod koniuszkiem twego palca wytworzył obraz.

## Przedmioty rozciągle

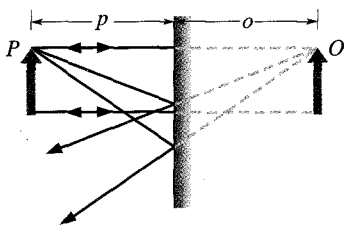
Na rysunku 35.5 rozciągnięty przedmiot  $P$ , którym jest strzałka (skierowana do góry) znajduje się w odległości  $p$  od płaskiego zwierciadła. Każdy mały fragment tego przedmiotu odgrywa w stosunku do zwierciadła rolę punktowego źródła światła, takiego jak źródło  $P$  na rysunkach 35.2 i 35.3. Jeżeli odbierasz światło odbite od zwierciadła, to spostrzegasz obraz pozorny  $O$ , który jest złożeniem punktowych obrazów pozornych wszystkich fragmentów przedmiotu i który



Rys. 35.3. Dwa promienie świetlne wybrane z wiązki promieni na rysunku 35.2. Promień  $Pa$  tworzy pewien kąt  $\theta$  z normalną do powierzchni zwierciadła. Promień  $Ob$  jest prostopadły do powierzchni zwierciadła



Rys. 35.4. Tylko niewielka część promieni świetlnych wychodzących z przedmiotu  $P$  dociera po odbiciu od zwierciadła do oka i tylko mały obszar powierzchni zwierciadła wokół punktu  $a$  uczestniczy w odbiciu odbieranych przez oko promieni. Oko odbiera te promienie tak, jakby wychodziły one z punktu  $O$  leżącego z drugiej strony zwierciadła



Rys. 35.5. Rozciągnięty przedmiot  $P$  i jego pozorny obraz  $O$  w płaskim zwierciadle

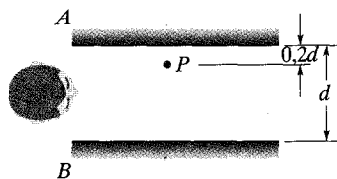
— jak się wydaje — znajduje się w odległości  $o$  poza zwierciadłem. Odległości  $p$  i  $o$  wiąże ze sobą równanie (35.2). Położenie obrazu rozciągniętego przedmiotu możemy ustalić w taki sam sposób, w jaki robiliśmy to dla punktowego przedmiotu — rysujemy pewne wybrane promienie, które wychodzą z wierzchołka przedmiotu i padają na zwierciadło, następnie wytyczamy kierunki promieni odbitych od zwierciadła i rysujemy ich przedłużenia poza zwierciadłem, aż do ich przecięcia, które jest obrazem wierzchołka przedmiotu. To samo powtarzamy dla dolnego końca przedmiotu. I tak, jak to pokazano na rysunku 35.5, stwierdzamy, że obraz pozorny  $O$  ma taką samą orientację i wysokość (mierzoną w kierunku równoległym do płaszczyzny powierzchni zwierciadła), jak przedmiot  $P$ .

### Bar w Folies-Bergère Maneta

Na obrazie Maneta *Bar w Folies-Bergère* salę oglądasz jako jej odbicie w wielkim lustrze znajdującym się na ścianie za plecami barmanki. Jednakże odbicie to jest namalowane z trzema subtelnymi błędami. Zwróć najpierw uwagę na butelki po lewej stronie. Manet namalował ich odbicia w lustrze, ale umieścił je znacznie bliżej przedniej krawędzi lady barowej, niż powinny się one znajdować.

Przyjrzyj się teraz z kolei odbiciu kobiety za barem. Widzisz ją na wprost przed sobą, a więc jej odbicie powinno znajdować się dokładnie za nią i powinno być niewidoczne, a Manet namalował to odbicie całkiem po prawej stronie jej postaci. I wreszcie popatrz na odbicie w lustrze postaci mężczyzny, który stoi na wprost barmanki. To musisz być ty, gdyż odbicie pokazuje, iż znajduje się on naprzeciw barmanki, a zatem to on ogląda obraz Maneta. Patrzysz zatem w obraz Maneta (a więc i w lustro za barem) i widzisz swoje odbicie daleko z boku po prawej stronie. To jest zagadkowe albo irytujące, nie tego bowiem spodziewamy się zarówno po obrazie, jak i lustrze.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku niżej spoglądasz do wnętrza układu, który tworzą dwa pionowe zwierciadła  $A$  i  $B$ , odległe od siebie o  $d$ . W punkcie  $P$ , w odległości  $0,2d$  od powierzchni zwierciadła  $A$ , umieszczono wyszczerzoną w uśmiechu głowę chimery. Każde zwierciadło wytwarza *pierwszy* obraz (najbliższy powierzchni zwierciadła) chimery, który z kolei jest przedmiotem dla przeciwległego zwierciadła i w ten sposób w każdym zwierciadle powstaje *drugi* obraz, który z kolei jest przedmiotem dla przeciwległego zwierciadła i w ten sposób w każdym zwierciadle powstaje *trzeci* obraz, itd. — możesz oglądać setki obrazów uśmiechniętej chimery. W jakiej odległości od zwierciadła  $A$  powstaje pierwszy, drugi i trzeci obraz?



## 35.3. Zwierciadła sferyczne

Poznawszy obrazy wytwarzane przez płaskie zwierciadła, możemy zająć się obrazami wytwarzanymi przez powierzchnie zakrzywione. W szczególności rozważymy zwierciadła sferyczne (albo inaczej kuliste), których powierzchnie są

małymi wycinkami powierzchni kuli. Zwierciadło płaskie jest w istocie przypadkiem szczególnym zwierciadła sferycznego, które ma nieskończenie wielki promień krzywizny.

## Jak powstaje zwierciadło sferyczne

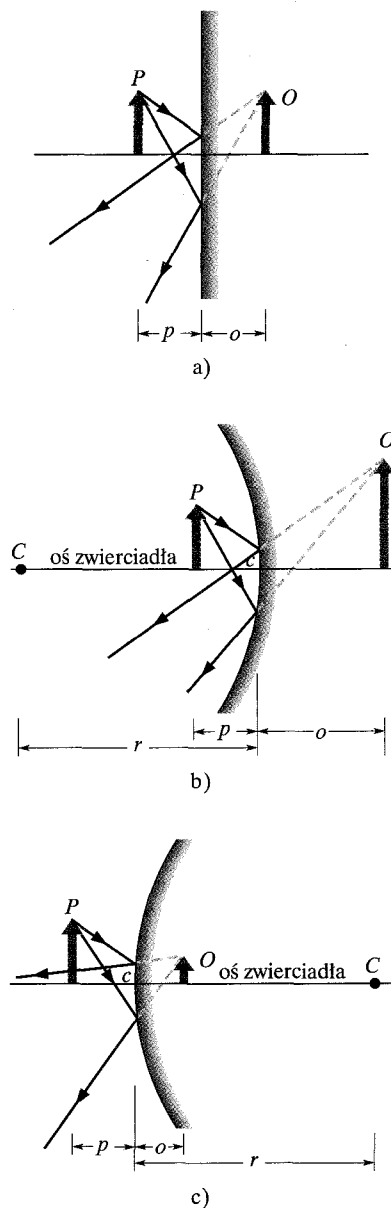
Zacznijmy od zwierciadła płaskiego (rys. 35.6a), po którego lewej stronie znajduje się przedmiot  $P$  i nie pokazany na rysunku obserwator. Jeżeli zakrzywimy powierzchnię tego zwierciadła tak, że stanie się ona powierzchnią *wklęsłą*, jak na rysunku 35.6b, to powstałe zwierciadło jest **zwierciadłem wklęsłym**. Takie zakrzywienie powierzchni odbijającej zwierciadła zmienia charakterystyki samego zwierciadła i wytwarzanego przezeń obrazu:

1. *Środek krzywizny*  $C$  (środek kuli, której wycinek stanowi powierzchnia zwierciadła) leżał nieskończenie daleko od powierzchni zwierciadła płaskiego. W zwierciadle wklęsłym jest on znacznie bliżej, ale nadal po stronie powierzchni odbijającej zwierciadła (z przodu zwierciadła).
2. *Pole widzenia*, czyli rozciągłość sceny odbijanej w stronę obserwatora jest zawężone w porównaniu z polem widzenia zwierciadła płaskiego.
3. Obraz w zwierciadle płaskim powstawał w takiej samej odległości poza zwierciadłem, w jakiej znajdował się przed zwierciadłem przedmiot; teraz w zwierciadle wklęsłym obraz jest dalej poza powierzchnią zwierciadła niż przedmiot przed zwierciadłem, tzn.  $|o|$  jest większe niż  $p$ .
4. Wysokość obrazu i przedmiotu były takie same, teraz w zwierciadle wklęsłym wysokość obrazu jest większa. Z tego właśnie powodu wiele lusterek kosmetycznych to lusterka wklęsłe, gdyż wytwarzają one powiększony obraz twarzy.

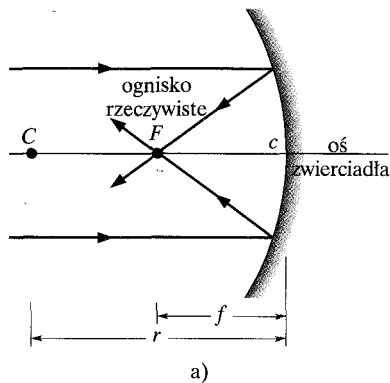
**Zwierciadło wypukłe** powstaje przez zakrzywienie powierzchni zwierciadła płaskiego tak, aby stała się ona powierzchnią wypukłą, jak na rysunku 35.6c. Wynikiem takiego zakrzywienia powierzchni odbijającej jest: 1) przeniesienie środka krzywizny  $C$  *poza* zwierciadło i 2) *zwiększenie* pola widzenia. Jednocześnie obraz zostaje 3) *przesunięty bliżej* do powierzchni zwierciadła i 4) *ulega zmniejszeniu* (w porównaniu z odległością i wysokością przedmiotu w zwierciadle płaskim). Lustra do obserwacji pomieszczeń, na przykład sklepowych, są zazwyczaj wypukłe — zwiększenie pola widzenia pozwala na obserwację dużej powierzchni pomieszczenia za pomocą jednego lustra.

## Ogniska zwierciadeł sferycznych

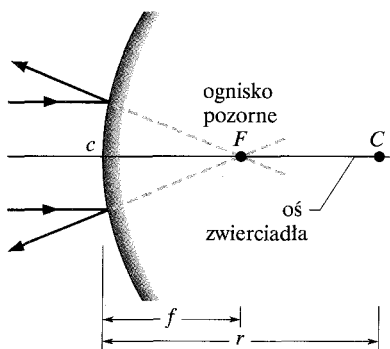
Dla zwierciadła płaskiego odległość obrazu  $o$  jest zawsze równa odległości przedmiotu  $p$ . Zanim przejdziemy do ustalenia, jak te dwie odległości wiążą się ze sobą w przypadku zwierciadła sferycznego, rozważmy odbicie światła pochodzącego od przedmiotu  $P$ , który znajduje się bardzo daleko od powierzchni zwierciadła sferycznego, na *osi* zwierciadła. Oś ta łączy środek krzywizny zwierciadła  $C$  ze środkiem  $c$  zwierciadła. Przedmiot znajduje się bardzo daleko od zwierciadła, wobec tego fale świetlne rozchodzące się od przedmiotu i docierające do



Rys. 35.6. a) W zwierciadle płaskim powstaje obraz pozorny  $O$  przedmiotu  $P$ . b) Kiedy powierzchnia zwierciadła jest zakrzywiana tak, że staje się powierzchnią *wklęsłą*, wtedy obraz oddala się od powierzchni zwierciadła i staje się większy. c) Kiedy powierzchnia zwierciadła jest zakrzywiana tak, że staje się powierzchnią *wypukłą*, wtedy obraz przesuwają się bliżej w stronę powierzchni zwierciadła i staje się mniejszy



a)



b)

Rys. 35.7. a) W zwierciadle wklęsłym padające nań promienie równoległe są skupiane (ogniskowane) w rzeczywistym ognisku  $F$ , po tej samej stronie zwierciadła co padające nań promienie. b) W zwierciadle wypukłym padające na zwierciadło promienie równoległe tworzą wiązkę rozbieżną, która — jak się wydaje — wychodzi z pozornego ogniska w punkcie  $F$  po przeciwnej stronie zwierciadła niż promienie padające

zwierciadła wzdłuż jego osi są falami płaskimi. Oznacza to, że wszystkie promienie reprezentujące fale świetlne docierające do zwierciadła są równoległe do osi zwierciadła.

Kiedy taka wiązka równoległych promieni dociera do zwierciadła, takiego jak na rysunku 35.7, wtedy promienie bliskie osi zwierciadła (*promienie przyosiowe*) po odbiciu przechodzą przez jeden wspólny punkt  $F$ ; dwa takie promienie pokazano na rysunku. Jeżeli w punkcie  $F$  umieścimy ekran (np. kartkę papieru), to pojawi się na nim obraz punktowy nieskończenie odległego od zwierciadła przedmiotu  $P$ . (Dotyczy to każdego nieskończenie odległego przedmiotu). Punkt  $F$  nazywa się **ogniskiem** zwierciadła, a jego odległość  $f$  od środka zwierciadła — **ogniskową** zwierciadła.

W przypadku zwierciadła wypukłego promienie równoległe, po odbiciu od jego powierzchni, nie przecinają się w jednym wspólnym punkcie, ale rozbiegają się tak, jak to pokazano na rysunku 35.7b. Nasze oko odbiera te odbite promienie tak, jakby promienie wychodziły z punkтового źródła, które znajduje się po drugiej stronie zwierciadła. Położenie tego źródła wyznaczone jest przez wspólny punkt, w którym po drugiej stronie powierzchni zwierciadła przecinają się przedłużenia promieni odbitych (punkt  $F$  na rys. 35.7b). Punkt ten jest ogniskiem  $F$  zwierciadła wypukłego, a jego odległość od powierzchni zwierciadła jest ogniskową  $f$  zwierciadła. Tym razem jednak na umieszczonym w ognisku zwierciadła wypukłego ekranie *nie pojawia się obraz przedmiotu  $P$* , a więc charakter tego ogniska jest inny niż ogniska zwierciadła wklęsłego.

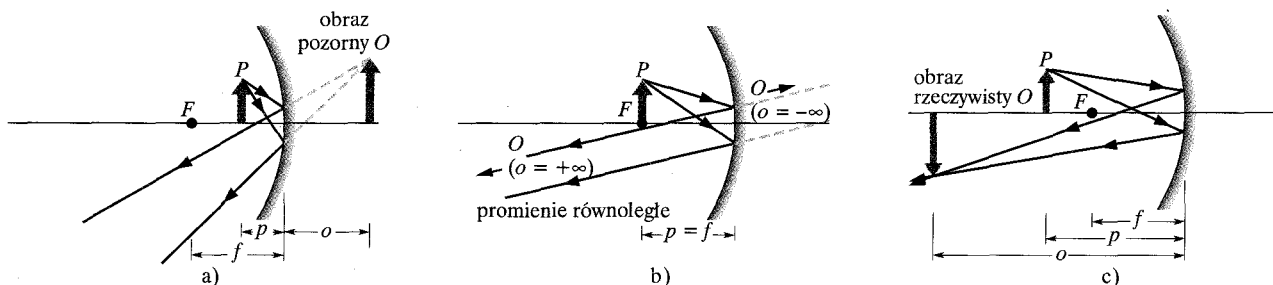
Ognisko zwierciadła wklęsłego nazywa się *ogniskiem rzeczywistym*, natomiast ognisko zwierciadła wypukłego — *ogniskiem pozornym*. W konsekwencji tej różnicy, zgodnie z przyjętą wcześniej umową, ogniskowa  $f$  zwierciadła wklęsłego jest dodatnia, a ogniskowa zwierciadła wypukłego ujemna. Dla obu zwierciadeł ogniskowa  $f$  wiąże się z promieniem krzywizny zwierciadła zależnością

$$f = \frac{1}{2}r \quad (\text{zwierciadło sferyczne}), \quad (35.3)$$

w której, zgodnie ze znakiem ogniskowej, promień krzywizny zwierciadła  $r$  jest dodatni dla zwierciadła wklęsłego i ujemny dla zwierciadła wypukłego.

## 35.4. Obrazy wytwarzane przez zwierciadła sferyczne

Zdefiniowanie ogniska zwierciadła sferycznego pozwala nam na ustalenie związku między odległością obrazu  $o$  i odległością przedmiotu  $p$  dla zwierciadła wklęsłego i wypukłego. Zaczniemy od umieszczenia przedmiotu  $P$  w dowolnym punkcie między ogniskiem  $F$  a powierzchnią zwierciadła wklęsłego (rys. 35.8a). Można wówczas obserwować pozorny obraz przedmiotu  $P$  w zwierciadle; obraz jest widziany po drugiej stronie powierzchni zwierciadła (poza zwierciadłem) i ma taką samą orientację jak przedmiot (albo jak mówimy inaczej, jest *obrazem prostym*).



Rys. 35.8. a) Przedmiot  $P$  znajdujący się między wklęsłym zwierciadłem a ogniskiem i jego pozorny obraz  $O$ . b) Przedmiot w ognisku  $F$ . c) Przedmiot za ogniskiem i jego rzeczywisty obraz

Jeżeli będziemy odsuwać przedmiot od zwierciadła w stronę ogniska, to obraz będzie odsuwał się coraz dalej w głąb zwierciadła, coraz dalej od jego powierzchni. Po osiągnięciu przez przedmiot ogniska obraz znajdzie się w nieskończoności (rys. 35.8b). Obraz wówczas znika, gdyż ani promienie odbite, ani ich przedłużenia poza zwierciadło nie przecinają się i obraz  $O$  nie może powstać.

Jeżeli nadal odsuwamy przedmiot od zwierciadła, na *odległość większą od ogniskowej*, tzn. dalej poza ognisko, to promienie odbite tworzą wiązkę zbieżną i przed zwierciadłem powstaje *odwrócony* obraz przedmiotu  $P$  (rys. 35.8c). Obraz ten przesuwa się od nieskończoności w stronę zwierciadła, w miarę jak odsuwamy przedmiot coraz dalej od ogniska  $F$ . Jeżeli trzymalibyśmy ekran (np. kartkę papieru) w miejscu powstawania obrazu, to obraz byłby zawsze widoczny na ekranie (w każdym miejscu, w którym jest wytwarzany przez zwierciadło) — mówimy, że obraz jest *ogniskowany* na ekranie przez zwierciadło. Obraz może pojawiać się na ekranie, dlatego też jest on obrazem rzeczywistym — promienie świetlne rzeczywiście przecinają się, tworząc obraz, niezależnie od tego, czy obecny jest przy tym obserwator, czy też nie. Przeciwnie niż w przypadku obrazu pozornego, odległość rzeczywistego obrazu  $o$  od zwierciadła jest wielkością dodatnią. Widzimy również, że:

➤ Obrazy rzeczywiste powstają po tej samej stronie zwierciadła, po której znajduje się przedmiot, a obrazy pozorne powstają po jego przeciwnej stronie.

Jak pokażemy dalej w paragrafie 35.8, wtedy, gdy promienie świetlne wychodzące z przedmiotu tworzą małe kąty z osią zwierciadła sferycznego, odległość przedmiotu  $p$ , odległość obrazu  $o$  i ogniskowa  $f$  są ze sobą związane następującą prostą zależnością:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} \quad (\text{zwierciadło sferyczne}). \quad (35.4)$$

Zakładamy, że kąty na naszych rysunkach, na przykład na rysunku 35.8, są właśnie takimi małymi kątami, chociaż dla przejrzystości kąty, jakie tworzą promienie, rysujemy znacznie większe. Przy założeniu małych kątów równanie (35.4) stosuje się do każdego zwierciadła wklęsłego, wypukłego i płaskiego. W zwierciadle wypukłym i płaskim powstawać mogą tylko obrazy pozorne i to niezależnie

od położenia przedmiotu na osi zwierciadła. Jak wynika z przykładu zilustrowanego na rysunku 35.6, w zwierciadle wypukłym obraz powstaje zawsze po przeciwnej stronie zwierciadła w stosunku do przedmiotu i zawsze jest obrazem prostym.

Rozmiar przedmiotu i rozmiar obrazu mierzone w kierunku *prostopadłym* do osi zwierciadła nazywane są odpowiednio *wysokością* przedmiotu i *wysokością* obrazu. Jeżeli przez  $h$  oznaczamy wysokość przedmiotu, a przez  $h'$  wysokość obrazu, to stosunek  $h'/h$  nazywa się **powiększeniem liniowym (poprzecznym)**  $m$  zwierciadła. Zgodnie z umową, powiększenie liniowe zawsze jest dodatnie, jeżeli obraz jest prosty, i ujemne, jeżeli obraz jest odwrócony. Dlatego też wyrażenie opisujące powiększenie  $m$  zapisujemy jako

$$|m| = \frac{h'}{h} \quad (\text{powiększenie liniowe}). \quad (35.5)$$

Wkrótce udowodnimy, że powiększenie liniowe może być zapisywane również w postaci

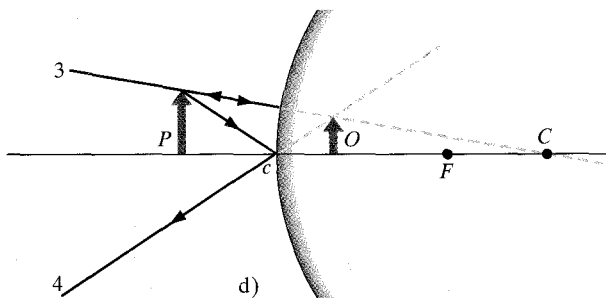
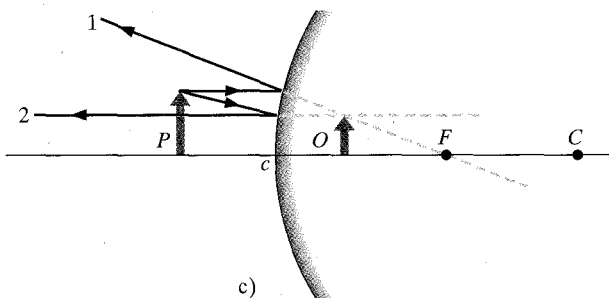
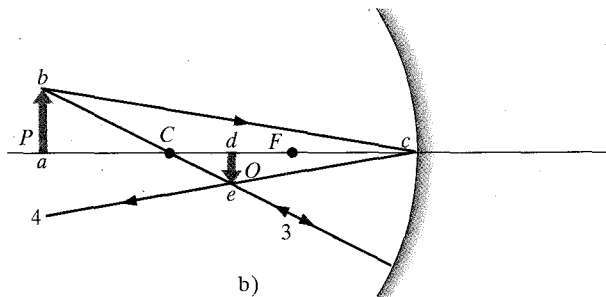
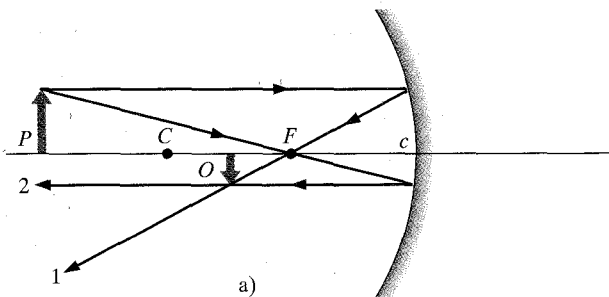
$$m = -\frac{o}{p} \quad (\text{powiększenie liniowe}). \quad (35.6)$$

Dla zwierciadła płaskiego, dla którego  $o = -p$ , otrzymujemy  $m = +1$ . Powiększenie równe 1 oznacza, że rozmiar obrazu jest taki sam, jak rozmiar przedmiotu. Znak plus oznacza, że orientacja obrazu i przedmiotu jest taka sama (obraz prosty). W przypadku zwierciadła wklęsłego na rysunku 35.8c powiększenie wynosi  $m \approx -1,5$ .

Równania (35.3)–(35.6) opisują wszystkie zwierciadła: płaskie, sferyczne zwierciadła wklęsłe i sferyczne zwierciadła wypukłe. Aby utrwalić swą wiedzę o zwierciadłach, wypełnij tabelę 35.1. W kolumnie Położenie (Obrazu) zaznacz, czy obraz jest *po tej samej stronie* zwierciadła co przedmiot, czy też *po stronie przeciwnej*. W kolumnie Rodzaj (Obrazu) zaznacz, czy obraz jest *rzeczywisty*, czy *pozorny*. W kolumnie Orientacja (Obrazu) zaznacz, czy jest to obraz *prosty*, czy też *odwrócony*. W kolumnach Znak podaj znak odpowiedniej wielkości lub wpisz  $\pm$ , jeżeli znak nie jest jednoznacznie określony. Dane zawarte w tabeli będą ci potrzebne przy rozwiązywaniu zadań i testów.

Tabela 35.1. Zwierciadła — podsumowanie

Rodzaj zwierciadła	Położenie przedmiotu	Obraz			Znak		
		Położenie	Rodzaj	Orientacja	$f$	$r$	$m$
Płaskie	dowolnie	2A	pozorny	prosty	+	+	1
Wklęsłe	$p < f$	2A	pozorny	prosty	+	-	$> 1$
	$p > f$	2A	rzeczywisty	odwrócony	-	-	$< 1$
Wypukłe	dowolnie	2B	pozorny	prosty	+	-	$< 1$



Rys. 35.9. a, b) Cztery promienie używane do wyznaczania położenia obrazu przedmiotu wytwarzanego przez zwierciadło wklęsłe. W tych przypadkach wytwarzany obraz jest rzeczywisty, odwrócony i zmniejszony w stosunku do przedmiotu. c, d) Cztery promienie używane do wyznaczania położenia obrazu przedmiotu wytwarzanego przez zwierciadło wypukłe. W przypadku zwierciadła wypukłego obraz jest zawsze pozorny, prosty i zmniejszony w stosunku do przedmiotu. [Na rysunku (c) promień 2 początkowo biegnie z przedmiotu w stronę ogniska  $F$ . Na rysunku (d) promień 3 początkowo biegnie z przedmiotu w stronę środka krzywizny  $C$ ]

## Graficzne wyznaczanie położenia obrazu

Na rysunkach 35.9a i b przedmiot  $P$  umieszczono przed zwierciadłem wklęsłym. Położenie obrazu każdego, znajdującego się poza osią zwierciadła, punktu przedmiotu  $P$  możemy wyznaczyć graficznie, wytyczając bieg pary promieni wybranych spośród czterech promieni wychodzących z tego punktu, których bieg po odbiciu od zwierciadła znamy. Te promienie to:

1. Promień równoległy do osi zwierciadła, który po odbiciu przechodzi przez ognisko  $F$  zwierciadła (promień 1 na rysunku 35.9a).
2. Promień przechodzący przez ognisko zwierciadła, który po odbiciu biegnie równoległe do osi zwierciadła (promień 2 na rysunku 35.9a).
3. Promień przechodzący przez środek krzywizny zwierciadła  $C$ , który po odbiciu wraca wzdłuż tego samego kierunku (promień 3 na rysunku 35.9b).
4. Promień padający na zwierciadło w punkcie przecięcia  $c$  osi zwierciadła z powierzchnią zwierciadła, który odbija się symetrycznie względem osi (promień 4 na rysunku 35.9b).

Obraz wybranego punktu przedmiotu powstaje w punkcie przecięcia się wybranej przez siebie pary tych promieni. Obraz całego przedmiotu można otrzymać, wyznaczając położenia obrazów dwóch lub więcej punktów przedmiotu nie leżących na osi zwierciadła. W przypadku zwierciadła wypukłego opis tych charakterystycznych promieni należy nieco zmodyfikować, co możesz zrobić, korzystając z rysunków 35.9c oraz d.



## Wyprowadzenie wzoru (35.6)

Jesteśmy już przygotowani do wyprowadzenia równania (35.6), czyli wzoru na powiększenie liniowe obrazu wytwarzanego przez zwierciadło. Rozważmy promień 4 na rysunku 35.9b. Odbija się on w punkcie  $c$  tak, że promień padający i odbity tworzą z osią zwierciadła jednakowe kąty.

Na rysunku tym dwa trójkąty prostokątne  $abc$  i  $dec$  są trójkątami podobnymi (mają wszystkie kąty równe) i wobec tego możemy napisać

$$\frac{de}{ab} = \frac{cd}{ca}$$

Wielkość po lewej stronie tej równości (pomijając na razie znak) jest liniowym powiększeniem  $m$  obrazu wytwarzanego przez zwierciadło. Gdy powstaje obraz odwrócony, jego powiększenie uważamy za ujemne i fakt ten zaznaczamy, pisząc  $-m$ . Z konstrukcji na rysunku 35.9b wynika, że  $cd = o$  i  $ca = p$ , wobec tego otrzymujemy

$$m = -\frac{o}{p} \quad (\text{powiększenie}), \quad (35.7)$$

co mieliśmy wyprowadzić.

### Przykład 35.1

Przed zwierciadłem sferycznym, którego ogniskowa wynosi  $|f| = 40$  cm, siedzi czujna tarantula, której wysokość wynosi  $h$ . Obraz tarantuli wytworzony przez zwierciadło jest obrazem prostym, a jego wysokość jest równa  $h' = 0,2h$ .

a) Czy obraz jest rzeczywisty, czy pozorny i czy znajduje się on po tej samej stronie zwierciadła co tarantula, czy po przeciwnej?

#### ROZWIĄZANIE:

Istotnym spostrzeżeniem jest fakt, że  $\rightarrow$  ponieważ obraz jest obrazem prostym, wobec tego musi on być obrazem pozornym i musi się znajdować po przeciwnej stronie zwierciadła. (Wynik ten jest natychmiastowy, jeżeli zajrzymy do wypełnionej przez siebie tabeli 35.1).

b) Czy jest to zwierciadło wklęsłe, czy wypukłe i jaki jest znak jego ogniskowej  $f$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Na podstawie znajomości rodzaju obrazu *nie potrafimy* określić, jakie jest to zwierciadło, gdyż oba rodzaje zwierciadeł sferycznych mogą wytwarzać obrazy pozorne. Nie możemy też — w rozważanym przypadku — określić rodzaju zwierciadła na podstawie znaku  $f$ . Znak ten można by wyznaczyć z równania (35.3) bądź (35.4), ale nie dysponujemy informacją wystarczającą do skorzystania z któregoś z tych równań. Jednakże — i to właśnie jest kluczowym spostrzeżeniem dla odpowiedzi na to pytanie —  $\rightarrow$

możemy skorzystać z informacji o powiększeniu. Wiemy bowiem, że stosunek wysokości obrazu  $h'$  do wysokości przedmiotu  $h$  wynosi 0,2. Wobec tego z równania (35.5) otrzymamy

$$|m| = \frac{h'}{h} = 0,2.$$

Przedmiot i obraz mają taką samą orientację (obraz jest prosty), wobec tego wiemy, że  $m$  musi być dodatnie:  $m = +0,2$ . Jeżeli podstawimy  $m$  do równania (35.6) i rozwiążemy je, na przykład ze względu na  $o$ , to otrzymamy

$$o = -0,2p,$$

co nie wydaje się pomocne do wyznaczenia znaku  $f$ , ale jeżeli wstawimy ten wynik do równania (35.4), to

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{p} = \frac{1}{-0,2p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(-5 + 1),$$

a stąd

$$f = -p/4.$$

I to jest wynik, o który nam chodziło. Ponieważ  $p$  jest dodatnie, wobec tego  $f$  musi być ujemne, a to oznacza, że mamy do czynienia ze zwierciadłem wypukłym o ogniskowej

$$f = -40 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 2:** Nietoperz wampir (gatunek z Ameryki Środkowej) drzemie przed zwierciadłem sferycznym (na jego osi), które wytwarza obraz nietoperza o powiększeniu  $m = -4$ . Czy obraz ten jest: a) rzeczywisty, czy pozorny, b) odwrócony, czy prosty, i czy c) znajduje się po tej samej, czy po przeciwnej stronie zwierciadła co nietoperz?

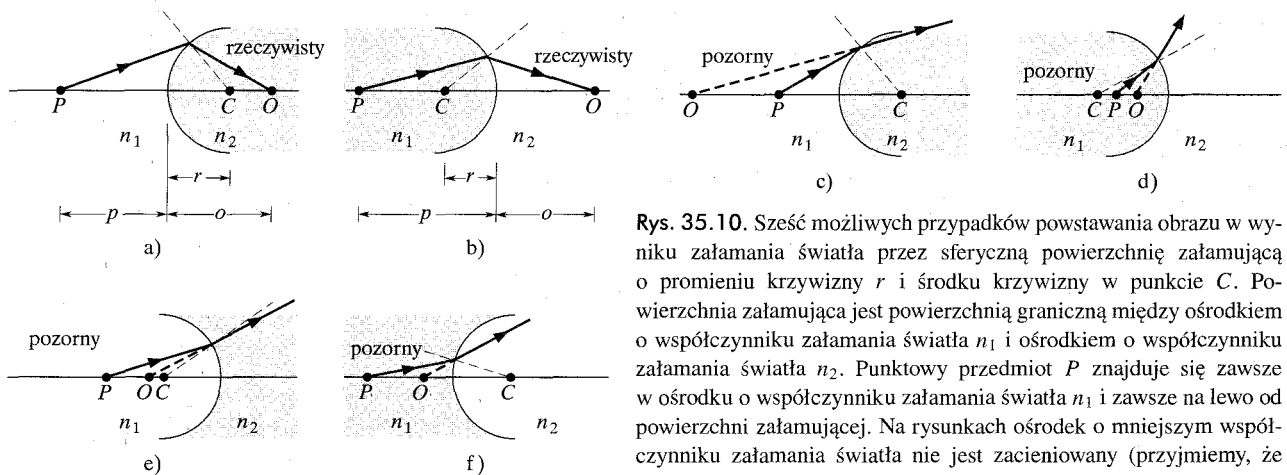
## 35.5. Sferyczne powierzchnie załamujące

Przejdziemy teraz od obrazów wytwarzanych w wyniku odbicia do obrazów, które powstają w wyniku załamania przez przezroczyste powierzchnie, na przykład powierzchnię szkła. Zajmiemy się tylko powierzchniami sferycznymi, o promieniu krzywizny  $r$  i środku krzywizny  $C$ . Światło będzie wysyłane przez punktowe przedmioty  $P$  w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n_1$  i będzie załamywane przez sferyczne powierzchnie do ośrodka o współczynniku załamania  $n_2$ .

Interesować nas będzie to, czy promienie świetlne po załamaniu na powierzchni granicznej tworzą obraz rzeczywisty (niepotrzebny jest obserwator), czy też obraz pozorny (konieczna jest obecność obserwatora). Odpowiedź zależy od względnych wartości  $n_1$  i  $n_2$  oraz od geometrii rozważanej sytuacji.

Sześć możliwych wyników takich rozważań zebrano na rysunku 35.10. Na każdej z sześciu części tego rysunku ośrodek o większym współczynniku załamania światła jest zacieniowany, przedmiot  $P$  zawsze znajduje się w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n_1$ , na lewo od powierzchni załamującej. Pokazany jest również wybrany dla każdej rozważanej sytuacji promień świetlny załamany na powierzchni granicznej obu ośrodków. (Ten promień oraz promień biegnący wzdłuż osi optycznej całkowicie wystarczają do ustalenia położenia obrazu w każdym z rozważanych przypadków).

W punkcie załamania każdego promienia normalna do powierzchni załamującej ma kierunek radialny (kierunek prostej przechodzącej przez środek krzywizny  $C$ ). W wyniku załamania promień jest odchylany albo w stronę normalnej, jeżeli wnika do ośrodka o większym współczynniku załamania światła, albo od normalnej, jeżeli wchodzi do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła. Jeżeli następnie promień załamany jest kierowany w stronę osi optycznej, to wraz z innymi (nie narysowanymi) promieniami będzie tworzył obraz rzeczywisty na tej osi. Jeżeli natomiast kieruje się on w stronę od osi, to nie może tworzyć obrazu rzeczywistego; wówczas jednak może powstawać obraz pozorny



**Rys. 35.10.** Sześć możliwych przypadków powstawania obrazu w wyniku załamania światła przez sferyczną powierzchnię załamującą o promieniu krzywizny  $r$  i środku krzywizny w punkcie  $C$ . Powierzchnia załamująca jest powierzchnią graniczną między ośrodkiem o współczynniku załamania światła  $n_1$  i ośrodkiem o współczynniku załamania światła  $n_2$ . Punktowy przedmiot  $P$  znajduje się zawsze w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n_1$  i zawsze na lewo od powierzchni załamującej. Na rysunkach ośrodek o mniejszym współczynniku załamania światła nie jest zacieniowany (przyjmijmy, że jest nim powietrze, a ośrodkiem drugim jest szkło). Obrazy rzeczywiste są wytwarzane w przypadkach (a) i (b), w pozostałych czterech przypadkach wytwarzane są obrazy pozorne

jako wynik przecięcia przedłużeń tego promienia i innych promieni, pod warunkiem (tak jak i w przypadku zwierciadła), że na drodze tych promieni znajdzie się obserwator.

Obrazy rzeczywiste  $O$  powstają (w odległości  $o$ ) na rysunkach 35.10a i b, na których po załamaniu promień jest odchylany w stronę osi optycznej. Obrazy pozorne powstają na rysunkach c i d, na których załamanie odchyła promień od osi optycznej. Zauważ, że na tych czterech rysunkach obrazy rzeczywiste powstają wtedy, gdy przedmiot znajduje się stosunkowo daleko od powierzchni załamującej, a obrazy pozorne wtedy, gdy przedmiot jest bliżej tej powierzchni. W dwóch ostatnich przypadkach (rys. 35.10e oraz f) w wyniku załamania promień jest zawsze odchylany w stronę od osi i wtedy niezależnie od odległości przedmiotu od powierzchni załamującej, zawsze powstają tylko obrazy pozorne.

Zanotujmy następującą zasadniczą różnicę między obrazami wytwarzanymi przez powierzchnie załamujące i przez powierzchnie odbijające.

► Obrazy rzeczywiste powstają po przeciwnej stronie powierzchni załamującej niż przedmiot, natomiast obrazy pozorne po tej samej stronie co przedmiot.

W paragrafie 35.8 pokażemy, że (dla promieni tworzących małe kąty z osią optyczną) zachodzi równość

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (35.8)$$

Tak jak w przypadku zwierciadeł, odległość przedmiotu  $p$  jest dodatnia, a odległość obrazu  $o$  jest dodatnia dla obrazu rzeczywistego i ujemna dla obrazu pozornego. Żeby jednak znaki wszystkich wielkości w równaniu (35.8) były prawidłowe, musimy stosować następującą regułę w odniesieniu do znaku promienia krzywizny  $r$ :

► Gdy przedmiot znajduje się przed wypukłą powierzchnią załamującą, promień krzywizny  $r$  jest dodatni. Gdy znajduje się on przed powierzchnią wklęsłą,  $r$  jest ujemne.

*Uważaj:* Ta reguła jest odwrotna niż umowa o znakach, jaką posługiwaliśmy się w przypadku zwierciadeł.


✓ **SPRAWDZIAN 3:** Pszczoła unosi się przed wklęsłą sferyczną powierzchnią załamującą szklanej rzeźby. a) Który z przypadków zilustrowanych na rysunku 35.10 odnosi się do tej sytuacji? b) Czy obraz wytwarzany przez powierzchnię załamującą jest rzeczywisty, czy pozorny, i czy jest on po tej samej stronie powierzchni co pszczoła, czy po przeciwnej?

## Przykład 35.2

Znaleziono kawałek bursztynu z zatopionym komarem jurajskim. Bursztyn ma współczynnik załamania światła 1,6. Jedna z powierzchni bursztynu jest sferyczną powierzchnią wypukłą, której promień krzywizny jest równy 3 mm (rys. 35.11).

Tak się składa, że głowa komara znajduje się na osi optycznej tej sferycznej powierzchni bursztynu i kiedy ogląda się ją wzdłuż tej osi, wtedy wydaje się, że znajduje się ona na głębokości 5 mm pod powierzchnią bursztynu. Jak głęboko pod powierzchnią bursztynu znajduje się w rzeczywistości głowa komara?

## ROZWIĄZANIE:

Kluczowe w tym przypadku jest spostrzeżenie, że  tylko wydaje się, iż głowa komara znajduje się na głębokości 5 mm, bo promienie, które docierają do obserwatora, są odchylone w wyniku załamania na wklęsłej powierzchni bursztynu. Odległość obrazu  $o$  różni się od rzeczywistej odległości przedmiotu  $p$ , zgodnie z równaniem (35.8). Przed zastosowaniem tego wzoru do ustalenia rzeczywistego położenia przedmiotu odnotujemy najpierw, że:

1. Przedmiot (głowa komara) i jego obraz znajdują się po tej samej stronie powierzchni załamującej, wobec tego obraz musi być pozorny, a zatem  $o = -5$  mm.
2. Zgodnie z umową przedmiot zawsze znajduje się w ośrodku o współczynniku załamania  $n_1$ , wobec tego mamy:  $n_1 = 1,6$  i  $n_2 = 1$ .
3. Przedmiot znajduje się przed wklęsłą powierzchnią załamującą, wobec tego promień krzywizny  $r$  jest ujemny, a zatem  $r = -3$  mm.

Po podstawieniu wyżej ustalonych wielkości do równania (35.8)

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

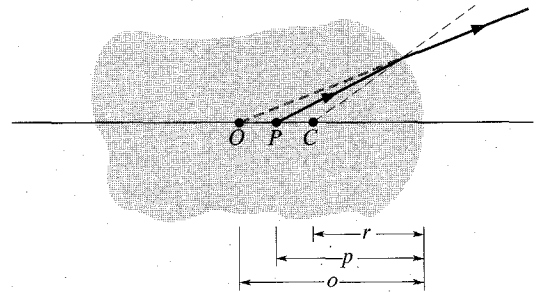
otrzymujemy

$$\frac{1,6}{p} + \frac{1}{-5 \text{ mm}} = \frac{1 - 1,6}{-3 \text{ mm}},$$

a zatem

$$p = 4 \text{ mm.}$$

(odpowiedź)



Rys. 35.11. Przykład 35.2. Kawałek bursztynu z zatopionym komarem z okresu jurajskiego, którego głowa znajduje się w punkcie  $P$ . Prawa górna część sferycznej powierzchni załamującej, ze środkiem krzywizny w punkcie  $C$ , wytwarza obraz w punkcie  $O$ , który dla obserwatora leży głębiej w bursztynie niż sam przedmiot  $P$  (głowa komara)

## 35.6. Cienkie soczewki

**Soczewka** jest przezroczystym obiektem o dwóch powierzchniach załamujących, których osie pokrywają się; ta wspólna oś jest zarazem osią soczewki. Kiedy soczewkę otacza powietrze, wtedy światło załamuje się, przechodząc z powietrza do szkła, biegnie przez soczewkę i załamuje się ponownie, przechodząc ze szkła do powietrza. Każde z tych załamań może zmienić kierunek biegu światła.

Soczewkę, która sprawia, że początkowo równoległe do jej osi promienie świetlne są po przejściu przez soczewkę promieniami zbieżnymi, nazywa się (zgodnie z rozsądkiem) **soczewką skupiającą**. Gdy natomiast sprawia ona, iż promienie takie są rozbieżne, nazywa się ją **soczewką rozpraszającą**. W wyniku załamania przez powierzchnie soczewki promieni świetlnych wychodzących z przedmiotu, który umieszczono przed soczewką (dowolnego rodzaju), może powstawać obraz przedmiotu.

Zajmiemy się tutaj tylko przypadkiem szczególnym, jakim jest **cienka soczewka** — tzn. soczewką, w której najgrubsza jej część jest cienka w porównaniu z odległością przedmiotu  $p$  i odległością obrazu  $o$ , a także w porównaniu z promieniami krzywizny  $r_1$  i  $r_2$  obu powierzchni załamujących soczewki. Będziemy rozważać tylko te promienie, które tworzą z osią soczewki małe kąty (niezależnie od tego, że na rysunkach, którymi się tutaj posługujemy, kąty te nie są wcale małe). W paragrafie 35.8 wykażemy, że dla takich promieni ogniskowa ciennej soczewki  $f$  jest związana z odległościami  $p$  i  $o$  zależnością

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{o} \quad (\text{cienka soczewka}). \quad (35.9)$$

Jest to taka sama zależność, jak w przypadku zwierciadeł. Udowodnimy również, że w przypadku gdy cienka soczewka o współczynniku załamania światła  $n$  znajduje się w powietrzu, ogniskowa  $f$  jest dana wzorem

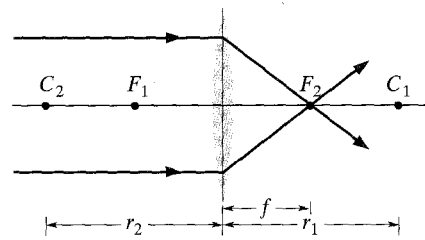
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{cienka soczewka w powietrzu}), \quad (35.10)$$

który jest nazywany *wzorem szlifierzy soczewek*, gdyż wiąże ogniskową soczewki z jej promieniami krzywizny i ze współczynnikiem załamania materiału, z którego ją wykonano. We wzorze tym  $r_1$  jest promieniem krzywizny powierzchni, która jest bliżej przedmiotu, natomiast  $r_2$  — promieniem krzywizny drugiej powierzchni załamującej soczewki. Do ustalania znaków tych promieni krzywizny stosuje się reguły podane w paragrafie 35.5 dla promieni krzywizny sferycznych powierzchni załamujących. Jeżeli soczewkę otacza ośrodek inny niż powietrze (powiedzmy olej) o współczynniku załamania światła równym  $n_{\text{ośr}}$ , to w równaniu (35.10) zastępujemy  $n$  przez  $n/n_{\text{ośr}}$ . Zapamiętaj podstawę fizyczną równań (35.9) i (35.10):

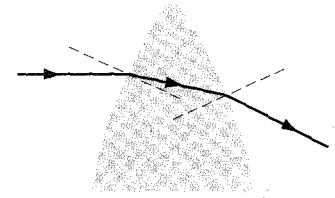
► Soczewka może wytwarzać obraz przedmiotu tylko dlatego, że może ona odchyłać promienie światłne; ale może ona odchyłać promienie światłne tylko wtedy, gdy jej współczynnik załamania światła różni się od współczynnika załamania otaczającego ją ośrodka.

Rys. 35.12. a) Promienie światłne, padające na soczewkę skupiającą równoległe do osi optycznej są skupiane (ogniskowane) w rzeczywistym ognisku  $F_2$  soczewki. Soczewka jest cieńsza niż narysowano, jej grubość jest taka, jak ciemnej pionowej linii przechodzącej przez nią, na której na rysunku dochodzi do załamania promieni. b) Powiększenie górnej części soczewki z rys. (a); normalne do powierzchni soczewki zaznaczono liniami przerywanymi. Zauważ, że przy załamaniu na obu powierzchniach promień jest kierowany w dół, w stronę osi optycznej soczewki. c) Te same co poprzednio równoległe promienie światłne po przejściu przez soczewkę rozpraszają się stają się rozbieżne. Przedłużenia kierunków promieni rozbieżnych przecinają się w punkcie  $F_2$  będącym pozornym ogniskiem soczewki. d) Powiększenie górnej części soczewki z rys. (c). Zauważ, że przy załamaniu na obu powierzchniach promień jest kierowany w górę i odchyłany od osi optycznej soczewki

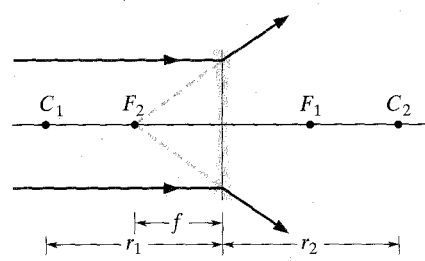
Na rysunku 35.12a pokazana jest cienka soczewka o wypukłych powierzchniach załamujących. Promienie równoległe do osi soczewki, przechodząc przez



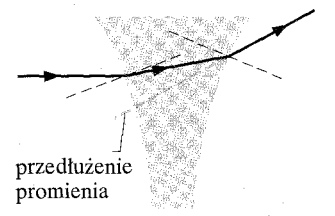
a)



b)



c)



d)

soczewkę, ulegają załamaniu dwukrotnie, tak jak to pokazano w powiększeniu na rysunku 35.12b. To dwukrotne załamanie sprawia, że promienie stają się zbieżne we wspólnym punkcie. Wobec tego jest to soczewka skupiająca; w punkcie  $F_2$  ma ona *rzeczywiste* ognisko (ponieważ promienie rzeczywiście przechodzą przez ten punkt), a jej ogniskowa wynosi  $f$ . Kiedy wiązkę równoległych promieni przepuścimy przez soczewkę w odwrotnym kierunku, po drugiej stronie soczewki znajdziemy jej drugie rzeczywiste ognisko w punkcie  $F_1$ . Dla cienkiej soczewki te dwa ogniska są równoodległe od soczewki.

Soczewka skupiająca ma rzeczywiste ogniska, wobec tego przyjmujemy, że jej ogniskowe są dodatnie, tak jak to przyjmowaliśmy w przypadku rzeczywistego ogniska zwierciadła wklęsłego. Jednakże ustalanie znaków w optyce nie jest wcale tak oczywiste i wobec tego dla pewności sprawdzimy je w równaniu (35.10). Lewa strona tego równania jest dodatnia wtedy, gdy  $f$  jest dodatnie; jak zatem wygląda prawa strona? Sprawdźmy kolejne wyrazy. Współczynnik załamania światła  $n$  dla szkła, tak zresztą jak i dla każdego innego materiału, jest większy od 1 i wobec tego wyraz  $(n - 1)$  musi być dodatni. Źródło światła (tzn. przedmiot) znajduje się po lewej stronie przed lewą wypukłą powierzchnią soczewki, wobec tego promień krzywizny tej powierzchni  $r_1$  musi być dodatni, zgodnie z regułą określającą znaki dla powierzchni załamujących. Podobnie, ponieważ przedmiot znajduje się przed wklęsłą powierzchnią prawej strony soczewki, wobec tego promień krzywizny  $r_2$  dla tej powierzchni musi być, zgodnie z przyjętą umową, ujemny. A zatem wyraz  $(1/r_1 - 1/r_2)$  jest dodatni i cała prawa strona równania (35.10) jest dodatnia, a tym samym wszystkie znaki są prawidłowe.

Na rysunku 35.12c pokazano cienką soczewkę o wklęsłych powierzchniach załamujących. Promienie równoległe do osi soczewki, przechodząc przez soczewkę, ulegają załamaniu dwukrotnie, jak to pokazano w powiększeniu na rysunku 35.12d; promienie te po przejściu przez soczewkę są *rozbieżne* i nie przechodzą przez żaden wspólny punkt. Soczewka taka jest soczewką rozpraszającą. Jednakże przedłużenia promieni wychodzących z soczewki przecinają się we wspólnym punkcie  $F_2$ , w odległości  $f$  od środka soczewki. Wobec tego soczewka ma *pozorne* ognisko w punkcie  $F_2$ . (Jeżeli do twoich oczu trafią te rozbieżne promienie, to dostrzeżesz jasny punkt w miejscu  $F_2$ , tak jak gdyby znajdowało się tam źródło światła). Drugie pozorne ognisko znajduje się po przeciwnej stronie soczewki w punkcie  $F_1$ , symetrycznie względem środka soczewki, jeśli soczewka jest cienka. Ogniska soczewki rozpraszającej są pozorne, wobec tego przyjmujemy, że ogniskowe  $f$  są ujemne.

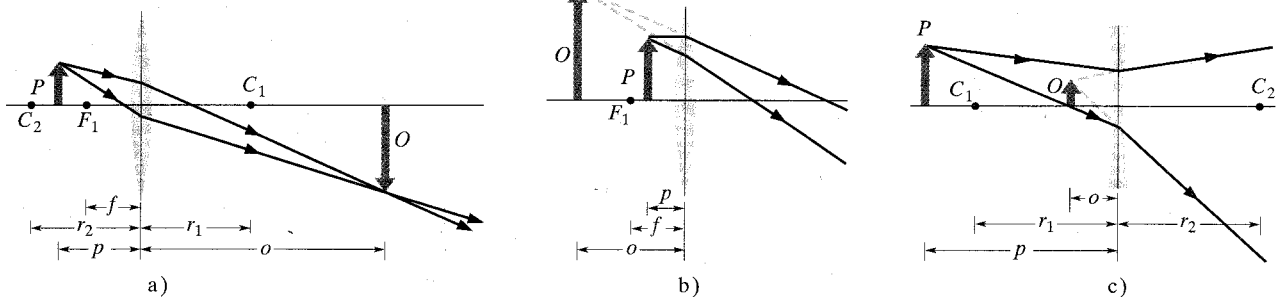
## Obrazy wytwarzane przez cienkie soczewki

Zajmiemy się teraz obrazami wytwarzanymi przez soczewki skupiające i rozpraszające. Na rysunku 35.13a przedmiot  $P$  umieszczony jest dalej od soczewki skupiającej niż ognisko  $F_1$ . Za pomocą dwóch promieni wytyczonych na tym rysunku pokazano, że soczewka wytwarza po drugiej stronie rzeczywisty, odwrócony obraz  $O$  przedmiotu.

Jeżeli umieścimy przedmiot między ogniskiem  $F_1$  i soczewką, tak jak na rysunku 35.13b, to soczewka wytworzy po tej samej stronie co przedmiot jego pozorny, prosty obraz  $O$ . Zatem soczewka skupiająca może tworzyć zarówno



Rozpalanie ognia za pomocą światła słonecznego ogniskowanego przy użyciu soczewki skupiającej wykonanej z czystego lodu. Soczewkę wykonano, podtapiając płaską taflę lodu z obu stron w płytkim naczyniu o wklęsłym dnie, przez co nadano jej wypukły kształt



Rys. 35.13. a) Rzeczywisty, odwrócony obraz  $O$  jest wytwarzany przez soczewkę skupiającą wtedy, gdy przedmiot  $P$  jest umieszczony za ogniskiem  $F_1$ . b) Kiedy przedmiot  $P$  znajduje się między ogniskiem i zwierciadłem, obraz jest pozornym obrazem prostym. c) Soczewka rozpraszająca wytwarza zawsze pozorny obraz prosty  $O$ , niezależnie od tego, czy przedmiot znajduje się za ogniskiem, czy też między ogniskiem a soczewką

obrazy rzeczywiste, jak i pozorne, zależnie od tego, czy przedmiot znajduje się dalej od soczewki niż ognisko, czy też między ogniskiem i soczewką.

Na rysunku 35.13c przedmiot  $P$  znajduje się przed soczewką rozpraszającą. Okazuje się, że soczewka taka wytwarza zawsze obrazy pozorne, niezależnie od tego, gdzie jest umieszczony przedmiot (niezależnie od tego, czy  $P$  znajduje się dalej od soczewki niż pozorne ognisko, czy też między nim a soczewką). Obrazy te powstają zawsze po tej samej stronie soczewki, po której znajduje się przedmiot i są zawsze obrazami prostymi przedmiotu.

Tak jak w przypadku zwierciadeł, również i dla cienkich soczewek przyjmujemy, że odległość  $o$  jest dodatnia wtedy, kiedy obraz jest rzeczywisty, i ujemna, jeżeli jest on pozorny. Jednakże położenie obrazów rzeczywistych i pozornych wytwarzanych przez cienkie soczewki jest inne niż w przypadku zwierciadeł:

► Obrazy rzeczywiste powstają po przeciwnej stronie soczewki niż ta, po której znajduje się przedmiot, a obrazy pozorne po tej samej stronie soczewki.

Powiększenie liniowe  $m$  soczewek skupiających i rozpraszających jest opisane przez te same wzory (35.5) i (35.6), które stosują się do zwierciadeł.

Paragraf ten zawierał sporą dawkę informacji i powinien być uporządkować, wypełniając tabelę 35.2 dla cienkich *symetrycznych soczewek* (tzn. takich, których obie powierzchnie załamujące są albo wypukłe, albo wklęsłe). W kolumnie Położenie (Obrazu) zaznacz, czy obraz jest *po tej samej stronie* soczewki co przedmiot, czy też *po stronie przeciwnej*. W kolumnie Rodzaj (Obrazu) zaznacz, czy obraz jest *rzeczywisty*, czy *pozorny*. W kolumnie Orientacja (Obrazu) zaznacz, czy jest to obraz *prosty*, czy też *odwrócony*.

Tabela 35.2. Cienkie soczewki — podsumowanie

Rodzaj soczewki	Położenie przedmiotu	Obraz			Znak		
		Położenie	Rodzaj	Orientacja	$f$	$o$	$m$
Skupiająca	$p < f$	przed soczewką	pozorny	odwrócony	+	-	-
	$p > f$	za soczewką	rzeczywisty	odwrócony	+	+	+
Rozpraszająca	dowolnie	przed soczewką	pozorny	prosty	-	-	-

*zawsze dodatni*  
*pozorny*

**Porada 1: Nie pomył zwierciadeł z soczewkami**

Pomyłki takie są bardzo częste. Pamiętaj o tym, że ogniskowa  $f$  zwierciadła wypukłego jest ujemna, przeciwnie niż ogniskowa

soczewki wypukłej. Natomiast zwierciadło wklęsłe ma dodatnią ogniskową  $f$ , przeciwnie niż soczewka wklęsła.

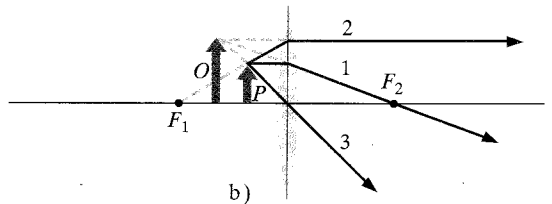
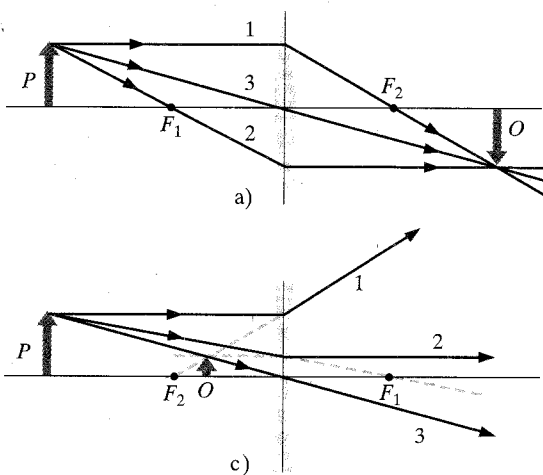
### Graficzne wyznaczanie położenia obrazów przedmiotów rozciągłych

Na rysunku 35.14a przedmiot  $P$  umieszczono przed soczewką skupiającą w odległości większej niż ogniskowa (za  $F_1$ ). Położenie obrazu każdego, znajdującego się poza osią soczewki punktu przedmiotu  $P$  (czyli punktu takiego, jak np. wierzchołek strzałki), możemy wyznaczyć graficznie, wytyczając każdą parę promieni wybranych spośród trzech promieni wychodzących z tego punktu, których bieg po przejściu przez soczewkę znamy. Te promienie to:

1. Promień równoległy do osi soczewki, który po przejściu przez soczewkę będzie zawsze przechodził przez ognisko  $F_2$  (promień 1 na rysunku 35.14a).
2. Promień przechodzący przez ognisko  $F_1$  soczewki, który po przejściu przez soczewkę biegnie równoległe do osi (promień 2 na rysunku 35.14a).
3. Promień przechodzący przez środek soczewki bez zmiany swego pierwotnego kierunku (promień 3 na rysunku 35.14a); w środku soczewki obie powierzchnie, przez które przechodzi promień, są do siebie niemal równoległe.

Obraz wybranego przez nas punktu przedmiotu (w tym przypadku wierzchołka strzałki) znajduje się tam, gdzie przecinają się dwa wybrane promienie po drugiej stronie soczewki. Obraz całego przedmiotu otrzymamy, ustalając położenie obrazów dwóch lub więcej jego punktów.

Na rysunku 35.14b pokazano, jak można wykorzystać przedłużenia tych trzech promieni do wyznaczenia położenia obrazu przedmiotu, który umieszczono przed soczewką skupiającą w odległości mniejszej niż jej ogniskowa (między soczewką a jej ogniskiem  $F_1$ ). Zwróć uwagę, że tym razem opis promienia 2 wymaga modyfikacji (jest to teraz promień, którego przedłużenie przechodzi przez ognisko  $F_1$ ).



Rys. 35.14. Trzy promienie świetlne, za pomocą których możemy wyznaczyć położenie obrazu wytwarzanego przez cienką soczewkę wtedy, gdy odległość przedmiotu  $P$  od soczewki skupiającej jest a) większa, b) mniejsza niż ogniskowa soczewki, c) dla dowolnego położenia przedmiotu w stosunku do soczewki rozpraszającej



Do wyznaczenia położenia obrazu tworzonego przez soczewkę rozpraszającą (zawsze po tej samej stronie soczewki, po której znajduje się przedmiot) musisz zmodyfikować opis promieni 1 i 2, a promień 3 pozostaje bez zmiany. Na rysunku 35.14c zilustrowano bieg tych trzech promieni i położenie obrazu wytwarzanego przez soczewkę rozpraszającą.

### Układy dwóch soczewek

Położenia obrazu wytwarzanego przez układ dwóch soczewek, których osie optyczne pokrywają się, można wyznaczyć metodą kolejnych kroków. Przyjmijmy, że soczewka 1 jest bliżej, a soczewka 2 dalej od przedmiotu.

**Krok 1** Niech  $p_1$  będzie odległością przedmiotu  $P$  od soczewki 1. Odległość  $o_1$  obrazu wytworzonego przez soczewkę 1 znajdziemy albo korzystając z równania (35.9), albo metodą graficzną.

**Krok 2** Teraz z kolei, zapominając o soczewce 1, potraktujemy obraz wyznaczony w kroku 1 jako przedmiot w stosunku do soczewki 2. Jeżeli ten nowy przedmiot znajduje się za soczewką 2, to przyjmujemy, że jego odległość  $p_2$  od soczewki 2 jest ujemna. (Jest to odstępstwo od reguły, zgodnie z którą odległość przedmiotu jest dodatnia; to odstępstwo spowodowane jest tym, że teraz przedmiot jest po przeciwnej stronie soczewki niż źródło światła). Oczywiście, jeżeli nowy przedmiot znajduje się przed soczewką 2, to  $p_2$  jest tak jak zawsze dodatnie. Odległość  $o_2$  obrazu wytwarzanego przez soczewkę 2 (a zarazem końcowego obrazu wytwarzanego przez układ obu soczewek) znajdujemy albo korzystając z równania (35.9), albo metodą graficzną.

Takie postępowanie, krok za krokiem, można oczywiście zastosować do wyznaczenia położenia obrazu wytwarzanego przez układ złożony z dowolnej liczby soczewek, a także wtedy, gdy soczewkę 2 zastępuje zwierciadło.

Całkowite powiększenie liniowe  $M$  układu dwóch soczewek jest iloczynem powiększeń liniowych  $m_1$  oraz  $m_2$  każdej z nich:

$$M = m_1 m_2. \quad (35.11)$$

### Przykład 35.3

Modliszka przyczoła się na osi optycznej cienkiej symetrycznej soczewki, w odległości 20 cm od soczewki. Soczewka, której współczynnik załamania światła jest równy 1,65, wytwarza obraz modliszki o powiększeniu  $m = -0,25$ .

a) Czy jest to obraz rzeczywisty, czy pozorny; czy jest to soczewka skupiająca, czy rozpraszająca; czy przedmiot (modliszka) znajduje się za ogniskiem, czy między ogniskiem a soczewką; po której stronie soczewki pojawia się obraz; czy jest to obraz odwrócony?

#### ROZWIĄZANIE:

🔑 Kluczem do odpowiedzi na te wszystkie pytania jest to, że na podstawie podanej wartości powiększenia  $m$  można naprawdę

wiele powiedzieć o soczewce i obrazie. Z równania (35.6) ( $m = -o/p$ ) otrzymujemy

$$o = -mp = -0,25p.$$

Nawet bez wykonywania rachunków możemy odpowiedzieć na postawione pytania. Ponieważ  $p$  jest dodatnie, wobec tego  $o$  też musi być dodatnie. To oznacza, że mamy do czynienia z obrazem rzeczywistym, a to z kolei oznacza, że soczewka jest soczewką skupiającą (jedyną soczewką, która może wytwarzać obrazy rzeczywiste). Przedmiot musi znajdować się w odległości większej niż ogniskowa (tylko w takim przypadku mogą być wytwarzane obrazy rzeczywiste). Obraz jest odwrócony i znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot (tylko takie obrazy rzeczywiste wytwarza soczewka skupiająca).

b) Jakie promienie krzywizny mają obie powierzchnie soczewki?

**ROZWIĄZANIE:**

Opieramy się na następujących spostrzeżeniach:

➡ 1. Soczewka jest symetryczna, wobec tego promień  $r_1$  (dla powierzchni bliższej przedmiotu) i promień  $r_2$  mają taką samą wartość bezwzględną  $r$ .

➡ 2. Soczewka jest soczewką skupiającą i przedmiot znajduje się przed powierzchnią wypukłą, wobec tego  $r_1 = +r$ . Druga, dalsza powierzchnia soczewki jest dla przedmiotu powierzchnią wklęsłą i wobec tego  $r_2 = -r$ .

➡ 3. Te promienie krzywizny wiąże z ogniskową wzór (35.10), który jest jedynym znanym nam równaniem zawierającym promienie krzywizn soczewki.

➡ 4. Ogniskową  $f$  soczewki, odległość przedmiotu  $p$  i odległość obrazu  $o$  wiąże ze sobą równanie (35.9).

Znamy wprawdzie  $p$ , ale nie znamy  $o$ . Wobec tego musimy zacząć od wykonania obliczeń, których nie wykonaliśmy wcześniej w punkcie (a), a zatem

$$o = (0,25)(20 \text{ cm}) = 5 \text{ cm}.$$

Teraz z równania (35.9) otrzymujemy

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{5 \text{ cm}},$$

a stąd znajdujemy, że  $f = 4 \text{ cm}$ .

Z równania (35.10)

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n - 1) \left( \frac{1}{+r} - \frac{1}{-r} \right),$$

po podstawieniu znanych wielkości

$$\frac{1}{4 \text{ cm}} = (1,65 - 1) \frac{2}{r},$$

otrzymamy

$$r = (0,65)(2)(4 \text{ cm}) = 5,2 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 4:** Powiększenie obrazu odcisku palca wytwarzanego przez cieką symetryczną soczewkę wynosi  $+0,2$  wtedy, gdy odcisk jest umieszczony o  $1 \text{ cm}$  od soczewki dalej, niż wynosi jej ogniskowa. Jaki to jest obraz i jaka jest jego orientacja (w stosunku do przedmiotu) oraz jaka to jest soczewka?

**Przykład 35.4**

Ziarenko papryki *jalapeño* (bardzo ostrej papryki meksykańskiej)  $P_1$  umieszczono przed układem dwóch współosiowych, cienkich soczewek symetrycznych 1 i 2 (rys. 35.15a). Ogniskowe soczewek są równe odpowiednio  $f_1 = +24 \text{ cm}$  i  $f_2 = +9 \text{ cm}$ , a odległość między nimi jest  $L = 10 \text{ cm}$ . Ziarenko znajduje się w odległości  $6 \text{ cm}$  od soczewki 1. Gdzie powstaje obraz ziarenka wytwarzany przez ten układ soczewek?

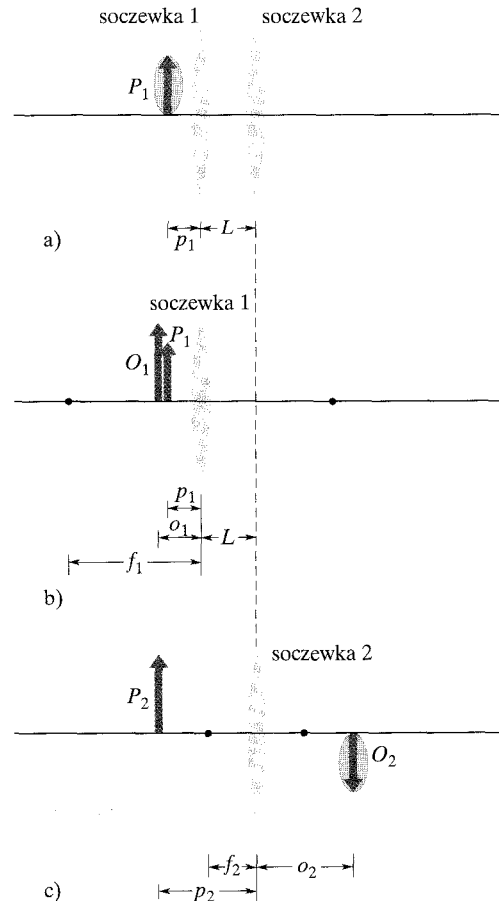
**ROZWIĄZANIE:**

Moglibyśmy wyznaczyć położenie obrazu, korzystając z graficznej metody wycieczania biegu promieni w tym układzie soczewek. Spróbujemy jednak wykonać obliczenia położenia obrazu. ➡ Obliczenia przeprowadzimy w kolejnych krokach, najpierw dla soczewki 1, a następnie dla soczewki 2.

*Soczewka 1.* Pomijamy obecność soczewki 2 i, korzystając z równania (35.9), wyznaczamy położenie obrazu  $O_1$  wytwarzanego przez soczewkę 1:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{o_1} = \frac{1}{f_1},$$

Rys. 35.15. Przykład 35.4. a) Ziarenko  $P_1$  umieszczone jest w odległości  $p_1$  od układu dwóch soczewek, między którymi odległość wynosi  $L$ . Orientacja ziarenka jest określona przez zwrot strzałki. b) Obraz  $O_1$  jest wytwarzany przez soczewkę 1 układu. c) Obraz  $O_1$  jest przedmiotem dla soczewki 2 układu, która z kolei wytwarza obraz  $O_2$ , będący zarazem końcowym obrazem wytwarzanym przez układ dwóch soczewek



Przedmiotem  $P_1$  dla soczewki 1 jest ziarenko, które znajduje się w odległości 6 cm od soczewki; podstawiamy zatem  $p_1 = +6$  cm i znaną wartość  $f_1$ :

$$\frac{1}{+6 \text{ cm}} + \frac{1}{o_1} = \frac{1}{+24 \text{ cm}}$$

i otrzymujemy  $o_1 = -8$  cm.

Ta wartość przekonuje nas o tym, że obraz  $O_1$  znajduje się w odległości 8 cm od soczewki 1 i jest obrazem pozornym. (Mogliśmy się domyślić, iż będzie to obraz pozorny, na podstawie informacji, że ziarenko znajduje się między ogniskiem a soczewką 1). Ponieważ  $O_1$  jest obrazem pozornym, wobec tego jest on po tej samej stronie soczewki co przedmiot  $P_1$  i jest obrazem prostym ziarenka, tak jak to pokazano na rysunku 35.15b.

*Soczewka 2.* Podstawą postępowania w drugim kroku naszych obliczeń jest potraktowanie obrazu  $O_1$  jako przedmiotu  $P_2$  dla soczewki 2 (teraz będziemy ignorować obecność soczewki 1). Zauważmy, że przedmiot  $P_2$  znajduje się za ogniskiem soczewki 2. Tym samym obraz  $O_2$  wytwarzany przez tę

soczewkę musi być obrazem rzeczywistym, odwróconym i będzie musiał znajdować się po przeciwnej stronie niż przedmiot  $P_2$ . Sprawdźmy to.

Z rysunku 35.15c wynika, że odległość  $p_2$  między przedmiotem  $P_2$  i soczewką 2 jest równa

$$p_2 = L + |o_1| = 10 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

Zapisując zatem równanie (35.9) dla soczewki 2

$$\frac{1}{+18 \text{ cm}} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{+9 \text{ cm}},$$

otrzymujemy

$$o_2 = +18 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Znak plus potwierdza nasze przewidywania: obraz  $O_2$  wytwarzany przez soczewkę 2 jest obrazem rzeczywistym, odwróconym i powstaje po przeciwnej stronie soczewki 2, w stosunku do przedmiotu  $P_2$ , tak jak to ilustruje rysunek 35.15c.

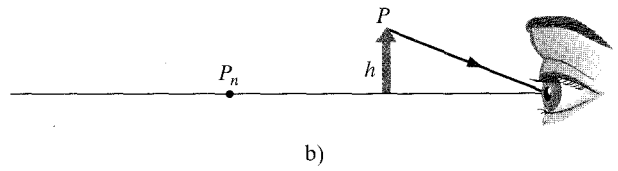
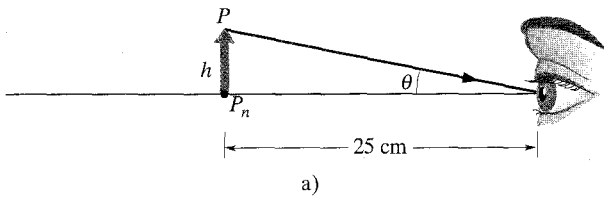
## 35.7. Przyrządy optyczne

Oko ludzkie jest nadzwyczaj sprawnym narządem, ale jego możliwości można rozszerzyć na wiele różnych sposobów, korzystając z przyrządów optycznych, takich jak okulary, szkła powiększające, projektory filmowe, aparaty fotograficzne, kamery filmowe i telewizyjne, mikroskopy i teleskopy. Wiele takich urządzeń poszerza zakres naszego widzenia na obszary znajdujące się poza zakresem widzialnym widma, a dwa przykłady takich urządzeń to kamery na podczerwień umieszczane na satelitach i mikroskopy rentgenowskie.

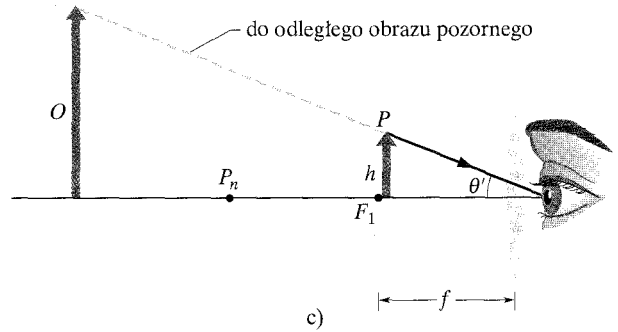
Poznane przez nas wzory opisujące zwierciadła i cienkie soczewki w przypadku większości skomplikowanych przyrządów optycznych są tylko przybliżeniami. Soczewki w typowym mikroskopie laboratoryjnym w żadnym wypadku nie są „cienkie”. W większości przyrządów optycznych soczewki są złożonymi układami soczewek, których powierzchnie rzadko kiedy są powierzchniami idealnie sferycznymi. Na razie jednak zajmiemy się trzema przyrządami optycznymi, zakładając dla prostoty, że można do nich stosować wzory dla cienkich soczewek.

### Lupa (szkło powiększające)

Normalne ludzkie oko może wytwarzać na siatkówce ostry obraz przedmiotu znajdującego się w dowolnym miejscu między nieskończonością a pewnym punktem  $P_n$  zwanym *odległością dobrego widzenia*. Jeżeli przedmiot zostanie przesunięty poza ten punkt, bliżej w stronę oka, to jego obraz na siatkówce staje się rozmyty. Odległość dobrego widzenia zmienia się z wiekiem. Wszyscy słyszeliśmy pewnie o ludziach, którzy utrzymują, iż nie potrzebują okularów, ale gazetę czytają, trzymając ją na odległość wyciągniętego ramienia, gdyż ich odległość dobrego widzenia zwiększyła się z wiekiem. Jeżeli chcesz się dowiedzieć, jaka jest twoja odległość dobrego widzenia, zdejmij okulary (albo soczewki kontaktowe),



Rys. 35.16. a) Przedmiot  $P$  o wysokości  $h$  umieszczony w odległości dobrego widzenia oka ludzkiego widziany jest pod kątem  $\theta$ . b) Żeby zwiększyć kąt widzenia obrazu, przesunięto przedmiot bliżej oka, wtedy jednak oko nie jest w stanie wytworzyć (na siatkówce) ostrego obrazu przedmiotu. c) Między przedmiotem i okiem umieszczono soczewkę skupiającą, tak że przedmiot znajduje się w pobliżu ogniska  $F_1$  soczewki. To sprawia, że obraz wytwarzany przez soczewkę jest teraz dostatecznie daleko od oka i oko jest w stanie wytworzyć jego ostry obraz. Kąt widzenia obrazu  $\theta'$  jest teraz większy od kąta, pod jakim widziany był przedmiot  $P$  na rys. (a)



jeśli ich używasz, zamknij jedno oko, a drugim, otwartym okiem obserwuj tekst na stronie książki, przysuwając go stopniowo coraz bliżej oka, aż dojdiesz do odległości, kiedy przestaniesz wyraźnie widzieć tekst. W naszych dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że odległość dobrego widzenia wynosi 25 cm, to znaczy nieco więcej niż wtedy, gdy się ma dwadzieścia lat.

Na rysunku 35.16a przedmiot  $P$  umieszczony jest w punkcie  $P_n$  w odległości dobrego widzenia od oka. Rozmiar obrazu tego przedmiotu tworzonego na siatkówce oka zależy od kąta  $\theta$ , pod jakim widziany jest przez oko. Przesuwając przedmiot bliżej oka, tak jak na rysunku 35.16b, możesz zwiększyć jego kąt widzenia, a przez to i możliwości rozróżnienia szczegółów na przedmiocie. Jednakże przedmiot znajduje się wówczas bliżej niż w odległości dobrego widzenia i jego obraz nie powstaje na siatkówce, a przez to nie jest ostry.

Ostrość obrazu możesz przywrócić, umieszczając soczewkę skupiającą tuż przy oku i oglądając przez nią przedmiot  $P$  znajdujący się w odległości prawie równej jej ogniskowej  $f$  (tzn. znajdujący się prawie w ognisku  $F_1$  soczewki), tak jak to zilustrowano na rysunku 35.16c. W ten sposób oglądasz obraz pozorny przedmiotu  $P$  wytwarzany przez soczewkę. Obraz ten znajduje się dalej niż odległość dobrego widzenia twojego oka i wobec tego możesz widzieć go wyraźnie.

Ponadto kąt widzenia  $\theta'$  obrazu pozornego jest większy niż największy kąt widzenia  $\theta$  samego przedmiotu z odległości dobrego widzenia. Powiększenie kątowe  $m_\theta$  (którego nie należy mylić z powiększeniem liniowym  $m$ ) jest równe

$$m_\theta = \theta' / \theta.$$

Mówimy, że miarą powiększenia kątowego lupy (szkła powiększającego) jest stosunek kąta widzenia obrazu wytwarzanego przez lupę do kąta widzenia przedmiotu obserwowanego z odległości dobrego widzenia.

Korzystając z rysunku 35.16, przy założeniu, że przedmiot  $P$  umieszczony jest w ognisku soczewki, oraz że dla małych kątów  $\text{tg } \theta \approx \theta$ , a  $\text{tg } \theta' \approx \theta'$ , otrzymujemy

$$\theta = h / 25 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \theta' \approx h / f.$$

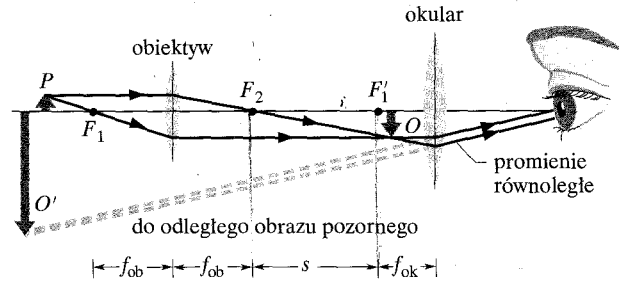
Wobec tego

$$m_{\theta} \approx \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad (\text{lupa}). \quad (35.12)$$

## Mikroskop

Na rysunku 35.17 pokazano zasadę działania mikroskopu w wersji cienkosoczewkowej. Składa się on z dwóch części: *obiektywu* (soczewka bliżej przedmiotu) o ogniskowej  $f_{ob}$  i *okularu* (soczewka bliżej oka) o ogniskowej  $f_{ok}$ . Używa się go do oglądania małych przedmiotów umieszczanych bardzo blisko obiektywu.

Rys. 35.17. Zasada działania mikroskopu. Dla uproszczenia założono, że soczewki są cienkie, a na rysunku nie zachowano skali. Obiektyw wytwarza rzeczywisty obraz  $O$  przedmiotu  $P$  tuż poza ogniskiem  $F'_1$  okularu (pomiędzy ogniskiem a soczewką okularu). Obraz  $O$  jest przedmiotem dla okularu, który z kolei wytwarza końcowy obraz pozorny  $O'$  widziany przez obserwatora. Ogniskowa obiektywu jest  $f_{ob}$ , a ogniskowa okularu  $f_{ok}$ . Długość tubusu mikroskopu wynosi  $s$



Obserwowany przedmiot  $P$  umieszczony jest tuż za pierwszym ogniskiem  $F_1$  obiektywu, na tyle blisko ogniska, że możemy jego odległość  $p$  od soczewki przybliżyć przez  $f_{ob}$ . Odległość między soczewkami reguluje się następnie tak, aby powiększony, odwrócony, rzeczywisty obraz  $O$  wytwarzany przez obiektyw powstawał między ogniskiem  $F'_1$  a soczewką okularu (w odległości nieco mniejszej od  $f_{ok}$ ). Zaznaczona na rysunku 35.17 *długość tubusu*  $s$  jest w rzeczywistości duża w stosunku do  $f_{ob}$  i wobec tego możemy przyjąć, że odległość  $o$  obrazu  $O$  od obiektywu jest równa  $s$ .

Wprowadzając do równania (35.6) powyższe przybliżenia dla  $p$  oraz  $o$ , możemy zapisać liniowe powiększenie obiektywu mikroskopu jako

$$m = -\frac{o}{p} = -\frac{s}{f_{ob}}. \quad (35.13)$$

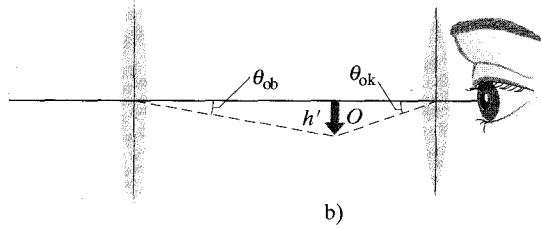
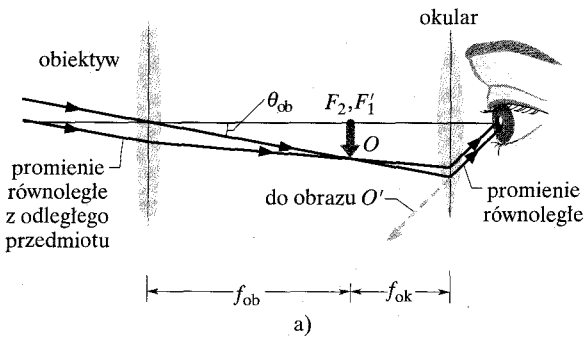
Obraz  $O$  znajduje się w odległości mniejszej niż ogniskowa, wobec tego okular działa tak jak lupa i obserwator widzi wytworzony przez okular końcowy obraz  $O'$ , który jest obrazem pozornym i odwróconym (w stosunku do pierwotnego przedmiotu). Całkowite powiększenie mikroskopu jest iloczynem powiększenia liniowego  $m$  obiektywu, opisywanego równaniem (35.13), i powiększenia kąтового okularu  $m_{\theta}$ , opisywanego równaniem (35.12); a zatem

$$M = mm_{\theta} = -\frac{s}{f_{ob}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}} \quad (\text{mikroskop}). \quad (35.14)$$

## Teleskop (luneta astronomiczna)

Istnieje wiele różnych typów teleskopów. Teleskop, który opiszemy tutaj, to prosty układ składający się z obiektywu i okularu, znany również pod nazwą *lunety astronomicznej* (lub *refraktora astronomicznego*). Na rysunku 35.18, ilustrującym

$p \approx f_{ob}$   
*p - odległość przedmiotu od obiektywu*  
 $f_{ob}$  - ogniskowa obiektywu  
 $f_{ok}$  - ogniskowa okularu  
 $s$  - długość tubusu  
 $q \approx s$   
*powiększenie mikroskopu*  
 $m = -\frac{q}{p} = -\frac{s}{f_{ob}}$   
*całkowite powiększenie*  
 $M = \frac{s}{f_{ob}} \cdot \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}}$



Rys. 35.18. a) Zasada działania teleskopu (refraktora astronomicznego). Dla uproszczenia założono, że soczewki są cienkie. Do obiektywu dociera od odległego źródła światła (przedmiotu) wiązka prawie równoległych promieni, które po przejściu przez obiektyw tworzą obraz rzeczywisty  $O$ . (Zakładamy, że jeden koniec przedmiotu leży na osi optycznej obiektywu). Obraz  $O$ , który powstaje we wspólnym punkcie ognisk  $F_2$  i  $F_1'$ , jest przedmiotem dla okularu, który z kolei wytwarza końcowy obraz pozorny  $O'$  w dalszej odległości od obserwatora. Ogniskowa obiektywu jest równa  $f_{ob}$ ; ogniskowa okularu jest równa  $f_{ok}$ . b) Obraz  $O$  ma wysokość  $h'$  i jego kąt widzenia przez obiektyw jest równy  $\theta_{ob}$ , a przez okular  $\theta_{ok}$ .

zasadę działania teleskopu, zarówno obiektyw, jak i okular reprezentowane są przez pojedyncze soczewki, chociaż w praktyce są to złożone układy soczewek (ta sama uwaga dotyczy zresztą także mikroskopu).

Układ elementów optycznych teleskopów i mikroskopów jest podobny, chociaż teleskopy są przeznaczone do obserwacji dużych obiektów znajdujących się bardzo daleko (galaktyki, gwiazdy i planety), podczas gdy przeznaczenie mikroskopów jest dokładnie odwrotne. To różne przeznaczenie obu przyrządów narzuca odmienną budowę — w teleskopie (rys. 35.18) ognisko  $F_2$  obiektywu winno pokrywać się z ogniskiem  $F_1'$  okularu, a w mikroskopie (rys. 35.17) te dwa ogniska są odległe od siebie o długość tubusu  $s$ .

Jak pokazano na rysunku 35.18a, wiązka promieni równoległych pochodzących od odległego przedmiotu trafia do teleskopu pod kątem  $\theta_{ob}$  do jego osi optycznej i tworzy odwrócony obraz rzeczywisty w punkcie, w którym leżą obydwie ogniska  $F_2$  i  $F_1'$ . Tak powstały obraz  $O$  jest przedmiotem dla okularu, przez który obserwator widzi odległy (i odwrócony) obraz pozorny  $O'$ . Kąt widzenia tego obrazu wynosi  $\theta_{ok}$ .

Powiększenie kątowe teleskopu jest równe  $\theta_{ok}/\theta_{ob}$ . Na podstawie rysunku 35.18b, przy ograniczeniu się do promieni przyosiowych, możemy napisać, że  $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$  oraz  $\theta_{ok} = h'/f_{ok}$ , co prowadzi do równania

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad (\text{teleskop}); \quad (35.15)$$

tutaj znak minus wskazuje, że obraz  $O'$  jest obrazem odwróconym. Jednym słowem miarą powiększenia kątowego teleskopu jest stosunek kąta, pod jakim widziany jest obraz wytwarzany przez teleskop, do kąta widzenia odległego przedmiotu przez nieuzbrojone oko.

Powiększenie jest tylko jednym z parametrów konstrukcyjnych teleskopu (lunety astronomicznej), którego dużą wartość stosunkowo łatwo można osiągnąć. Dobry teleskop musi mieć również odpowiednią *zdolność zbierania światła*, która decyduje o jasności obrazu. Jest ona ważna dla obserwacji słabo widocznych obiektów astronomicznych, takich jak odległe galaktyki. Zdolność zbierania światła można zwiększyć przez wykonywanie obiektywów o możliwie jak największych średnicach. Teleskop powinien również charakteryzować się dużą *zdolnością rozdzielczą* umożliwiającą odróżnienie od siebie dwóch odległych obiektów (np. gwiazd), których odległość kątowa jest mała. Innym ważnym parametrem konstrukcyjnym teleskopu jest *pole widzenia*. Teleskop przeznaczony do

obserwacji galaktyk (dla których pole widzenia jest bardzo małe) ma zupełnie inną konstrukcję niż teleskop, który jest używany do śledzenia meteoroidów (przebywających długą drogę w polu widzenia).

Projektant teleskopu musi oczywiście brać pod uwagę różnice między rzeczywistymi soczewkami a wyidealizowanymi cienkimi soczewkami, które stanowią podstawę naszych rozważań. Rzeczywista soczewka o sferycznych powierzchniach nie tworzy ostrych obrazów i ta jej wada nosi nazwę *aberracji sferycznej*. Ponadto, kąt załamania światła przez dwie powierzchnie rzeczywistej soczewki zależy od długości fali i promienie świetlne odpowiadające różnym długościom fali nie są w rzeczywistej soczewce ogniskowane w tym samym punkcie; tę wadę określa się terminem *aberracji chromatycznej*.

Ta pobieżna dyskusja parametrów konstrukcyjnych teleskopów astronomicznych nie wyczerpuje całości zagadnienia; jest jeszcze wiele innych parametrów i problemów konstrukcyjnych, jakie należy rozwiązać przy projektowaniu tych przyrządów, podobnie zresztą, jak i przy projektowaniu innych precyzyjnych przyrządów optycznych.

## 35.8. Trzy wyprowadzenia

### Równanie zwierciadła sferycznego (35.4)

Na rysunku 35.19 pokazano punktowy przedmiot  $P$  umieszczony na osi optycznej sferycznego zwierciadła wklęsłego za środkiem krzywizny  $C$  zwierciadła. Promień świetlny wychodzący z  $P$  pod kątem  $\alpha$  do osi zwierciadła, po odbiciu od zwierciadła w punkcie  $a$  przecina oś zwierciadła w punkcie  $O$ . Promień opuszczający  $P$  wzdłuż kierunku osi optycznej zwierciadła jest odbijany w punkcie  $c$  i wraca po odbiciu wzdłuż swojego pierwotnego kierunku, przechodząc również przez punkt  $O$ . Zatem  $O$  jest obrazem przedmiotu  $P$ ; jest to obraz *rzeczywisty*, bo promienie świetlne rzeczywiście przecinają się w tym punkcie. Wyznamy teraz odległość obrazu  $o$  od zwierciadła.

Z trygonometrii wiemy, że kąt zewnętrzny w trójkącie jest równy sumie dwóch przyległych kątów wewnętrznych trójkąta. Stosując to twierdzenie do trójkątów  $PaC$  i  $PaO$  na rysunku 35.19, mamy

$$\beta = \alpha + \theta \quad \text{oraz} \quad \gamma = \alpha + 2\theta.$$

Eliminując z tych dwóch równań  $\theta$ , otrzymujemy

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \quad (35.16)$$

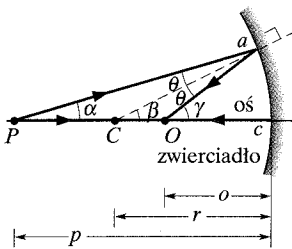
Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  możemy wyrazić w mierze łukowej (radianach) jako

$$\alpha \approx \frac{\widehat{ac}}{cP} = \frac{\widehat{ac}}{p}, \quad \beta = \frac{\widehat{ac}}{cC} = \frac{\widehat{ac}}{r}$$

oraz

$$\gamma \approx \frac{\widehat{ac}}{cP} = \frac{\widehat{ac}}{o}. \quad (35.17)$$

Tylko wyrażenie opisujące  $\beta$  jest ściśle, gdyż środek krzywizny łuku  $\widehat{ac}$  znajduje się w punkcie  $C$ . Ale jeżeli kąty  $\alpha$  i  $\gamma$  są dostatecznie małe (co spełnione jest dla



Rys. 35.19. Sferyczne zwierciadło wklęsłe, odbijając promienie świetlne przychodzące z punktowego przedmiotu, wytwarza rzeczywisty obraz punktowy  $O$  tego przedmiotu

promieni przyosiowych), to opisujące je wyżej wyrażenia są w przybliżeniu również spełniane. Podstawienie równania (35.17) do (35.16) i skorzystanie z równania (35.3) do zastąpienia  $r$  przez  $2f$  prowadzi po odpowiednich przekształceniach do równania (35.4), a więc do zależności, którą mieliśmy wyprowadzić.

### Wzór sferycznych powierzchni załamujących (35.8)

Promień świetlny wychodzący z przedmiotu  $P$  na rysunku 35.20 i padający w punkcie  $a$  na sferyczną powierzchnię załamującą ulega załamaniu zgodnie z równaniem (34.44)

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Jeżeli kąt  $\alpha$  jest mały, to  $\theta_1$  i  $\theta_2$  będą również małe i funkcje sinus tych kątów możemy zastąpić samymi kątami. Wtedy dane wyżej równanie przybiera postać

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2. \quad (35.18)$$

Ponownie skorzystamy z twierdzenia, że kąt zewnętrzny w trójkącie jest równy sumie dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych trójkąta i zastosujemy je do trójkątów  $CPa$  i  $Oca$ . Wtedy

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{oraz} \quad \beta = \theta_2 + \gamma. \quad (35.19)$$

Jeżeli skorzystamy z równań (35.19) do wyeliminowania z (35.18) kątów  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , to otrzymamy

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta. \quad (35.20)$$

Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , wyrażone w mierze łukowej (w radianach), są równe:

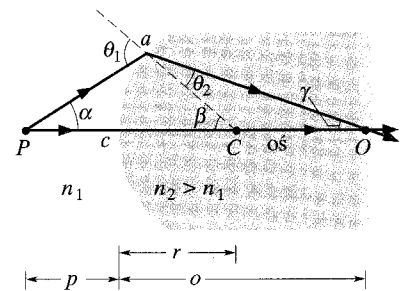
$$\alpha \approx \frac{\widehat{ac}}{p}, \quad \beta = \frac{\widehat{ac}}{r}, \quad \gamma \approx \frac{\widehat{ac}}{o}. \quad (35.21)$$

Tylko drugie z tych równań jest ściśle. Dwa pozostałe są tylko przybliżone, bo  $O$  i  $P$  nie są środkami okręgów, których częścią jest łuk  $\widehat{ac}$ . Ale dla małych kątów (dla promieni bliskich osi optycznej) przybliżenia w równaniach (35.21) są dość dobre. Podstawienie równania (35.21) do (35.20) prowadzi bezpośrednio do równania (35.8), które chcieliśmy wyprowadzić.

### Równanie cienkich soczewek (35.9) i wzór szlifierzy soczewek (35.10)

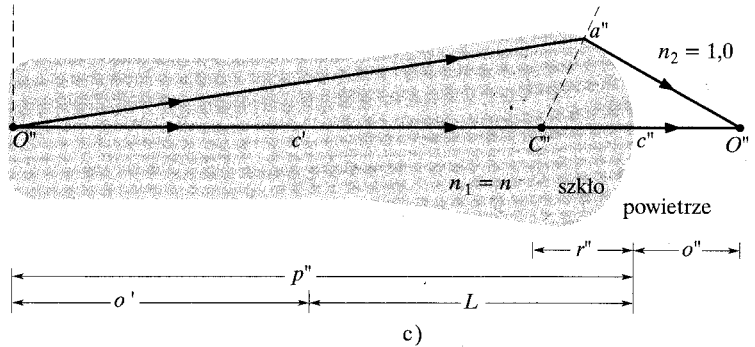
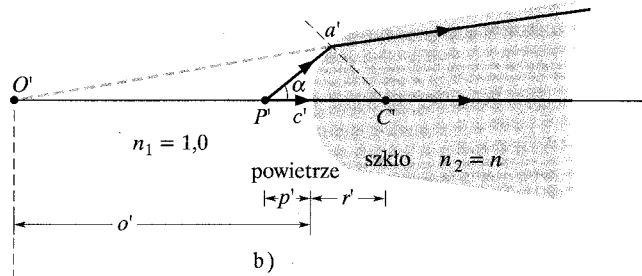
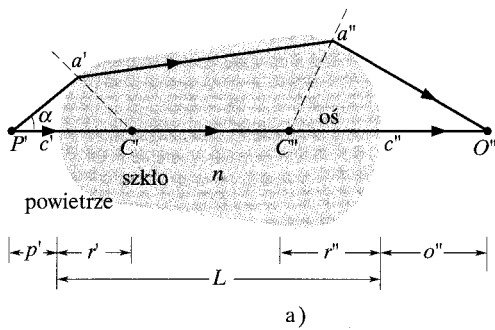
Rozważmy każdą powierzchnię soczewki jako oddzielną powierzchnię załamującą i potraktujmy obraz wytwarzany przez pierwszą powierzchnię jako przedmiot dla drugiej powierzchni.

Zacniemy od grubej „soczewki” szklanej o grubości  $L$  (rys. 35.21a), której powierzchnie załamujące lewa i prawa mają promienie krzywizny odpowiednio  $r'$  i  $r''$ . Punktowy przedmiot  $P'$  umieszczamy w pobliżu lewej powierzchni soczewki, tak jak pokazano na rysunku. Promień świetlny wychodzący z  $P'$  równoległe do kierunku osi optycznej nie jest odchylany ani przy wejściu, ani przy wyjściu z soczewki.



Rys. 35.20. Rzeczywisty obraz  $O$  punkowego przedmiotu  $P$  wytwarzany w wyniku załamania światła na wypukłej powierzchni sferycznej rozgraniczającej dwa ośrodki optyczne





Rys. 35.21. a) Dwa promienie świetlne wychodzące z punkтового przedmiotu  $P'$ , po załamaniu na dwóch sferycznych powierzchniach „soczewki”, tworzą rzeczywisty obraz  $O''$ . Promienie najpierw przechodzą przez powierzchnię wypukłą (lewą powierzchnię boczną soczewki), a następnie przez powierzchnię wklęsłą (prawą powierzchnię boczną soczewki). Promień przechodzący przez punkty  $a'$  i  $a''$  jest w rzeczywistości promieniem bliskim osi optycznej soczewki. b) Strona lewa i c) strona prawa „soczewki” z rys. (a) pokazane oddzielnie

Drugi promień wychodzący z  $P'$ , pod kątem  $\alpha$  do osi soczewki, pada na lewą powierzchnię w punkcie  $a'$ , ulega załamaniu i pada na drugą (prawą) powierzchnię soczewki w punkcie  $a''$ . Tam promień ulega ponownie załamaniu i przecina oś soczewki w punkcie  $O''$ , który jest obrazem przedmiotu  $P'$ , gdyż w tym punkcie przecinają się, po kolejnych załamaniach na dwóch powierzchniach, oba promienie, które wyszły z  $P'$ .

Na rysunku 35.21b pokazano, że pierwsza (lewa) powierzchnia wytwarza również obraz pozorny przedmiotu  $P'$  w punkcie  $O'$ . Do wyznaczenia położenia tego obrazu skorzystamy z równania (35.8)

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Kładąc  $n_1 = 1$  dla powietrza i  $n_2 = n$  dla szklanej soczewki oraz pamiętając, że odległość obrazu jest wielkością ujemną (tzn.  $o = -o'$  na rysunku 35.21b), otrzymujemy

$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{o'} = \frac{n - 1}{r'}$$
(35.22)

W tym równaniu  $o'$  będzie dodatnie, ponieważ już wprowadziliśmy znak minus właściwy dla obrazu pozornego.

Na rysunku 35.21c pokazano ponownie drugą powierzchnię. Jeśli obserwator w punkcie  $a''$  nie jest świadom istnienia pierwszej powierzchni, może on myśleć, że promień świetlny docierający do punktu  $a''$  wychodzi z punktu  $O'$  na rysunku 35.21b i że obszar na lewo od tej (rzeczywistej) powierzchni jest wypełniony szkłem tak, jak to zaznaczono na rysunku 35.21c. Zatem obraz pozorny  $O'$  tworzony przez pierwszą powierzchnię soczewki spełnia funkcję rzeczywistego przedmiotu  $P''$  w stosunku do drugiej powierzchni. Odległość tego przedmiotu

od drugiej powierzchni jest równa

$$p'' = o' + L. \quad (35.23)$$

Żeby móc zastosować równanie (35.8) do drugiej powierzchni, musimy przyjąć, że  $n_1 = n$  oraz że  $n_2 = 1$ , ponieważ obecnie przedmiot znajduje się w szkłe. Jeśli podstawimy równanie (35.23), to (35.8) przybierze postać

$$\frac{n}{o' + L} + \frac{1}{o''} = \frac{1 - n}{r''}. \quad (35.24)$$

Załóżmy teraz, że grubość  $L$  naszej „soczewki” na rysunku 35.21a jest na tyle mała, że możemy ją zaniedbać w porównaniu z innymi rozważanymi wielkościami liniowymi (takimi jak  $p'$ ,  $o'$ ,  $p''$ ,  $o''$ ,  $r'$  i  $r''$ ). Dalej będziemy już korzystać z *przybliżenia cienkich soczewek*. Podstawiając do równania (35.24)  $L = 0$  i porządkując prawą stronę równania, otrzymujemy

$$\frac{n}{o'} + \frac{1}{o''} = -\frac{n - 1}{r''}. \quad (35.25)$$

Dodanie równań (35.22) i (35.25) prowadzi do

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{o''} = (n - 1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right).$$

Wprowadzając na koniec dla pierwotnej odległości przedmiotu oznaczenie  $p$ , a dla odległości końcowego obrazu oznaczenie  $o$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = (n - 1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right), \quad (35.26)$$

czyli z małą zmianą oznaczeń otrzymaliśmy to, co chcieliśmy wyprowadzić — równania (35.9) i (35.10).

## Podsumowanie

**Obrazy rzeczywiste i pozorne** Obraz jest to odtworzenie przedmiotu przez światło. Kiedy obraz może powstać na jakiejś powierzchni, wówczas jest on *obrazem rzeczywistym*. Jeżeli obraz jest odbierany jedynie przez aparat widzenia obserwatora, to jest to *obraz pozorny*.

**Wytwarzanie obrazu** Zwierciadła sferyczne, sferyczne powierzchnie załamujące i cienkie soczewki mogą wytwarzać obraz źródła światła — przedmiotu — zmieniając kierunek promieni świetlnych wychodzących z jego powierzchni. Obraz powstaje, gdy po zmianie kierunku przecinają się promienie (tworząc obraz rzeczywisty) lub ich przedłużenia (tworząc obraz pozorny). Dla promieni dostatecznie bliskich osi optycznej zwierciadła sferycznego, powierzchni załamującej i cienkiej soczewki (promieni przyosiowych) spełnione są następujące związki między *odległością przedmiotu*  $p$  (która jest dodatnia) i *odległością obrazu*  $o$  (która jest dodatnia dla obrazów rzeczywistych i ujemna dla obrazów pozornych):

### 1. Zwierciadło sferyczne:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}, \quad (35.4, 35.3)$$

gdzie  $f$  jest ogniskową, a  $r$  — promieniem krzywizny zwierciadła. *Zwierciadło płaskie* jest przypadkiem szczególnym, dla którego  $r \rightarrow \infty$ , tak że  $p = -o$ . Obrazy rzeczywiste powstają po tej samej stronie zwierciadła, po której znajduje się przedmiot, a obrazy pozorne po przeciwnej stronie.

### 2. Sferyczne powierzchnie załamujące:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{o} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (\text{pojedyncza powierzchnia}), \quad (35.8)$$

gdzie  $n_1$  jest współczynnikiem załamania dla ośrodka, w którym znajduje się przedmiot, natomiast  $n_2$  — ośrodka po drugiej stronie powierzchni załamującej, a  $r$  jest promieniem krzywizny tej powierzchni. Jeżeli przedmiot znajduje się przed powierzchnią wypukłą, to promień  $r$  jest dodatni, jeżeli jest to powierzchnia wklęsła, to jest on ujemny. Obrazy rzeczywiste powstają po przeciwnej stronie powierzchni załamującej niż przedmiot, a obrazy pozorne po tej samej stronie powierzchni załamującej.

### 3. Cienka soczewka:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (35.9, 35.10)$$

gdzie  $f$  jest ogniskową,  $n$  — współczynnikiem załamania światła dla materiału soczewki,  $r_1$  i  $r_2$  są promieniami krzywizny dwóch sferycznych powierzchni soczewki. Jeżeli przedmiot znajduje się przed powierzchnią wypukłą, to jej promień jest dodatni, jeżeli jest to powierzchnia wklęsła, to jest on ujemny. Obrazy rzeczywiste powstają po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot, a obrazy pozorne po tej samej stronie soczewki.

**Powiększenie liniowe (poprzeczne)** Powiększenie liniowe  $m$  zwierciadła sferycznego lub cienkiej soczewki jest równe

$$m = -\frac{o}{p} \quad (35.6)$$

Wartość bezwzględna  $m$  wynosi

$$|m| = \frac{h'}{h} \quad (35.5)$$

gdzie  $h$  i  $h'$  są odpowiednio wysokościami przedmiotu i obrazu.

**Przyrządy optyczne** Trzy przyrządy optyczne, które zwiększają możliwości ludzkiego oka, to:

1. *Lupa (szkło powiększające)*, której powiększenie kątowe  $m_\theta$  jest równe

$$m_\theta \approx \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad (35.12)$$

gdzie  $f$  jest ogniskową lupy.

2. *Mikroskop*, którego powiększenie całkowite  $M$  wynosi

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}} \quad (35.14)$$

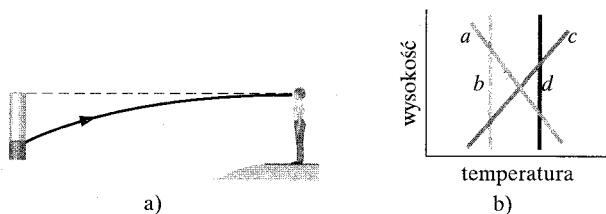
gdzie  $m$  jest powiększeniem liniowym obiektywu,  $m_\theta$  jest kątowym powiększeniem okularu,  $s$  jest długością tubusu,  $f_{ob}$  i  $f_{ok}$  są ogniskowymi odpowiednio obiektywu i okularu.

3. *Teleskop (luneta astronomiczna)*, którego powiększenie kątowe  $m_\theta$  jest równe

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad (35.15)$$

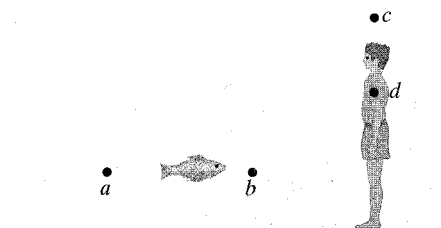
## Pytania

1. Potwory wodne, trytony, rusałki, od dawien dawna były „widywane” przez obserwatorów znajdujących się na brzegu lub na dolnym pokładzie statku. Z tak nisko położonych punktów do obserwatora mogą trafiać promienie świetlne pochodzące od przedmiotów pływających po powierzchni wody (np. kłoców drewnianych, morświnów). Promienie takie, których kierunek ulega zakrzywieniu (jeden z nich został przesadnie zakrzywiony na rysunku 35.22a), docierając do obserwatora, powodują wrażenie obserwacji przedmiotów wystających wysoko z wody (i zapewne drgających z powodu turbulencji powietrza). Miraż taki może łatwo przypominać kształty owych osławionych stworów wodnych. Na rysunku 35.22b podano kilka wykresów zależności temperatury powietrza od wysokości nad lustrem wody. Który z tych wykresów najlepiej ilustruje warunki temperaturowe powietrza, w jakich zakrzywienie toru promieni świetlnych prowadzi do takiego typu mirażu?



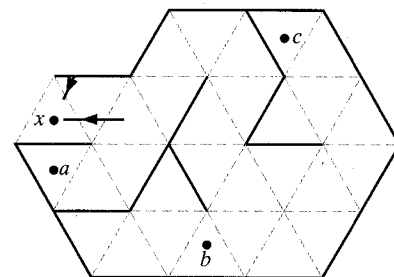
Rys. 35.22. Pytanie 1

2. Na rysunku 35.23 pokazano rybę i podkradającego się do niej łowcę stojącego w wodzie. a) Czy widzi on rybę w pobliżu punktu  $a$ , czy punktu  $b$ ? b) Czy ryba widzi (dzikie) oczy łowcy w pobliżu punktu  $c$ , czy punktu  $d$ ?



Rys. 35.23. Pytanie 2

3. Na rysunku 35.24 przedstawiono plan podłogi szklanego labiryntu, w którym wszystkie ściany pokryte są lustrami. W takim labiryncie wydaje się, że w różne strony od siebie rozbiega się wiele „wirtualnych korytarzy”. Bierze się to stąd, że oglądasz wielokrotne odbicia od lusterek, które tworzą ściany labiryntu. Lustra ustawione są wzdłuż niektórych boków powtarzających się na podłodze trójkątów równobocznych. Stajesz u wejścia  $x$  do labiryntu. a) Którego z ukrywających się w labiryncie potworów  $a$ ,  $b$  i  $c$  możesz dostrzec wzdłuż wirtualnych korytarzy rozciągających się od wejścia  $x$ ? b) Ile razy każdy z tych potworów ukazuje się



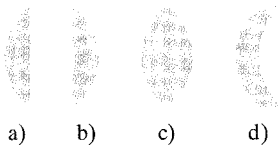
Rys. 35.24. Pytanie 3

w korytarzu? c) Co jest na samym końcu korytarza? (Wskazówka: Pokazano dwa promienie przychodzące z wirtualnych korytarzy; przeanalizuj (wstecz) ich bieg przez labirynt, korzystając z prawa odbicia od każdego z lusterek wzdłuż toru każdego promienia. Czy przechodzą one przez trójkąt, w którym znajduje się potwór? Jeżeli tak, to ile razy? Dodatkową analizę problemu znajdziesz w artykule: J. Walker, The Amateur Scientist, *Scientific American*, **254**, 120–126, Junie 1986).

4. Wzdłuż osi optycznej zwierciadła wklęsłego, od ogniska w stronę nieskończoności brnie z wysiłkiem pingwin. a) Jak porusza się jego obraz? b) Czy wysokość jego obrazu ciągle rośnie, czy też ciągle maleje, a może zmienia się w bardziej skomplikowany sposób?

5. Kiedy w filmie *Park Jurajski* tyranozaur ściga jeepa, widzimy odbity obraz tyranozaura we wstecznym lusterku samochodu. Na lusterku tym widnieje (jak na ironię) napis ostrzegawczy: „Przedmioty w lusterku znajdują się bliżej niż się wydają”. Czy to wsteczne lusterko jest płaskie, wklęsłe, czy wypukłe?

6. Na rysunku 35.25 pokazano cztery cienkie soczewki wykonane z tego samego materiału. Ich boczne powierzchnie są albo płaskie, albo sferyczne o promieniu krzywizny równym 10 cm. Spróbuj bez wykonywania rachunków uszeregować te soczewki wedle malejącej wartości ogniskowej.

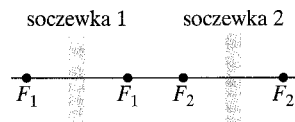


Rys. 35.25. Pytanie 6

7. Przedmiot znajduje się przed cienką symetryczną soczewką skupiającą. Czy odległość obrazu tego przedmiotu od zwierciadła rośnie, maleje, czy też pozostaje taka sama wtedy, gdy zwiększamy a) współczynnik załamania światła  $n$  dla materiału soczewki, b) wielkość promienia krzywizny obu powierzchni bocznych soczewki i c) współczynnik załamania światła  $n_{osr}$  ośrodka otaczającego soczewkę, przy czym zawsze  $n_{osr}$  jest mniejsze od  $n$ ?

8. Ogniskowe wklęsłego zwierciadła i soczewki skupiającej (ze szkła o  $n = 1,5$ ) są takie same i wynoszą w powietrzu 3 cm. Jeżeli umieścimy je w wodzie ( $n = 1,33$ ), to czy wtedy ich ogniskowe będą większe, mniejsze, czy też nadal równe 3 cm?

9. W tabeli podano charakterystyki sześciu wariantów układu dwóch soczewek naszkicowanego na rysunku 35.26. (Punkty oznaczone jako  $F_1$  i  $F_2$  to ogniska soczewki 1 i soczewki 2). Przedmiot znajduje się po lewej stronie układu w odległości  $p_1$  od soczewki 1, tak jak na rysunku 35.15. a) Dla którego z sześciu wariantów jesteśmy w stanie powiedzieć bez wykonywania obliczeń, czy końcowy obraz (tzn. obraz wytwarzany przez soczewkę 2) znajduje się po lewej, czy po prawej stronie soczewki 2 i czy ma on taką samą orientację jak przedmiot? b) Dla tych „łatwych” wariantów podaj położenie obrazu jako „lewa strona” lub „prawa strona” i orientację jako „prosty” lub „odwrócony”.



Rys. 35.26. Pytanie 9

Wariant	Soczewka 1	Soczewka 2	
1	skupiająca	skupiająca	$p_1 < f_1$
2	skupiająca	skupiająca	$p_1 > f_1$
3	rozpraszająca	skupiająca	$p_1 < f_1$
4	rozpraszająca	skupiająca	$p_1 > f_1$
5	rozpraszająca	rozpraszająca	$p_1 < f_1$
6	rozpraszająca	rozpraszająca	$p_1 > f_1$

10. Odchylenie kierunku promieni świetlnych w naszym aparacie widzenia dokonuje się przede wszystkim w rogówce (na granicy powietrze–oko). Współczynnik załamania światła dla rogówki jest nieco większy od współczynnika załamania dla wody. a) Czy odchylenie promieni świetlnych przez rogówkę jest większe, mniejsze, czy takie samo, jak ich odchylenie w powietrzu, jeśli znajdujesz się pod wodą? b) Ryba z Ameryki Środkowej o nazwie *Anableps anableps* może widzieć jednocześnie pod i nad wodą w obu tych ośrodkach, bo pływa z oczami częściowo wysuniętymi nad powierzchnię wody. Czy dla zapewnienia wyraźnego widzenia w obu tych ośrodkach promień krzywizny zanurzonej części rogówki jest większy, mniejszy, czy też taki sam, jak części wystającej ponad powierzchnię wody?

## Zadania

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

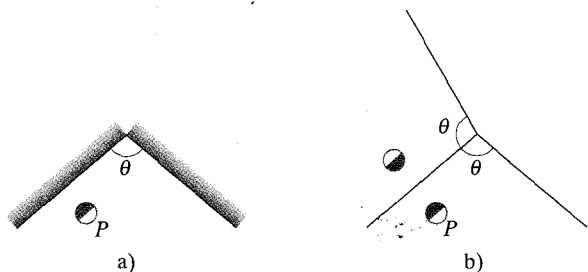
Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

## 35.2 Zwierciadła płaskie

1. Na poziomie twoich oczu, w odległości 10 cm od płaskiego zwierciadła lata ćma. Twoje oczy znajdują się w odległości 30 cm od zwierciadła. Ile wynosi odległość od twoich oczu do miejsca, w którym w zwierciadle powstaje obraz ćmy?

2. Oglądasz przez aparat fotograficzny obraz kolibra w zwierciadle płaskim, odległym od aparatu o 4,3 m. Koliber zawiesz na poziomie aparatu, w odległości 5 m na prawo od ciebie i 3,3 m od powierzchni zwierciadła. Ile wynosi odległość między aparatem a obrazem kolibra w zwierciadle?

3. Rysunek 35.27a to widok z góry dwóch pionowych zwierciadeł płaskich z umieszczonym między nimi przedmiotem  $P$ . Jeżeli spojrzysz w zwierciadła, zobaczysz wielokrotne obrazy przedmiotu  $P$ . Możesz je znaleźć, rysując odbicia w każdym zwierciadle, w obszarze kątowym między obydwoma zwierciadłami, tak jak to zrobiono dla zwierciadła po lewej stronie na rysunku 35.27b. Narysuj teraz odbicie tego odbicia i postępuj tak dalej po lewej i prawej stronie tak długo, aż odbicia spotkają się (pokryją) w głębi zwierciadeł. Wtedy możesz policzyć liczbę obrazów przedmiotu  $P$ . a) Ile obrazów przedmiotu  $P$  zobaczysz wtedy, gdy kąt między zwierciadłami jest równy  $\theta = 90^\circ$ ? b) Narysuj ich położenia i orientacje (jak na rysunku 35.27b).

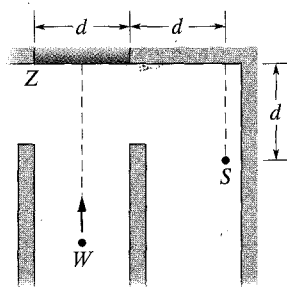


Rys. 35.27. Zadania 3 i 4

4. Powtórz zadanie 3 dla przypadku, gdy kąt  $\theta$  jest równy: a)  $45^\circ$ , b)  $60^\circ$  i c)  $120^\circ$ . d) Wyjaśnij, dlaczego w przypadku (c) możliwych jest kilka odpowiedzi.

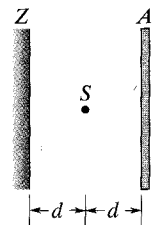
5. Udowodnij, że wtedy, gdy płaskie zwierciadło jest obracane o kąt  $\alpha$ , kierunek wiązki odbitej odchyła się o  $2\alpha$ . Pokaż, że jest to wynik rozsądny dla kąta  $\alpha = 45^\circ$ .

6. Na rysunku 35.28 pokazany jest widok z góry korytarza, na końcu którego zamontowano płaskie zwierciadło  $Z$  o szerokości  $d = 3$  m. Włamywaczka  $W$  skrada się wzdłuż korytarza prosto w stronę środka zwierciadła. Jak daleko od zwierciadła będzie znajdować się włamywaczka w momencie, kiedy dostrzeże ją w zwierciadle strażnik ochrony  $S$ ?



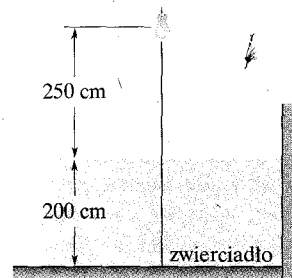
Rys. 35.28. Zadanie 6

7. Umieszczamy punktowe źródło światła  $S'$  w odległości  $d$  od ekranu  $A$ . Jak zmieni się natężenie światła w środku ekranu, jeżeli z tyłu za źródłem światła, w odległości  $d$ , umieścisz całkowicie odbijające zwierciadło  $Z$ , tak jak to pokazano na rysunku 35.29. (Wskazówka: Skorzystaj z równania (34.27)).



Rys. 35.29. Zadanie 7

8. Na rysunku 35.30 mała żarówka zawieszona jest nad wodą w basenie kąpielowym. Dno basenu stanowi wielkie zwierciadło płaskie. Jak głęboko pod powierzchnią tego zwierciadła znajduje się obraz żarówki? (Wskazówka: Wytocz bieg dwóch promieni,



Rys. 35.30. Zadanie 8

tak jak na rysunku 35.3, ale uwzględnij odchylenie promieni świetlnych w wyniku ich załamania. Przyjmij, że promienie są bliskie osi pionowej przechodzącej przez żarówkę i skorzystaj z przybliżenia małych kątów, tzn.  $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$ ).

### 35.4 Obrazy wytwarzane przez zwierciadła sferyczne

9. Wypukłe lustro do golenia ma promień krzywizny 35 cm. Jest ono tak ustawione, że obraz twarzy golącego się mężczyzny jest 2,5-krotnie większy od samej twarzy. Jak daleko od twarzy znajduje się lustro?

10. Uzupełnij tabelę 35.3, której każdy wiersz odnosi się do innego ustawienia przedmiotu, zwierciadła płaskiego lub zwierciadła sferycznego (wklęsłego bądź wypukłego). Odległości w tabeli

Tabela 35.3. Zadanie 10: Zwierciadła

Rodzaj zwierciadła	$f$	$r$	$o$	$p$	$m$	Obraz rzeczywisty?	Obraz odwrócony?
a) wklęsłe	20			+10			
b)				+10	+1,0	nie	
c)	+20			+30			
d)				+60	-0,5		
e)		-40	-10				
f)	20				+0,1		
g) wypukłe	40	4					
h)				+24	0,5		tak

podane są w centymetrach. Jeżeli przy liczbie brakuje znaku, uzupełnij go. Naskikuj każde z ustawień i wytycz bieg odpowiedniej liczby promieni potrzebnych do wyznaczenia położenia przedmiotu i jego obrazu.

11. Krótki, prosty przedmiot o długości  $L$  leży na osi optycznej sferycznego zwierciadła w odległości  $p$  od jego powierzchni. a) Pokaż, że jego obraz ma długość  $L'$  równą

$$L' = L \left( \frac{f}{p-f} \right)^2.$$

(Wskazówka: Znajdź położenia obu końców przedmiotu). b) Pokaż, że powiększenie podłużne  $m' (= L'/L)$  jest równe  $m^2$ , gdzie  $m$  jest liniowym powiększeniem poprzecznym.

12. a) Wzdłuż osi optycznej zwierciadła sferycznego o promieniu krzywizny  $r$  do zwierciadła zbliża się z prędkością  $v_p$  świecący punkt. Pokaż, że obraz tego przedmiotu porusza się z prędkością

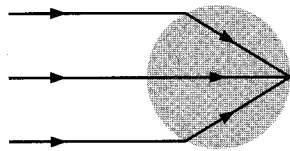
$$v_o = - \left( \frac{r}{2p-r} \right)^2 v_p,$$

gdzie  $p$  jest odległością świecącego punktu od zwierciadła w danej chwili. (Wskazówka: Wyjdź od równania (35.4)). Przyjmij następnie, że jest to zwierciadło wklęsłe, o promieniu krzywizny  $r = 15$  cm, i że  $v_p = 5$  cm/s. Znajdź prędkość obrazu, gdy b)  $p = 30$  cm (daleko za ogniskiem), c)  $p = 8$  cm (tuż za ogniskiem) i d)  $p = 10$  mm (bardzo blisko zwierciadła).

### 35.5 Sferyczne powierzchnie załamujące

13. Wiązka równoległa z lasera pada na sztywną przezroczystą kulę o współczynniku załamania światła  $n$  (rys. 35.31).

a) Ile wynosi współczynnik załamania światła dla kuli, jeżeli wiadomo, że na jej tylnej powierzchni powstaje obraz punktowy? b) Ile musiałby wynosić współczynnik załamania światła  $n$ , aby obraz powstawał w środku kuli (jeżeli jest to w ogóle możliwe)?



Rys. 35.31. Zadanie 13

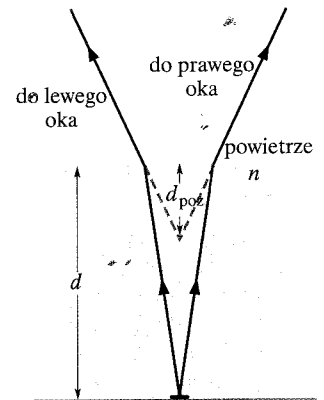
14. Uzupełnij tabelę 35.4, której każdy wiersz odnosi się do innego ustawienia punktowego przedmiotu i sferycznej powierzchni załamującej (które rozdziela dwa ośrodki o różnych współczynnikach załamania światła). Odległości w tabeli podane są w centymetrach. Jeżeli przy liczbie brakuje znaku, uzupełnij go. Naskikuj każde z ustawień i wytycz bieg odpowiedniej liczby promieni potrzebnych do wyznaczenia położenia przedmiotu i jego obrazu.

15. Spoglądasz z góry na monetę leżącą na głębokości  $d$  na dnie basenu kąpielowego napełnionego cieczą o współczynniku załamania światła  $n$  (rys. 35.32). Monetę oglądasz obojgiem oczu, a do każdego z nich docierają inne promienie wychodzące

### Tabela 35.4 Zadanie 14: Sferyczne powierzchnie załamujące

	$n_1$	$n_2$	$p$	$o$	$r$	Obraz odwrócony?
a)	1,0	1,5	+10		+30	
b)	1,0	1,5	+10	-13		
c)	1,0	1,5		+600	+30	
d)	1,0		+20	-20	-20	
e)	1,5	1,0	+10	-6,0		
f)	1,5	1,0		-7,5	-30	
g)	1,5	1,0	+70		+30	
h)	1,5		+100	+600	-30	

z monety, wobec tego widzisz monetę nie na głębokości  $d$ , ale na głębokości  $d_{\text{poz}}$ , bo tam przecinają się przedłużenia promieni dochodzących do twoich oczu. Pokaż, że przy założeniu, iż promienie dochodzące do twoich oczu tworzą małe kąty z osią pionową przechodzącą przez monetę, głębokość  $d_{\text{poz}} = d/n$ . (Wskazówka: W przybliżeniu małych kątów  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ).



Rys. 35.32. Zadanie 15

16. W pojemniku warstwę czterochlorku węgla ( $n = 1,46$ ) o grubości 40 mm pokrywa warstwa wody ( $n = 1,33$ ) o grubości 20 mm. Na dnie tego pojemnika leży moneta. Na jakiej głębokości względem górnej powierzchni wody widzisz monetę? (Wskazówka: Sporządź szkic opisanej sytuacji i skorzystaj z założeń i wyników zadania 15).

### 35.6 Cienkie soczewki

17. Przedmiot znajduje się w odległości 20 cm od soczewki rozpraszającej (po lewej stronie), której ogniskowa wynosi 30 cm. W jakiej odległości  $o$  od soczewki powstaje obraz przedmiotu? Wyznacz położenie obrazu, wytyczając bieg promieni świetlnych przez soczewkę.

18. Korzystając z soczewki o ogniskowej 20 cm, wytwarzasz na ekranie obraz Słońca. Ile wynosi średnica tego obrazu? (Potrzebne dane o Słońcu znajdziesz w dodatku C).

19. Ze szkła o współczynniku załamania światła 1,5 należy wykonać soczewkę dwuwklęsłą o ogniskowej 60 mm, przy czym jedna z powierzchni wklęsłych ma mieć dwa razy większy promień krzywizny niż druga. Jakie to będą promienie?

20. Soczewka ze szkła o współczynniku załamania światła 1,5 ma jedną powierzchnię płaską, a drugą wypukłą (soczewka płasko-wypukła) o promieniu krzywizny 20 cm. a) Ile wynosi ogniskowa tej soczewki? b) Gdzie powstanie obraz przedmiotu umieszczonego w odległości 40 cm od soczewki?

21. Wzór

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$$

nosi nazwę wzoru soczewkowego Gaussa. Inną postacią tego wzoru, zwaną wzorem soczewkowym Newtona, otrzymuje się, rozważając odległość  $x$  przedmiotu od pierwszego ogniska i odległość  $x'$  obrazu od drugiego ogniska soczewki. Pokaż, że wzór soczewkowy Newtona ma postać

$$xx' = f^2.$$

22. Kameral filmową z (pojedynczą) soczewką o ogniskowej 75 mm filmujesz osobę o wzroście 180 cm, znajdującą się w odległości 27 m od kamery. Ile wynosi wysokość obrazu tej osoby na taśmie filmowej?

23. Oświetlone przezroczce znajduje się w odległości 44 cm od ekranu. W jakiej odległości od przezroczca musi znajdować się soczewka o ogniskowej 11 cm, ażeby dawała na ekranie obraz przezroczca?

24. Uzupełnij tak dalece, jak to jest możliwe tabelę 35.5, której każdy wiersz odnosi się do innego ustawienia przedmiotu i cienkiej soczewki. Odległości w tabeli podane są w centymetrach. W kolumnie „Rodzaj soczewki” wpisz S dla soczewki skupiającej i R dla soczewki rozpraszającej. Jeżeli przy liczbie brakuje znaku, uzupełnij go (nie dotyczy to współczynników załamania światła). Naszkicuj każde z ustawień i wytycz bieg odpowiedniej liczby promieni potrzebnych do wyznaczenia położenia przedmiotu i jego obrazu.

25. Pokaż, że odległość między przedmiotem a jego rzeczywistym obrazem wytwarzanym przez cieką soczewkę skupiającą jest zawsze większa lub równa czterokrotnej ogniskowej soczewki.

26. Soczewka rozpraszająca o ogniskowej  $-15$  cm i soczewka skupiająca o ogniskowej  $12$  cm mają wspólną oś optyczną. Odległość między nimi wynosi  $12$  cm. Przedmiot o wysokości  $1$  cm

znajduje się na osi optycznej w odległości  $10$  cm przed soczewką rozpraszającą. a) Gdzie ten układ soczewek wytwarza końcowy obraz przedmiotu (obraz wytwarzany przez drugą, skupiającą soczewkę)? b) Ile wynosi wysokość tego obrazu? c) Czy jest to obraz rzeczywisty, czy pozorny? d) Czy jest to obraz prosty, czy jest on odwrócony?

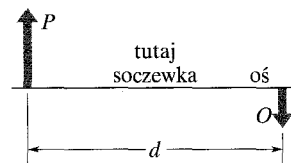
27. Soczewka skupiająca o ogniskowej  $+20$  cm znajduje się w odległości  $10$  cm po prawej stronie soczewki rozpraszającej, która ma ogniskową  $-15$  cm. Podaj położenie i pozostałe charakterystyki obrazu wytwarzanego przez soczewkę rozpraszającą dla przedmiotu, który umieszczono w odległości  $40$  cm po lewej stronie soczewki skupiającej.

28. Przedmiot znajduje się w odległości  $20$  cm po lewej stronie soczewki o ogniskowej  $+10$  cm. Druga soczewka o ogniskowej  $+12,5$  cm znajduje się na prawo od pierwszej soczewki w odległości  $30$  cm. a) Znajdź położenie i względną wysokość obrazu wytwarzanego przez ten układ soczewek. b) Zweryfikuj wyniki przez sporządzenie rysunku (w skali 1:1) tego układu i wytyczenie biegu promieni. c) Czy obraz ten jest rzeczywisty, czy pozorny? d) Czy jest on obrazem odwróconym?

29. Dwie cienkie soczewki o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$  stykają się ze sobą, tworząc układ soczewek. Pokaż, że taki układ jest równoważny pojedynczej soczewce, której ogniskowa jest równa

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

30. Pewna soczewka, nie pokazana na rysunku 35.33, wytwarza rzeczywisty, odwrócony obraz  $O$  przedmiotu  $P$ . Odległość przedmiotu od obrazu, mierzona wzdłuż osi optycznej soczewki, wynosi  $d = 40$  cm. Obraz ma wysokość równą połowie wysokości przedmiotu. a) Jaka musi być soczewka, która wytwarza taki obraz? b) W jakiej odległości od przedmiotu musi być umieszczona taka soczewka? c) Ile wynosi ogniskowa takiej soczewki?



Rys. 35.33. Zadanie 30

Tabela 35.5. Zadanie 24: Cienkie soczewki

Rodzaj soczewki	$f$	$r_1$	$r_2$	$o$	$p$	$n$	$m$	Obraz rzeczywisty?	Obraz pozorny?
a)	S	10			+20				
b)	+10				+5				
c)	10				+5		$> 1,0$		
d)	10				+5		$< 1,0$		
e)		+30	-30		+10	1,5			
f)		-30	+30		+10	1,5			
g)		-30	-60		+10	1,5			
h)					+10		0,5		nie
i)					+10		-0,5		

31. Odległość  $D$  między świecącym przedmiotem i ekranem jest ustalona. Między przedmiotem i ekranem ustawiamy soczewkę skupiającą, o ogniskowej  $f$ . Rzeczywisty obraz przedmiotu uzyskujemy dla dwóch położenia soczewki. a) Wykaż, że odległość tych położenia wynosi

$$d = \sqrt{D(D - 4f)}.$$

b) Wykaż, że stosunek wysokości tych dwóch obrazów jest równy

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2.$$

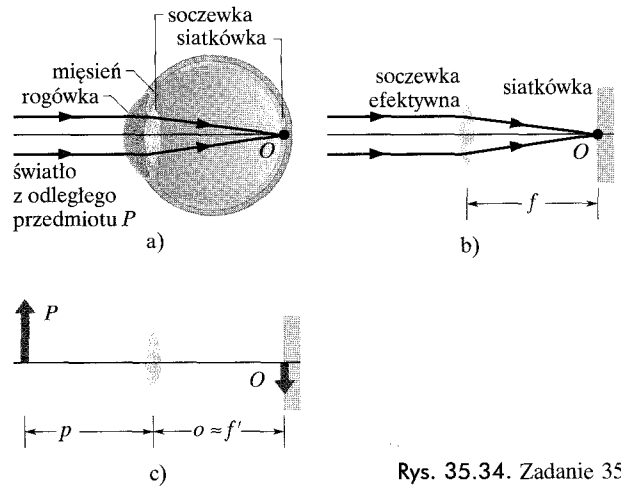
### 35.7 Przyrządy optyczne

32. Jaka musi być minimalna średnica okularu lunety astronomicznej, która zapewnia zebranie całego światła wchodzącego do obiektywu lunety z odległego źródła punkowego, znajdującego się na osi optycznej lunety, jeżeli średnica jej obiektywu wynosi 75 mm, a jej powiększenie kątowe jest równe 36?

33. Mikroskop pokazany na rysunku 35.17 ma obiektyw o ogniskowej 4 cm i okular o ogniskowej 8 cm. Odległość między obiektywem i okulem wynosi 25 cm. a) Ile wynosi długość tubusu  $s$ ? b) Jak daleko od obiektywu powinien znajdować się przedmiot, jeżeli obraz  $O$  ma być wytworzony w ognisku  $F'_1$  (tuż poza nim). Ile wynosi wówczas: c) powiększenie liniowe  $m$  obiektywu? d) powiększenie kątowe  $m_\theta$  okularu, oraz e) całkowite powiększenie  $M$  mikroskopu?

34. Osoba, której odległość dobrego widzenia wynosi  $P_n = 25$  cm, trzyma przy oku lupę. Oglądany przez nią przedmiot znajduje się w takiej odległości od oka, że jego obraz powstaje w odległości  $P_n$ . a) Ile wynosi powiększenie kątowe lupy? b) Ile wynosi powiększenie kątowe wtedy, gdy położenie przedmiotu zostaje zmienione tak, że jego obraz powstaje w nieskończoności? c) Oblicz powiększenia kątowe w sytuacjach (a) i (b) dla lupy o ogniskowej  $f = 10$  cm. (Oglądanie obrazu w odległości  $P_n$  wymaga pewnego wysiłku ze strony mięśni oka, podczas gdy u większości ludzi oglądanie obrazu powstającego w nieskończoności nie wymaga wysiłku mięśni oka).

35. Na rysunku 35.34a zilustrowano budowę oka ludzkiego. Światło jest załamywane na rogówce, a następnie kierowane przez soczewkę oczną, której kształt (a tym samym i zdolność do ogniskowania światła) jest regulowany przez mięśnie oka. Rogówkę i soczewkę oczną możemy traktować wspólnie jako jedną ciekłą soczewkę (rys. 35.34b). „Normalne” oko może skupiać promienie równoległe biegnące z nieskończenie odległego od oka przedmiotu  $P$  w punkcie na siatkówce znajdującej się w tylnej części oka, gdzie rozpoczyna się proces przetwarzania informacji wizualnej. Kiedy jednak przedmiot znajduje się bliżej oka, mięśnie muszą zmienić kształt soczewki tak, aby promienie światłne tworzyły na siatkówce odwrócony rzeczywisty obraz przedmiotu (rys. 35.34c). a) Przypuśćmy, że dla promieni równoległych na rysunku

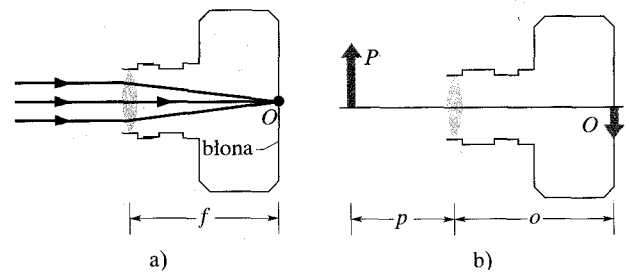


Rys. 35.34. Zadanie 35

35.34a i b ogniskowa  $f$  soczewki oka jest równa 2,5 cm. Ile musi wynosić ogniskowa  $f'$  tej soczewki, ażeby na siatkówce mógł powstawać ostry obraz przedmiotu odległego od oka o 40 cm? b) Czy mięśnie oka muszą wówczas zwiększyć, czy zmniejszyć promienie krzywizny soczewki ocznej?

36. W pewnym mikroskopie przedmiot jest umieszczony w odległości 10 mm od obiektywu mikroskopu. Odległość między soczewkami obiektywu i okularu wynosi 300 mm, a pośredni obraz powstaje w odległości 50 mm od okularu. Jakie jest całkowite powiększenie tego mikroskopu?

37. Na rysunku 35.35a zilustrowano budowę aparatu fotograficznego. Obiektyw może być przesuwany do przodu i do tyłu, co umożliwia wytwarzanie obrazu na błonie fotograficznej w tylnej części aparatu. W pewnym aparacie fotograficznym, w którym odległość  $o$  od obiektywu do błony fotograficznej jest równa  $f = 5$  cm, równoległe promienie światłne przychodzące od bardzo odległego przedmiotu  $P$  tworzą na błonie punktowy obraz, tak jak to pokazano na rysunku. Następnie przedmiot przybliżył się do aparatu na odległość  $p = 100$  cm i odległość obiektyw–błona fotograficzna została skorygowana tak, że na błonie powstaje odwrócony obraz rzeczywisty przedmiotu (rys. 35.35b). a) Ile wynosi teraz odległość  $o$  między obiektywem a błoną fotograficzną? b) O ile zmieniła się odległość  $o$ ?



Rys. 35.35. Zadanie 37



# 36 Interferencja

Na pierwszy rzut oka wierzchnia strona skrzydeł motyla modraszka *Morpho* ma po prostu piękne niebieskozielone zabarwienie. Ale jest coś dziwnego w tym migotliwym zabarwieniu, niepodobnym do barw większości przedmiotów — kiedy zmieniasz perspektywę obserwacji motyla albo kiedy jego skrzydła poruszają się, zmienia się odcień ich zabarwienia. Mówimy o tych skrzydłach, że mieniają się barwami (opalizują), a pod widzianym przez nas niebieskozielonym zabarwieniem skrywa się ich „prawdziwa”, nudna i nieciekawa, brązowa barwa taka, jaką ma ich spodnia strona.

Czyż zatem tak zasadniczo różni się wierzchnia strona skrzydeł od ich spodniej strony, co sprawia, że nie możemy oderwać wzroku od motyla?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 36.1. Interferencja

Jak pokazuje tęcza, światło słoneczne jest mieszaniną wszystkich barw z zakresu widzialnego widma promieniowania elektromagnetycznego. Barwy ujawniają się w tęczy dlatego, że promienie świetlne o różnych długościach fali są odchylane pod różnymi kątami w trakcie przechodzenia przez kropelki deszczu, dzięki czemu powstaje łuk tęczy. Ale bańki mydlane i wycieki oleju mogą również prezentować zaskakujące barwy, które nie są wcale wynikiem załamania światła, lecz rezultatem konstruktywnej i destruktywnej **interferencji** światła. W zjawisku interferencji nakładanie się fal prowadzi albo do wzmocnienia, albo do wygaszenia światła o pewnych barwach z widma Słońca. Interferencja fal świetlnych należy zatem do zjawisk superpozycji, takich jak dyskutowane przez nas w rozdziale 17.

Zjawisko selektywnego wzmacniania lub wygaszania fal ma wiele zastosowań. Kiedy na przykład światło napotyka zwykłą powierzchnię szklaną, ok. 4% padającej energii ulega odbiciu i o taki procent mniejsza jest energia światła przechodzącego przez szkło. Ta niepożądana strata energii może stać się dużym problemem w układach optycznych złożonych z wielu części. Cienkie, przezroczyste warstewki pewnych substancji nałożone na powierzchnię szklaną mogą w wyniku destruktywnej interferencji zmniejszać ilość odbijanego przez nią światła (a tym samym zwiększać ilość światła przechodzącego). Niebieskawy pobłysk soczewki obiektywu aparatu fotograficznego to oznaka obecności takiego pokrycia powierzchni. Pokrycia interferencyjne mogą również służyć nie do zmniejszenia, ale właśnie do zwiększenia zdolności powierzchni do odbijania światła.

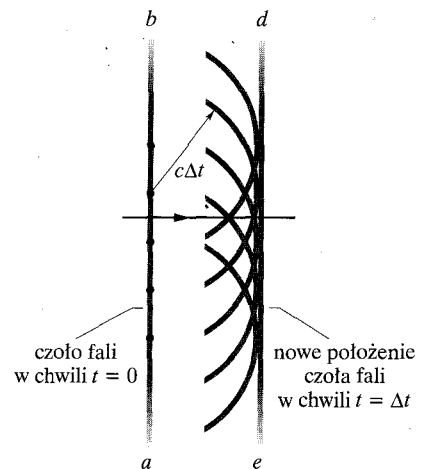
Żeby zrozumieć interferencję, będziemy musieli wyjść poza ograniczenia narzucane przez prawa optyki geometrycznej i wykorzystać całą moc optyki falowej. Jak się dalej przekonacie, zjawisko interferencji jest bodaj najsilniejszym dowodem na to, że światło jest falą — interferencja nie może być wytłumaczona inaczej niż przez odwołanie się do jego falowej natury.

## 36.2. Światło jako fala

Pierwszym, który rozwinął przekonującą falową teorię światła, w 1678 r., był holenderski fizyk Christian Huygens. Teoria Huygensa nie była wprawdzie tak ogólna jak późniejsza teoria elektromagnetyczna Maxwella, ale była prostsza matematycznie i do dzisiaj pozostaje użyteczna. Jej wielką zaletą jest to, że tłumaczy prawa odbicia oraz załamania i wyjaśnia sens fizyczny współczynnika załamania światła.

Teoria Huygensa opiera się na konstrukcji geometrycznej, która umożliwia przewidywanie, gdzie będzie znajdować się określone czoło fali w każdej chwili w przyszłości, o ile tylko znamy jego aktualne położenie. Konstrukcja ta opiera się na **zasadzie Huygensa**, która mówi, że:

➤ Wszystkie punkty czoła fali zachowują się jak punktowe źródła elementarnych kulistych fal wtórnych. Po czasie  $t$  nowe położenie czoła fali jest wyznaczone przez powierzchnię styczną do powierzchni fal wtórnych.



Rys. 36.1. Konstrukcja geometryczna Huygensa ilustrująca rozchodzenie się fali płaskiej w próżni

Przeanalizujmy to na prostym przykładzie. Po lewej stronie rysunku 36.1 płaszczyzna  $ab$  prostopadła do powierzchni kartki przedstawia początkowe położenie czoła płaskiej fali rozchodzącej się w prawą stronę w próżni. Pytamy, gdzie będzie znajdować się to czoło fali po czasie  $\Delta t$ . Potraktujemy kilka punktów na płaszczyźnie  $ab$  (czarne punkty) jako źródła kulistych elementarnych fal wtórnych emitowanych w chwili  $t = 0$ . Po czasie  $\Delta t$  promienie tych wszystkich elementarnych kulistych fal wtórnych wzrosną do wartości  $c\Delta t$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Wykreślamy płaszczyznę  $de$  styczną do fal wtórnych w chwili  $\Delta t$ . Ta płaszczyzna przedstawia czoło fali płaskiej po czasie  $\Delta t$ ; jest ona równoległa do płaszczyzny  $ab$  i znajduje się od niej w odległości  $c\Delta t$ .

## Prawo załamania

Skorzystamy teraz z zasady Huygensa do wyprowadzenia prawa załamania (prawa Snella), tzn. równania (34.44). Na rysunku 36.2 zilustrowano trzy stadia procesu załamania kilku czoł fali na powierzchni granicznej między powietrzem (ośrodek 1) i szkłem (ośrodek 2). Narysowaliśmy czoła fali w padającej wiązce światła odległe o  $\lambda_1$ , czyli o długość fali świetlnej w ośrodku 1. Oznaczmy prędkość światła w powietrzu przez  $v_1$ , a w szkłe przez  $v_2$ . Przyjmiemy również, że  $v_2 < v_1$ , co zresztą akurat jest prawdziwe.

Na rysunku 36.2a kąt  $\theta_1$  jest kątem między czołem fali i powierzchnią graniczną i jest on taki sam jak kąt między *normalną* do czoła fali (tzn. promieniem padającym) a *normalną* do powierzchni granicznej. Zatem  $\theta_1$  jest równy kątowi padania.

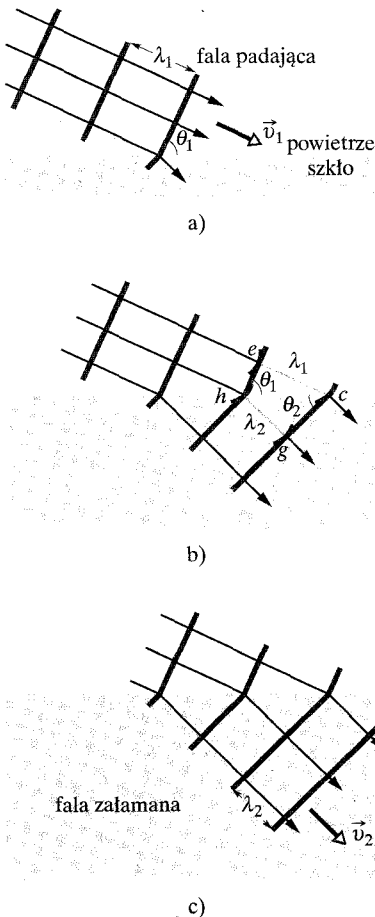
Fala świetlna wnika do ośrodka 2 (szkło). Zajmijmy się falą wtórną wychodzącą z punktu  $e$  (rys. 36.2b) i zmierzającą do punktu  $c$  na powierzchni granicznej, odległego od punktu  $e$  o  $\lambda_1$ . Czas, w jakim ta fala wtórna osiągnie punkt  $c$ , jest równy ilorazowi odległości między obydwoimi punktami i prędkości fali, czyli  $\lambda_1/v_1$ . W tym samym czasie fala wtórna powstająca w punkcie  $h$  dociera do punktu  $g$  w ośrodku 2 (szkło), pokonując ze zmniejszoną prędkością  $v_2$  (patrz założenie wyżej) mniejszą odległość  $\lambda_2$ . Wobec tego czas ten musi być również równy  $\lambda_2/v_2$ . Równość tych obu czasów prowadzi do zależności, która pokazuje, że długości fali światła w dwóch ośrodkach są proporcjonalne do prędkości światła w tych ośrodkach:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (36.1)$$

Zgodnie z zasadą Huygensa czoło fali załamanej musi być styczne w punkcie  $g$  do łuku o promieniu krzywizny  $\lambda_2$ , którego środek krzywizny znajduje się w punkcie  $h$ . Jednocześnie musi być ono styczne w punkcie  $c$  do łuku o promieniu krzywizny  $\lambda_1$  i środka krzywizny w punkcie  $e$ . Dlatego czoło fali załamanej będzie miało taką orientację, jak pokazano to na rysunkach 36.2b i c. Zwróćmy uwagę na to, że kąt  $\theta_2$  między czołem fali załamanej i powierzchnią graniczną jest równy kątowi załamania.

Z trójkątów prostokątnych  $hce$  i  $hcg$  na rysunku 36.2b otrzymujemy

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{hc} \quad (\text{z trójkąta } hce)$$



**Rys. 36.2.** Zastosowanie zasady Huygensa do załamania fali płaskiej na powierzchni granicznej powietrze–szkło. Długość fali w szkło jest mniejsza niż w powietrzu. Dla przejrzystości nie pokazano fali odbitej od powierzchni granicznej. Rysunki (a)–(c) obrazują trzy kolejne etapy załamania

oraz

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{hc} \quad (\text{z trójkąta } hcg).$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie i korzystając z równania (36.1), otrzymamy

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (36.2)$$

Możemy zdefiniować **współczynnik załamania światła**  $n$  dla każdego ośrodka jako stosunek prędkości światła  $c$  w próżni do prędkości światła  $v$  w tym ośrodku. Zatem mamy

$$n = \frac{c}{v} \quad (\text{współczynnik załamania światła}). \quad (36.3)$$

W szczególności, dla dwóch rozważanych przez nas ośrodków, mamy

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{i} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}. \quad (36.4)$$

Łącząc równania (36.2) i (36.4), otrzymujemy

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (36.5)$$

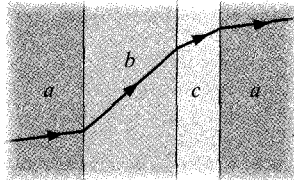
czyli

← Prawo Snella

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{prawo załamania}). \quad (36.6)$$

Jest to prawo Snella wprowadzone w rozdziale 34.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku pokazano wiązkę światła monochromatycznego przechodzącego kolejno przez równoległe powierzchnie graniczne, zaczynając od ośrodka  $a$ , przez ośrodki  $b$  i  $c$  i kończąc w ośrodku  $a$ . Uszereguj te ośrodki w kolejności wzrastającej prędkości, z jaką rozchodzi się w nich światło.



## Długość fali a współczynnik załamania światła

Przekonał się, że długość fali świetlnej zmienia się wtedy, gdy zmienia się prędkość światła, tak jak wtedy, kiedy światło przekracza powierzchnię rozgraniczającą dwa różne ośrodki. Z drugiej zaś strony wiemy, że prędkość światła w każdym ośrodku zależy od współczynnika załamania światła tego ośrodka zgodnie z równaniem (36.3). Siłą rzeczy zatem długość fali świetlnej w każdym ośrodku zależy od współczynnika załamania światła dla tego ośrodka. Przyjmijmy, że pewne światło monochromatyczne ma w próżni długość fali  $\lambda$  i prędkość  $c$ , a w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n$  jego długość fali wynosi  $\lambda_n$ , a prędkość  $v$ . Możemy wtedy przepisać równanie (36.1) w postaci

$$\lambda_n = \lambda \frac{v}{c}. \quad (36.7)$$

Korzystając z równania (36.3), za  $v/c$  podstawiamy  $1/n$  i otrzymujemy

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \quad (36.8)$$

To równanie wiąże długość fali światła w dowolnym ośrodku z jego długością fali w próżni. Wynika z niego, że im większy jest współczynnik załamania światła ośrodka, tym mniejsza jest długość fali rozchodzącego się w nim światła.

A jak jest z częstością światła? Niech  $\nu_n$  oznacza częstość światła w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n$ . Zgodnie z ogólną zależnością opisywaną równaniem (17.12) ( $v = \lambda\nu$ ) możemy zapisać

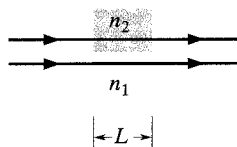
$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n}.$$

Po podstawieniu równań (36.3) i (36.8) otrzymujemy

$$\nu_n = \frac{c/n}{\lambda/n} = \frac{c}{\lambda} = \nu,$$

gdzie  $\nu$  jest częstością światła w próżni. Stąd wynika, że chociaż prędkość i długość fali świetlnej w ośrodku materialnym są różne od prędkości i długości tej fali w próżni, to jej *częstość w ośrodku jest taka sama, jak w próżni*.

Fakt, że długość fali świetlnej zależy od współczynnika załamania światła, tak jak to określa równanie (36.8), jest ważny w pewnych sytuacjach, w których dochodzi do interferencji światła. Przykładem tego jest sytuacja zilustrowana na rysunku 36.3. Dwa promienie (*reprezentujące tutaj dwie fale*) świetlne o takiej samej długości fali  $\lambda$  i początkowo o takiej samej fazie w powietrzu ( $n \approx 1$ ) wnikają do dwóch różnych ośrodków; jeden rozchodzi się w ośrodku 1 o współczynniku załamania światła  $n_1$  i przebywa w nim odległość  $L$ , drugi rozchodzi się w ośrodku 2 o współczynniku załamania światła  $n_2$  i przebywa w nim taką samą odległość. Kiedy obie fale opuszczają te ośrodki i wyjdą do powietrza, będą miały taką samą długość  $\lambda$ . Jednak ich długości różniły się w obu ośrodkach, dlatego też nie będą one już w zgodnej fazie.



Rys. 36.3. Dwa promienie świetlne przechodzące przez dwa ośrodki o różnych współczynnikach załamania światła

➤ Różnica faz między dwiema falami świetlnymi może ulegać zmianie wtedy, kiedy fale te rozchodzą się w różnych ośrodkach, których współczynniki załamania światła są różne.

Wkrótce przekonamy się, że taka zmiana różnicy faz może być odpowiedzialna za to, jak fale świetlne osiągające określony punkt ośrodka będą ze sobą interferowały.

Żeby znaleźć związek tej nowej różnicy faz (wynikającej z przejścia fal przez różne ośrodki) z długością fali, musimy najpierw obliczyć liczbę długości fali  $N_1$  mieszczących się na odcinku  $L$  w ośrodku 1. Zgodnie z równaniem (36.8) długość fali w ośrodku 1 określona jest wzorem  $\lambda_{n1} = \lambda/n_1$ , wobec tego

$$N_1 = \frac{L}{\lambda_{n1}} = \frac{Ln_1}{\lambda}. \quad (36.9)$$

Podobnie możemy obliczyć liczbę długości fali  $N_2$  mieszczących się na odcinku  $L$  ośrodka 2, w którym długość fali jest równa  $\lambda_{n2} = \lambda/n_2$ :

$$N_2 = \frac{L}{\lambda_{n2}} = \frac{Ln_2}{\lambda}. \quad (36.10)$$

W celu wyznaczenia różnicy faz między dwiema falami odejmujemy wielkość mniejszą od większej, co przy założeniu, że  $n_2 > n_1$ , prowadzi do równania

$$N_2 - N_1 = \frac{Ln_2}{\lambda} - \frac{Ln_1}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1). \quad (36.11)$$

Przypuśćmy, że równanie (36.11) pokazuje nam, iż różnica faz dwóch fal odpowiada obecnie 45,6 długości fali. Jest to równoważne z operacją przesunięcia obu fal (które początkowo były zgodne w fazie), jedna względem drugiej, o 45,6 długości fali. Jednak operacja przesunięcia jednej fali względem drugiej o całkowitą liczbę (taką jak 45) długości fali sprowadza obie fale do zgodności faz, dlatego też liczy się naprawdę tylko część dziesiątą (w tym przypadku 0,6). Różnica faz odpowiadająca 45,6 długości fali sprowadza się zatem do *efektywnej* różnicy faz odpowiadającej 0,6 długości fali.

Różnica faz odpowiadająca 0,5 długości fali oznacza, iż są one dokładnie w przeciwnej fazie. Jeżeli obie fale docierające do tego samego punktu miałyby takie same amplitudy, to ich interferencja byłaby w pełni destruktywna i w punkcie ich spotkania zapanowałaby ciemność. Przy różnicy faz odpowiadającej 0 i 1 długości fali ich interferencja byłaby w pełni konstruktywna i ich punkt spotkania by się rozjaśnił. W naszym przykładzie, z różnicą faz odpowiadającą 0,6 długości fali, mamy sytuację pośrednią, ale bliższą destruktywnej interferencji, i punkt spotkania naszych dwóch fal byłby przyciemniony.


Jak pamiętasz, różnicę faz wyrażamy w radianach i stopniach kątowych. Przesunięcie fal o jedną długość fali jest w mierze łukowej równoważne przesunięciu fazy o  $2\pi$  rad lub  $360^\circ$ .

### Przykład 36.1

Dwie fale świetlne (reprezentowane na rysunku 36.3 przez dwa promienie) przed wejściem do ośrodków 1 i 2 mają długość fali 550 nm. Są one przy tym zgodne w fazie i mają takie same amplitudy. Przyjmijmy teraz, że ośrodek 1 to po prostu powietrze, a ośrodek 2 jest warstwą przezroczystego plastiku o grubości 2,6  $\mu\text{m}$  i współczynniku załamania światła 1,6.

a) Ile wynosi różnica faz tych fal po przejściu przez obydwa ośrodki, wyrażona w radianach i w stopniach? Ilu długościami fali to odpowiada?

#### ROZWIĄZANIE:


Pierwsze kluczowe dla odpowiedzi na te pytania jest spostrzeżenie, że  różnica faz między dwiema falami świetlnymi może ulegać zmianie wtedy, gdy fale te rozchodzą się w różnych ośrodkach optycznych, których współczynniki załamania światła są różne, a przez to różne są ich długości fali. Różnicę faz tych fal możemy obliczyć, znajdując liczby długości fali, jakie mieszczą się w grubości warstwy każdego z ośrodków i odejmując te liczby od siebie. Przy jednakowej grubości obu ośrodków wynik dany jest równaniem (36.11). W rozważanym przykładzie mamy następujące dane liczbowe:  $n_1 = 1$  (powietrze),  $n_2 = 1,6$ ,  $L = 2,6 \mu\text{m}$  i  $\lambda = 550 \text{ nm}$ . Ich podstawienie do równania (36.11) daje

w wyniku

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{L}{\lambda}(n_2 - n_1) \\ &= \frac{2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}(1,6 - 1) \\ &= 2,84. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

A zatem różnica faz tych fal po wyjściu z obu ośrodków odpowiada 2,84 długości fali. Ponieważ 1 długość fali jest równoważna  $2\pi$  rad i  $360^\circ$ , łatwo możesz sprawdzić, że taka różnica faz jest równa:

$$\text{różnica faz} = 17,8 \text{ rad} \approx 1020^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$


Drugim kluczowym spostrzeżeniem jest to, że  o efektywnej różnicy faz decyduje tylko dziesiątą część długości fali. Otrzymujemy zatem


$$\text{efektywna różnica faz odpowiada } 0,84 \text{ długości fali.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Możesz pokazać, że jest to równoważne 5,3 rad lub ok.  $300^\circ$ .

(b) Jeżeli oba promienie będą odchyłone od wzajemnej równoległości o niewielki kąt, tak aby mogły spotkać się we wspólnym punkcie na odległym ekranie, to jakiego typu obraz interferencyjny będą one wytwarzały w tym punkcie ekranu?

## ROZWIĄZANIE:

Tutaj kluczowe dla odpowiedzi jest  porównanie efektywnej różnicy faz obu fal z różnicami faz, jakie prowadzą do interferencji konstruktywnej i destruktywnej. W naszym przypadku efektywna różnica faz odpowiadająca 0,84 długości fali mieści się między 0,5 długości fali (interferencja w pełni destruktywna albo ciemność w punkcie spotkania), a 1 długością fali (interferencja w pełni konstruktywna albo najjaśniejszy możliwy obraz w punkcie spotkania) i jest bliższa tej drugiej skrajnej wartości. Oczekujemy zatem, że w wyniku interferencji naszych fal powstanie na ekranie stosunkowo jasny punkt.

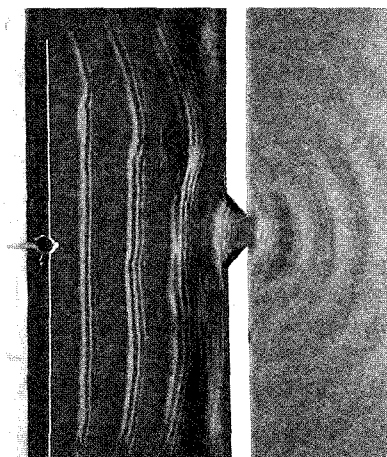
 **SPRAWDZIAN 2:** Fale świetlne odpowiadające promieniom na rysunku 36.3 mają taką samą długość fali oraz amplitudę i początkowo są zgodne w fazie. a) Który z dwóch ośrodków ma większy współczynnik załamania światła, jeżeli wiadomo, że w warstwie ośrodka górnego mieści się 7,6 długości fali, a w warstwie ośrodka dolnego (o tej samej grubości) mieści się ich 5,5? b) Jeżeli kierunki obu promieni tworzą niewielki kąt, to czy po spotkaniu we wspólnym punkcie na odległym ekranie i po interferencji promieni w tym punkcie zaobserwujemy najsilniejsze możliwe rozjaśnienie, czy też będzie to umiarkowane oświetlenie, bądź też obraz będzie stosunkowo ciemny, lub też dojdzie do całkowitego wygaszenia promieni?

## 36.3. Dyfrakcja

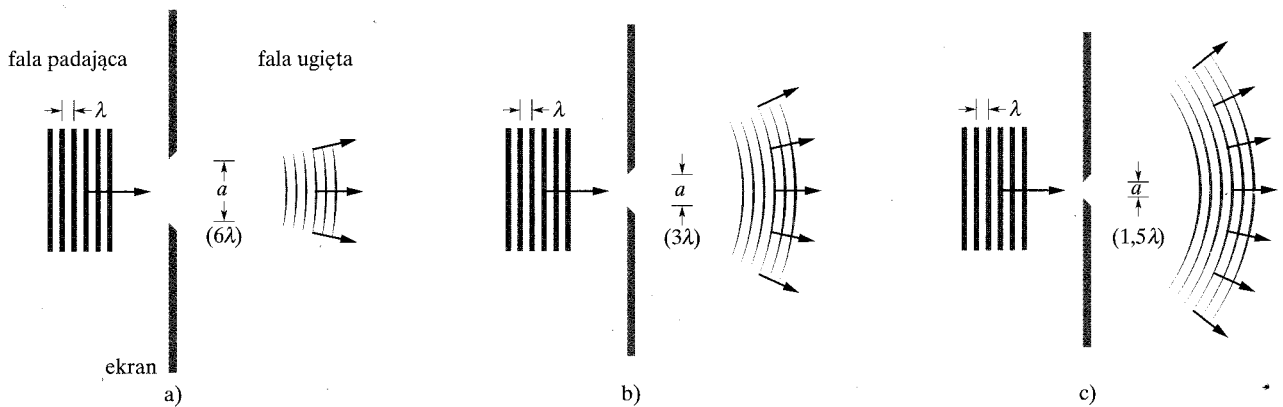
W następnym paragrafie będziemy omawiali doświadczenie, w którym po raz pierwszy wykazano, że światło jest falą. Żeby jednak przygotować się do dyskusji tego doświadczenia, musimy wprowadzić pojęcie **dyfrakcji** fali, a więc zjawiska, któremu w całości poświęcony jest rozdział 37. Jego istota jest następująca: Jeżeli fala napotyka na swej drodze przeszkodę, w której znajduje się otwór o rozmiarach zbliżonych do długości fali, to ta część fali, która przechodzi przez otwór, będzie się rozprzestrzeniać — będzie ulegać *ugięciu* (*dyfrakcji*) — w całym obszarze poza przeszkodą. Takie rozprzestrzenianie się w obszar poza barierą jest zgodne z rozchodzeniem się elementarnych fal w konstrukcji Huygensa na rysunku 36.1. Dyfrakcji ulegają fale wszystkich rodzajów, a nie tylko fale świetlne; na zdjęciu 36.4 pokazano ugięcie fal rozchodzących się na powierzchni wody w płytkim zbiorniku.

Na rysunku 36.5a zilustrowano schematycznie przypadek padającej fali płaskiej o długości fali  $\lambda$ , która napotyka szczelinę o szerokości  $a = 6\lambda$  (o wysokości zorientowanej prostopadle do powierzchni kartki). Fala *uginą się* i rozprzestrzenia w obszar po drugiej stronie szczeliny. Na rysunkach 36.5b (szczelina o szerokości  $a = 3\lambda$ ) oraz 36.5c ( $a = 1,5\lambda$ ) zilustrowano główną cechę zjawiska dyfrakcji: im węższa jest szczelina, tym silniejsze jest ugięcie fali.

Dyfrakcja stanowi ograniczenie optyki geometrycznej, w której falę elektromagnetyczną reprezentujemy jako promień świetlny. Jeśli rzeczywiście próbujemy wytworzyć promień świetlny, przepuszczając światło przez wąską szczelinę albo przez serię wąskich szczelin, to nasze wysiłki zawsze niweczy dyfrakcja, ponieważ zawsze wywołuje ona rozprzestrzenianie się światła w cały obszar poza szczeliną. Im węższa jest szczelina (którą posługujemy się w nadziei uzyskania węższej wiązki światła), tym większy jest obszar ugięcia. Prawa optyki geometrycznej są spełniane tylko wtedy, gdy szczeliny albo inne przesłony, które są umieszczane na drodze światła, nie mają rozmiarów porównywalnych lub mniejszych od długości fali świetlnej.



Rys. 36.4. Ugięcie (dyfrakcja) fal rozchodzących się po powierzchni wody w zbiorniku. Fale są wytwarzane przez drgającą łopatkę po lewej stronie. Przemieszczając się stopniowo od lewej strony na prawą, wydostają się przez otwór w barierze i rozchodzą się po całej powierzchni wody poza barierą



Rys. 36.5. Schematyczne zobrazowanie zjawiska dyfrakcji. Dla danej długości fali  $\lambda$  dyfrakcja jest tym wyraźniejsza, im mniejsza jest szerokość  $a$  szczeliny. Na kolejnych rysunkach szczelina ma szerokość: a)  $a = 6\lambda$ , b)  $a = 3\lambda$  i c)  $a = 1,5\lambda$ . We wszystkich trzech przypadkach ekran przesłaniający i długość szczeliny rozciągają się nad i pod powierzchnią kartki, prostopadle do niej

## 36.4. Doświadczenie interferencyjne Younga

W 1801 r. Thomas Young wykazał doświadczalnie, że światło jest falą, co było sprzeczne z poglądami większości ówczesnych uczonych. Dowód Younga polegał na wykazaniu, że światło może interferować, tak jak interferują fale wodne, fale dźwiękowe i wszystkie fale innych rodzajów. Ponadto był on w stanie zmierzyć średnią długość fali światła słonecznego; wyznaczona przez niego wartość 570 nm jest imponująco zgodna ze współcześnie akceptowaną wartością 555 nm. Przeanalizujemy następnie doświadczenie Younga jako przykład interferencji fal świetlnych.

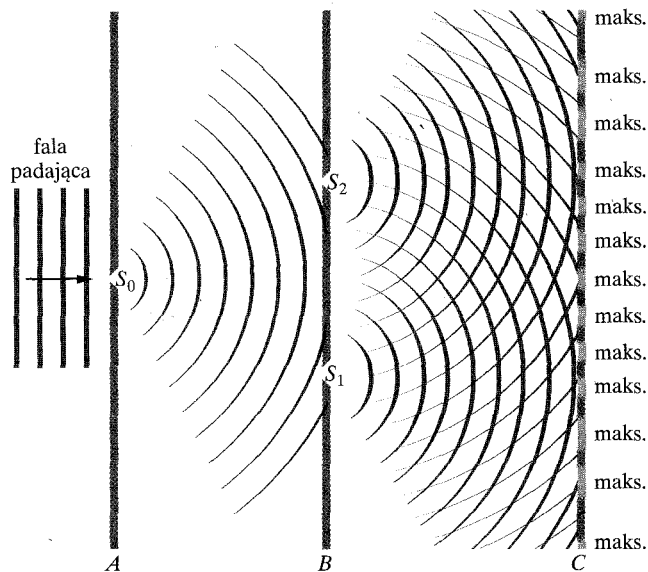
Schemat doświadczenia Younga zilustrowano na rysunku 36.6. Światło z odległego, monochromatycznego źródła oświetla szczelinę  $S_0$  w ekranie  $A$ . Światło ulega ugięciu na tej szczelinie i rozprzestrzenia się w obszar poza ekranem  $A$ , oświetlając z kolei dwie szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  w ekranie  $B$ . W wyniku ugięcia światła na tych dwóch szczelinach, wychodzą z nich nakładające się na siebie fale koliste, które interferują ze sobą w obszarze za ekranem  $B$ .

„Zdjęcie migawkowe”, jakim jest rysunek 36.6, ilustruje tę interferencję nakładających się fal, ale nie możemy „zobaczyć”, że interferencja istotnie zachodzi, dopóki na drodze światła nie umieścimy ekranu  $C$ . Kiedy to zrobimy, wówczas na ekranie zobaczymy szereg jasnych kresek, nazywanych *jasnymi prążkami* (a często niezbyt ściśle *maksimami*), które ciągną się przez ekran prostopadle do płaszczyzny rysunku 36.6 i które odpowiadają maksimum interferencji. Ciemne obszary — *ciemne prążki*, albo niezbyt ściśle *minima* — są wynikiem w pełni destruktywnej interferencji i są widoczne między sąsiednimi jasnymi prążkami. (Określenia *maksima* i *minima* odnoszą się ściśle do środków prążków). Obraz jasnych i ciemnych prążków na ekranie nazywa się **obrazem interferencyjnym**. Na fotografii 36.7 pokazano część obrazu interferencyjnego oglądanego po prawej stronie rysunku 36.6.

### Położenie prążków interferencyjnych

W doświadczeniu interferencyjnym Younga z dwiema szczelinami, bo taką pełną nazwę nosi omówiony przez nas eksperyment, fale świetlne tworzą prążki. Chcemy się jednak dowiedzieć, co określa ściśle położenie tych prążków. W tym





**Rys. 36.6.** W doświadczeniu interferencyjnym Younga padające światło monochromatyczne jest uginane na szczeliny  $S_0$ , która działa następnie jak punktowe źródła wysyłające półkolistne czoła fali. Światło docierające do ekranu  $B$  jest uginane na dwóch szczelinach  $S_1$  i  $S_2$ , które działają jak punktowe źródła światła. Fale świetlne rozchodzące się ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$  nakładają się i interferują ze sobą, tworząc na ekranie obserwacyjnym  $C$  obraz interferencyjny złożony z minimów i maksimów. Ta ilustracja to przekrój przez ekrany, szczeliny i obraz interferencyjny (które ciągną się nad i pod powierzchnią kartki). W obszarze pomiędzy ekranami  $B$  i  $C$  półkolistne czoła fali współśrodkowe ze szczeliną  $S_1$  (lub  $S_2$ ) obrazują fale, które rozchodziłyby się w tym obszarze wtedy, gdyby któraś z dwóch szczelin (odpowiednio  $S_2$  lub  $S_1$ ) była przesłonięta

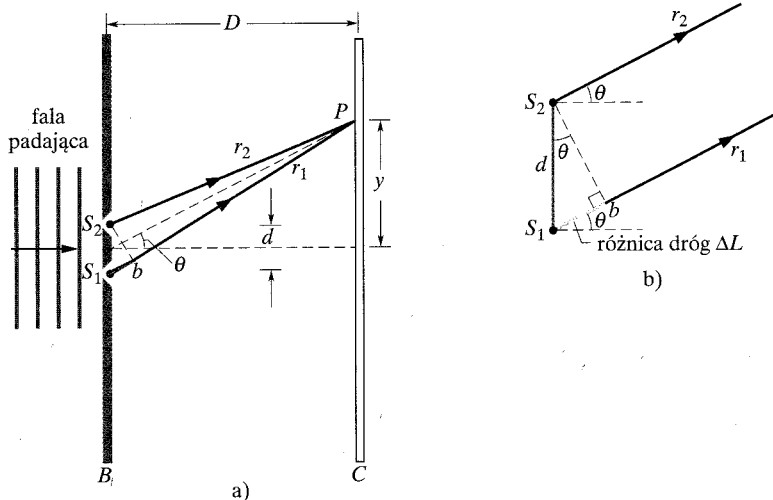


**Rys. 36.7.** Fotografia obrazu interferencyjnego wytwarzanego w układzie doświadczalnym pokazanym na rysunku 36.6 (widok z przodu części ekranu  $C$ ). Naprzemiennie występujące maksima i minima nazywane są *prążkami interferencyjnymi* (z powodu ich podobieństwa do prążków dekoracyjnych na odzieży czy dywanach)

celu skorzystamy z układu na rysunku 36.8a, na którym płaska fala światła monochromatycznego pada na dwie szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  w ekranie  $B$ . Światło ugina się na szczelinach i na ekranie  $C$  powstaje obraz interferencyjny. Przez punkt leżący w połowie odległości między szczelinami na ekranie  $B$  prowadzimy prostą prostopadłą do powierzchni ekranu  $C$ , która służyć nam będzie jako oś odniesienia. Wybieramy dowolny punkt  $P$  na ekranie, którego położenie wyznacza kąt  $\theta$ . Do tego punktu dociera fala reprezentowana przez promień  $r_1$  wychodzący z górnej szczeliny i fala reprezentowana przez promień  $r_2$  wychodzący z dolnej szczeliny.

W chwili przechodzenia przez szczeliny obie fale świetlne mają taką samą fazę, gdyż są one częściami tej samej fali padającej. Ale po przejściu przez szczeliny muszą przebyć różne odległości, aby osiągnąć punkt  $P$ . Z taką samą sytuacją spotkaliśmy się już w przypadku rozważanych w paragrafie 18.4 fal dźwiękowych i wówczas doszliśmy do wniosku, że:

➤ Różnica faz między dwiema falami może się zmieniać wtedy, gdy fale przebywają drogi o różnej długości.



Rys. 36.8. a) Fale ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$  nakładają się na siebie na ekranie  $C$  w punkcie  $P$  odległym o  $y$  od osi układu. Kąt  $\theta$  może służyć jako wygodny wskaźnik położenia punktu  $P$ . b) Dla  $D \gg d$ , promienie świetlne  $r_1$  i  $r_2$  możemy traktować z dobrym przybliżeniem jak promienie równoległe, tworzące z osią kąt  $\theta$

Zmiana różnicy faz jest spowodowana *różnicą dróg*  $\Delta L$  przebytych przez fale. Rozważmy dwie fale, które początkowo mają identyczne fazy i które po przebyciu dróg różniących się o  $\Delta L$  docierają do pewnego wspólnego punktu. Jeżeli różnica przebytych przez nie dróg jest równa zero lub jest całkowitą wielokrotnością ich długości fali, to w punkcie spotkania mają one dokładnie taką samą fazę i ich interferencja w tym punkcie jest w pełni konstruktywna. Jeżeli dla fal o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  sytuacja taka zdarza się akurat w punkcie  $P$  (rys. 36.8), to punkt  $P$  jest częścią jasnego prążka. Kiedy jednak  $\Delta L$  jest nieparzystą wielokrotnością połowy długości fali, to fale docierają do wspólnego punktu z dokładnie przeciwnymi fazami i ich interferencja jest wówczas w pełni destruktywna. W takim przypadku punkt  $P$  jest częścią ciemnego prążka. (Oczywiście między tymi dwoma skrajnymi przypadkami interferencji możliwe są również sytuacje pośrednie i oświetlenie w punkcie  $P$  może być również pośrednie). A zatem

➤ Oświetlenie w każdym punkcie ekranu w doświadczeniu interferencyjnym Younga z dwiema szczelinami jest określone przez różnicę dróg  $\Delta L$ , jakie przebywają promienie świetlne docierające do tego punktu.

Położenie każdego jasnego i ciemnego prążka możemy określić, przyporządkowując im kąty  $\theta$  względem osi układu. Kąty  $\theta$  wyznaczymy, wiążąc je z  $\Delta L$ . Postępujemy przy tym następująco: na rysunku 36.8 znajdujemy punkt  $b$  wzdłuż promienia  $r_1$  taki, że długość drogi od  $b$  do  $P$  jest taka sama jak odległość między  $S_2$  i  $P$ . Wtedy różnicą dróg  $\Delta L$  obu promieni jest równa odległości między  $S_1$  i  $b$ .

Związek odległości między  $S_1$  i  $b$  z kątem  $\theta$  jest skomplikowany, ale możemy go znacznie uprościć, jeżeli przyjmiemy, że odległość  $D$  od szczelin do ekranu  $C$  jest dużo większa od odległości między szczelinami  $d$ . Wówczas możemy w przybliżeniu traktować promienie  $r_1$  i  $r_2$  jak promienie wzajemnie równoległe i tworzące kąt  $\theta$  z osią (rys. 36.8b). Możemy również w przybliżeniu potraktować

trójkąt o wierzchołkach  $S_1$ ,  $S_2$  i  $b$  jak trójkąt prostokątny i przyjąć, że kąt przy wierzchołku  $S_2$  jest równy kątowi  $\theta$ . Przy takich założeniach  $\sin \theta = \Delta L/d$  i wobec tego

$$\Delta L = d \sin \theta \quad (\text{różnica dróg}). \quad (36.12)$$

Wiemy już, że dla jasnego prążka  $\Delta L$  musi być równe zeru lub całkowitej wielokrotności długości fali. Korzystając z równania (36.12), możemy ten warunek zapisać w postaci

$$\Delta L = d \sin \theta = (\text{liczba całkowita})(\lambda) \quad (36.13)$$

lub jako

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima — jasne prążki}). \quad (36.14)$$

Dla ciemnych prążków  $\Delta L$  musi być nieparzystą wielokrotnością połowy długości fali. Korzystając raz jeszcze z równania (36.12), zapisujemy ten warunek w postaci

$$\Delta L = d \sin \theta = (\text{liczba nieparzysta})(\frac{1}{2}\lambda) \quad (36.15)$$

lub też jako

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{minima — ciemne prążki}). \quad (36.16)$$

Za pomocą równań (36.14) i (36.16) możemy znaleźć kąt  $\theta$  dla dowolnego prążka, a tym samym określić jego położenie; możemy przy tym wykorzystać wartości  $m$  do ponumerowania prążków. Z równania (36.14) wynika, że dla  $m = 0$  jasny prążek znajduje się pod kątem  $\theta = 0$ , a więc na osi. To *centralne maksimum* znajduje się w punkcie, w którym różnica dróg fal przychodzących z obu szczelin jest równa  $\Delta L = 0$ , a więc i różnica ich faz jest równa zeru.

Na przykład dla  $m = 2$ , z równania (36.14) wynika, że *jasne* prążki znajdują się pod kątem

$$\theta = \arcsin \left( \frac{2\lambda}{d} \right)$$

powyżej i poniżej osi. Różnica dróg obu fal w miejscu położenia prążków jest równa  $\Delta L = 2\lambda$ , a zatem różnica faz odpowiada dwóm długościom fali. Te prążki noszą nazwę *prążków drugiego rzędu* (bo  $m = 2$ ) albo *maksimów bocznych drugiego rzędu*.

Weźmy inny przykład. Zgodnie z równaniem (36.16) *ciemne* prążki dla  $m = 1$  znajdują się pod kątem

$$\theta = \arcsin \left( \frac{1,5\lambda}{d} \right)$$

powyżej i poniżej osi. Różnica dróg obu fal w miejscu położenia prążków jest równa  $\Delta L = 1,5\lambda$ , a zatem różnica faz odpowiada 1,5 długości fali. Prążki te nazywa się *drugimi ciemnymi prążkami*, albo *minimami bocznymi drugiego rzędu*, gdyż są to drugie ciemne prążki, licząc od osi. (Pierwsze ciemne prążki znajdują się w położeniach, w których w równaniu (36.16)  $m = 0$ ).

Równania (36.14) i (36.16) wyprowadziliśmy przy założeniu, że  $D \gg d$ . Ale można je stosować także wtedy, gdy między szczelinami i ekranem umieścimy soczewkę skupiającą, a ekran przesuniemy bliżej soczewki na odległość odpowiadającą jej ogniskowej. (Mówimy wtedy, że ekran znajduje się w *płaszczyźnie ogniskowej* soczewki, tzn. w płaszczyźnie prostopadłej do osi w ognisku). Jedną z właściwości soczewki skupiającej jest to, że skupia (ogniskuje) ona wszystkie wzajemnie równoległe promienie w tym samym punkcie swojej płaszczyzny ogniskowej. Zatem promienie, które teraz docierają do dowolnego punktu położonego na ekranie (w płaszczyźnie ogniskowej soczewki), były ściśle (a nie tylko w przybliżeniu) równoległe, kiedy opuszczały szczeliny. Są one takie same jak początkowo równoległe promienie na rysunku 35.12a, które soczewka kieruje do jednego punktu (ogniska).

**SPRAWDZIAN 3:** Ile wynoszą różnice dróg  $\Delta L$  (podane w wielokrotnościach długości fali) oraz ilu długościom fali odpowiada różnica faz dla dwóch promieni w punkcie  $P$  wtedy, gdy w tym punkcie znajduje się a) trzecie boczne maksimum i b) trzecie minimum obrazu interferencyjnego na rysunku 36.8a ?

## Przykład 36.2

Ile wynosi odległość na ekranie  $C$  (rys. 36.8a) między sąsiednimi maksimumami w pobliżu środka obrazu interferencyjnego? Długość fali światła jest 546 nm, odległość między szczelinami  $d = 0,12$  mm, a odległość od szczelin do ekranu  $D = 55$  cm. Przyjmij, że kąt  $\theta$  na rysunku 36.8 jest wystarczająco mały na to, aby można było zastosować przybliżenie  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$  (dla  $\theta$  wyrażanego w radianach).

### ROZWIĄZANIE:

Wybermy najpierw maksimum dla małej wartości  $m$ , co zapewni, że będzie to maksimum z centralnego obszaru obrazu interferencyjnego.  $\bullet \rightarrow$  Kluczem jest tutaj geometria rysunku 36.8, z której wynika, iż odległość pionowa  $y_m$  danego maksimum od maksimum centralnego wiąże się z kątem, pod jakim znajduje się to maksimum względem osi, zależnością

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{y_m}{D}.$$

Kolejny  $\bullet \rightarrow$  to spostrzeżenie, że kąt  $\theta$  dla  $m$ -tego maksimum jest dany równaniem (36.8) jako

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{m\lambda}{d}.$$

Jeśli porównamy wartości  $\theta$  z tych dwóch równań, to otrzymamy

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d}. \quad (36.17)$$

Dla następnego maksimum będziemy mieli

$$y_{m+1} = \frac{(m+1)\lambda D}{d}. \quad (36.18)$$

Odejmując stronami równanie (36.17) od równania (36.18), otrzymujemy poszukiwaną odległość między sąsiednimi maksimumami:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} \\ &= \frac{(546 \cdot 10^{-9} \text{ m})(55 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{0,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \\ &= 2,50 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,5 \text{ mm}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Gdy wielkości  $d$  oraz  $\theta$  są małe, odległość między prążkami interferencyjnymi jest niezależna od  $m$  — prążki interferencyjne są równoodległe od siebie.

## 36.5. Spójność

Warunkiem na to, żeby na ekranie  $C$  na rysunku 36.6 pojawiał się obraz interferencyjny, jest stała w czasie różnica faz fal świetlnych docierających do każdego punktu  $P$  na ekranie. Warunek ten jest spełniany dla fal na rysunku 36.6, ponieważ fale wychodzące ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$  są częściami jednej fali świetlnej, która oświetla obie szczeliny. Różnica faz pozostaje stała w czasie, dlatego też o świetle opuszczającym szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  mówimy, że jest całkowicie **spójne**.

Światło słoneczne jest światłem częściowo spójnym, tzn. fale świetlne w dwóch punktach obserwacji będą miały stałą różnicę faz tylko wtedy, gdy punkty te są bardzo blisko siebie. Jeżeli na przykład przyjrzyj się z bliska swoim paznokciom w silnym świetle słonecznym, to możesz zobaczyć niewyraźny obraz interferencyjny nazywany obrazem cętkowym, który sprawia, że paznokcie wydają się pokryte cętkami. Taki obraz powstaje dlatego, że fale świetlne rozpraszane przez bardzo blisko siebie leżące punkty na powierzchni paznokcia są wystarczająco spójne na to, by mogły interferować ze sobą w twoim oku. Ale w doświadczeniu z dwiema szczelinami odległość między szczelinami nie jest wystarczająco mała i przy bezpośrednim oświetleniu przez światło słoneczne, światło wychodzące ze szczelin jest światłem **niespójnym**. Żeby uczynić je spójnym, musielibyśmy przepuścić je najpierw przez pojedynczą szczelinę, tak jak na rysunku 36.6; ponieważ pojedyncza szczelina jest wąska, wobec tego przechodzące przez nią światło jest spójne. A dodatkowo, kiedy szczelina jest wąska, wówczas spójne światło ulega na niej ugięciu i oświetla obie szczeliny.

Jeżeli układ dwóch szczelin zastąpimy dwoma podobnymi źródłami światła monochromatycznego, na przykład dwoma bardzo cienkimi drucikami żarowymi, to różnica faz fal świetlnych emitowanych przez te źródła zmienia się szybko i przypadkowo. (Dzieje się tak dlatego, że światło w drucikach żarowych jest emitowane przez ogromną liczbę atomów, które działają przypadkowo i niezależnie w skrajnie krótkich czasach — rzędu nanosekund). W rezultacie w każdym dowolnie wybranym punkcie ekranu interferencja zmienia swój charakter szybko i przypadkowo, od całkowicie konstruktywnej do całkowicie destruktywnej. Oko ludzkie (i większość zwykłych detektorów optycznych) nie jest w stanie nadążyć za takimi zmianami i nie widzi żadnego obrazu interferencyjnego. Prążki znikają i ekran jest oświetlony równomiernie.

*Laser* różni się tym od konwencjonalnych źródeł światła, że jego atomy emitują światło w sposób skoordynowany, co sprawia, że światło lasera jest światłem spójnym. Ponadto światło lasera jest prawie monochromatyczne, jest emitowane w postaci wąskiej wiązki o znikomej rozbieżności i może być ogniskowane na obszarze o rozmiarach nieomal porównywalnych z długością fali świetlnej.

## 36.6. Natężenie światła w obrazie interferencyjnym

Równania (34.14) i (34.16) umożliwiają nam określenie położenia maksimów i minimum (jako funkcję kąta  $\theta$ ) w obrazie interferencyjnym wytwarzanym przez dwie szczeliny (na ekranie  $C$  na rys. 36.8). Teraz chcemy wyprowadzić odpowiednie

wrażenie, które będzie opisywać natężenie  $I$  światła jako funkcję położenia prążków (kąta  $\theta$ ).

Światło opuszczające szczeliny ma zgodne fazy. Przyjmijmy jednak, że fale świetlne z dwóch szczelin, docierając do punktu  $P$ , nie mają zgodnych faz, a składowe pola elektrycznego zmieniają się w czasie jak

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \quad (36.19)$$

oraz

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (36.20)$$

gdzie  $\omega$  jest częstością kołową fal, a  $\phi$  jest fazą początkową fali  $E_2$ . Zauważ, że obie fale mają taką samą amplitudę  $E_0$  i że różnica ich faz jest równa  $\phi$ . Różnica faz nie zmienia się, dlatego też fale są spójne. Pokażemy, że te dwie fale, nakładając się na siebie w punkcie  $P$ , będą dawały natężenie  $I$  równe

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}\phi \quad (36.21)$$

oraz że

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (36.22)$$

W równaniu (36.21)  $I_0$  jest natężeniem światła, jakie na ekranie wytwarza fala z jednej szczeliny, wtedy gdy druga szczelina jest chwilowo zakryta. Zakładamy, że szczeliny są tak wąskie w porównaniu z długością fali światła, że natężenie światła z jednej szczeliny jest całkowicie równomierne w obszarze ekranu, w którym chcemy badać prążki interferencyjne.

Równania (36.21) i (36.22), które razem informują nas o tym, jak zmienia się wraz z kątem  $\theta$  natężenie  $I$  w obrazie prążków na rysunku 36.8, zawierają oczywiście informację o położeniu maksimów i minimów. Spróbujmy odzyskać z nich tę informację.

Z równania (36.21) wynika, że maksima natężenia w obrazie prążków będą występować wtedy, gdy

$$\frac{1}{2}\phi = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.23)$$

Jeżeli ten wynik podstawimy do równania (36.22), to otrzymamy

$$2m\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

czyli

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima}), \quad (36.24)$$

to znaczy dokładnie równanie (36.14) określające położenie maksimów, które już wcześniej wprowadziliśmy.

Minima w obrazie prążków występują wtedy, gdy

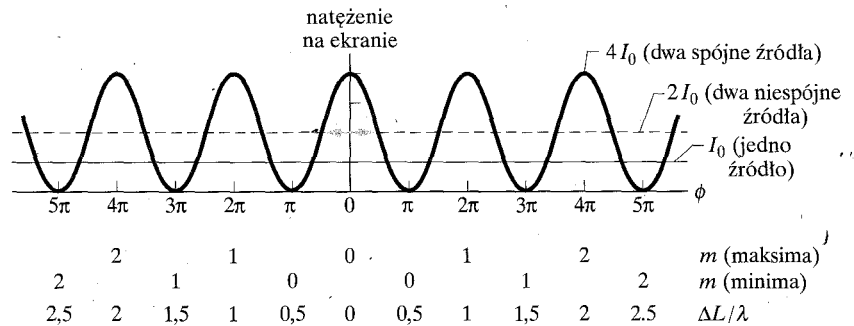
$$\frac{1}{2}\phi = (m + \frac{1}{2})\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli połączymy tę zależność z równaniem (36.22), to natychmiast dochodzimy do równania

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{minima}), \quad (36.25)$$

czyli do wcześniej już wyprowadzonego przez nas równania (36.16) opisującego położenie minimów w obrazie interferencyjnym.

Wykres zależności (36.21) przedstawiono na rysunku 36.9, który ilustruje, jak zmienia się natężenie światła w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin w zależności od różnicy faz fal spotykających się na ekranie. Pozioma linia ciągła odpowiada natężeniu  $I_0$ , czyli (równomiernemu) natężeniu światła na ekranie, które pochodzi z jednej szczeliny wtedy, gdy druga szczelina jest przesłonięta. Zauważ, że w równaniu (36.21) i na wykresie natężenie  $I$  zmienia się od zera, w minimach do  $4I_0$  w maksimach obrazu interferencyjnego.



Rys. 36.9. Wykres zależności (36.21), pokazujący natężenie w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin jako funkcję różnicy faz między falami biegnącymi z obu szczelin.  $I_0$  jest (równomiernym) natężeniem, jakie byłoby obserwowane na ekranie wtedy, gdyby jedna ze szczelin została zasłonięta. Średnie natężenie obrazu prążków interferencyjnych jest  $2I_0$ , a natężenie maksymalne (dla światła spójnego) jest  $4I_0$

Gdyby fale z dwóch źródeł (szczelin) były *niespójne*, tak że różnica faz między nimi nie byłaby stała, to nie powstawałby obraz interferencyjny i natężenie we wszystkich punktach na ekranie miałoby jednakową wartość  $2I_0$  (zaznaczoną na rysunku 36.9 linią przerywaną).

Zjawisko interferencji nie tworzy ani też nie niszczy energii, a jedynie zmienia jej rozkład na ekranie. Tym samym niezależnie od tego, czy do ekranu dociera światło ze spójnych źródeł, czy też nie, *średnie* natężenie musi być zawsze takie samo:  $2I_0$ . Wynika to również z równania (36.21), jeżeli bowiem podstawimy w nim średnią wartość kwadratu funkcji cosinus, tzn.  $1/2$ , to redukuje się ono do równania  $I_{\text{sr}} = 2I_0$ .

### Wyprowadzenie równań (36.21) i (36.22)

Złożymy składowe pola elektrycznego  $E_1$  i  $E_2$ , opisane równaniami (36.19) i (36.20), korzystając z metody *wskazów*, omówionej w paragrafie 17.10. Na rysunku 36.10a fale o składowych  $E_1$  i  $E_2$  są przedstawione w postaci *wskazów* (nazywanych również *fazorami* lub *wektorami amplitudy*) o długości  $E_0$ ,

obracających się wokół środka układu współrzędnych z prędkością kątową  $\omega$ . Wartości chwilowe  $E_1$  i  $E_2$  dane są przez rzuty odpowiednich wskazów na oś pionową układu współrzędnych. Na rysunku 36.10a pokazano wskazę i ich rzuty w pewnej, dowolnie wybranej chwili  $t$ . Zgodnie z równaniami (36.19) i (36.20) kąt, jaki tworzy wskaz  $E_1$  z osią poziomą wynosi  $\omega t$ , a wskaz  $E_2$  —  $(\omega t + \phi)$ .

Żeby złożyć składowe pola elektrycznego  $E_1$  i  $E_2$  w dowolnym punkcie  $P$  na rysunku 36.8, dodajemy ich wskazę wektorowo, tak jak to pokazano na rysunku 36.10b. Wartość (bezwzględna) sumy wektorowej jest amplitudą  $E$  fali wypadkowej w punkcie  $P$  i fala ta ma pewną fazę początkową  $\beta$ . Wyznaczając amplitudę  $E$  na rysunku 36.10b, zauważmy najpierw, że dwa kąty oznaczone jako  $\beta$  są sobie równe jako kąty leżące naprzeciw jednakowych boków trójkąta równoramiennego. Z twierdzenia, że kąt zewnętrzny w trójkącie (kąt  $\phi$  na rys. 36.10b) jest równy sumie przeciwległych kątów wewnętrznych trójkąta (tutaj  $\beta + \beta$ ), wynika, że  $\beta = \phi/2$ . Mamy zatem

$$E = 2(E_0 \cos \beta) = 2E_0 \cos(\phi/2). \quad (36.26)$$

Po podniesieniu obu stron tej zależności do kwadratu otrzymujemy

$$E^2 = 4E_0^2 \cos^2(\phi/2). \quad (36.27)$$

Z równania (34.24) wiemy, że natężenie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu jej amplitudy. Zatem każda z fal, które składamy na rysunku 36.10b, o amplitudzie  $E_0$ , ma natężenie  $I_0$  proporcjonalne do  $E_0^2$ , a fala wypadkowa o amplitudzie  $E$  ma natężenie  $I$  proporcjonalne do  $E^2$ . Wobec tego

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E^2}{E_0^2}.$$

Wstawiając  $E^2$  z równania (36.27), otrzymujemy

$$I = 4I_0 \cos^2(\phi/2),$$

czyli równanie (36.21), które mieliśmy wyprowadzić.

Pozostało nam jeszcze do wyprowadzenia równanie (36.22), które wiąże różnicę faz  $\phi$  fal docierających do dowolnego punktu  $P$  ekranu na rysunku 36.8 z kątem  $\theta$  określającym położenie tego punktu.

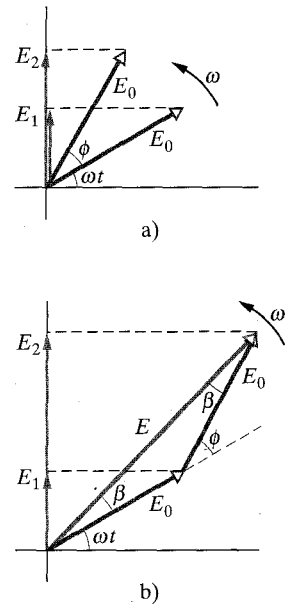
Różnica faz  $\phi$  w równaniu (36.20) jest związana z różnicą dróg  $S_1b$  na rysunku 36.8b. Jeżeli  $S_1b$  jest równe  $\lambda/2$ , to  $\phi$  jest równe  $\pi$ ; jeżeli  $S_1b$  jest równe  $\lambda$ , to  $\phi$  jest równe  $2\pi$  itd. Jak stąd widać

$$(\text{różnica faz}) = \frac{2\pi}{\lambda} (\text{różnica dróg}). \quad (36.28)$$

Różnica dróg  $S_1b$  na rysunku 36.8b wynosi  $d \sin \theta$  i wobec tego równanie (36.28) przybiera postać

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta,$$

a to jest równanie (36.22), które mieliśmy wyprowadzić.



Rys. 36.10. a) Wskazy reprezentują w chwili  $t$  składowe pola elektrycznego opisywane równaniami (36.19) i (36.20). Oba wskazę mają długość  $E_0$  i obracają się z prędkością kątową  $\omega$ . Ich różnica faz jest równa  $\phi$ . b) Suma wektorowa dwóch wskazów daje wskaz reprezentujący falę wypadkową o amplitudzie  $E$  i fazie początkowej  $\beta$



## Składanie większej liczby fal

Czasami możemy mieć do czynienia z sytuacją, w której trzeba będzie dokonać złożenia w danym punkcie więcej niż dwóch fal sinusoidalnych. W takim przypadku postępujemy następująco:

1. Każdej z fal nakładających się na siebie w danym punkcie przyporządkujemy odpowiedni wskaz. Konstruujemy diagram (koniec jednego wskaz jest początkiem drugiego itd.), zachowując przy tym odpowiednie relacje fazowe między kolejnymi wskazami.
2. Sumujemy wektorowo wszystkie wskaz. Długość wektora wypadkowego jest amplitudą wypadkowego wskaz. Kąt między wypadkowym wektorem sumy i pierwszym wskazem jest fazą wypadkowego wskaz, którego rzut na oś pionową układu współrzędnych określa czasową zmienność fali wypadkowej.

### Przykład 36.3

Trzy fale, o składowych pola elektrycznego

$$E_1 = E_0 \sin \omega t,$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + 60^\circ),$$


$$E_3 = E_0 \sin(\omega t - 30^\circ),$$

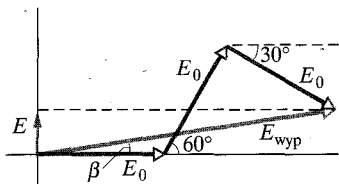
nakładają się na siebie w pewnym punkcie. Znajdź ich wypadkową  $E(t)$  w tym punkcie.

#### ROZWIĄZANIE:

Fala wypadkowa to

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t).$$

Kluczem do rozwiązania tego przykładu jest:  po pierwsze, spostrzeżenie, że sumę tę możemy wyznaczyć, korzystając z diagramu wskazów, a po drugie, że wskaz reprezentujące te trzy fale możemy określić dla dowolnie wybranej chwili  $t$ . Dla uproszczenia rozwiązania wybierzemy chwilę  $t = 0$ , dla której odpowiednie wskaz zilustrowano na rysunku 36.11.



Rys. 36.11. Przykład 36.3. Trzy wskaz reprezentujące fale o jednakowych amplitudach  $E_0$  i fazach początkowych  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $-30^\circ$  (w chwili  $t = 0$ ). W wyniku dodawania wskaz otrzymuje się wypadkowy wskaz o amplitudzie  $E_{\text{wyp}}$  i kącie  $\beta$

Możemy wykonać ten rachunek na składowych trzech wskazów. Zaczniemy od sumy ich składowych poziomych, która jest równa

$$\sum E_{\text{poz}} = E_0 \cos 0 + E_0 \cos 60^\circ + E_0 \cos(-30^\circ) = 2,37E_0.$$

Suma ich składowych pionowych, której odpowiada wartość  $E$  w chwili  $t = 0$ , jest równa

$$\sum E_{\text{pion}} = E_0 \sin 0 + E_0 \sin 60^\circ + E_0 \sin(-30^\circ) = 0,366E_0.$$

Fala wypadkowa  $E(t)$  ma zatem amplitudę  $E_{\text{wyp}}$

$$E_{\text{wyp}} = \sqrt{(2,37E_0)^2 + (0,366E_0)^2} = 2,4E_0$$

oraz fazę  $\beta$  względem wskaz reprezentującego  $E_1$ , który wynosi

$$\beta = \arctg\left(\frac{0,366E_0}{2,37E_0}\right) = 8,8^\circ.$$

Możemy teraz zapisać falę wypadkową  $E(t)$ :

$$E = E_{\text{wyp}} \sin(\omega t + \beta) = 2,4E_0 \sin(\omega t + 8,8^\circ). \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć szczególną uwagę na prawidłową interpretację kąta  $\beta$  na rysunku 36.11: Jest to stały kąt między  $E_{\text{wyp}}$  i wskazem  $E_1$ , który nie zmienia się podczas obrotu układu czterech wskazów jako całości wokół środka układu współrzędnych. Kąt między  $E_{\text{wyp}}$  i osią poziomą układu współrzędnych na rysunku 36.11 (równy  $\beta$  w chwili  $t = 0$ ) zmienia się w trakcie tego obrotu.

**SPRAWDZIAN 4:** Każda z czterech par fal świetlnych dociera do pewnego punktu na ekranie. Fale mają taką samą długość. W punkcie spotkania na ekranie ich amplitudy i różnice faz są następujące: a)  $2E_0$ ,  $6E_0$  i  $\pi$  rad; b)  $3E_0$ ,  $5E_0$  i  $\pi$  rad; c)  $9E_0$ ,  $7E_0$  i  $3\pi$  rad; d)  $2E_0$ ,  $2E_0$  i 0 rad. Uszereguj te pary w kolejności malejącego natężenia światła w rozważanym punkcie. (Wskazówka: Sporządź diagram wskazów).

## 36.7. Interferencja w cienkich warstwach

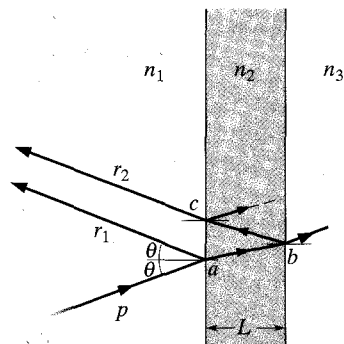
Barwy, jakie widzimy wtedy, gdy światło słoneczne oświetla bańki mydlane czy cienkie warstewki rozlanego oleju, są wynikiem interferencji fal świetlnych odbijanych od przednich (górných) i tylnych (dolnych) powierzchni tych cienkich przezroczystych warstw (błonek). Grubość błonki bańki mydlanej czy warstewki oleju jest porównywalna z długością fali światła (widzialnego). (Przy większych grubościach warstw zostaje zniszczona spójność światła konieczna do wytworzenia obrazu barwnego).

Na rysunku 36.12 pokazano cienką przezroczystą warstwę o grubości  $L$  i współczynniku załamania światła  $n_2$ , jasno oświetloną światłem o długości fali  $\lambda$  z odległego punktowego źródła światła. Załóżmy na początek, że warstwę tę z obu stron otacza powietrze, tzn. że  $n_1 = n_3$ . Dla uproszczenia założymy również, że promienie świetlne padające na warstwę są do niej prawie prostopadłe ( $\theta \approx 0$ ). Interesuje nas to, czy dla obserwatora oglądającego tę warstwę z kierunku prawie prostopadłego do jej powierzchni jest ona jasna, czy ciemna. (Jak mogłaby ona być ciemna, skoro jest jasno oświetlona? Cierpliwości, zaraz się o tym przekonasz).

Światło padające, reprezentowane przez promień  $p$ , pada na warstwę w punkcie  $a$  i ulega tam zarówno odbiciu, jak i załamaniu. Promień odbity  $r_1$  trafia do oka obserwatora. Promień, który uległ załamaniu dociera przez warstwę do jej tylnej powierzchni w punkcie  $b$  i tam ulega zarówno odbiciu, jak i załamaniu. Światło odbite w punkcie  $b$  wraca przez warstwę do jej przedniej powierzchni, osiągając ją w punkcie  $c$  i w punkcie tym doznaje zarówno odbicia, jak i załamania. Światło załamane w punkcie  $c$ , reprezentowane przez promień  $r_2$ , dociera do oka obserwatora.

Jeżeli fale świetlne reprezentowane przez promienie  $r_1$  i  $r_2$  mają w oku dokładnie zgodne fazy, to wytwarzają one maksimum interferencyjne i obszar  $ac$  na powierzchni warstwy jest dla obserwatora jasny. Jeżeli jednak ich fazy są dokładnie przeciwne, to wytwarzają one minimum interferencyjne i obszar  $ac$  jest dla obserwatora ciemny, *mimo że jest on jasno oświetlony*. Jeżeli różnica faz obu fal ma wartość pośrednią, to i jasność obszaru  $ac$  jest pośrednia.

Tak więc kluczem do tego, co widzi obserwator, jest różnica faz fal reprezentowanych przez promienie  $r_1$  i  $r_2$ . Oba promienie wywodzą się z tego samego promienia  $p$ , ale na drogę, jaką musiał przebyć promień  $r_2$ , zanim dotarł do oka obserwatora, składa się dwukrotne przejście przez warstwę (z  $a$  do  $b$  i z  $b$  do  $c$ ), podczas gdy promień  $r_1$  docierający do oka obserwatora w ogóle nie wnikał do



**Rys. 36.12** Fala świetlna reprezentowana przez promień  $p$  pada na cienką warstwę o grubości  $L$  i współczynniku załamania światła  $n_2$ . Promienie  $r_1$  i  $r_2$  reprezentują fale świetlne, które zostały odbite odpowiednio od przedniej i od tylnej powierzchni warstwy. (Wszystkie trzy promienie są nieomal prostopadłe do powierzchni warstwy). Wynik interferencji fal  $r_1$  i  $r_2$  zależy od ich różnicy faz. Współczynnik załamania światła  $n_1$  dla ośrodka po lewej stronie warstwy może różnić się od współczynnika załamania światła  $n_3$  dla ośrodka po prawej stronie warstwy, na razie jednak założymy, że ośrodkiem po obu stronach warstwy jest powietrze, a więc  $n_1 = n_3 = 1$  i  $n_1 < n_2$

warstwy. Kąt  $\theta$  jest bliski zera, wobec tego możemy przyjąć, że różnica dróg przebytych przez obie fale jest równa  $2L$ . Jednakże do wyznaczenia różnicy faz między obiema falami nie wystarczy znajomość liczby długości fal  $\lambda$  mieszczących się w różnicy dróg  $2L$ . Takie proste podejście jest niemożliwe z dwóch powodów: 1) różnica dróg powstaje w ośrodku innym niż powietrze i 2) zachodzi zjawisko odbicia, które może zmieniać fazę fali.

➤ Różnica faz między dwiema falami może się zmieniać, jeżeli jedna lub obie fale ulegają odbiciu.

Musimy wobec tego przerwać naszą dyskusję interferencji w cienkich warstwach i zapoznać się z zagadnieniem zmian fazy wywoływanych przez odbicie.

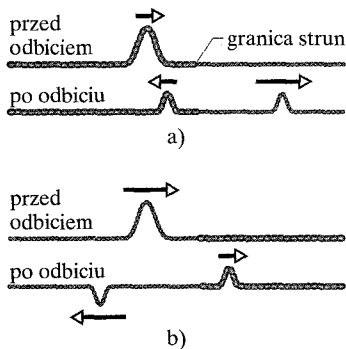
### Zmiana fazy przy odbiciu

Załamanie na powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki nigdy nie powoduje zmiany fazy fali, natomiast odbicie od takiej powierzchni może spowodować zmianę fazy, zależnie od współczynników załamania światła po obu stronach powierzchni. Na rysunku 36.13 pokazano, jak zmienia się faza impulsu rozchodzącego się w strunach, przy odbiciu na granicy między dwiema strunami, z których jedna jest cięższa i impuls rozchodzi się w niej wolniej, a druga lżejsza i impuls rozchodzi się w niej szybciej.

Kiedy impuls rozchodzący się stosunkowo wolno w cięższej strunie na rysunku 36.13a osiąga granicę ze struną lżejszą, wtedy przechodzi on częściowo przez tę granicę, a częściowo jest od niej odbijany bez zmiany swej orientacji. W przypadku światła sytuacja taka odpowiada fali padającej, która rozchodzi się w ośrodku o większym współczynniku załamania światła  $n$  (przypomnijmy: większe  $n$  oznacza mniejszą prędkość światła). W takim przypadku fala odbita od granicy nie doznaje zmiany fazy, innymi słowy *zmiana fazy przy odbiciu* jest równa 0.

Kiedy impuls rozchodzący się szybciej wzdłuż struny lżejszej (rys. 36.13b) osiąga granicę połączenia ze struną cięższą, przechodzi on częściowo przez tę granicę, a częściowo jest od niej odbijany. Tak jak poprzednio, impuls przechodzący do struny cięższej ma taką samą orientację jak impuls padający, natomiast impuls odbity ulega tym razem odwróceniu. Dla fali sinusoidalnej takie odwrócenie oznacza zmianę fazy o  $\pi$  rad, co odpowiada połowie długości fali. W przypadku światła sytuacja taka odpowiada fali padającej, która rozchodzi się w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania światła  $n$  (przypomnijmy: mniejsze  $n$  oznacza większą prędkość światła). W takim przypadku fala odbita na powierzchni granicznej doznaje zmiany fazy o  $\pi$  radianów, co odpowiada połowie długości fali.

Jak widać zmiana fazy przy odbiciu od granicy ośrodków zależy od współczynnika załamania światła dla ośrodka, od którego następuje odbicie. Dla fali świetlnej mamy:



Rys. 36.13. Gdy impuls odbija się od granicy dwóch naciągniętych strun o różnych gęstościach liniowych, jego faza ulega zmianie. Prędkość fali jest większa w lżejszej strunie. a) Impuls padający rozchodzi się w cięższej strunie. b) Impuls padający rozchodzi się w lżejszej strunie. Tylko w tym przypadku dochodzi do zmiany fazy i tylko w fali odbitej

Odbicie od ośrodka o współczynniku załamania	Zmiana fazy przy odbiciu
mniejszym	0
większym	odpowiada 1/2 długości fali

## Równania opisujące interferencję w cienkich warstwach

W rozdziale tym poznaliśmy trzy przyczyny, które mogą spowodować zmianę różnicy faz między dwiema falami:

1. odbicie,
2. różnica dróg przebytych przez obie fale,
3. przechodzenie fal przez ośrodki optyczne o różnych współczynnikach załamania światła.

W sytuacji zilustrowanej na rysunku 36.12 wszystkie trzy podane wyżej przyczyny wchodzi w grę. Rozważmy je kolejno.

Zajmijmy się najpierw raz jeszcze dwoma odbiciami, które pokazano na rysunku 36.12. W punkcie  $a$  na przedniej powierzchni rozgraniczenia ośrodków fala padająca (z powietrza) ulega odbiciu od ośrodka o większym współczynniku załamania światła, a zatem różnica faz fali reprezentowanej przez promień  $r_1$  odpowiada połowie długości fali (w stosunku do fali padającej). W punkcie  $b$ , na tylnej powierzchni rozgraniczenia ośrodków, fala odbija się od ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła (powietrze) i wobec tego jej faza nie ulega zmianie przy odbiciu i tym samym faza fali reprezentowanej przez promień  $r_2$  jest taka sama, jak fali padającej na przednią powierzchnię warstwy. Te informacje zbieramy w pierwszym wierszu tabeli 36.1, a wynika z nich, jak na razie, że w wyniku odbić przesunięcie fal  $r_1$  i  $r_2$  względem siebie wynosi pół długości fali, są one zatem w dokładnie przeciwnej fazie.

Tabela 36.1. Interferencja w cienkich warstwach (w powietrzu)<sup>a</sup> — podsumowanie

	$r_1$	$r_2$
Zmiana fazy przy odbiciu	odpowiada 1/2 długości fali	0
Różnica dróg	$2L$	
Współczynnik załamania światła dla ośrodka, w którym powstaje różnica dróg	$n_2$	
Fazy zgodne <sup>a</sup>	$2L = \frac{\text{liczba nieparzysta}}{2} \cdot \frac{\lambda}{n_2}$	
Fazy przeciwne <sup>a</sup>	$2L = \text{liczba całkowita} \cdot \frac{\lambda}{n_2}$	

<sup>a</sup> Obowiązuje dla  $n_2 > n_1$  i  $n_2 > n_3$ .

Musimy teraz z kolei zająć się różnicą dróg  $2L$ , która wynika z dwukrotnego przebiegu fali  $r_2$  przez warstwę (drugi wiersz tabeli 36.1). Na to, aby fale  $r_1$  i  $r_2$  mogły interferować ze sobą w pełni konstruktywnie, musiałyby być one zgodne

w fazie, co oznacza, że różnica dróg  $2L$  musiałaby być równa  $1/2, 3/2, 5/2, \dots$  długości fali. Tylko wtedy wypadkowa różnica faz odpowiadałaby całkowitej wielokrotności długości fali. Zatem, aby obserwować jasną warstwę, musimy mieć

$$2L = \frac{\text{liczba nieparzysta}}{2} \cdot (\text{długość fali}) \quad (\text{fale w zgodnej fazie}). \quad (36.29)$$

Występująca wyżej długość fali to długość fali światła  $\lambda_{n_2}$  w ośrodku, w którym powstała różnica dróg  $2L$ , tzn. w ośrodku o współczynniku załamania światła  $n_2$ . Możemy wobec tego przepisać równanie (36.29) w postaci

$$2L = \frac{\text{liczba nieparzysta}}{2} \cdot \lambda_{n_2} \quad (\text{fale w zgodnej fazie}). \quad (36.30)$$

Jeżeli natomiast fale miałyby być dokładnie w przeciwnych fazach, co oznacza ich w pełni destruktywną interferencję, to różnica dróg  $2L$  albo nie powinna powodować żadnej dodatkowej zmiany faz, albo spowodowana przez nią różnica faz odpowiadałaby  $1, 2, 3, \dots$  długości fali. Tylko wtedy wypadkowa różnica faz będzie odpowiadała nieparzystej wielokrotności połowy długości fali. Aby obserwować ciemną warstwę, musimy mieć

$$2L = (\text{liczba całkowita}) \cdot (\text{długość fali}), \quad (36.31)$$

gdzie znowu  $\lambda_{n_2}$  jest długością fali w ośrodku, w którym powstała różnica dróg  $2L$  i wobec tego tym razem mamy

$$2L = (\text{liczba całkowita}) \cdot \lambda_{n_2} \quad (\text{fale w przeciwnej fazie}). \quad (36.32)$$

Możemy teraz skorzystać z równania (36.8) ( $\lambda_n = \lambda/n$ ) i zapisać długość fali, reprezentowanej przez promień  $r_2$  wewnątrz warstwy, jako

$$\lambda_{n_2} = \frac{\lambda}{n_2}, \quad (36.33)$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali światła padającego w próżni (i w przybliżeniu w powietrzu). Podstawienie (36.33) do równania (36.30) i zastąpienie „liczby nieparzystej/2” przez  $(m + 1/2)$  prowadzi do

$$2L = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima — jasna warstwa w powietrzu}). \quad (36.34)$$

Podobnie, zastąpienie „liczby całkowitej” przez  $m$  w równaniu (36.32) daje

$$2L = m \frac{\lambda}{n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{minima — ciemna warstwa w powietrzu}). \quad (36.35)$$

Z równań (36.34) i (36.35) wynikają, dla zadanej grubości  $L$  warstwy, długości fali świetlnej, przy których warstwę widzi się odpowiednio jako jasną albo jako ciemną, przy czym określonej wartości  $m$  odpowiada jedna długość fali. Przy pośrednich długościach fali jasność warstwy jest pośrednia. Mówią one również, że dla danej długości fali  $\lambda$  grubości warstwy, przy których warstwę widzi się odpowiednio jako jasną albo jako ciemną (w tym świetle), różnią się o jedną

grubość  $L$  dla każdej wartości  $m$ . Przy grubościach pośrednich jasność warstwy jest pośrednia.

Z całkiem wyjątkową sytuacją mamy do czynienia wtedy, gdy warstwa jest tak cienka, że jej grubość  $L$  jest dużo mniejsza od długości fali  $\lambda$ , np. gdy  $L < 0,1\lambda$ . Wówczas różnica faz między  $r_1$  i  $r_2$  związana z różnicą dróg jest bardzo mała i można by przyjąć, że jest wywołana *jedynie* przez odbicie. Jeżeli warstwa na rysunku 36.12, dla której odbicie powoduje zmianę fazy odpowiadającą połowie długości fali, ma grubość  $L < 0,1\lambda$ , to fazy promieni  $r_1$  i  $r_2$  są dokładnie przeciwne i wobec tego warstwa jest ciemna, niezależnie od długości fali, a nawet i od natężenia oświetlającego ją światła. Ta wyjątkowa sytuacja odpowiada wartości  $m = 0$  w równaniu (36.35). Możemy traktować każdą grubość  $L < 0,1\lambda$  jako najmniejszą grubość określoną przez równanie (36.35), dla której warstwa na rysunku 36.12 jest ciemna. (Każda taka grubość odpowiada  $m = 0$ ). Kolejna większa grubość warstwy, przy której warstwa jest ciemna, odpowiada wartości  $m = 1$ .

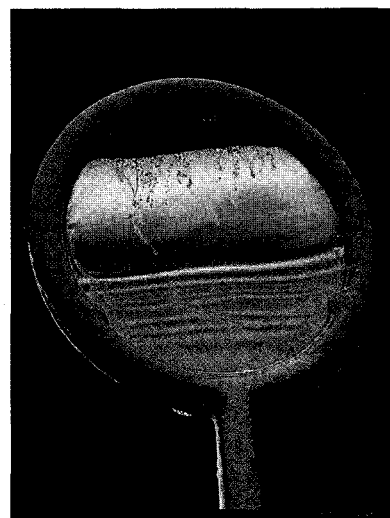
Rysunek 36.14 to zdjęcie pionowo ustawionej błonki mydlanej, której grubość wzrasta od góry do dołu w wyniku spływania wody pod działaniem siły grawitacji. Błonna mydlana jest oświetlona jasnym białym światłem, a mimo to jej górna część jest tak cienka, że pozostaje ciemna. W nieco grubszej, środkowej części błonki widzimy prążki (pasma), których barwy zależą przede wszystkim od długości fali, przy których światło odbite interferuje w pełni konstruktywnie (właśnie dla tej grubości błonki). W miarę przechodzenia do dołu błonki (coraz grubszej) prążki stają się stopniowo coraz węższe, a barwy nakładają się na siebie i zanikają.

## Mieniące się barwami skrzydła motyla

O powierzchni, której barwy spowodowane są interferencją w cienkich warstwach, mówi się, że *mieni się barwami (opalizuje)*, ponieważ odcienie barw zmieniają się wraz ze zmianą kierunku jej oglądania. Zmienność barw wierzchniej powierzchni skrzydeł motyla modraszka jest wynikiem interferencji w cienkich warstwach. Światło odbijane jest od cienkich wachlarzowatych warstw z przezroczystego podobnego do naskórka materiału na skrzydłach motyla. Warstwy te układają się jak szerokie, płaskie gałęzie na strukturze przypominającej drzewo, rozciągające się prostopadle do skrzydeł motyla.

Przypuśćmy, że spoglądasz dokładnie z góry na te warstwy, a białe światło oświetla również z góry skrzydło motyla. W takiej sytuacji światło odbite od warstw w twoją stronę ulega konstruktywnej interferencji w zakresie niebieskozielonej części widma widzialnego. Interferencja światła z dугiego krańca obszaru widzialnego, odpowiadającego barwie żółtej i czerwonej, jest tylko po części konstruktywna i natężenie tych barw jest słabsze. Dlatego też wierzchnia strona skrzydeł ma przede wszystkim zabarwienie niebieskozielone.

Kiedy spoglądasz na skrzydła motyla z innego kierunku, do twego oka dociera światło odbite od warstw ukośnie w stosunku do światła padającego i konstruktywnej interferencji ulegają fale o długości nieco innej niż te obserwowane wprost z góry. Jeśli więc oglądasz skrzydła w ruchu, to kąt, pod którym je oglądasz, ciągle się zmienia. Zmieniają się też ciągle barwy, które widzisz jako najjaśniejsze — widzisz, jak skrzydła opalizują.



Rys. 36.14. Odbicie światła od błonki mydlanej rozpiętej na pionowej pętli. Górna część jest tak cienka, że interferencja światła odbitego od niej jest destruktywna, światło jest wygaszane i ta część błonki jest ciemna. Barwne prążki interferencyjne ozdabiają pozostałą część warstwy, lecz zaburza je cyrkulacja cieczy w warstwie spływającej stopniowo pod działaniem siły grawitacji

**Porada 1: Równania interferencji w cienkich warstwach**

Niektórzy studenci sądzą, że równanie (36.34) opisuje maksima, a równanie (36.35) — minima, we *wszystkich* sytuacjach dotyczących interferencji w cienkich warstwach. To nie jest prawda. Równania te zostały wyprowadzone tylko dla sytuacji, kiedy  $n_2 > n_1$  i  $n_2 > n_3$  (rys. 36.12).

Równania właściwe dla innych względnych wartości współczynników załamania światła należy wyprowadzić, powtarzając argumentację stosowaną w tym rozdziale i sporządzając nową wersję tabeli 36.1. W każdym przypadku dojdiesz w końcu do równań (36.34) i (36.35), ale niekiedy zamieniają się one rolami — równanie (36.34) może opisywać minima, a (36.35) maksima, zależnie od tego, czy odbicia na dwóch powierzchniach rozgraniczających ośrodki wytwarzają taką samą zmianę fazy, czy też nie.

**Przykład 36.4**

Światło białe, o jednakowym natężeniu w całym zakresie widzialnym od 400 do 690 nm, pada prostopadle na warstewkę wody o grubości  $L = 320$  nm i współczynniku załamania światła  $n_2 = 1,33$ , która zawieszona jest w powietrzu. Przy jakiej długości fali  $\lambda$  odbijane przez warstewkę światło jest widziane przez obserwatora jako najjaśniejsze?

**ROZWIĄZANIE:**

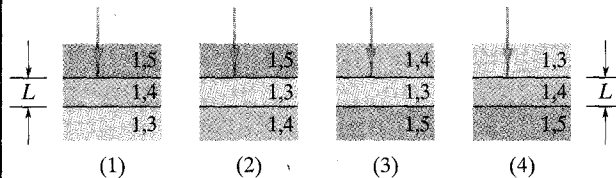
Podstawą odpowiedzi na to pytanie jest fakt, że światło odbijane od warstwy jest najjaśniejsze dla tej długości fali  $\lambda$ , dla której fazy promieni odbitych od obu powierzchni warstwy są zgodne. Równania wiążące długość fali  $\lambda$  zadaną grubością warstwy  $L$  i jej współczynnikiem załamania światła  $n_2$  to albo równanie (36.34) albo (36.35), zależnie od tego, jak dla danej warstwy zmienia się różnica faz promieni przy odbiciu.

Żeby określić, która z tych zależności będzie nam potrzebna, powinniśmy sporządzić tabelę na wzór tabeli 36.1. Jednak po obu stronach rozważanej warstewki wody jest powietrze, dlatego też sytuacja jest dokładnie taka sama, jak na rysunku 36.12 i tabela, którą mamy sporządzić, jest dokładnie taka sama jak tabela 36.1.

**Przykład 36.5**

Soczewka szklana z jednej strony jest pokryta cienką warstwą fluorku magnezu ( $MgF_2$ ), która zmniejsza odbicie światła od soczewki (rys. 36.15). Współczynnik załamania światła dla  $MgF_2$  wynosi 1,38, a dla szkła 1,50. Jaka jest najmniejsza grubość warstwy przeciwodblaskowej, która wygasza (przez interferencję) odbicia światła ze środka zakresu widzialnego ( $\lambda = 550$  nm)?

**SPRAWDZIAN 5 :** Na rysunku niżej pokazano są cztery możliwości odbicia światła prostopadle od cienkiej warstwy (tak samo jak na rys. 36.12) o grubości  $L$ . Współczynniki załamania światła dla cienkiej warstwy i otaczających ją ośrodków są podane na rysunku. a) W którym przypadku odbicie światła od powierzchni granicznych warstwy nie zmienia różnicy faz między obydwooma odbitymi promieniami (zmiana różnicy faz jest równa zero)? b) W którym przypadku warstwa będzie ciemna, jeśli różnica dróg  $2L$  obu odbitych promieni spowoduje zmianę fazy odpowiadającą  $1/2$  długości fali?



Z tabeli tej wynika, że odbite promienie mają zgodne fazy (a warstewka jest najjaśniejsza) wtedy, gdy

$$2L = \frac{\text{liczba nieparzysta}}{2} \cdot \frac{\lambda}{n_2}$$

co prowadzi do równania (36.34):

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n_2}$$

Rozwiązanie tego równania ze względu na  $\lambda$  i podstawienie zadaných wartości  $L$  i  $n_2$  daje

$$\lambda = \frac{2n_2L}{m + 1/2} = \frac{(2)(1,33)(320 \text{ nm})}{m + 1/2} = \frac{851 \text{ nm}}{m + 1/2}$$

Dla  $m = 0$  długość fali  $\lambda = 1700$  nm, a więc światło z zakresu podczerwieni. Natomiast dla  $m = 1$  długość fali  $\lambda = 567$  nm, czyli światło o barwie żółtozielonej, z pobliża środka zakresu widzialnego widma. Dla  $m = 2$ ,  $\lambda = 340$  nm, co odpowiada zakresowi nadfioletu. A zatem jako najjaśniejsze widziane jest przez obserwatora światło o długości fali

$$\lambda = 567 \text{ nm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Przyjmij, że światło pada nieomal prostopadle na powierzchnię soczewki.

**ROZWIĄZANIE:**

Punktem wyjścia jest spostrzeżenie, że odbicie jest wygaszone wtedy, gdy grubość warstwy  $L$  jest taka, że fale świetlne odbite od dwóch powierzchni granicznych warstwy są dokładnie

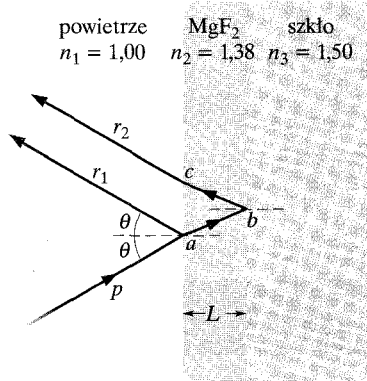
w fazie przeciwnej. Równania wiążące grubość warstwy  $L$  z zadaną długością fali  $\lambda$  oraz ze współczynnikiem załamania światła  $n_2$  materiału warstwy to albo równanie (36.34), albo (36.35), zależnie od tego, jak dla danej warstwy zmienia się różnica faz promieni przy odbiciu.

Żeby określić, która z tych zależności będzie nam potrzebna, sporządzamy tabelę na wzór tabeli 36.1. Na pierwszą powierzchnię graniczną światło pada od strony powietrza, które ma mniejszy współczynnik załamania światła niż materiał warstwy. Zatem w naszej tabeli w kolumnie  $r_1$  wpisujemy  $(1/2)\lambda$  (co oznacza, że wystąpiła różnica faz fali świetlnej reprezentowanej przez promień  $r_1$  odpowiadająca  $(1/2)\lambda$  przy odbiciu od pierwszej powierzchni warstwy). Na drugą powierzchnię graniczną światło pada od strony  $\text{MgF}_2$ , którego współczynnik załamania światła jest mniejszy niż dla szkła znajdującego się po drugiej stronie powierzchni granicznej. Wobec tego w naszej tabeli w kolumnie  $r_2$  wpisujemy również  $(1/2)\lambda$ .

Oba odbicia wywołują taką samą zmianę fazy, wobec tego różnica faz promieni  $r_1$  i  $r_2$  wynikająca z odbicia będzie równa zeru. Skoro jednak żądamy, aby obie fale reprezentowane przez te promienie miały przeciwne fazy, wobec tego różnica ich dróg  $2L$  musi być równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali:

$$2L = \frac{\text{liczba nieparzysta}}{2} \cdot \frac{\lambda}{n_2},$$

a to prowadzi do równania (36.34). Rozwiązanie tego równania ze względu na  $L$  daje grubość warstwy, przy której wyeliminowane (wygaszone) jest odbicie światła od powierzchni soczewki i warstwy przeciwodblaskowej:



Rys. 36.15. Przykład 36.5. Niepożądane odbicia od szkła można wyeliminować (dla wybranych długości fali), pokrywając szkło cienką przezroczystą warstwą fluoru magnezu o odpowiednio dobranej grubości

$$2L = (m + 1/2) \frac{\lambda}{2n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.36)$$

Chcemy znać najmniejszą grubość warstwy, a więc najmniejszą wartość  $L$ , a tę otrzymamy dla najmniejszej możliwej wartości  $m$ , czyli  $m = 0$ . Po wstawieniu do równania (36.36)  $m = 0$  i pozostałych danych otrzymamy

$$L = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550 \text{ nm}}{(4)(1,38)} = 99,6 \text{ nm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 36.6

Na rysunku 36.16a przedstawiono przezroczysty blok z plastiku mający z prawej strony cieniutką szczelinę w kształcie klina, w której znajduje się powietrze. (Grubość klina na rysunku jest przesadnie duża). Na górną powierzchnię bloku pada pod kątem  $0^\circ$  (z góry na dół) szeroka wiązka czerwonego światła o długości fali  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . Część światła jest odbijana z powrotem od górnej i od dolnej powierzchni klina, który działa jak cienka warstwa (powietrza) o grubości zmieniającej się z lewa na prawo równomiernie i stopniowo od wartości  $L_L$  do wartości  $L_P$ . (Warstwy plastiku powyżej i poniżej klina powietrza są zbyt grube na to, aby mogły działać jak cienkie warstwy). Obserwator spoglądający na blok z góry widzi wzdłuż klina obraz interferencyjny składający się z sześciu ciemnych prążków i pięciu jasnych, czerwonych prążków. Jaka jest całkowita zmiana grubości klina  $\Delta L = L_P - L_L$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

➡ 1. Jasny obraz w każdym punkcie wzdłuż długości klina, od jego lewego do prawego końca, jest wynikiem interferencji fal odbitych od górnej i od dolnej powierzchni klina.

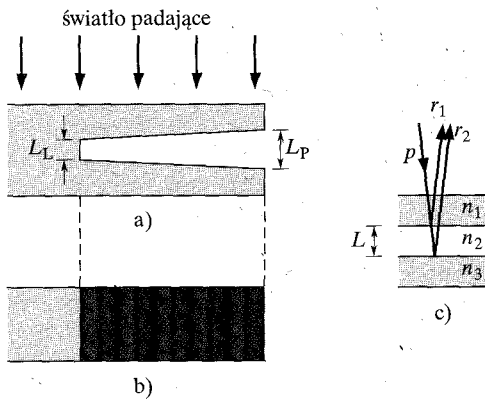
➡ 2. Zmiany jasności w obrazie jasnych i ciemnych prążków spowodowane są przez zmiany grubości klina. W pewnych obszarach grubość klina jest taka, że fale odbite mają zgodne fazy i powstają tam jasne, czerwone prążki interferencyjne. W innych obszarach grubość klina jest taka, że fale odbite mają fazy przeciwne i tam fale odbite są wygaszone (ciemne prążki).

Obserwator widzi więcej ciemnych prążków niż jasnych, wobec tego możemy przyjąć, że na obu końcach klina powstaje ciemny prążek. Zatem obserwowany obraz interferencyjny jest taki, jak na rysunku 36.16b. Skorzystamy z niego przy wyznaczaniu zmiany grubości  $\Delta L$  klina.

➡ 3. Do rozważania odbicia światła od górnej i dolnej powierzchni klina, w każdym punkcie klina wzdłuż jego długości, możemy posłużyć się konstrukcją geometryczną, taką jak na rysunku 36.16c, na którym  $L$  jest grubością klina w tym punkcie. Zastosujmy tę konstrukcję do lewego końca klina, na którym, jak wiemy, w wyniku odbicia powstaje ciemny prążek.

Wiemy, że ciemny prążek powstanie wtedy, gdy fale reprezentowane na rysunku 36.16c przez promienie  $r_1$  i  $r_2$  mają przeciwne fazy. Wiemy również, że równania wiążące grubość warstwy  $L$  z zadaną długością fali  $\lambda$  oraz ze współczynnikiem załamania światła  $n_2$  materiału warstwy to albo równanie (36.34),





Rys. 36.16. Przykład 36.6. a) Czerwone światło pada na cienki klin powietrzny w przezroczystym bloku plastikowym. Klin ma na lewym końcu grubość  $L_L$ , a na prawym końcu  $L_P$ . b) Widok z góry bloku; wzdłuż długości klina widać obraz interferencyjny złożony z sześciu ciemnych i pięciu jasnych czerwonych prążków. c) Schematyczne przedstawienie promienia padającego  $p$ , promieni odbitych  $r_1$  i  $r_2$  oraz grubości klina  $L$  w pewnym miejscu wzdłuż długości klina

albo (36.35), zależnie od tego, jak dla danej warstwy zmienia się różnica faz promieni przy odbiciu. Żeby określić, która z tych zależności będzie nam potrzebna, powinniśmy sporządzić tabelę na wzór tabeli 36.1.

Na górną powierzchnię klina światło pada od strony plastiku, który ma większy współczynnik załamania światła od powietrza znajdującego się poniżej powierzchni. Zatem w naszej tabeli w kolumnie  $r_1$  wpisujemy 0. Na dolną powierzchnię klina światło pada od strony powietrza, dla którego współczynnik załamania światła jest mniejszy niż dla plastiku poniżej powierzchni. Wobec tego w naszej tabeli w kolumnie  $r_2$  wpisujemy  $(1/2)\lambda$ . W wyniku samych odbić promieni  $r_1$  i  $r_2$  mamy przeciwne fazy interferujących fal.

Rzeczywiście na lewym końcu klina fale mają przeciwne fazy, wobec tego różnica dróg  $2L$  na tym końcu klina musi być dana równaniem

$$2L = (\text{liczba całkowita}) \cdot \frac{\lambda}{n_2},$$

co prowadzi do równania (36.35):

$$2L = m \frac{\lambda}{n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.37)$$

4. Wreszcie na koniec zwróćmy uwagę na fakt, że równanie (36.37) jest spełnione nie tylko dla lewego końca klina, ale także dla każdego punktu wzdłuż jego długości, w którym występuje ciemny prążek, włączając w to i prawy koniec klina — za każdym razem dla innej wartości  $m$  (dla każdego ciemnego prążka). Najmniejsza wartość  $m$  odpowiada najmniejszej grubości klina w miejscu, gdzie obserwowany jest ciemny prążek. Wzrastające wartości  $m$  są związane ze wzrastającą grubością klina w kolejnych miejscach obserwacji ciemnych prążków. Przyjmijmy, że dla lewego końca klina  $m = m_L$ . Wtedy wartość  $m$  na prawym końcu klina będzie równa  $m_L + 5$ , bo na rysunku 36.16b prawy koniec klina dzieli od lewego końca odległość pięciu ciemnych prążków.

Poszukujemy różnicy grubości  $\Delta L$  między prawym i lewym końcem klina. Żeby ją znaleźć, rozwiążemy najpierw dwukrotnie równanie (36.37) — raz ze względu na grubość  $L_L$  (na lewym końcu), a drugi raz ze względu na grubość  $L_P$  (na prawym końcu klina):

$$L_L = (m_L) \frac{\lambda}{2n_2}, \quad L_P = (m_L + 5) \frac{\lambda}{2n_2}. \quad (36.38)$$

Odejmując  $L_L$  od  $L_P$  oraz podstawiając znane wielkości, w tym również  $n_2 = 1$  dla powietrza w klinie, otrzymujemy

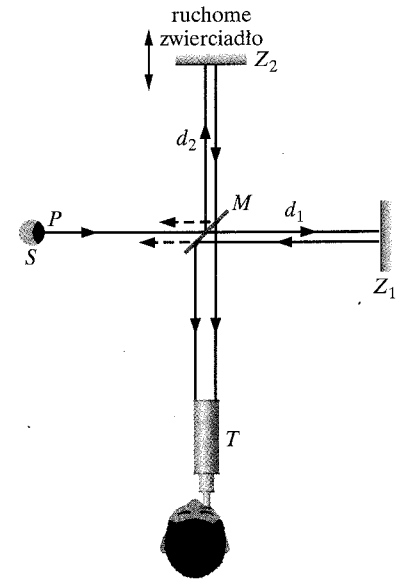
$$\begin{aligned} \Delta L = L_P - L_L &= \frac{(m_L + 5)\lambda}{2n_2} - \frac{m_L\lambda}{2n_2} = \frac{5\lambda}{2n_2} \\ &= \frac{5 \cdot 632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \cdot 1} = 1,58 \cdot 10^{-6} \text{ m. (odpowiedź)} \end{aligned}$$

## 36.8. Interferometr Michelsona

**Interferometr** jest przyrządem, za pomocą którego można z wielką dokładnością mierzyć długości lub ich zmiany na podstawie obserwacji prążków interferencyjnych. Opiszemy tutaj oryginalną wersję interferometru, opracowaną przez A.A. Michelsona w 1881 r.

Przeanalizujemy światło wychodzące z punktu  $P$  rozciągniętego źródła światła  $S$  na rysunku 36.17 i napotykające na swej drodze *płytkę światłodzielącą*  $M$ . Płytkę światłodzielącą to na przykład *płytkę półprzepuszczalną*, czyli to zwierciadło, które przepuszcza połowę wiązki, a drugą połowę odbija. Zakładamy dla wygody, że zwierciadło  $M$  na rysunku 36.17 ma zaniedbywalną grubość. Tak więc na zwierciadle  $M$  światło zostaje podzielone na dwie fale. Jedna z nich biegnie w stronę zwierciadła  $Z_1$ , a druga po odbiciu kierowana jest w stronę

**Rys. 36.17.** Interferometr Michelsona. Pokazano drogę przebywaną przez światło wychodzące z punktu  $P$  rozciągniętego źródła światła  $S$ . Zwierciadło półprzepuszczalne (płytkę światłodzielącą)  $M$  dzieli światło na dwie wiązki, które po odbiciu od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$  wracają do płytki  $M$ , a stamtąd do teleskopu obserwacyjnego  $T$ . W teleskopie obserwator widzi obraz interferencyjny



zwierciadła  $Z_2$ . Od tych dwóch zwierciadeł obie fale są odbijane w całości i wracają w kierunku, z którego pierwotnie nadeszły, a następnie po odbiciu od zwierciadła  $M$  lub po przejściu przez nie trafiają do teleskopu  $T$ . Obserwator widzi obraz interferencyjny złożony z lekko zakrzywionych albo prawie prostych prążków interferencyjnych; w tym drugim przypadku prążki przypominają pręgi na zębrze.

Różnica dróg obu fal nakładających się w teleskopie wynosi  $2d_2 - 2d_1$  i wszystko, co zmienia tę różnicę dróg, będzie powodować zmianę różnicy faz między obiema falami docierającymi do oka obserwatora. Jeżeli na przykład zwierciadło  $Z_2$  zostanie przesunięte o odległość równą  $(1/2)\lambda$ , to różnica dróg zmieni się o  $\lambda$  i obraz prążków zostanie przesunięty o jeden prążek (tak jak gdyby na zębrze każda ciemna pręga przesunęła się na miejsce sąsiedniej ciemnej pręgi). Podobnie, przesunięcie zwierciadła  $Z_2$  o  $(1/4)\lambda$  powoduje przesunięcie o pół prążka w obrazie interferencyjnym (na skórze zębrzy każda ciemna pręga przesunęła się na miejsce sąsiedniej białej pręgi).

Przesunięcie w obrazie prążków interferencyjnych może wywołać również ustawienie cienkiego przezroczystego przedmiotu na drodze do jednego ze zwierciadeł, np.  $Z_1$ . Jeżeli przedmiot taki ma grubość  $L$  i współczynnik załamania światła  $n$ , to, zgodnie z równaniem (36.9), liczba długości fali mieszcząca się na dwukrotnie przebywanej przez światło drodze przez ten przedmiot jest równa

$$N_p = \frac{2L}{\lambda_n} = \frac{2Ln}{\lambda}. \quad (36.39)$$

Liczba długości fali dla takiej samej drogi  $2L$ , którą przebywa światło w powietrzu (przed wstawieniem przedmiotu), jest równa

$$N_{\text{pow}} = \frac{2L}{\lambda}. \quad (36.40)$$

Po wstawieniu przedmiotu zmiana fazy światła po odbiciu od zwierciadła  $Z_1$  będzie odpowiadała

$$N_p - N_{\text{pow}} = \frac{2Ln}{\lambda} - \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda}(n - 1). \quad (36.41)$$

Przy każdej zmianie fazy odpowiadającej jednej długości fali obraz prążków przesuwa się o jeden prążek. Zatem, zliczając liczbę prążków, o jaką przesuwa się obraz po wstawieniu przedmiotu, i podstawiając tę liczbę  $N_p - N_{\text{pow}}$  do równania (36.41), możesz wyznaczyć grubość  $L$  wyrażoną w długościach fali świetlnej.

Metoda taka pozwala wyznaczać długość przedmiotów w jednostkach długości fali światła. W czasach Michelsona wzorcem jednostki długości — metra — była, zgodnie z międzynarodowym porozumieniem, odległość między dwiema rysami wykonanymi na przecie z pewnego stopu metalu, który przechowywano w Sèvres pod Paryżem. Michelson za pomocą swego interferometru pokazał, że wzorzec

metra był równoważny 1 553 163,5 długościom fali określonego monochromatycznego światła czerwonego emitowanego przez źródło światła zawierające atomy kadmu. Za ten wielce precyzyjny pomiar Michelson otrzymał w 1907 r. Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Jego praca stworzyła podwaliny pod przyjęcie nowego wzorca długości. W 1961 r. ostatecznie odstąpiono od wzorca długości z Sèvres, definiując metr w jednostkach długości fali świetlnej. Ale już w 1983 r. i ten wzorec okazał się mało dokładny wobec wzrastających wymagań nauki i techniki i został zastąpiony nowym wzorcem opartym na zdefiniowanej wartości prędkości światła.

## Podsumowanie

**Zasada Huygensa** Rozchodzenie się fal, w tym również fal świetlnych, w trójwymiarowej przestrzeni można często przewidzieć, stosując *zasadę Huygensa*, z której wiemy, że wszystkie punkty czoła fali zachowują się jak punktowe źródła elementarnych kulistych fal wtórnych. Po czasie  $t$  nowe położenie czoła fali jest wyznaczone przez powierzchnię styczną do powierzchni fal wtórnych.

Z zasady Huygensa można wyprowadzić prawo załamania światła, zakładając, że współczynnik załamania światła dowolnego ośrodka jest dany jako  $n = c/v$ , gdzie  $v$  jest prędkością światła w tym ośrodku, a  $c$  prędkością światła w próżni.

**Długość fali i współczynnik załamania światła** Długość fali światła  $\lambda_n$  w ośrodku materialnym zależy od współczynnika załamania światła  $n$  ośrodka:

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \quad (36.8)$$

przy czym  $\lambda$  jest długością fali światła w próżni. Z zależności tej wynika, że różnica faz między dwiema falami świetlnymi może ulegać zmianie wtedy, gdy fale te rozchodzą się w różnych ośrodkach, których współczynniki załamania światła są różne.

**Doświadczenie Younga** W doświadczeniu interferencyjnym Younga światło przepuszczone przez szczelinę kierowane jest na przesłonę z dwiema szczelinami. Światło, które opuszcza te szczeliny, rozprzestrzenia się w całym obszarze za przesłoną (w wyniku ugięcia, czyli dyfrakcji) i zachodzi jego interferencja. Na umieszczonym dalej ekranie można obserwować obraz złożony z prążków interferencyjnych.

Natężenie światła w dowolnym punkcie ekranu zależy od różnicy dróg od obu szczelin do tego punktu. Jeżeli różnica ta jest całkowitą wielokrotnością długości fali, to interferencja jest konstruktywna i w punkcie tym występuje maksimum natężenia. Jeżeli jest ona równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali, to interferencja jest destruktywna i w punkcie tym występuje minimum natężenia światła. Warunki występowania maksimów i minimów natężenia są dane wzorami

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(maksima — jasne prążki), (36.14)

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(minima — ciemne prążki), (36.16)

przy czym  $\theta$  jest kątem, jaki tworzy kierunek światła z osią układu, a  $d$  jest odległością między dwiema szczelinami.

**Spójność** Warunkiem dostrzegalnej interferencji dwóch fal świetlnych spotykających się w jednym punkcie jest utrzymanie między nimi stałej w czasie różnicy faz, co oznacza, że fale muszą być **spójne**. Kiedy spotykają się dwie fale spójne, ich wypadkowe natężenie można wyznaczyć metodą wskazów.

**Natężenie światła w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami** W doświadczeniu interferencyjnym Younga interferencja dwóch fal o jednakowym natężeniu  $I_0$  prowadzi do fali wypadkowej (obserwowanej na ekranie) o natężeniu  $I$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad \text{gdzie} \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (36.21, 36.22)$$

Równania (36.14) i (36.16) opisujące położenie maksimów i minimów w obrazie prążków interferencyjnych są przypadkami szczególnymi tych równań.

**Interferencja w cienkich warstwach** Kiedy światło pada na cienką przezroczystą warstwę, fale świetlne odbite od przedniej i od tylnej powierzchni warstwy interferują ze sobą. Przy prawie prostopadłym padaniu maksima i minima interferencyjne dla światła odbitego *od warstwy znajdującej się w powietrzu*, określone są przez następujące warunki nałożone na długość fali świetlnej:

$$2L = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(maksima — jasna warstwa w powietrzu), (36.34)

$$2L = m \frac{\lambda}{n_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(minima — ciemna warstwa w powietrzu), (36.35)

przy czym  $n_2$  jest współczynnikiem załamania warstwy,  $L$  — jej grubością, a  $\lambda$  — długością fali światła w powietrzu.

Jeżeli światło pada na powierzchnię rozgraniczającą dwa ośrodki (o różnych współczynnikach załamania światła) od strony ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła, to odbicie wywołuje zmianę fazy (w świetle odbitym) o  $\pi$  rad, co odpowiada

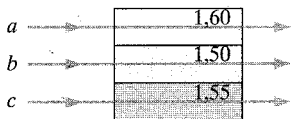
połowie długości fali. W przeciwnym razie odbicie nie powoduje żadnej zmiany fazy. Załamaniu na powierzchni granicznej nie towarzyszy przesunięcie fazy.

**Interferometr Michelsona** W interferometrze Michelsona światło jest dzielone na dwie wiązki, które po przebyciu dróg o róż-

nej długości interferują ze sobą, wytwarzając obraz interferencyjny. Zmiana długości drogi przebywanej przez jedną z wiązek światła powoduje przesuwanie się prążków interferencyjnych, a ich zliczenie umożliwia z kolei wyznaczanie z dużą dokładnością odległości (długości) w jednostkach długości fali światła.

## Pytania

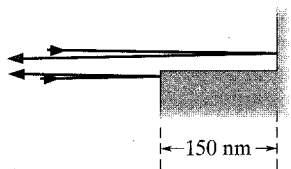
1. Na rysunku 36.18 trzy impulsy świetlne  $a$ ,  $b$  i  $c$  o takiej samej długości fali przechodzą przez warstwy z plastiku o podanych współczynnikach załamania światła. Uszereguj te impulsy w kolejności malejącego czasu ich przechodzenia przez warstwy.



Rys. 36.18. Pytanie 1

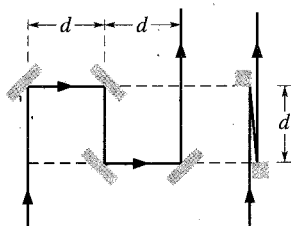
2. Światło przebywa w cienkiej warstwie (nanostrukturze) drogę o długości 1500 nm. Czy gdy na jednym brzegu warstwy wypada maksimum fali, wtedy na jej drugim brzegu będzie występowało maksimum, czy minimum fali, jeżeli wiadomo, że długość fali wynosi: a) 500 nm, b) 1000 nm?

3. Na rysunku 36.19 pokazano dwa promienie świetlne o długości fali 600 nm, które odbijają się od powierzchni szklanych odległych o 150 nm. Promienie mają początkowo zgodne fazy.



Rys. 36.19. Pytanie 3

4. Na rysunku 36.20 pokazano dwa promienie świetlne, które początkowo mają ściśle zgodne fazy i które odbijają się od kilku powierzchni szklanych. Pomiń w rozważaniach nieznaczny skos w drodze promienia po prawej stronie. a) Ile wynosi różnica dróg przebytych przez obydwa promienie? b) Jaka musiałaby być ta różnica dróg (podana w jednostkach długości fali  $\lambda$ ), aby po wszystkich odbiciach promienie miały ściśle przeciwne fazy? c) Ile wynosi najmniejsza wartość  $d$ , przy której możliwa byłaby taka końcowa różnica fazy?



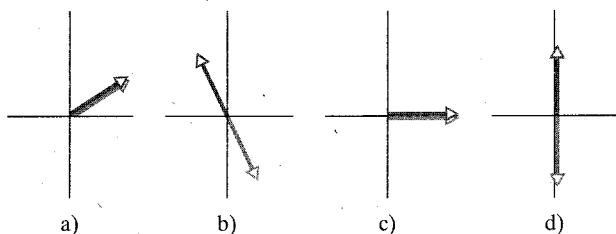
Rys. 36.20. Pytanie 4

5. Czy dla dwóch promieni interferujących ze sobą w punkcie  $P$  na rysunku 36.8 występuje maksimum, czy minimum interferencyjne, czy też stan pośredni bliższy maksimum lub bliższy minimum, wtedy gdy różnica dróg obydwu promieni wynosi: a)  $2,2\lambda$ , b)  $3,5\lambda$ , c)  $1,8\lambda$  i d)  $1\lambda$ ? Dla każdego z tych przypadków podaj wartość  $m$  związaną z odpowiednim maksimum lub minimum interferencyjnym.

6. Jeżeli w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin przejdziemy od jednego jasnego prążka do kolejnego, leżącego bardziej na zewnątrz jasnego prążka, to: a) czy różnica dróg  $\Delta L$  interferujących promieni wzrasta, czy też maleje? b) Jak duża jest ta zmiana w jednostkach  $\lambda$ ?

7. Czy odstęp między prążkami w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin wzrasta, maleje, czy nie zmienia się, wtedy gdy a) odległość między szczelinami zostaje zwiększona, b) barwa światła ulega zmianie z czerwonej na niebieską i c) cała aparatura zostaje zanurzona w białym winie? d) Jeżeli szczeliny są oświetlane białym światłem, to czy w każdym bocznym maksimum obrazu interferencyjnego, bliżej centralnego maksimum występuje składowa czerwona, czy niebieska?

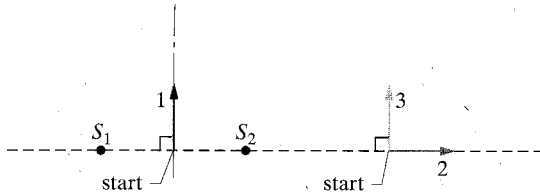
8. Na każdym z czterech rysunków 36.21 pokazano wskaźy, wyobrażające dwie fale świetlne w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami. Ponadto każdy z rysunków odpowiada różnym punktom obserwacji na ekranie i różnym chwilom. Wszystkie wskaźy mają taką samą długość. Uszereguj te cztery punkty obserwacji w kolejności malejącego natężenia światła.



Rys. 36.21. Pytanie 8

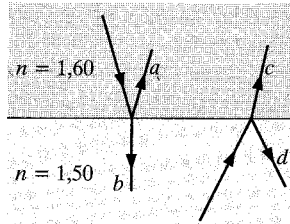
9. Dwa źródła,  $S_1$  i  $S_2$  na rysunku 36.22 emitują we wszystkich kierunkach fale radiowe o długości fali  $\lambda$ . Źródła są zgodne w fazie i oddległe od siebie o  $1,5\lambda$ . Linia pionowa jest symetryczną odcinką między źródłami. a) Czy przesuwając się z oznaczonego

punktu startowego wzdłuż drogi 1 napotkamy na całej drodze maksimum, czy minimum interferencyjne, a może na przemian maksima i minima? Udziel również odpowiedzi dla przypadku b) drogi 2 i c) drogi 3.



Rys. 36.22. Pytanie 9

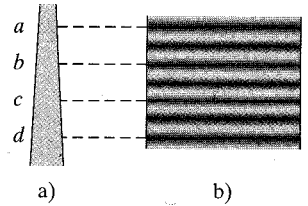
10. Na rysunku 36.23 dwa promienie świetlne napotykają powierzchnię rozgraniczającą dwa różne ośrodki, na której ulegają odbiciu i załamaniu. Które z fal odbitych i załamanych doznają zmiany fazy na powierzchni rozgraniczającej?



Rys. 36.23. Pytanie 10

11. Na rysunku 36.24a zilustrowano przekrój poprzeczny cienkiej warstwy pionowej, której grubość wzrasta z góry na dół (gravitacja

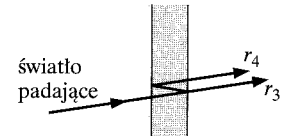
powoduje spływanie cieczy). Na rysunku 36.24b przedstawiono powierzchnię warstwy z przodu, na której widoczne są cztery jasne prążki interferencyjne powstające przy prostym świetle czerwonym. Punkty w przekroju poprzecznym odpowiadające jasnym prążkom zostały oznaczone na rysunku. Ile wynosi różnica grubości, wyrażona w jednostkach długości fali światła wewnątrz warstwy a) między punktami a i b oraz b) między punktami b i d?



Rys. 36.24. Pytanie 11

12. Na rysunku 36.25 zilustrowano przechodzenie wiązki światła padającej prostopadle (na rysunku dla wyrazistości nieco pochylonej) na cienką warstwę otoczoną z obu stron przez powietrze.

a) Czy promień  $r_3$  doznał zmiany fazy w wyniku odbicia? b) Ile długościom fali odpowiada zmiana fazy promienia  $r_4$  w wyniku odbicia? c) Ile wynosi różnica dróg promieni  $r_3$  i  $r_4$  wtedy, gdy warstwa ma grubość  $L$ ?



Rys. 36.25. Pytanie 12

## Zadania

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podrecznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

### 36.2 Światło jako fala

1. Żółte światło emitowane przez atomy sodu ma w powietrzu długość fali 589 nm. a) Ile wynosi jego częstość? b) Ile wynosi długość fali tego światła w szkle o współczynniku załamania światła 1,52? c) Korzystając z wyników z punktów (a) i (b), podaj prędkość rozchodzenia się tego światła w szkle.

2. O ile szybciej (w m/s) rozchodzi się światło w szafirze niż w diamencie? Patrz tabela 34.1.

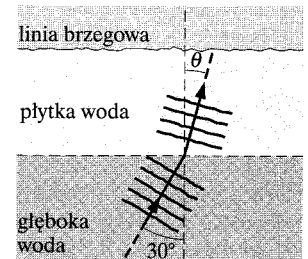
3. Ustalono na podstawie pomiaru, że w pewnej cieczy żółte światło (z lampy sodowej) rozchodzi się z prędkością  $1,92 \cdot 10^8$  m/s. Ile wynosi współczynnik załamania światła tej cieczy?

4. Z jaką prędkością rozchodzi się w topionym kwarcu światło o długości fali 550 nm (patrz rys. 34.19)?

5. Fale oceaniczne, przemieszczające się z prędkością 4 m/s, biegną w kierunku plaży pod kątem  $30^\circ$  do normalnej do linii brzegu,

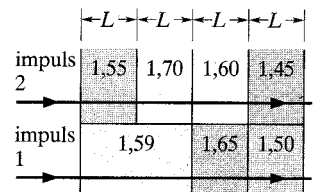
tak jak to pokazano na rysunku 36.26. Przypuśćmy, że w pewnej odległości od plaży głębokość oceanu zmienia się skokowo i w tym miejscu prędkość fal maleje do wartości 3 m/s. Jaki jest

kąt między kierunkiem ruchu fali a normalną do linii brzegowej w pobliżu plaży? (Przyjmij, że prawo załamania fal oceanicznych jest takie samo, jak prawo załamania światła). Wyjaśnij, dlaczego większość fal dociera do brzegu z kierunku normalnej do linii brzegowej, chociaż dalej od brzegu zmiernają one z wielu różnych kierunków?



Rys. 36.26. Zadanie 5

6. Na rysunku 36.27 dwa impulsy świetlne przechodzą przez warstwy plastiku o różnych współczynnikach załamania światła i grubości albo  $L$ , albo  $2L$  (patrz rysunek). a) Który z impulsów przechodzi szybciej



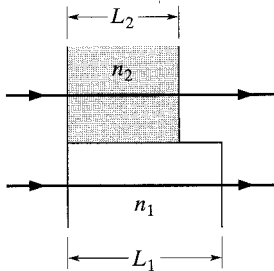
Rys. 36.27. Zadanie 6

przez całą warstwę? b) Podaj w jednostkach  $L/c$  różnicę czasów przejścia impulsów przez warstwy.

7. Przyjmij, że dwie fale na rysunku 36.3 mają długość 400 nm i że ich fazy są początkowo zgodne. Jedna z nich przechodzi przez warstwę ze szkła o współczynniku załamania światła  $n_1 = 1,6$  i grubości  $L$ , a druga przez warstwę plastiku o takiej samej grubości i współczynniku załamania światła  $n_2 = 1,5$ . a) Jaka jest najmniejsza wartość  $L$ , przy której różnica faz między obiema falami, po ich przejściu przez warstwy, będzie równa  $5,65$  rad? b) Jak interferują ze sobą te fale, jeżeli następnie docierają one do wspólnego punktu?

8. Przyjmij, że dwie fale na rysunku 36.3 mają w powietrzu długość 500 nm. Ilu długościom fali odpowiada różnica faz tych fal po przejściu przez ośrodki 1 i 2, jeżeli: a)  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1,6$ , a  $L = 8,5 \mu\text{m}$ ; b)  $n_1 = 1,62$ ,  $n_2 = 1,72$ , a  $L = 8,5 \mu\text{m}$ , c)  $n_1 = 1,59$ ,  $n_2 = 1,79$ , a  $L = 3,25 \mu\text{m}$ ? d) Przypuśćmy, że w każdym z tych trzech przypadków obie fale po przejściu przez oba ośrodki docierają do tego samego punktu. Uszereguj te trzy przypadki w kolejności malejącej jasności prążka interferencyjnego powstającego w punkcie spotkania obu fal.

9. Dwie fale świetlne, o długości 600 nm, biegnące przez powietrze mają zgodne fazy. Fale te przechodzą następnie przez warstwy plastiku o grubościach  $L_1 = 4 \mu\text{m}$  i  $L_2 = 3,5 \mu\text{m}$  i współczynnikach załamania światła  $n_1 = 1,4$  i  $n_2 = 1,6$  (rys. 36.28). a) Ilu długościom fali odpowiada różnica faz tych fal po przejściu przez warstwy? b) Jak interferują ze sobą te fale po dotarciu następnie do wspólnego punktu?



Rys. 36.28. Zadanie 9

10. Przyjmij, że dwie fale na rysunku 36.3 mają w powietrzu długość 620 nm i różnią się w fazie o  $\pi$  radianów. Współczynniki załamania światła ośrodków są równe odpowiednio  $n_1 = 1,45$  i  $n_2 = 1,65$ . a) Ile wynosi najmniejsza wartość  $L$ , przy której obie fale, po ich przejściu przez warstwy, będą miały dokładnie zgodną fazę? b) Przy jakiej, kolejnej grubości  $L$  sytuacja się powtórzy?

### 36.4 Doświadczenie interferencyjne Younga

11. Monochromatyczne światło zielone o długości fali 550 nm oświetla dwie wąskie, równoległe szczeliny odległe od siebie o  $7,7 \mu\text{m}$ . Oblicz kątowne odchylenie (ką  $\theta$  na rys. 36.8) jasnego prążka trzeciego rzędu ( $m = 3$ ): a) w radianach i b) w stopniach.

12. Ile wynosi różnica faz fal wychodzących z dwóch szczelin i docierających do wspólnego punktu, w którym powstaje  $m$ -ty ciemny prążek w doświadczeniu interferencyjnym Younga z dwiema szczelinami?

13. Przypuśćmy, że doświadczenie Younga jest wykonywane z użyciem zielonego światła o długości fali 550 nm. Odległość między szczelinami jest równa 1,2 mm, a ekran, na którym powstaje obraz interferencyjny, jest odległy od szczelin o 5,4 m. Oblicz odległość między jasnymi prążkami.

14. W układzie doświadczalnym dwie szczeliny są odległe od siebie o 100 długości fali światła, które przechodzi przez szczeliny. a) Ile wynosi kąt (w radianach) między maksimum centralnym i sąsiednim maksimum? b) Oblicz odległość między tymi maksimumami na ekranie odległym od szczelin o 50 cm.

15. W doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami wykonanym dla żółtego światła sodu o długości fali  $\lambda = 589$  nm powstają prążki, których odległość kątowna wynosi  $3,5 \cdot 10^{-3}$  rad. Jaką długość fali musi mieć światło, aby w tym samym układzie doświadczalnym odległość kątowna między prążkami była o 10% większa?

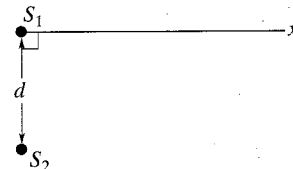
16. W doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami powstające dla światła sodowego ( $\lambda = 589$  nm) prążki interferencyjne są odległe od siebie o  $0,2^\circ$ . Oblicz ich odległość kątowną od siebie wtedy, gdy cały układ doświadczalny zanurzymy w wodzie ( $n = 1,33$ ).

17. Dwa punktowe źródła fal o częstotliwości radiowej, odległe od siebie o 2 m, emitują w zgodnej fazie promieniowanie o długości fali  $\lambda = 0,5$  m. W płaszczyźnie zawierającej oba źródła, po torze kołowym obiega je detektor. Oblicz w pamięci, ile maksimumów wykrywa ten detektor.

18. Źródła A i B emitują długie fale radiowe o długości 400 m, przy czym fala wysyłana ze źródła A wyprzedza w fazie falę wysyłaną ze źródła B o  $90^\circ$ . Odległość  $r_A$  źródła A od detektora jest większa o 100 m od odpowiedniej odległości  $r_B$ . Ile wynosi różnica faz tych fal w detektorze?

19. W doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami odległość między szczelinami wynosi 5 mm, a odległość szczelin od ekranu 1 m. Na ekranie obserwuje się dwa obrazy interferencyjne: jeden dla światła o długości fali 480 nm, a drugi dla światła o długości fali 600 nm. Ile wynosi na ekranie odległość między jasnymi prążkami trzeciego rzędu ( $m = 3$ ) obu obrazów interferencyjnych?

20. Na rysunku 36.29 dwa źródła  $S_1$  i  $S_2$ , emitujące promieniowanie o takiej samej długości fali  $\lambda$  i w zgodnej fazie, są odległe od siebie o  $d = 3\lambda$ . Wyznacz największą odległość od źródła  $S_1$ , wzdłuż osi  $x$ , w jakiej interferencja jest w pełni destruktywna. Podaj tę odległość jako wielokrotność długości fali.



Rys. 36.29. Zadania 20, 27 i 59

21. Po przesłonięciu jednej ze szczelin, w układzie z dwiema szczelinami, cienkim płatkem miki ( $n = 1,58$ ) na miejsce centralnego maksimum obrazu przesunął się uprzednio obserwowany (bez płatka miki) siódmy jasny prążek interferencyjny ( $m = 7$ ). Ile wynosi grubość płatka miki, jeśli doświadczenie wykonywane jest z użyciem światła o długości fali  $\lambda = 550$  nm? (Wskazówka: Rozważ długość fali światła w płatku miki).

22. Podczas demonstracji doświadczenia interferencyjnego w sali wykładowej światło laserowe o długości fali równej 632,8 nm przechodzi przez układ dwóch szczelin, przebiega przez całą długość sali (20 m), po czym odbija się od ustawionego tam zwierciadła i po przebiegnięciu raz jeszcze drogi przez całą długość sali wykładowej pada na ekran obserwacyjny. Na ekranie powstaje obraz, w którym dwa sąsiednie jasne prążki są odległe od siebie o 10 cm. a) Oblicz odległość między szczelinami. b) Jak zmieni się obraz wtedy, gdy wykładowca przesłoni jedną ze szczelin cienkim celofanem (zwiększając w ten sposób o 2,5 liczbę długości fali na tym odcinku drogi)?

### 36.6 Natężenie światła w obrazie interferencyjnym

23. Amplitudy dwóch fal o takiej samej częstotliwości są równe odpowiednio 1 i 2. Fale interferują ze sobą w punkcie, w którym różnica ich faz wynosi  $60^\circ$ . Ile wynosi amplituda fali wypadkowej?

24. Wyznacz sumę następujących wielkości:

$$y_1 = 10 \sin \omega t \quad i \quad y_2 = 8 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

25. Korzystając z metody wskazów, dodaj wielkości:

$$\begin{aligned} y_1 &= 10 \sin \omega t, \\ y_2 &= 15 \sin(\omega t + 30^\circ), \\ y_3 &= 5 \sin(\omega t - 45^\circ). \end{aligned}$$

26. Światło o długości fali 600 nm pada prostopadłe na dwie równoległe, wąskie szczeliny odległe od siebie o 0,6 mm. Naskikuj obraz natężeń światła obserwowany na odległym ekranie, jako funkcję odległości kątowej (kąta  $\theta$ ) od środka obrazu, w zakresie kątów  $0 \leq \theta \leq 0,004$  rad.

27.  $S_1$  i  $S_2$  na rysunku 36.29 są punktowymi źródłami fal elektromagnetycznych o długości fali 1 m. Emitują one zgodnie w fazie, z taką samą mocą, a odległość między nimi wynosi  $d = 4$  m. a) Wzdłuż osi  $x$ , w prawo od  $S_1$  porusza się detektor. W jakich odległościach od źródła  $S_1$  wykrywa on trzy pierwsze maksima interferencyjne? b) Czy natężenie fali w najbliższym minimum jest dokładnie równe zeru? (Wskazówka: Czy natężenie fali emitowanej z punktowego źródła pozostaje stałe wraz ze wzrostem odległości od źródła?).

28. Dwie poziome strzałki na rysunku 36.9 wskazują punkty, w których natężenie centralnego prążka jest równe połowie maksymalnego natężenia. Pokaż, że odległość kątowa między odpowiednimi punktami na ekranie obserwacyjnym jest równa

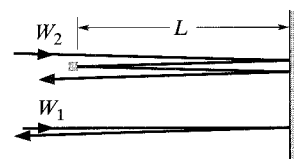
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}$$

wtedy, gdy kąt  $\theta$  na rysunku 36.8 jest na tyle mały, że  $\sin \theta \approx \theta$ .

29\*. Przypuśćmy, że w układzie doświadczalnym z dwiema szczelinami jedna ze szczelin jest szersza od drugiej na tyle, że natężenie światła wychodzącego z tej szczeliny i docierającego do centralnej części ekranu obserwacyjnego jest dwa razy większe niż natężenie światła wychodzącego z drugiej szczeliny i docierającego do tego samego punktu. Wyprowadź równanie będące odpowiednikiem równań (36.21) i (36.22), opisujące zależność natężenia światła  $I$  na ekranie od kąta  $\theta$ .

### 36.7 Interferencja w cienkich warstwach

30. Na rysunku 36.30 fala świetlna  $W_1$  ulega jednokrotnemu odbiciu od powierzchni zwierciadła, natomiast fala  $W_2$  odbija się od tej powierzchni dwukrotnie i jeden raz od powierzchni kostki odblaskowej odległej o  $L$  od zwierciadła. Fale mają długość 620 nm, a ich początkowe fazy są zgodne. Pomijamy nieznaczne nachylenie promieni w stosunku do powierzchni odbijających. a) Ile wynosi najmniejsza wartość  $L$ , przy której fale odbite mają dokładnie przeciwne fazy? b) O ile trzeba przesunąć kostkę, aby fale odbite ponownie miały dokładnie przeciwne fazy?



Rys. 36.30. Zadania 30 i 32

31. Jasne światło o długości fali 585 nm oświetla prostopadłe zawieszoną w powietrzu błonkę mydlaną ( $n = 1,33$ ) o grubości  $1,21 \mu\text{m}$ . Czy po odbiciu światła przez obie powierzchnie błonki jego interferencja jest bliższa interferencji w pełni konstruktywnej (jasna błonka), czy też destruktywnej (ciemna błonka)?

32. Przyjmijmy, że dwie fale świetlne z zadania 30 mają początkowo dokładnie przeciwne fazy. Znajdź wyrażenie na wartości  $L$  (w jednostkach długości fali), dla których fale odbite mają ściśle zgodne fazy.

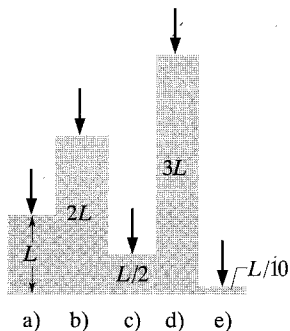
33. Światło o długości fali 624 nm pada prostopadłe na zawieszoną w powietrzu błonkę mydlaną ( $n = 1,33$ ). Ile wynoszą dwie najmniejsze grubości błonki, dla których odbicia od jej powierzchni prowadzą do konstruktywnej interferencji światła?

34. Soczewka obiektywu aparatu fotograficznego o współczynniku załamania światła większym od 1,3 jest pokryta cienką warstwą przeciwoodblaskową o współczynniku załamania światła 1,25 (co eliminuje w wyniku interferencji odbicie światła o długości fali  $\lambda$  padającego prostopadłe na obiektyw). Jaka musi być najmniejsza grubość warstwy przeciwoodblaskowej (w jednostkach  $\lambda$ )?

35. Błyszczące dzęty ozdabiające stroje to bryłki szkła o współczynniku załamania światła 1,5. Często w celu zwiększenia efektu połysku pokrywa się je warstwą tlenku krzemu o współczynniku

załamania światła równym 2. Jaka musi być najmniejsza grubość takiej warstwy, zapewniająca w pełni konstruktywną interferencję światła o długości fali 560 nm padającego prostopadłe na szkiełka i odbijanego od obu powierzchni warstwy pokrywającej?

36. Na rysunku 36.31 światło o długości fali równej 600 nm pada prostopadłe na pięć sektorów struktury wykonanej z przezroczystego materiału i zawieszzonej w powietrzu. Współczynnik załamania światła dla materiału, z jakiego wykonana jest struktura, jest równy 1,5. Na rysunku grubości poszczególnych sektorów podane są w jednostkach  $L = 4 \mu\text{m}$ . W których sektorach interferencja światła odbitego od ich górnej i dolnej powierzchni będzie w pełni konstruktywna?



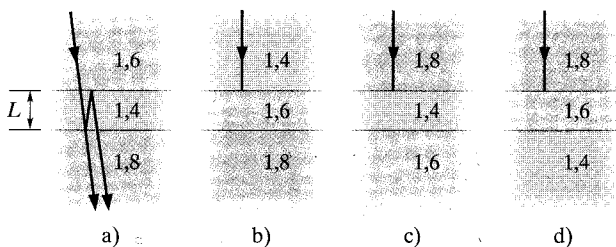
Rys. 36.31. Zadanie 36

37. Chcemy pokryć płaską płytkę szklaną ( $n = 1,5$ ) przezroczystym materiałem ( $n = 1,25$ ) po to, by w wyniku interferencji wyeliminować odbicia światła o długości fali 600 nm. Jaka musi być najmniejsza grubość warstwy pokrywającej, zapewniająca osiągnięcie tego celu?

38. Na rysunku 36.32 światło pada prostopadłe na cztery cienkie warstwy o grubości  $L$ . Podane są współczynniki załamania światła dla materiałów warstw i ośrodków otaczających je z obu stron. Niech  $\lambda$  oznacza długość fali światła w powietrzu, a  $n_2$  — współczynnik załamania światła rozważanej warstwy. Weź pod uwagę tylko przechodzące przez warstwę promienie świetlne, które nie doznały odbicia lub doznały dwukrotnego odbicia, tak jak na rysunku 36.32a. W której z ilustrowanych sytuacji wyrażenie

$$\lambda = \frac{2Ln_2}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

opisuje długość fali światła, którego interferencja po przejściu przez warstwę będzie w pełni konstruktywna?



Rys. 36.32. Zadania 38 i 39

39. Z uszkodzonego tankowca do Zatoki Perskiej wycieka ropa naftowa ( $n = 1,2$ ), tworząc na powierzchni wody ( $n = 1,3$ ) wielką plamę. a) Dla jakich długości fali światła widzialnego zaobserwuj

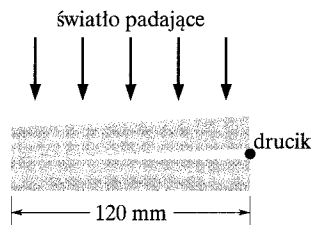
jesz najjaśniejsze odbicia (wynikające z konstruktywnej interferencji), patrząc z samolotu prosto w dół na tę plamę ropy, jeżeli jej grubość wynosi 460 nm, a Słońce znajduje się wprost nad tobą? b) Dla jakich długości fali światła widzialnego przechodzącego przez warstwę ropy będziesz obserwował największe natężenie, jeżeli dla odmiany zanurkujesz w wodzie pod wyciekami? (Wskażówka: Skorzystaj z rys. 36.32a, używając odpowiednich wartości współczynników załamania światła).

40. Płaska fala monochromatycznego światła pada prostopadłe na jednorodną cienką warstwę oleju pokrywającą płytkę szklaną. Długość fali padającego światła można zmieniać w sposób ciągły. Dla światła odbitego obserwuje się w pełni destruktywną interferencję jedynie przy długościach fali 500 nm i 700 nm. Ile wynosi grubość warstwy, jeżeli wiadomo, że współczynnik załamania światła dla oleju wynosi 1,3, a dla szkła 1,5?

41. Płaska fala monochromatycznego światła pada prostopadłe na cienką warstwę oleju pokrywającą płytkę szklaną. Długość fali padającego światła można zmieniać w sposób ciągły. Dla światła odbitego obserwuje się w pełni destruktywną interferencję jedynie przy długościach fali 500 nm i 700 nm. Współczynnik załamania światła dla szkła wynosi 1,5. Pokaż, że współczynnik załamania światła dla oleju musi być mniejszy niż 1,5.

42. W wyniku odbicia światła o długości fali 600 nm od cienkiej błonki mydlanej znajdującej się w powietrzu powstaje maksimum interferencyjne, a dla światła o długości fali 450 nm — minimum interferencyjne. Ile wynosi grubość tej błonki (zakładając, że jest ona równomiernej grubości), jeżeli jej współczynnik załamania światła  $n = 1,33$ ?

43. Na rysunku 36.33 szeroka wiązka światła o długości fali 683 nm pada z góry na wierzchnią płytkę układu tworzonego przez dwie płytki. Płytki, które mają długość 120 mm, stykają się lewymi krawędziami, a między ich prawymi krawędziami znajduje się drucik o średnicy 0,048 mm. Powietrze między płytkami zachowuje się jak cienka warstwa. Ile jasnych prążków dostrzeże obserwator, który patrzy na ten układ z góry od strony wierzchniej płytki?



Rys. 36.33. Zadania 43 i 44

44. Na rysunku 36.33 światło białe pada z góry na układ płytek szklanych. Płytki stykają się lewymi krawędziami, a między ich prawymi krawędziami znajduje się drucik o średnicy 0,048 mm; powietrze między płytkami zachowuje się jak cienka warstwa. Obserwator patrzący z góry na układ widzi jasne i ciemne prążki powstające w wyniku interferencji w tej warstwie. a) Czy po lewej stronie, widzi on jasny, czy ciemny prążek? b) Na prawo od tego końca w różnych położeniach dochodzi do destruktywnej interferencji światła o różnych długościach fali. Czy pierwszy ciemny prążek dla światła czerwonego powstaje bliżej, czy dalej od lewej krawędzi układu niż pierwszy niebieski prążek?



45. Szeroka wiązka światła o długości fali 630 nm pada pod kątem  $90^\circ$  na cienki klin z materiału o współczynniku załamania światła 1,5. Obserwator oglądający ten klin w świetle przechodzącym widzi 10 jasnych i 9 ciemnych prążków wzdłuż długości klina. O ile zmienia się grubość klina na całej jego długości?

46. Cienka warstewka acetonu ( $n = 1,25$ ) pokrywa grubą płytkę szklaną ( $n = 1,5$ ). Na warstwę pada prostopadle światło białe. W wyniku interferencji światła odbitego powstaje ciemne minimum przy 600 nm i jasne maksimum przy 700 nm. Oblicz grubość warstewki acetonu.

47. Dwie płytki szklane ustawiono tak, że między nimi powstał klin powietrzny. Szeroka wiązka światła o długości fali 480 nm pada prostopadle na pierwszą płytkę. Obserwator oglądający układ w świetle odbitym widzi obraz interferencyjny powstały w klinie powietrza. O ile grubszy jest klin w miejscu, w którym występuje szesnasty jasny prążek, w porównaniu z miejscem, w którym występuje szósty jasny prążek (licząc od miejsca styku płytek)?

48. Szeroka wiązka światła monochromatycznego pada prostopadle na dwie płytki szklane ustawione tak, że między nimi istnieje klin powietrzny. Obserwator oglądający układ w świetle odbitym od tego klina, działającego jak cienka warstwa, widzi wzdłuż długości klina 4001 ciemnych prążków. Po odpompowaniu powietrza spomiędzy płytek widzi on tylko 4000 ciemnych prążków. Opierając się na tych danych, oblicz współczynnik załamania światła dla powietrza.

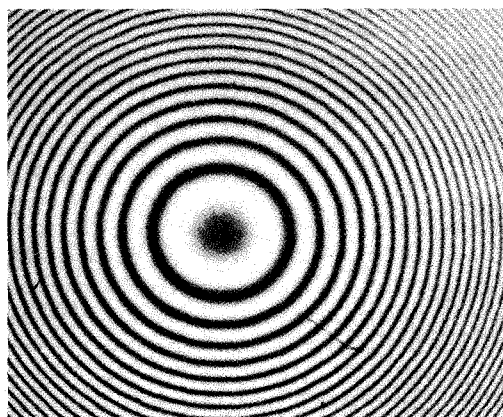
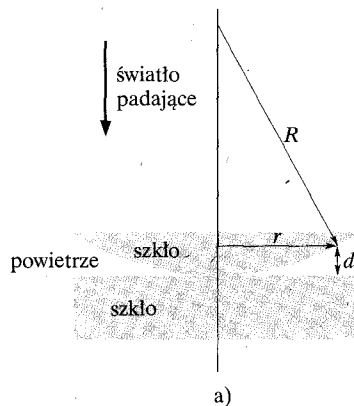
49. Na rysunku 36.34a pokazano soczewkę szklaną o promieniu krzywizny  $R$  umieszczoną na płaskiej płytce szklanej i oświetloną od góry światłem o długości fali  $\lambda$ . Na rysunku 36.34b (fotografia wykonana z góry) pokazano kołowe prążki interferencyjne (nazywane *pierścieniami Newtona*), które powstają na skutek zmieniania się grubości  $d$  warstwy powietrza między soczewką i płytką. Wyznacz promień  $r$  maksimum interferencyjnych, zakładając, że  $r/R \ll 1$ .

50. W doświadczeniu z pierścieniami Newtona (patrz zadanie 49) promień krzywizny  $R$  soczewki jest równy 5 m, a średnica soczewki wynosi 20 mm. a) Ile jasnych pierścieni powstaje w tym doświadczeniu? Przyjmij, że  $\lambda = 589$  nm. b) Ile jasnych pierścieni powstanie wtedy, gdy cały układ zostanie zanurzony w wodzie ( $n = 1,33$ )?

51. Układ do obserwacji pierścieni Newtona ma być zastosowany do wyznaczenia promienia krzywizny soczewki (por. rys. 36.34 i zadanie 49). Wykonane dla światła o długości fali 546 nm pomiary promieni jasnych pierścieni dają dla  $n$ -tego i  $(n + 20)$ -ego pierścienia wartości odpowiednio 0,162 cm i 0,368 cm. Oblicz promień krzywizny wypukłej powierzchni soczewki.

52. a) Skorzystaj z wyniku zadania 49 i pokaż, że w doświadczeniu z pierścieniami Newtona różnica promieni dwóch sąsiednich jasnych pierścieni (maksymów) jest dana wzorem

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \approx \frac{1}{2} \sqrt{\lambda R / m},$$



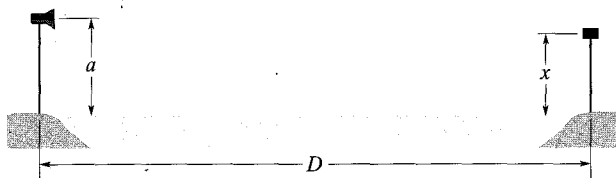
Rys. 36.34. Zadania 49–52

przy założeniu, że  $m \gg 1$ . b) Pokaż również, że pole powierzchni między dwoma sąsiednimi jasnymi pierścieniami jest dane przez

$$S = \pi \lambda R,$$

przy założeniu, że  $m \gg 1$ . Zauważ, że to pole powierzchni nie zależy od  $m$ .

53. Na rysunku 36.35 nadajnik mikrofalowy znajdujący się na wysokości  $a$  nad lustrem wody szerokiego jeziora wysyła mikrofałę o długości fali  $\lambda$  w kierunku odbiornika, który jest umieszczony na wysokości  $x$  nad lustrem wody na przeciwnym brzegu jeziora. Mikrofałe odbijające się od powierzchni wody interferują



Rys. 36.35. Zadanie 53

z mikrofalami docierającymi bezpośrednio z nadajnika. Przy jakiej wysokości  $x$  sygnał w odbiorniku jest maksymalny, jeśli wiadomo, że szerokość jeziora  $D$  jest dużo większa od wysokości  $a$  i  $x$  oraz że  $\lambda \geq a$ . (Wskazówka: Czy odbicia powodują zmianę fazy fali?).

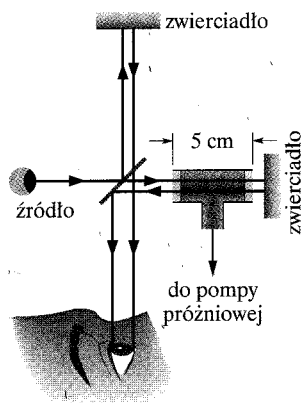
### 36.8 Interferometr Michelsona

54. W jednym z ramion interferometru Michelsona, prostopadle do kierunku osi optycznej, umieszczono cienką warstwę materiału o współczynniku załamania światła  $n = 1,4$ . Spowodowało to przesunięcie obrazu interferencyjnego o 7 prążków dla światła o długości fali 589 nm. Jaką grubość miała ta warstwa?

55. Przesunięcie zwierciadła  $Z_2$  w interferometrze Michelsona (rys. 36.17) o 0,233 mm powoduje przesunięcie obrazu interferencyjnego o 792 prążków. Jaka jest długość fali światła wytwarzającego obraz interferencyjny?

56. Atomy sodu wysyłają światło o dwóch długościach fali,  $\lambda_1 = 589,1$  nm oraz  $\lambda_2 = 589,59$  nm. Światło z lampy sodowej używane jest w interferometrze Michelsona (rys. 36.17). Na jaką odległość trzeba przesunąć zwierciadło  $Z_2$ , ażeby przesunięcie w obrazie prążków interferencyjnych dla jednej z tych dwóch charakterystycznych długości fali było o jeden prążek większe niż w obrazie dla drugiej?

57. Na rysunku 36.36 w jednym z ramion interferometru Michelsona umieszczono próżniuszczelną komórkę o długości 5 cm, wyposażoną w szklane okienka. Po odpompowaniu powietrza z komórki obraz interferencyjny wytwarzany przez światło o długości fali  $\lambda = 500$  nm przesuwa się o 60 prążków. Na podstawie tych danych, oblicz współczynnik załamania światła dla powietrza pod ciśnieniem atmosferycznym.



Rys. 36.36. Zadanie 57

58. Podaj wyrażenie opisujące natężenie obserwowane w interferometrze Michelsona (rys. 36.17) jako funkcję położenia ruchomego zwierciadła. Położenia zwierciadła zacznij obliczać od punktu, w którym  $d_2 = d_1$ .

### Zadania dodatkowe

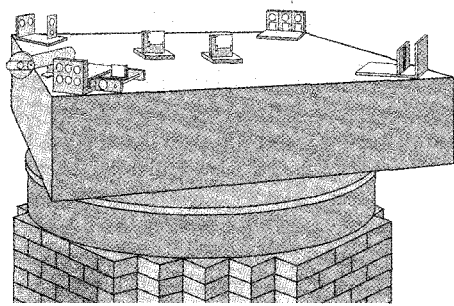
59. Na rysunku 36.29 pokazano dwa punktowe źródła  $S_1$  i  $S_2$ , które emitują światło o długości fali  $\lambda = 500$  nm. Emisja z obu źródeł jest izotropowa i zgodna w fazie, a odległość między źródłami wynosi  $d = 2 \mu\text{m}$ . Fale z obu źródeł interferują ze sobą w każdym punkcie  $P$  na osi  $x$ . Przyjmijmy, że punkt  $P$  jest bardzo daleko ( $x \approx \infty$ ). Ile wówczas wynosi a) różnica faz między falami przychodzącymi ze źródeł  $S_1$  i  $S_2$  b) jakiego typu jest ich interferencja (bliższa konstruktywnej czy destruktywnej)? c) Jeżeli punkt  $P$  będzie się zbliżać po osi  $x$  do źródła  $S_1$ , to czy różnica faz między falami z obu źródeł będzie wzrastać, czy maleć? d) Sporządź tabelę położenia  $x$ , w których różnice faz będą wynosić: 0,  $0,5\lambda$ ,  $1\lambda$ , ...,  $2,5\lambda$ , i dla każdego z tych położenia podaj odpowiedni typ interferencji — albo w pełni destruktywna (D), albo w pełni konstruktywna (K).

60. Pod koniec XIX wieku większość uczonych uważała, że światło (i każda inna fala elektromagnetyczna) musi się rozchodzić w jakimś ośrodku materialnym, a zatem nie może rozchodzić się w próżni. Jednym z powodów takiego przekonania był fakt, że każdy typ znanych wówczas fal wymagał obecności materialnego ośrodka. Na przykład dźwięk rozchodzi się w powietrzu, w wodzie, w ziemi, ale nie może rozchodzić się w próżni. Dlatego też, argumentowali uczeni, kiedy światło biegnie od Słońca do Ziemi, nie mogąc wędrować przez próżnię, musi rozchodzić się przez ośrodek, który wypełnia całą przestrzeń kosmiczną i w którym również porusza się Ziemia. Ośrodek ten nazwano *eterem* i założono, że światło rozchodzi się w nim z prędkością  $c$ .

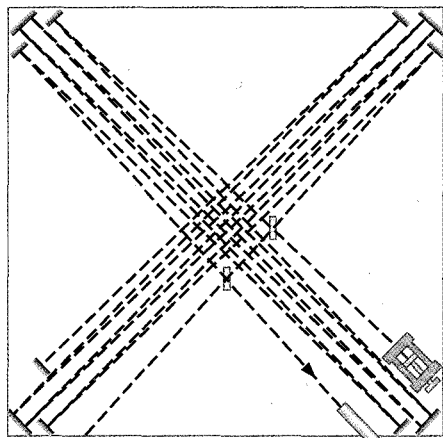
W 1887 r. Michelson i Edward Morley użyli interferometru Michelsona do sprawdzenia wpływu eteru na rozchodzenie się światła (w samym interferometrze). Należało oczekiwać, że ruch aparatury wynikający z ruchu Ziemi wokół Słońca powinien wpływać na obraz interferencyjny obserwowany w interferometrze. Badacze założyli, że Słońce jest w przybliżeniu nieruchome w stosunku do eteru i wtedy prędkość interferometru względem eteru jest taka, jak prędkość  $v$  ruchu Ziemi wokół Słońca.

Na rysunku 36.37a pokazano układ zwierciadeł w eksperymencie z 1887 r. Zwierciadła zostały zamontowane na ciężkiej płycie zanurzonej w pojemniku z rtęcią, tak że płytę można było obracać płynnie wokół osi pionowej. Michelson i Morley chcieli porównać obrazy interferencyjne przy różnej orientacji ramion interferometru (zmienianej przez jego obrót) w stosunku do ruchu eteru. Ewentualne przesunięcie w obrazie prążków interferencyjnych związane z obrotem interferometru byłoby wyraźnym dowodem istnienia eteru.

Na rysunku 36.37b pokazano aparaturę widzianą z góry, z zaznaczonymi torami biegu światła. Żeby zwiększyć możliwość obserwacji przesunięcia prążków, światło było odbijane kilkakrotnie wzdłuż ramion interferometru, a nie jak w podstawowej jego wersji tylko jeden raz w każdym ramieniu (por. rys. 36.17). Te wielokrotne odbicia zwiększały efektywną długość każdego z ramion do ok. 10 m. Pomimo większej złożoności tak zmodyfikowanego interferometru działa on dokładnie tak samo jak prosty interferometr i wobec tego w naszych rozważaniach możemy korzystać

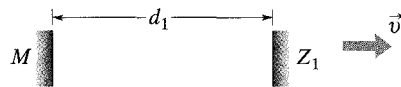


a)

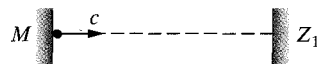


b)

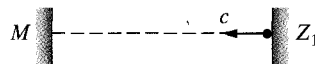
Rys. 36.37. Zadanie 60



c)



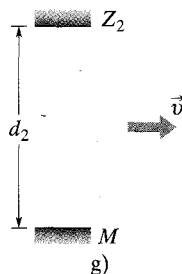
d)



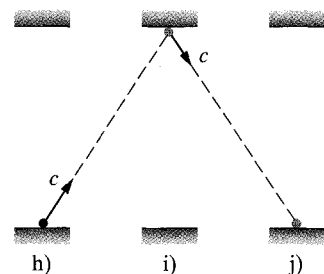
e)



f)



g)



h)

i)

j)

z rysunku 36.17, przyjmując po prostu, że długości jego ramion  $d_1$  i  $d_2$  są równe 10 m.

Założmy, że eter istnieje i że prędkość rozchodzenia się w nim światła jest równa  $c$ . Na rysunku 36.37c pokazano ramię o długości  $d_1$  widziane z boku i poruszające się wraz z interferometrem na prawo z prędkością  $\vec{v}$  w układzie odniesienia związanym z eterem. (Dla uproszczenia płytka światłodzieląca  $M$  z rysunku 36.17 została narysowana równoległe do zwierciadła  $Z_1$  na drugim końcu ramienia). Na rysunku 36.37d pokazano to ramię w momencie, gdy pewna „porcja” światła (zaznaczona jako kropka) rozpoczyna swoją wędrówkę wzdłuż ramienia. Będziemy śledzić tę porcję światła, żeby ustalić, jaka jest długość jego drogi od płytki światłodzielącej  $M$  do  $Z_1$  i z powrotem do płytki  $M$ .

W czasie gdy światło biegnie z prędkością  $c$  poprzez eter na prawo w stronę zwierciadła  $Z_1$ , zwierciadło porusza się również w prawo z prędkością  $v$ . Na rysunku 36.37e pokazano położenia  $M$  i  $Z_1$  w chwili, gdy światło osiąga zwierciadło  $Z_1$  i odbija się od niego. Teraz światło biegnie poprzez eter z prędkością  $c$  w lewą stronę, natomiast  $M$  porusza się nadal na prawo. Na rysunku 36.37f pokazano położenia  $M$  i  $Z_1$  w momencie powrotu światła do płytki  $M$ . a) Pokaż, że całkowity czas przebiegu światła na drodze od

$M$  do  $Z_1$  i z powrotem do  $M$  jest równy

$$t_1 = \frac{2cd_1}{c^2 - v^2}$$

i wobec tego długość drogi  $L_1$  przebytej przez światło wzdłuż tego ramienia interferometru jest równa

$$L_1 = ct_1 = \frac{2c^2d_1}{c^2 - v^2}$$

Na rysunku 36.37g pokazano ramię interferometru o długości  $d_2$ ; ramię to również porusza się w prawo poprzez eter z prędkością  $\vec{v}$ . (Tak jak poprzednio, dla uproszczenia, płytka światłodzieląca  $M$  z rysunku 36.17 została narysowana równoległe do zwierciadła  $Z_2$  na drugim końcu ramienia). Na rysunku 36.37h pokazano to ramię w momencie, gdy pewna porcja światła (zaznaczona jako kropka) rozpoczyna swoją wędrówkę wzdłuż ramienia. Ramię przemieszcza się w prawo, zatem tor biegu światła jest nachylony w prawo w kierunku położenia, jakie będzie miało zwierciadło  $Z_2$  w chwili, gdy dotrze do niego światło (rys. 36.37i). Odbicie światła od  $Z_2$  skieruje je po torze nachylonym w prawo w kierunku położenia, jakie będzie miała płytka  $M$  w chwili, gdy dotrze do niej światło (rys. 36.37j). b) Pokaż, że całkowity czas prze-

biegu światła na drodze od  $M$  do  $Z_2$  i z powrotem do  $M$  jest równy

$$t_2 = \frac{2d_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

i wobec tego długość drogi  $L_2$  przebytej przez światło wzdłuż tego ramienia interferometru jest równa

$$L_2 = ct_2 = \frac{2cd_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Podstaw  $d$  zamiast  $d_1$  i  $d_2$  w równaniach opisujących  $L_1$  i  $L_2$ . Rozwiń następnie obydwa wyrażenia w szereg potęgowy (korzystając ze wzoru dwumianowego podanego w dodatku E) i zachowaj tylko dwa pierwsze wyrazy w każdym rozwinięciu. c) Pokaż, że długość drogi  $L_1$  jest większa niż długość  $L_2$  i że ich różnica  $\Delta L$  jest równa

$$\Delta L = \frac{dv^2}{c^2}.$$

d) Pokaż następnie, że w teleskopie obserwacyjnym różnica faz między światłem biegnącym po drodze  $L_1$  i biegnącym po drodze  $L_2$  jest równa

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{dv^2}{\lambda c^2},$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali światła. Ta różnica faz decyduje o obrazie prążków interferencyjnych wytwarzanym przez światło docierające do teleskopu w interferometrze.

Obróć teraz cały interferometr o  $90^\circ$ , tak aby ramię o długości  $d_2$  było równoległe do kierunku ruchu przez eter, a ramię o długości  $d_1$  prostopadłe do tego kierunku. e) Pokaż, że przesunięcie w obrazie prążków wywołane przez taki obrót jest równe

$$\text{przesunięcie} = \frac{2dv^2}{\lambda c^2}.$$

f) Oceń wielkość przesunięcia, kładąc:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $d = 10$  m i  $\lambda = 500$  nm oraz korzystając z potrzebnych danych o ruchu Ziemi podanych w dodatku C.

To oczekiwane przesunięcie prążków powinno być łatwe do zaobserwowania. Ale Michelson i Morley nie zaobserwowali żadnego przesunięcia prążków, co ogromnie nadwątlilo przekonanie o istnieniu eteru. I wkrótce idea eteru znikła całkowicie. A ponadto negatywny wynik doświadczenia Michelsona–Morleya przyczynił się do powstania szczególnej teorii względności Einsteina.

# 37 Dyfrakcja

Georges Seurat namalował *Popołudnie na wyspie La Grande Jatte* całkiem odmienną, niż wówczas stosowaną, techniką — zamiast zwykłych pociągnięć pędzla nałożył na płótno miliardy małych barwnych kropek — tak powstał styl nazwany pointyлизmem (puentyлизmem). Przyglądając się z bliska, możesz rozpoznać kropki, ale z większej odległości nie można ich na obrazie rozróżnić. Poza tym barwa określonego fragmentu na obrazie zależy od odległości, z jakiej fragment ten jest oglądany — to był właśnie powód, dla którego Seurat malował kropkami.

Co powoduje tę zmianę barwy?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 37.1. Dyfrakcja i falowa teoria światła

W rozdziale 36, w którym mówiliśmy już o dyfrakcji (czyli ugięciu światła), rozumieliśmy przez ten termin jedynie rozprzestrzenianie się światła, które wydostaje się z wąskiej szczeliny w cały obszar za szczeliną. Jednak zjawisko dyfrakcji to więcej niż tylko rozprzestrzenianie się światła, w wyniku dyfrakcji powstaje bowiem złożony z prążków obraz interferencyjny, zwany **obrazem dyfrakcyjnym**. Kiedy na przykład światło monochromatyczne z odległego źródła (lub z lasera) przechodzi przez wąską szczelinę i pada następnie na ekran obserwacyjny, to wytwarza ono na ekranie obraz dyfrakcyjny, taki jak ten pokazany na rysunku 37.1. Obraz ten składa się z szerokiego i intensywnego (bardzo jasnego) środkowego maksimum, a po obu jego stronach występuje pewna liczba węższych i nie tak już intensywnych maksimum bocznych. Między nimi występują minima.

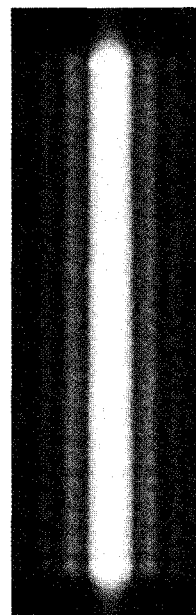
W optyce geometrycznej taki obraz byłby całkowicie nieoczekiwany: jeśli bowiem światło rozchodziłoby się po liniach prostych, jak promienie świetlne, to szczelina przepuściłaby niektóre z tych promieni i na ekranie obserwacyjnym odtworzyłyby one ostrą, jasną szczelinę. I tym razem, tak jak w rozdziale 36 musimy dojść do wniosku, że optyka geometryczna jest tylko przybliżeniem.

Dyfrakcja światła nie ogranicza się tylko do sytuacji, kiedy światło przechodzi przez wąskie szczeliny lub otwory. Dochodzi do niej również na krawędziach nieprzezroczystych przesłon, takich jak krawędzie żyłki, której obraz dyfrakcyjny pokazany jest na rysunku 37.2. Zwróć uwagę, że linie maksimum i minimum ciągną się równoległe wokół krawędzi żyłki zarówno wewnętrznych, jak i zewnętrznych. Kiedy światło pada na, powiedzmy, lewą pionową krawędź żyłki, ugina się na niej i rozprzestrzeniając się zarówno na prawo, jak i na lewo poza krawędzią, ulega interferencji, tworząc obraz widoczny wzdłuż lewej krawędzi. Większa część prawej strony obrazu znajduje się w obszarze, który zgodnie z prawami optyki geometrycznej jest obszarem cienia żyłki.

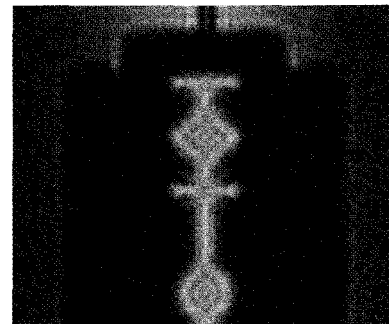
Często spotykanym, niejako naturalnym przykładem dyfrakcji są efekty pojawiające się przy obserwacji czystego, niebieskiego nieba. Możesz wówczas w polu widzenia spostrzec plamki i włosowate struktury. Te struktury, zwane „latającymi muszkami”, powstają przy uginaniu się światła na krawędziach bardzo drobnych zmętnień (zagęszczeń) w ciele szklistym przezroczystej substancji wypełniającej większość gałki ocznej. To co widzisz w polu widzenia twego oka, to obraz dyfrakcyjny wytwarzany na siatkówce przez jedno z takich zmętnień. Jeżeli spoglądasz przez mały otvorek w nieprzezroczystym ekranie, tak że wpadające do twojego oka światło jest w przybliżeniu falą płaską, to możesz rozróżnić poszczególne maksima i minima w obrazie.

### Jasna plamka Fresnela

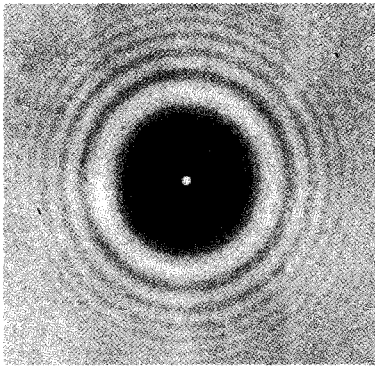
Zjawisko dyfrakcji bez trudu można objaśnić w ramach falowej teorii światła. Jednak akceptacja tej teorii, którą pierwotnie u schyłku XVII wieku wprowadził Huygens, a w 123 lata później Young wykorzystał do objaśnienia wyników doświadczenia z dwiema szczelinami, przebiegała bardzo powoli, głównie dlatego, że była ona przeciwstawna teorii światła Newtona, zgodnie z którą światło było strumieniem cząstek.



Rys. 37.1. Ten obraz dyfrakcyjny pojawił się na ekranie obserwacyjnym, kiedy światło, które przeszło przez wąską szczelinę, dotarło do ekranu. Dyfrakcja sprawia, że światło pojawia się poza szczeliną w wielu kierunkach prostopadłych do jej długich krawędzi. Powstaje obraz interferencyjny składający się z szerokiego maksimum środkowego i mniej intensywnych i węższych maksimum bocznych rozdzielonych minimumami



Rys. 37.2. Obraz dyfrakcyjny wytworzony przez żyłkę oświetloną światłem monochromatycznym. Zwróć uwagę na naprzemienne linie maksimum i minimum natężenia światła

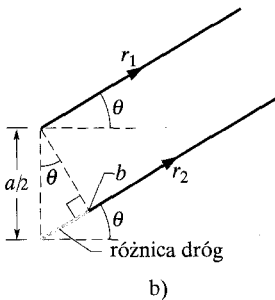
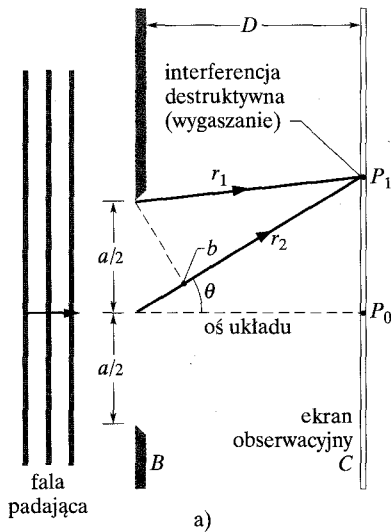


Rys. 37.3. Fotografia obrazu dyfrakcyjnego nieprzezroczystego krążka. Zwróć uwagę na koncentryczne pierścienie dyfrakcyjne i na jasną plamkę Fresnela w środku obrazu. Doświadczenie, w którym uzyskano ten obraz, jest identyczne z doświadczeniem wykonanym przez komitet konkursowy sprawdzający teorię Fresnela. Zarówno kula zastosowana przez wspomniany komitet, jak i zastosowany tutaj krążek mają w przekroju poprzecznym kształt koła

Pogląd Newtona przeważał również w kręgach uczonych francuskich we wczesnych latach dziewiętnastego stulecia, kiedy to Augustin Fresnel, młody wojskowy inżynier, zwolennik teorii falowej światła, przedłożył Francuskiej Akademii Nauk pracę o swych eksperymentach ze światłem i ich opis w ramach falowej teorii światła.

W 1819 r. Akademia zdominowana przez zwolenników teorii Newtona postanowiła rzucić wyzwanie teorii falowej i ogłosiła konkurs na dysertację o dyfrakcji. Konkurs wygrał Fresnel. Fakt ten jednak nie zmienił poglądów zwolenników Newtona, ani też ich nie uciszył. Jeden z nich, słynny matematyk i fizyk Siméon Denis Poisson, wskazał na „dziwny wynik”, do którego musiałaby prowadzić teoria Fresnela, gdyby były prawdziwa — fale świetlne ugięte na kuli powinny wytwarzać jasną plamkę w środku cienia kuli. Komitet konkursowy zorganizował test, którego celem było sprawdzenie przewidywanego przez Poissona efektu. Test ten wykazał (patrz rys. 37.3), że oczekiwana *plamka Fresnela* istotnie pojawia się w obrazie dyfrakcyjnym! Nic tak dalece nie umacnia wiary w prawidłowość teorii, jak zweryfikowanie przez doświadczenie jej nieoczekiwanych i przeciwnych intuicji czy „zdrowemu rozsądkowi” przewidywań.

## 37.2. Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie: położenia minimów



Zajmiemy się teraz obrazem dyfrakcyjnym wytwarzanym przez płaskie fale świetlne o długości fali  $\lambda$ , które ulegają dyfrakcji na pojedynczej, długiej szczelinie o szerokości  $a$ , wykonanej w nieprzezroczystym ekranie pokazanym na rysunku 37.4a. (Na rysunku tym wysokość szczeliny jest prostopadła do powierzchni kartki i rozciąga się przed i za nią, a czoła fali docierającej do ekranu  $B$  są do niego równoległe). W świetle ugiętym docierającym do ekranu obserwacyjnego  $C$  fale pochodzące z różnych punktów szczeliny interferują ze sobą i wytwarzają na ekranie obraz dyfrakcyjny, złożony z jasnych i ciemnych prążków (maksima i minima interferencyjne). Żeby wyznaczyć położenia prążków, zastosujemy procedurę zbliżoną do procedury stosowanej przez nas przy wyznaczaniu położenia prążków w obrazie interferencyjnym dwóch szczelin. Jednakże z matematycznego punktu widzenia zjawisko dyfrakcji jest znacznie trudniejsze i dlatego nasze obecne rozważania ograniczymy tylko do ciemnych prążków.

Zanim jednak zajmiemy się ciemnymi prążkami, upewnimy się co do obecności w obrazie centralnego jasnego prążka widzianego na rysunku 37.1. Zauważmy, że droga wtórnych (elementarnych) fal Huygensa wychodzących ze wszystkich punktów szczeliny i docierających do środka obrazu jest w przybliżeniu taka sama i wobec tego w tym punkcie fale te mają zgodne fazy. Jeśli chodzi o inne jasne prążki, to powiemy jedynie, że w przybliżeniu leżą one w połowie odległości między sąsiednimi ciemnymi prążkami.

Rys. 37.4. a) Interferencja fal ze skrajnych górnych punktów dwóch stref o szerokości  $a/2$  w punkcie  $P_1$  na ekranie obserwacyjnym  $C$  jest w pełni destruktywna. b) Dla  $D \gg a$  promienie świetlne  $r_1$  i  $r_2$  możemy traktować jak promienie równoległe, tworzące kąt  $\theta$  z osią układu

Do wyznaczenia położenia ciemnych prążków zastosujemy pomysłową (i upraszczającą) strategię, która polega na rozpatrywaniu par promieni przechodzących przez szczelinę i ustalaniu, w jakich warunkach w każdej parze fale wtórne reprezentowane przez te promienie znoszą się wzajemnie. Zastosujmy taką strategię do pierwszego ciemnego prążka w punkcie  $P_1$  na rysunku 37.4a. Najpierw w pamięci dzielimy szczelinę na dwie strefy o jednakowej szerokości  $a/2$ . Następnie przedłużamy do punktu  $P_1$  promień świetlny, który wychodzi z najwyższego punktu górnej strefy, oraz promień  $r_2$ , który wychodzi z najwyższego punktu dolnej strefy. Wytyczamy oś przechodzącą przez środek szczeliny i ekran obserwacyjny  $C$ . W takim układzie położenie punktu  $P_1$  względem osi określone jest przez kąt  $\theta$ .

W obszarze szczeliny fale, którym odpowiada para promieni  $r_1$  i  $r_2$ , mają zgodne fazy, gdyż ich źródłem jest to samo czoło fali przechodzącej przez całą szerokość szczeliny. Aby w punkcie  $P_1$  powstał ciemny prążek, różnica ich faz po osiągnięciu przez nie tego punktu musi odpowiadać  $\lambda/2$ ; ta różnica faz wynika z różnicy przebywanych przez nie dróg, gdyż droga fali wtórnej  $r_2$  do punktu  $P_1$  jest dłuższa niż droga fali wtórnej  $r_1$ . Żeby ustalić różnicę dróg, na promieniu  $r_2$  znajdujemy taki punkt  $b$ , że odległość między tym punktem i punktem  $P_1$  jest taka sama, jak droga fali wtórnej  $r_2$ . Oznacza to, że różnica dróg obu fal jest równa odległości od środka szczeliny do punktu  $b$ .

Kiedy ekran obserwacyjny  $C$  znajduje się blisko ekranu  $B$  ze szczeliną, wówczas matematyczny opis obrazu dyfrakcyjnego na ekranie  $C$  jest bardzo trudny. Możemy jednak ogromnie uprościć problem matematycznego opisu, budując układ doświadczalny tak, żeby odległość  $D$  ekranu obserwacyjnego od szczeliny była dużo większa niż szerokość  $a$  samej szczeliny. Wówczas możemy potraktować promienie  $r_1$  i  $r_2$  jako w przybliżeniu równoległe i tworzące kąt  $\theta$  z osią (rys. 37.4b). Możemy również w przybliżeniu przyjąć, że trójkąt o wierzchołkach w punkcie  $b$ , najwyższym punkcie górnej strefy i najwyższym punkcie dolnej strefy szczeliny jest trójkątem prostokątnym, w którym jeden z kątów jest równy  $\theta$ . Różnica dróg promieni  $r_1$  i  $r_2$  (która nadal jest równa odległości od środka szczeliny do punktu  $b$ ) jest wówczas równa  $(a/2) \sin \theta$ .

Taką analizę możemy powtórzyć dla każdej pary promieni wychodzących z odpowiednich punktów w obu strefach (np. z punktów środkowych każdej strefy) i docierających do punktu  $P_1$ . Różnica dróg każdej takiej pary promieni jest taka sama i wynosi  $(a/2) \sin \theta$ . Przyrównując tę wspólną wszystkim parom promieni różnicę dróg do  $\lambda/2$  (co jest warunkiem występowania pierwszego ciemnego prążka), otrzymamy

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2},$$

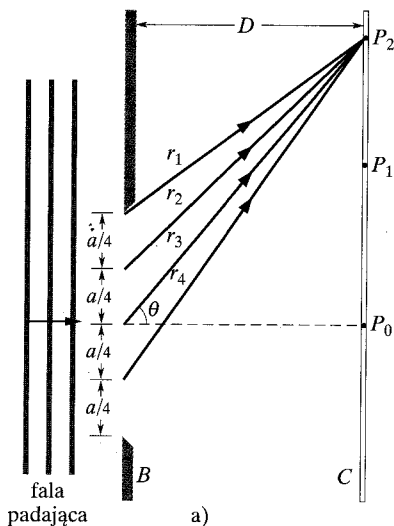
czyli

$$a \sin \theta = \lambda \quad (\text{pierwsze minimum}). \quad (37.1)$$

Dla zadanych szerokości szczeliny  $a$  oraz długości fali  $\lambda$  równanie (37.1) podaje kąt  $\theta$ , pod jakim powyżej i poniżej osi (co wynika z symetrii) występuje pierwszy ciemny prążek.

Zwróć uwagę, że jeżeli początkowo  $a > \lambda$ , a następnie szczelina będzie zwiężana przy nie zmieniającej się długości fali, to kąt, pod jakim występuje pierwszy





ciemny prążek, wzrasta; tzn. obszar zajmowany przez obraz dyfrakcyjny (jego szerokość) jest *większy dla węższej szczeliny*. Jeżeli doprowadzimy do sytuacji, w której szerokość szczeliny będzie taka jak długość fali (tzn.  $a = \lambda$ ), to kąt, pod którym występuje pierwszy ciemny prążek będzie równy  $90^\circ$ . Dwa pierwsze ciemne prążki wyznaczają jednocześnie krawędzie centralnego jasnego prążka, wobec tego jasny prążek musi zajmować cały ekran obserwacyjny.

Położenie kolejnego, drugiego ciemnego prążka po obu stronach osi znajdziemy, postępując w takim sam sposób, jak przy pierwszym ciemnym prążku, z tą tylko różnicą, że tym razem podzielimy całą szerokość szczeliny na *cztery* strefy o jednakowych szerokościach równych  $a/4$  (rys. 37.5a). Przedłużymy następnie promienie  $r_1, r_2, r_3$  i  $r_4$  wychodzące z najwyższego punktu każdej strefy do punktu  $P_2$ , w którym powyżej osi ma występować drugi ciemny prążek. Aby prążek ten występował w punkcie  $P_2$ , różnice dróg między promieniami  $r_1$  i  $r_2$ ,  $r_2$  i  $r_3$  oraz  $r_3$  i  $r_4$  muszą być równe  $\lambda/2$ .

Wtedy gdy  $D \gg a$ , możemy te cztery promienie w przybliżeniu traktować jak promienie równoległe i tworzące kąt  $\theta$  z osią układu. I tak jak poprzednio, żeby ustalić różnicę dróg, łączymy kolejne pary promieni prostym odcinkiem, tak jak pokazano na rysunku 37.5b, tworząc trzy trójkąty prostokątne, w których jeden z boków jest właśnie równy różnicy dróg między promieniami każdej pary. Rozważając górny trójkąt, znajdujemy, że różnica dróg między promieniami  $r_1$  i  $r_2$  jest równa  $(a/4) \sin \theta$ . Podobnie, łatwo ustalimy, że dla pozostałych par promieni ( $r_2$  i  $r_3$  oraz  $r_3$  i  $r_4$ ) różnica ta jest również równa  $(a/4) \sin \theta$ . W rzeczywistości różnica dróg dla każdych dwóch promieni wychodzących z odpowiadających sobie punktów sąsiednich stref jest zawsze równa  $(a/4) \sin \theta$ . W każdym takim przypadku różnica dróg jest równa  $\lambda/2$ , wobec tego mamy

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2},$$

czyli

$$a \sin \theta = 2\lambda \quad (\text{drugie minimum}). \quad (37.2)$$

Możemy teraz, dzieląc szczelinę na coraz większą liczbę stref o jednakowych szerokościach, wyznaczać położenia kolejnych ciemnych prążków. Zawsze będziemy dzielić szczelinę na parzystą liczbę stref, tak aby wszystkie strefy (i wychodzące z nich fale) można było rozważać parami, tak jak w omówionych wyżej przypadkach. Ostatecznie ogólne wyrażenie opisujące położenie ciemnych prążków, powyżej i poniżej osi, ma postać

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minima — ciemne prążki}). \quad (37.3)$$

Zapamiętanie tego wyniku można sobie ułatwić, kreśląc trójkąt prostokątny, taki jak na rysunku 37.4b, ale dla całej szerokości  $a$  szczeliny, a wtedy, jak nietrudno zauważyć, różnica dróg między skrajnymi promieniami wychodzącymi z góry i z dołu szczeliny jest równa  $a \sin \theta$ . Wobec tego z równania (37.3) wynika że:

Rys. 37.5. a) Interferencja fal ze skrajnych górnych punktów czterech stref o szerokości  $a/4$  jest w punkcie  $P_2$  w pełni destrukcyjna. b) Dla  $D \gg a$  możemy promienie świetlne  $r_1, r_2, r_3$  i  $r_4$  traktować jak promienie równoległe, tworzące kąt  $\theta$  z osią układu

W doświadczeniu nad dyfrakcją na pojedynczej szczelinie ciemne prążki powstają tam, gdzie różnice dróg ( $a \sin \theta$ ) między skrajnymi promieniami wychodzącymi ze szczeliny są równe  $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$

To może wydawać się błędne, gdyż fale reprezentowane przez te dwa szczególne promienie będą miały dokładnie takie same fazy wszędzie tam, gdzie różnica ich dróg jest całkowitą wielokrotnością długości fali. Jednakże *każda* z nich stale będzie składnikiem pary fal, których fazy są dokładnie przeciwne; każda fala będzie znosić się z pewną inną falą, co prowadzi do ich wygaszania i ciemności na obrazie dyfrakcyjnym. Równania (37.1), (37.2) i (37.3) zostały wyprowadzone dla przypadku, kiedy  $D \gg a$ . Mają one zastosowanie również wtedy, gdy między szczeliną i ekranem obserwacyjnym umieścimy soczewkę skupiającą, a ekran ustawimy w płaszczyźnie ogniskowej soczewki. Soczewka zapewnia to, że w każdym punkcie na ekranie skupiane są promienie, które przy wyjściu ze szczeliny są *ściśle* (a nie tylko w przybliżeniu) wzajemnie równoległe. Są one takie, jak początkowo równoległe promienie na rysunku 35.12a, które soczewka skupiająca kieruje do swego ogniska.

**SPRAWDZIAN 1:** Używając długiej, wąskiej szczeliny oświetlonej światłem niebieskim, obserwujemy obraz dyfrakcyjny powstały na ekranie obserwacyjnym. Czy kolejne prążki dyfrakcyjne oddalą się od centralnego jasnego prążka, czy też zbliżą się do niego, gdy a) oświetlimy tę szczelinę światłem żółtym, a nie niebieskim lub też b) zmniejszymy szerokość szczeliny?

### Przykład 37.1

Szczelina oświetlana jest światłem białym (w którym występują wszystkie długości fali z zakresu widzialnego).

a) Przy jakiej szerokości  $a$  szczeliny pierwsze minimum dla światła czerwonego o długości fali  $\lambda = 650 \text{ nm}$  będzie występować pod kątem  $\theta = 15^\circ$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Kluczem do odpowiedzi jest spostrzeżenie, że przy przechodzeniu przez szczelinę fale o poszczególnych długościach ulegają ugięciu pod różnymi kątami, a położenia ich minimum określa równanie (37.3) ( $a \sin \theta = m\lambda$ ). Jeżeli położymy  $m = 1$  (dla pierwszego minimum) i podstawimy do równania (37.3) podane wartości  $\theta$  oraz  $\lambda$ , to otrzymamy

$$a = \frac{m\lambda}{\sin \theta} = \frac{(1)(650 \text{ nm})}{\sin 15^\circ} = 2511 \text{ nm} \approx 2,5 \text{ }\mu\text{m. (odpowiedź)}$$

Widać stąd, że na to, aby światło mogło ugiąć się tak mocno ( $\pm 15^\circ$  do pierwszego minimum), szczelina musi być rzeczywiście bardzo wąska — tylko ok. czterech długości fali światła. Dla porównania podajmy, że włos ludzki ma średnicę ok.  $100 \text{ }\mu\text{m}$ .

b) Jaką długość fali  $\lambda'$  ma światło, dla którego pierwsze boczne maksimum występuje pod kątem  $15^\circ$  i tym samym pokrywa się z pierwszym minimum dla światła czerwonego?

#### ROZWIĄZANIE:

Tym razem podstawowe spostrzeżenie to fakt, że dla każdej długości fali pierwsze boczne maksimum występuje w przybliżeniu w połowie odległości między pierwszym i drugim minimum dla tej długości fali. Położenia pierwszego i drugiego minimum znajdziemy za pomocą równania (37.3), odpowiednio dla  $m = 1$  i  $m = 2$ . Wobec tego *przybliżone* położenie pierwszego boczne maksimum będzie odpowiadać wartości  $m = 1,5$ . Wówczas równanie (37.3) jest postaci

$$a \sin \theta = 1,5\lambda';$$

rozwiązując je ze względu na  $\lambda'$ , po podstawieniu zadanych wielkości otrzymamy

$$\lambda' = \frac{a \sin \theta}{1,5} = \frac{(2511 \text{ nm})(\sin 15^\circ)}{1,5} = 430 \text{ nm. (odpowiedź)}$$

Taką długość fali ma światło fioletowe. Pierwsze boczne maksimum dla światła o długości fali  $430 \text{ nm}$  będzie zawsze pokrywać się z pierwszym minimum dla światła o długości  $650 \text{ nm}$  i to niezależnie od tego, jaka jest szerokość szczeliny. Jeżeli szczelina jest stosunkowo wąska, to kąt  $\theta$ , dla którego zachodzi to pokrywanie się, jest stosunkowo duży, i odwrotnie (mały kąt w przypadku szerokiej szczeliny).

### 37.3. Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Opis jakościowy

W paragrafie 37.2 nauczyliśmy się, jak znajdować położenia minimów i maksimum w obrazie dyfrakcyjnym wytwarzanym przez pojedynczą szczelinę. Teraz zajmiemy się bardziej ogólnym problemem — będziemy poszukiwać wyrażenia opisującego rozkład natężenia światła  $I$  w obrazie dyfrakcyjnym, tzn. zależność natężenia  $I$  od kąтового położenia  $\theta$  na ekranie obserwacyjnym.

W tym celu podzielimy szczelinę na rysunku 37.4a na  $N$  stref o jednakowej szerokości  $\Delta x$ , tak małych, że będziemy mogli przyjąć, iż każda strefa jest źródłem elementarnej fali Huygensa. Będziemy nakładali na siebie fale, które docierają do dowolnie wybranego punktu  $P$  na ekranie obserwacyjnym pod kątem  $\theta$  w stosunku do osi układu i wyznaczali amplitudę  $E_\theta$  składowej elektrycznej fali wypadkowej w tym punkcie. Natężenie światła w punkcie  $P$  jest proporcjonalne do kwadratu tej amplitudy.

Do wyznaczenia  $E_\theta$  potrzebna jest nam znajomość związków fazowych fal wtórnych docierających do punktu  $P$ . Różnica faz między falami wychodzącymi z sąsiadujących ze sobą stref szczeliny jest dana równaniem:

$$(\text{różnica faz}) = (2\pi/\lambda) \cdot (\text{różnica dróg}).$$

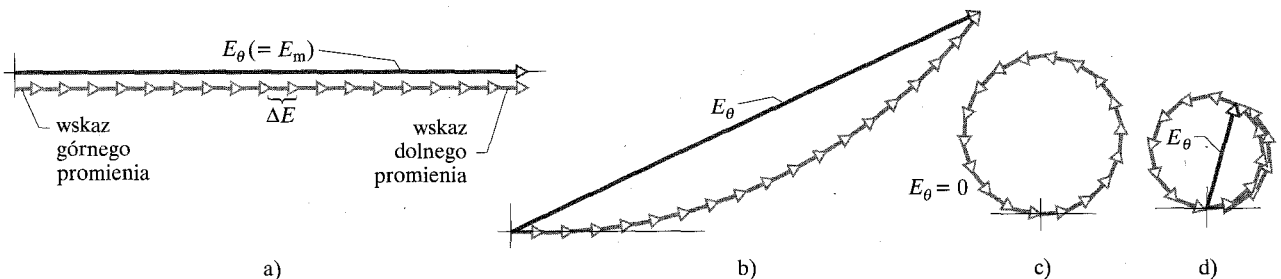
W punkcie  $P$  leżącym pod kątem  $\theta$  do osi różnica dróg fal przychodzących z sąsiednich stref jest równa  $\Delta x \sin \theta$  i wobec tego różnica faz między tymi falami jest równa

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(\Delta x \sin \theta). \quad (37.4)$$

Zakładamy, że fale wtórne przybywające do punktu  $P$  mają takie same amplitudy  $\Delta E$ . Amplitudę  $E_\theta$  fali wypadkowej w punkcie  $P$  znajdziemy, korzystając ze znanej nam już procedury dodawania wskazów  $\Delta E$ . Konstruujemy diagram dla  $N$  wskazów, po jednym z każdej ze stref szczeliny.

Z równania (37.4) wynika, że dla punktu  $P_0$  na rysunku 37.4a (na osi  $\theta = 0$ ) różnica faz  $\Delta\phi$  między falami wtórnymi jest równa zero; fazy wszystkich fal wtórnych docierających do tego punktu są zgodne. Na rysunku 37.6a pokazano tę właśnie sytuację; sąsiednie wskazują odpowiadają falom z sąsiadujących ze sobą stref szczeliny. Tworzą one linię prostą, ponieważ różnica faz między sąsiednimi falami jest równa zero, a wobec tego i kąt między kolejnymi wskazami jest równy zero. Amplituda  $E_\theta$  fali wypadkowej w punkcie  $P_0$  jest sumą wektorową

Rys. 37.6. Diagramy dla  $N = 18$  wskazów odpowiadających podziałowi pojedynczej szczeliny na 18 stref. Pokazane na rysunkach wypadkowe amplitudy  $E_\theta$  odnoszą się do: a) centralnego maksimum ( $\theta = 0$ ), b) punktu na ekranie, którego położenie jest bliskie osi (mały kąt  $\theta$ ), c) pierwszego minimum oraz d) pierwszego maksimum bocznych



tych wskazów. Taki układ wskazów prowadzi do największej wartości amplitudy wypadkowej  $E_\theta$ . Tę maksymalną wartość amplitudy  $E_\theta$  dla kąta  $\theta = 0$  będziemy oznaczać jako  $E_m$ .

Zajmiemy się teraz kolejnym punktem  $P$ , którego położenie na ekranie obserwacyjnym określone jest przez mały kąt  $\theta$  w stosunku do osi. Tym razem z równania (37.4) wynika, że różnica faz  $\Delta\phi$  między falami z sąsiednich stref szczeliny nie jest już równa zero. Odpowiedni diagram dla tej sytuacji przedstawiono na rysunku 37.6b; tak jak poprzednio, wskaźy tworzą układ, w którym koniec jednego wektora jest początkiem kolejnego, ale teraz kierunki kolejnych wskazów tworzą ze sobą kąt  $\Delta\phi$ . Tak jak poprzednio, i w tym punkcie na ekranie obserwacyjnym amplituda  $E_\theta$  fali wypadkowej jest sumą wektorową wszystkich wskazów, ale jest ona mniejsza niż w przypadku zilustrowanym na rysunku 37.6a, co oznacza, że natężenie światła w rozważanym punkcie  $P$  jest mniejsze niż w punkcie  $P_0$ .

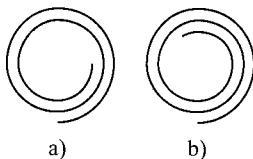
Jeżeli będziemy stopniowo zwiększali kąt  $\theta$ , to kąt  $\Delta\phi$  między sąsiednimi wskazami będzie również stopniowo wzrastał i diagram będzie się zawijał, aż w końcu krzywa diagramu zamknie się w okrąg — koniec ostatniego wskazów spotka się z początkiem pierwszego wskazów (rys. 37.6c). Amplituda  $E_\theta$  będzie wtedy równa zero, a to oznacza, że natężenie światła na ekranie obserwacyjnym będzie również równe zero. Osiągnęliśmy punkt, w którym znajduje się pierwsze minimum obrazu dyfrakcyjnego, czyli pierwszy ciemny prążek. Różnica faz między pierwszym i ostatnim wskazem jest równa  $2\pi$  radianów, co oznacza, że różnica dróg promieni świetlnych wychodzących ze skrajnych krawędzi szczeliny odpowiada jednej długości fali. Przypomnijmy, że jest to właśnie znaleziony przez nas wcześniej warunek występowania pierwszego minimum dyfrakcyjnego.

Jeżeli nadal będziemy zwiększać kąt  $\theta$ , to kąt  $\Delta\phi$  między sąsiednimi wskazami będzie się również zwiększał i krzywa diagramu zacznie się zwijać, a powstająca w ten sposób pętla diagramu będzie się zacieśniać. Amplituda  $E_\theta$  stopniowo wzrasta, aż do osiągnięcia wartości maksymalnej w sytuacji zilustrowanej na rysunku 37.6d, która odpowiada pierwszemu bocznemu maksimum w obrazie dyfrakcyjnym.

Przy dalszym zwiększaniu kąta  $\theta$  zaciskanie pętli diagramu zmniejsza  $E_\theta$ , co oczywiście odpowiada zmniejszaniu się natężenia światła. Kiedy kąt  $\theta$  osiągnie dostatecznie dużą wartość, koniec ostatniego wskazów spotka się znowu z początkiem pierwszego wskazów. Doszliśmy do drugiego minimum.

Moglibyśmy kontynuować te jakościowe rozważania nad maksimami i minimum obrazu dyfrakcyjnego, ale przejdziemy już do rozważań ilościowych.

**SPRAWDZIAN 2:** Rysunki obok to wygładzona w stosunku do rysunków 37.6 (z większą liczbą wskazów) postać diagramów dla dwóch punktów obrazu dyfrakcyjnego, po dwóch przeciwnych stronach wybranego maksimum dyfrakcyjnego. a) O które maksimum chodzi? b) Ile wynosi przybliżona wartość  $m$  (w równaniu 37.3)) dla tego maksimum?



## 37.4. Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Opis ilościowy

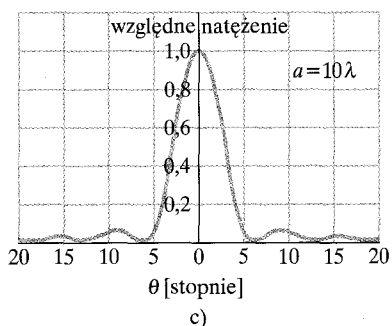
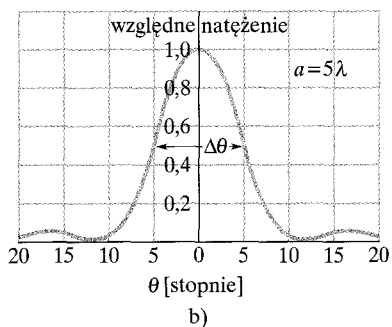
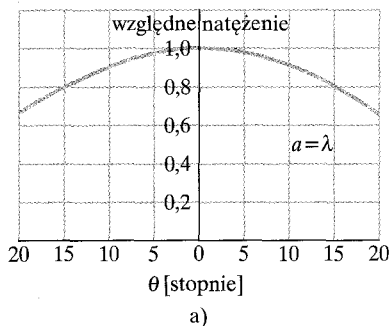
Równanie (37.3) opisuje położenia minimów w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny, obserwowanym na ekranie  $C$  na rysunku 37.4a, w zależności od kąta  $\theta$  zdefiniowanego na tym rysunku.

Teraz zajmiemy się wyprowadzeniem wyrażenia na natężenie  $I(\theta)$  światła w tym obrazie. Udowodnimy niżej, że rozkład natężenia opisuje wyrażenie

$$I(\theta) = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (37.5)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (37.6)$$



Rys. 37.7. Rozkład względnego natężenia w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny dla trzech różnych wartości stosunku  $a/\lambda$ . Im szersza jest szczelina, tym węższe jest maksimum centralne

Wielkość  $\alpha$  jest wygodnym parametrem łączącym kąt  $\theta$ , który określa położenie danego punktu na ekranie obserwacyjnym, z natężeniem światła w tym punkcie.  $I_m$  to największa wartość natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym, odpowiadająca centralnemu maksimum (dla którego  $\theta = 0$ ), natomiast  $\phi$  jest różnicą faz (w radianach) między skrajnymi promieniami wychodzącymi ze szczeliny o szerokości  $a$ .

Z równania (37.5) wynika, że minima występują wszędzie tam, gdzie

$$\alpha = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (37.7)$$

Jeżeli ten warunek wstawimy do równania (37.6), to znajdziemy, że

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

albo

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minima — ciemne prążki}), \quad (37.8)$$

a to jest dokładnie równanie (37.3), które opisuje położenie minimów i które wprowadziliśmy już wcześniej.

Na rysunku 37.7 pokazano rozkład natężeń w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny, obliczony na podstawie równań (37.5) i (37.6) dla trzech różnych szerokości szczeliny:  $a = \lambda$ ,  $a = 5\lambda$  i  $a = 10\lambda$ . Zauważ, że w miarę jak rośnie szerokość szczeliny (w porównaniu z długością fali światła), szerokość *centralnego maksimum dyfrakcyjnego* (obszar centralnego grzbietu na wykresach) zmniejsza się, tzn. światło jest słabiej uginane na szczelinie. Szerokość maksimum bocznych również ulega zwężeniu (i stają się słabsze). W przypadku granicznym, kiedy szerokość szczeliny  $a$  jest dużo większa niż długość fali  $\lambda$ , maksima boczne znikają, światło nie jest już uginane przez szczelinę (ale nadal występuje dyfrakcja na krawędziach szczeliny, taka jak na krawędziach żyłki na rysunku 37.2).

## Wprowadzenie wzorów (37.5) i (37.6)

Łuk wskazów na rysunku 37.8 obrazuje fale wtórne, które osiągają wybrany punkt  $P$  na ekranie obserwacyjnym na rysunku 37.4, dla którego kąt  $\theta$  jest mały. Amplituda  $E_\theta$  fali wypadkowej w punkcie  $P$  jest sumą wektorową tych wskazów. Jeżeli szczelinę na rysunku 37.4 podzielimy na nieskończenie wąskie strefy o szerokości  $\Delta x$ , to łuk wskazów stanie się łukiem okręgu, którego promień oznaczono na rysunku przez  $R$ . Długość tego łuku musi być równa  $E_m$  — amplitudzie w środku obrazu dyfrakcyjnego; jeżeli bowiem wyprostujemy łuk, to otrzymamy taki sam diagram jak na rysunku 37.6a (na rys. 37.8 pokazany w bledszym odcieniu).

Kąt  $\phi$  w dolnej części rysunku 37.8 jest różnicą faz między skrajnymi wektorami łuku  $E_m$  (na jego lewym i prawym końcu). Z konstrukcji rysunku 37.8 wynika, że  $\phi$  jest również kątem, jaki tworzą dwa promienie  $R$  zaznaczone na tym rysunku. Linia przerywana, która jest dwusieczną kąta  $\phi$ , jest zarazem wspólnym bokiem dwóch przystających trójkątów prostokątnych. Dla każdego z tych trójkątów mamy

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E_\theta}{2R}. \quad (37.9)$$

W mierze łukowej (w radianach) kąt  $\phi$  jest równy (gdyż  $E_m$  jest łukiem okręgu)

$$\phi = \frac{E_m}{R}.$$

Obliczenie stąd  $R$  i podstawienie go do równania (37.9) prowadzi do

$$E_\theta = \frac{E_m}{(\phi/2)} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (37.10)$$

Z paragrafu 34.4 wiemy, że natężenie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy jej pola elektrycznego. W rozważanym tutaj przypadku oznacza to, że maksymalne natężenie  $I_m$  (tzn. natężenie w środku obrazu dyfrakcyjnego) będzie proporcjonalne do  $E_m^2$ , natomiast natężenie  $I(\theta)$  będzie proporcjonalne do  $E_\theta^2$ . Możemy wobec tego napisać

$$\frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2}. \quad (37.11)$$

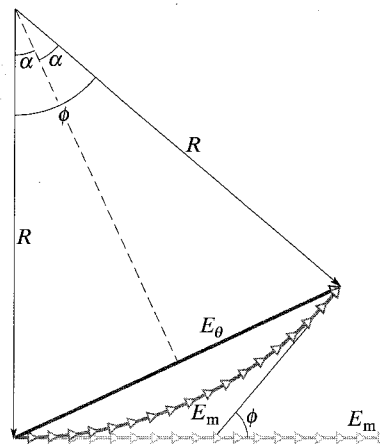
Podstawiając do tego wyrażenia, zamiast  $E_\theta$ , równanie (37.10) oraz  $\alpha = \phi/2$ , dochodzimy do następującego wyrażenia na natężenie jako funkcję kąta  $\theta$ :

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2,$$

czyli równanie (37.5), które mieliśmy wprowadzić.

Drugie równanie, które chcemy wprowadzić, to związek między  $\alpha$  i  $\theta$ . Różnica faz między skrajnymi promieniami wychodzącymi ze szczeliny wiąże się z różnicą dróg równaniem (37.4)

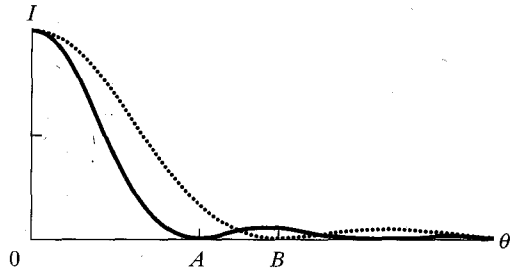
$$\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(a \sin \theta),$$



Rys. 37.8. Konstrukcja pomocnicza do obliczenia natężenia w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Pokazana sytuacja odpowiada tej na rysunku 37.6b

gdzie  $a$  jest sumą szerokości  $\Delta x$  nieskończenie wąskich stref (na jakie podzieliśmy szczelinę). Ale  $\phi = 2\alpha$  i wobec tego wyrażenie to sprowadza się do równania (37.6).

**SPRAWDZIAN 3:** Do dwóch oddzielnych obserwacji dyfrakcji na pojedynczej szczelinie użyto raz światła o długości fali 650 nm, a drugi raz światła o długości fali 430 nm. Na rysunku pokazano wyniki tych obserwacji w postaci wykresów natężenia światła  $I$  w obrazach dyfrakcyjnych w zależności od kąta  $\theta$ . Jaka będzie barwa światła w obrazie dyfrakcyjnym powstającym a) pod kątem  $A$  i b) pod kątem  $B$ , jeżeli szczelina zostanie oświetlona światłem o obydwu tych długościach fali jednocześnie?



### Przykład 37.2

Znajdź względne (mierzone w stosunku do centralnego maksimum) natężenia pierwszych trzech maksimów bocznych w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny z rysunku 37.1.

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

➔ 1. Maksima boczne występują w przybliżeniu w połowie odległości między minimami, których położenia kątowe ( $\alpha = m\pi$ ) określa równanie (37.7). A zatem położenia bocznych maksimów są w przybliżeniu dane równaniem

$$\alpha = (m + 1/2)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

w którym  $\alpha$  jest wyrażone w mierze łukowej (w radianach).

➔ 2. W każdym punkcie obrazu dyfrakcyjnego natężenie  $I$  jest odniesione do natężenia  $I_m$  centralnego maksimum przez równanie (37.5) i wobec tego względne natężenia maksimów bocznych

możemy znaleźć, podstawiając do równania (37.5) ich przybliżone położenia kątowe podane wyżej. Otrzymamy w ten sposób

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin(m + 1/2)\pi}{(m + 1/2)\pi}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Pierwsze maksimum boczne powstaje przy  $m = 1$  i jego względne natężenie jest równe

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_m} &= \left(\frac{\sin(1 + 1/2)\pi}{(1 + 1/2)\pi}\right)^2 = \left(\frac{\sin(1,5)\pi}{1,5\pi}\right)^2 \\ &= 4,5 \cdot 10^{-2} \approx 4,5\%. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Dla  $m = 2$  oraz  $m = 3$  znajdziemy, że

$$\frac{I_2}{I_m} = 1,6\% \quad \text{i} \quad \frac{I_3}{I_m} = 0,83\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie kolejnych maksimów bocznych zmniejsza się szybko (fotografia 37.1 została celowo prześwietlona po to, by można było je dostrzec).

## 37.5. Dyfrakcja na otworze kołowym

W tym paragrafie zajmiemy się dyfrakcją na okrągłym otworze, na przykład na okrągłej soczewce, przez którą może przechodzić światło. Na rysunku 37.9 pokazano obraz odległego punktowego źródła światła (np. gwiazdy), jaki powstał na błonie fotograficznej umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej soczewki skupiającej. Powstały obraz nie jest punktem, jakby to wynikało z zasad optyki geometrycznej, lecz jest krążkiem otoczonym przez kilka pierścieni o stopniowo zmniejszającym się natężeniu. Porównanie tego obrazu z rysunkiem 37.1 nie pozostawia wątpliwości, że mamy do czynienia ze zjawiskiem dyfrakcyjnym. Z tym

że w rozważanym obecnie przypadku otwór jest okręgiem o średnicy  $d$ , a nie prostokątną szczeliną.

Analiza takiego obrazu jest złożona. Wynika z niej, że pierwsze minimum w obrazie dyfrakcyjnym okrągłego otworu o średnicy  $d$  ma położenie kątowe

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{pierwsze minimum; otwór kołowy}). \quad (37.12)$$

Tutaj kąt  $\theta$  jest kątem odpowiadającym każdemu punktowi tego (kołowego) minimum. Porównaj ten wynik z równaniem (37.1)

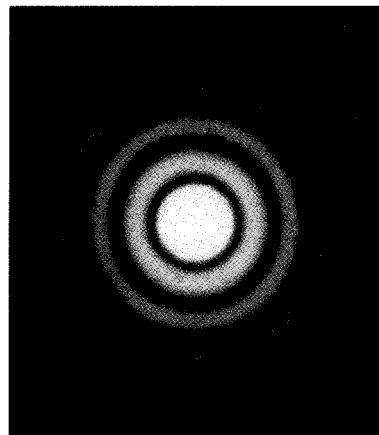
$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (\text{pierwsze minimum; pojedyncza szczelina}), \quad (37.13)$$

które określa położenie pierwszego minimum w przypadku dłuższej, wąskiej szczeliny o szerokości  $a$ . Oba wyrażenia różnią się o czynnik 1,22, który występuje dla okrągłego otworu.

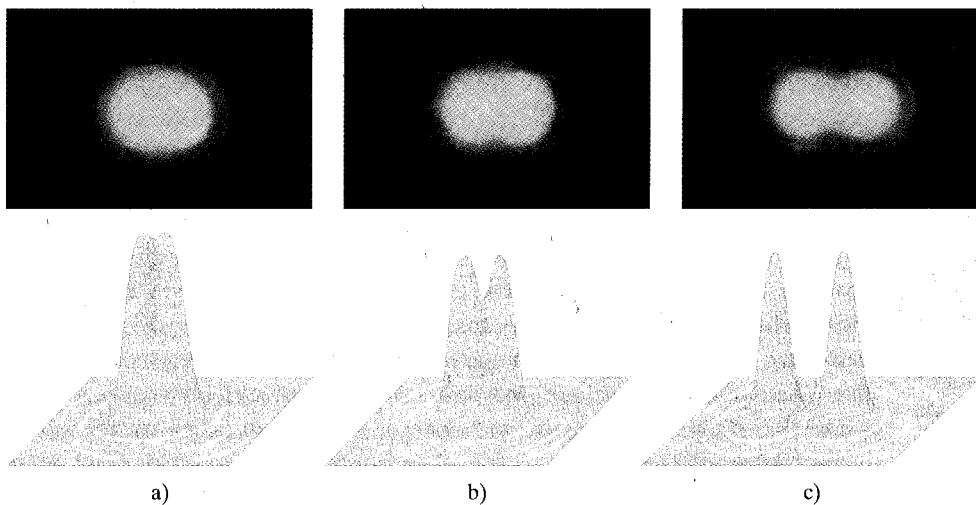
## Rozdzielczość

To, że obrazy wytwarzane przez soczewkę są obrazami dyfrakcyjnymi, jest ważne wtedy, gdy chcemy *rozdzielić* (rozdzielić) dwa odległe punktowe przedmioty, których odległość kątowa jest mała. Na rysunku 37.10 pokazano trzy różne przypadki obrazów i odpowiadających im rozkładów natężeń dla dwóch odległych przedmiotów punktowych (powiedzmy, że są to dwie gwiazdy), których wzajemna odległość kątowa jest mała. Na rysunku 37.10a, z powodu dyfrakcji, przedmioty te nie są rozdzielone — ich obrazy dyfrakcyjne (głównie ich maksima centralne) nakładają się tak dalece, że nie można ich rozróżnić, i widziane są jak pojedynczy punktowy przedmiot. Na rysunku 37.10b oba przedmioty są ledwie rozróżnialne, a na rysunku 37.10c są one już całkowicie rozdzielone.

Na rysunku 37.10b odległość kątowa dwóch źródeł punktowych jest taka, że centralne maksimum obrazu dyfrakcyjnego jednego z nich przypada w miejscu, w którym w obrazie drugiego źródła przypada pierwsze minimum dyfrakcyjne



Rys. 37.9. Obraz dyfrakcyjny okrągłego otworu. Zwróć uwagę na maksimum centralne i na koliste maksima boczne. Zdjęcie zostało prześwietlone w celu uwidocznienia maksimów bocznych, których natężenie jest w rzeczywistości dużo mniejsze niż natężenie maksimum centralnego



Rys. 37.10. U góry: Obrazy dwóch punktowych źródeł (gwiazd) wytwarzane przez soczewkę skupiającą. U dołu: Trójwymiarowe reprezentacje rozkładów natężeń światła w tych obrazach. a) Odległość kątowa obu źródeł jest za mała na to, aby ich obrazy były rozróżnialne. b) Obrazy źródeł są ledwie rozróżnialne. c) Obrazy są wyraźnie rozróżnialne. Kryterium Rayleigha jest spełnione w sytuacji (b), w której centralne maksimum jednego obrazu dyfrakcyjnego pokrywa się z pierwszym minimum drugiego obrazu



— jest to warunek rozdzielenia nazywany **kryterium Rayleigha**. Z równania (37.12) wynika, że jeśli dwa przedmioty mają być ledwie rozdzielone, to ich odległość kątowna  $\theta_R$  musi być (zgodnie z kryterium Rayleigha) równa

$$\theta_R = \arcsin(1,22\lambda/d).$$

Kąty są małe, wobec tego  $\sin \theta_R$  można zastąpić przez  $\theta_R$  (wyrażony w radianach) i wtedy mamy

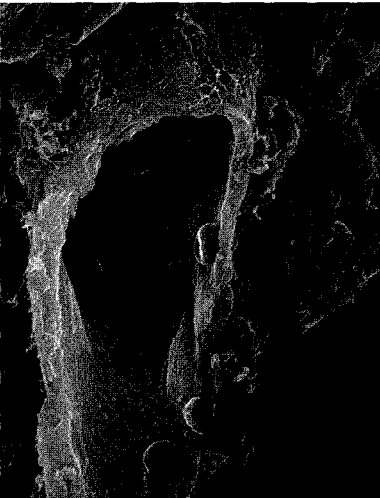
$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{kryterium Rayleigha}). \quad (37.14)$$

Kryterium Rayleigha jest tylko przybliżeniem, gdyż rozdzielczość zależy od wielu czynników, takich jak: względna jasność źródeł i ich otoczeń, turbulencje powietrza między źródłami a obserwatorem i sprawność wzroku obserwatora. Badania eksperymentalne pokazują, że najmniejsza odległość kątowna obiektów, jaką na ogół są w stanie rozróżnić obserwatorzy, jest nieco większa niż wartość określona na podstawie równania (37.14). Ale w naszych dalszych rachunkach przyjmiemy, że równanie (37.14) jest ścisłym kryterium, tzn.: jeżeli odległość kątowna  $\theta$  między źródłami jest większa niż  $\theta_R$ , to możemy rozróżnić źródła; jeżeli jest ona mniejsza, to nie możemy ich rozróżnić.

Na podstawie kryterium Rayleigha można objaśnić barwy na obrazie Seurata *Popołudnie na wyspie La Grande Jatte* (i na każdym innym puentylistycznym obrazie). Jeżeli stoisz dostatecznie blisko obrazu, to odległości kątowne  $\theta$  sąsiednich kropek są większe niż  $\theta_R$  i wobec tego widzisz oddzielnie poszczególne kropki. Ich barwa jest taka, jaką miała użyta przez Seurata farba. Kiedy jednak oglądasz obraz z dostatecznie dużej odległości, wtedy odległości kątowne  $\theta$  sąsiednich kropek są mniejsze od  $\theta_R$  i nie można rozróżnić poszczególnych kropek. Powstająca w twoim oku mieszanina barw, jakie docierają od każdej grupy kropek, może wówczas pobudzić twój mózg do „spreparowania” barwy dla tej grupy — barwy, która w rzeczywistości w ogóle w tej grupie kropek nie występuje. W taki właśnie sposób Seurat używa twojego wzroku do kreowania barw jego dzieł.

Jeżeli do rozdzielania przedmiotów, których odległość kątowna jest mała, zamiast nieuzbrojonego oka chcemy użyć soczewki, to pożądanym jest jak najmniejszy obraz dyfrakcyjny. Zgodnie z równaniem (37.14) można to uzyskać albo przez zwiększenie średnicy soczewki, albo przez korzystanie ze światła o mniejszej długości fali.

W mikroskopach często wykorzystywane jest promieniowanie nadfioletowe, gdyż mniejsza długość fali promieniowania nadfioletowego umożliwia badanie znacznie drobniejszych szczegółów niż te, jakie w tym samym mikroskopie można obserwować przy wykorzystaniu światła widzialnego. W rozdziale 39 pokazujemy, że wiązki elektronów mogą zachowywać się w pewnych warunkach jak fale. W *mikroskopie elektronowym* wiązki takie mogą mieć efektywną długość fali rzędu  $10^{-5}$  długości fali światła widzialnego. Przy użyciu takich wiązek można badać bardzo subtelne struktury, takie jak te zilustrowane na rysunku 37.11, które w mikroskopie optycznym byłyby rozmyte przez dyfrakcję.



**Rys. 37.11.** Obraz żyły z czerwonymi krwinkami, uzyskany za pomocą skaningowego mikroskopu elektronowego (barwy wynikają z komputerowej obróbki obrazu i nie są prawdziwe)

**SPRAWDZIAN 4:** Przypuśćmy, że dyfrakcja na źrenicy twego oka sprawia, iż dwie czerwone kropki są przez nie ledwie rozróżnialne. Czy wtedy, gdy oświetlenie wokół ciebie zostanie zwiększone, co wywołuje zmniejszenie średnicy źrenicy twego oka, rozdzielenie czerwonych kropek poprawi się, czy też pogorszy? Rozważ tylko dyfrakcję. (Możesz przeprowadzić eksperymenty, żeby sprawdzić prawdziwość swojej opowiedzi).

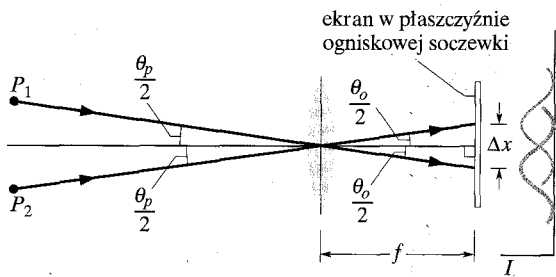
### Przykład 37.3

Soczewka skupiająca o średnicy  $d = 32$  mm i ogniskowej  $f = 24$  cm wytwarza obrazy odległych punktowych przedmiotów w płaszczyźnie ogniskowej soczewki. Używane jest światło o długości fali  $\lambda = 550$  nm.

a) Jaka musi być odległość kątowa między dwoma odległymi punktowymi przedmiotami, ażeby przy uwzględnieniu dyfrakcji na soczewce spełnione było kryterium Rayleigha?

#### ROZWIĄZANIE:

Na rysunku 37.12 pokazano dwa odległe punktowe źródła  $P_1$  i  $P_2$ , soczewkę i ekran obserwacyjny umieszczony w płaszczyźnie ogniskowej soczewki.



Rys. 37.12. Przykład 37.3. Światło z dwóch odległych punktowych przedmiotów  $P_1$  i  $P_2$  przechodzi przez soczewkę skupiającą i tworzy obrazy na ekranie obserwacyjnym w płaszczyźnie ogniskowej soczewki. Dla każdego z obu przedmiotów pokazany jest tylko jeden reprezentatywny promień świetlny. Ich obrazy nie są punktami, lecz obrazami dyfrakcyjnymi o rozkładach natężeń (przybliżonych) pokazanych po prawej stronie rysunku. Kątowa odległość przedmiotów jest równa  $\theta_p$ , a ich obrazów  $\theta_o$ ; odległość między centralnymi maksimumami jest  $\Delta x$

skowej soczewki. Po prawej, skrajnej stronie rysunku pokazany jest wykres zależności natężenia światła  $I$  od położenia na ekranie dla dwóch centralnych maksimum obrazów wytwarzanych przez soczewkę. Zwróć uwagę, że odległość kątowa przedmiotów  $\theta_p$  jest równa odległości kątowej obrazów  $\theta_o$ . Zatem do rozwiązania zastosujemy spostrzeżenie, że jeżeli obrazy mają spełniać kryterium Rayleigha określające ich rozdzielenie, to odległości kątowe po obu stronach soczewki muszą być (przy założeniu małych kątów) dane równaniem (37.14). Podstawiając do równania (37.14) podane wyżej dane liczbowe, otrzymujemy

$$\theta_p = \theta_o = \theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = \frac{(1,22)(550 \cdot 10^{-9} \text{ m})}{32 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Przy takiej odległości kątowej maksimum każdej z dwóch krzywych natężenia na rysunku 37.12 przypada w miejscu pierwszego minimum drugiej krzywej.

b) Ile wynosi odległość  $\Delta x$  między środkami obrazów na płaszczyźnie ogniskowej soczewki? (Tzn. ile wynosi odległość między maksimumami natężenia na krzywych obu wykresów natężenia?)

#### ROZWIĄZANIE:

Tutaj klucz do odpowiedzi leży w powiązaniu odległości  $\Delta x$  ze znanym nam już kątem  $\theta_o$ . Z rozważenia dowolnego z dwóch trójkątów widocznych między soczewką a ekranem na rysunku 37.12, widać, że  $\text{tg } \theta_o/2 = \Delta x/2f$ . Przekształcając ten związek i zakładając, że  $\text{tg } \theta \approx \theta$ , otrzymamy

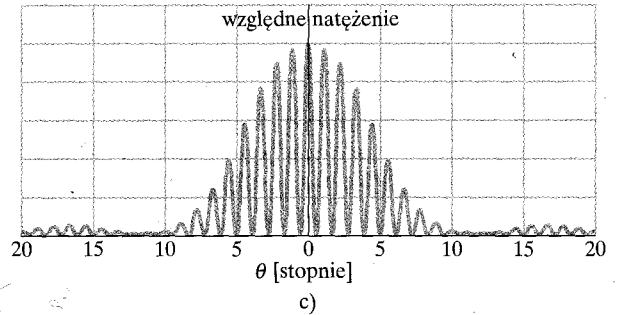
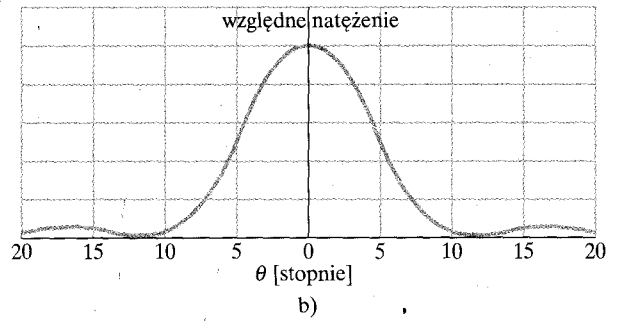
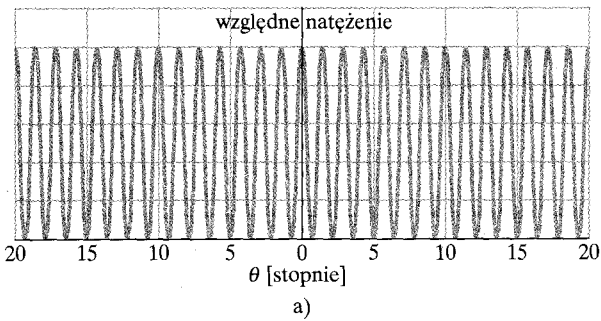
$$\Delta x = f\theta_o, \quad (37.15)$$

gdzie  $\theta_o$  wyrażone jest w mierze łukowej. Podstawienie znanych danych daje

$$\Delta x = (2,24 \text{ m})(2,1 \cdot 10^{-5} \text{ rad}) = 5 \text{ } \mu\text{m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 37.6. Dyfrakcja na dwóch szczelinach

W doświadczeniach z dwiema szczelinami, omawianych w rozdziale 36, milcząco przyjęliśmy, że szczeliny były wąskie w porównaniu z długością fali oświetlającego je światła, tzn. że  $a \ll \lambda$ . Przy tak wąskich szczelinach centralne maksimum obrazu dyfrakcyjnego każdej pojedynczej szczeliny pokrywa cały ekran obserwacyjny. Ponadto interferencja światła z obu szczelin prowadzi do powstania jasnych prążków o jednakowym w przybliżeniu natężeniu (rys. 36.9).



**Rys. 37.13.** a) Oczekiwany wykres natężenia w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami o nieskończonej szerokości. b) Wykres natężenia dla dyfrakcji na typowej pojedynczej szczelinie (o skończonej szerokości  $a$ ). c) Oczekiwany wykres natężenia dla dyfrakcji na dwóch szczelinach o szerokości  $a$ . Krzywa na rysunku (b) stanowi obwiednię ograniczającą natężenie prążków interferencyjnych z rysunku (a). Zauważ, że pierwsze minima obrazu dyfrakcyjnego z rysunku (b) tłumią na rysunku (c) prążki interferencyjne widoczne na rysunku (a) w pobliżu kąta  $12^\circ$

Jednak w praktyce, przy korzystaniu ze światła białego, warunek  $a \ll \lambda$  często nie jest spełniony. W przypadku stosunkowo szerokich szczelin w wyniku interferencji światła z dwóch szczelin powstają jasne prążki, których natężenia nie są jednakowe. Tak więc natężenia prążków wytwarzanych w wyniku interferencji światła z dwóch szczelin (dyskutowane w rozdziale 36) są modyfikowane przez dyfrakcję światła biegnącego z każdej ze szczelin (którą zajmujemy się w tym rozdziale podręcznika).

Ilustrują to przykłady na rysunku 37.13. Na wykresie natężenia na rysunku 37.13a pokazano, jaki byłby rozkład natężeń wtedy, kiedy szczeliny były nieskończenie wąskie (tzn.  $a \ll \lambda$ ); wszystkie jasne prążki interferencyjne miałyby jednakowe natężenia. Wykres na rysunku 37.13b odpowiada dyfrakcji na pojedynczej szczelinie o pewnej skończonej szerokości, obraz dyfrakcyjny ma szerokie centralne maksimum i słabsze maksima boczne (w tym przypadku położone pod kątem  $\pm 17^\circ$ ). Na rysunku 37.13c pokazano spodziewany rozkład natężeń w obrazie interferencyjnym dwóch szczelin o skończonej szerokości. Wykres ten został sporządzony przy użyciu krzywej z rysunku 37.13b jako *obwiedni* dla wykresu natężeń z rysunku 37.13a. Położenia prążków nie zostały zmienione, natomiast natężenia zostały zmodyfikowane.

Na rysunku 37.14a pokazano rzeczywisty obraz, na którym w oczywisty sposób uwidacznia się zarówno interferencja światła z dwóch szczelin, jak i dyfrakcja. Jeżeli jedna ze szczelin zostanie zasłonięta, to obserwowany jest obraz charakterystyczny dla dyfrakcji na pojedynczej szczelinie (rys. 37.14b). Zwróć uwagę na podobieństwo obrazów i wykresów na rysunkach 37.14a i 37.13c oraz 37.14b i 37.13b. Porównując te rysunki, powinieneś pamiętać o tym, że rysunek 37.14a został celowo prześwietlony po to, aby nikłe maksima boczne mogły w ogóle być widoczne, oraz że pokazane są na nim dwie pary maksimumów bocznych, a nie jedna (jak na rys. 37.13b).

Natężenie obrazu interferencyjnego z dwóch szczelin, po uwzględnieniu efektów dyfrakcyjnych, jest opisane następującym wzorem:

$$I(\theta) = I_m(\cos^2 \beta) \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (\text{dwie szczeliny}), \quad (37.16)$$

w którym

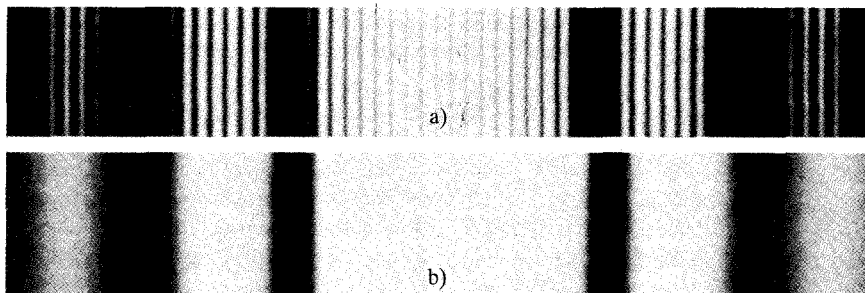
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (37.17)$$

oraz

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (37.18)$$

W wyrażeniach tych  $d$  jest odległością między środkami szczelin, natomiast  $a$  jest szerokością szczelin. Zauważ, że prawa strona równania (37.16) jest iloczynem  $I_m$  oraz dwóch czynników: 1) *czynnika interferencyjnego*  $\cos^2 \beta$ , który związany jest z interferencją światła z dwóch szczelin odległych od siebie o  $d$  (opisywaną równaniami (36.17) i (36.18)), oraz 2) *czynnika dyfrakcyjnego*  $[(\sin \alpha)/\alpha]^2$ , który związany jest z dyfrakcją na pojedynczej szczelinie o szerokości  $a$  (opisywaną równaniami (37.5) i (37.6)). Przyjrzyjmy się bliżej obu tym czynnikom. Jeżeli na przykład w równaniu (37.18)  $a$  zmierza do zera,  $a \rightarrow 0$ , to  $\alpha \rightarrow 0$  i  $(\sin \alpha)/\alpha \rightarrow 1$ . W takim przypadku równanie (37.16) redukuje się (tak jak tego oczekujemy) do równania opisującego obraz interferencyjny światła z dwóch szczelin o zmierzającej do zera szerokości, odległych od siebie o  $d$ . Podobnie położenie  $d = 0$  w równaniu (37.17) jest równoważne z pokryciem się dwóch szczelin, tzn. przejściem do pojedynczej szczeliny o szerokości  $a$ . Wtedy z równania (37.17) wynika, że  $\beta = 0$  i  $\cos^2 \beta = 1$ . W tym przypadku równanie (37.16) redukuje się (tak jak tego oczekujemy) do równania opisującego obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny o szerokości  $a$ .

Obraz dwóch szczelin, opisywany przez równanie (37.16) i zilustrowany na rysunku 37.14a, jest wynikiem równocześnie zachodzących zjawisk interferencji i dyfrakcji. Oba zjawiska są wynikiem nakładania się fal o różnych fazach w określonym punkcie. Jeżeli nakładające się na siebie fale pochodzą z niewielkiej liczby elementarnych, spójnych źródeł — tak jak w doświadczeniu z dwiema szczelinami, gdy  $a \ll \lambda$  — to mówimy o zjawisku *interferencji*. Jeżeli źródłem nakładających się na siebie fal jest pojedyncze czoło fali — tak jak w doświadczeniu z pojedynczą szczeliną — to mówimy o zjawisku *dyfrakcji*. To rozróżnienie między interferencją i dyfrakcją (które jest nieco dowolne i nie zawsze ma zastosowanie) jest wygodne, ale nie powinniśmy zapominać, że oba zjawiska są wynikiem superpozycji i zazwyczaj oba występują równocześnie (tak jak na rys. 37.14a).



Rys. 37.14. a) Prążki interferencyjne obserwowane w rzeczywistym układzie dwóch szczelin; porównaj ten obraz z rysunkiem 37.13c. b) Obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny; porównaj go z rysunkiem 37.13b

## Przykład 37.4

W doświadczeniu z dwiema szczelinami, odległymi o  $d = 19,44 \mu\text{m}$  i o szerokości  $a = 4,05 \mu\text{m}$ , używane jest światło o długości fali  $\lambda = 405 \text{ nm}$ . Rozważ równoczesną interferencję światła wychodzącego z obydwu szczelin i dyfrakcję światła na każdej ze szczelin.

a) Ile jasnych prążków interferencyjnych zawartych jest pod obwiednią centralnego maksimum dyfrakcyjnego?

### ROZWIĄZANIE:

Zacznijmy od analizy podstawowych mechanizmów, które są odpowiedzialne za obraz optyczny powstający w tym doświadczeniu:

**Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie:** Zauważmy, że granicami centralnego maksimum są położenia pierwszych minimum w indywidualnym obrazie dyfrakcyjnym każdej z dwóch szczelin (por. rys. 37.13). Położenia kątowe tych minimum ( $a \sin \theta = m\lambda$ ) opisuje równanie (37.3). Zapiszmy to równanie jako  $a \sin \theta = m_1\lambda$ , gdzie wskaźnik dolny 1 odnosi się do dyfrakcji na pojedynczej szczelinie. Dla pierwszych minimum w obrazie dyfrakcyjnym podstawiamy  $m_1 = 1$  i otrzymujemy

$$a \sin \theta = \lambda. \quad (37.19)$$

**Interferencja światła biegnącego z dwóch szczelin:** Tu zauważamy, że położenia kątowe jasnych prążków w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin opisuje równanie (37.14), które możemy zapisać jako

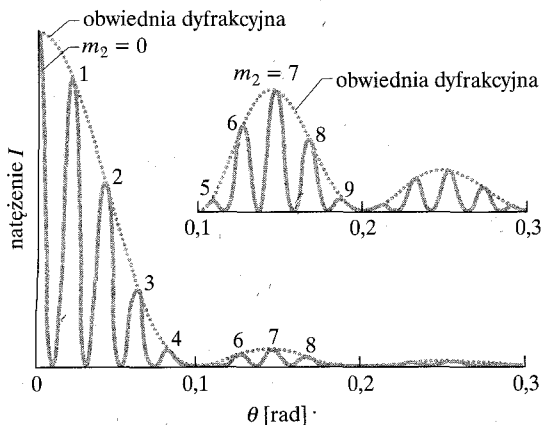
$$d \sin \theta = m_2\lambda, \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (37.20)$$

Tutaj wskaźnik dolny 2 odnosi się do interferencji światła biegnącego z dwóch szczelin.

Położenie pierwszego minimum dyfrakcyjnego w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin możemy ustalić, dzieląc stronami równanie (37.20) przez (37.19) i podstawiając podane wartości liczbowe; otrzymujemy w ten sposób

$$m_2 = \frac{d}{a} = \frac{19,44 \mu\text{m}}{4,05 \mu\text{m}} = 4,8.$$

Ten wynik sugeruje, że jasny prążek interferencyjny dla  $m_2 = 4$  mieści się w obszarze zajmowanym przez centralne maksimum obrazu dyfrakcyjnego pojedynczej szczeliny, natomiast dla  $m_2 = 5$  leży już poza tym obszarem. W obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego znajduje się więc centralny jasny prążek ( $m_2 = 0$ ) i cztery prążki interferencyjne (aż do  $m_2 = 4$ ) po każdej jego stronie. W sumie zatem pod obwiednią dyfrakcyjną centralnego maksimum mieści się dziewięć jasnych prążków interferencyjnych wytwarzanych przez dwie szczeliny. Układ tych prążków z jednej strony prążka centralnego zilustrowano na rysunku 37.15.



Rys. 37.15. Przykład 37.4. Połowa krzywej rozkładu natężenia w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami. Obwiednia dyfrakcyjna — krzywa kropkowana. Wstawka u góry — rozkład natężenia pod obwiednią dyfrakcyjną w pierwszym i drugim maksimum bocznym, powiększony w pionie

b) Ile jasnych prążków interferencyjnych zawartych jest pod obwiednią każdego z pierwszych bocznych maksimum dyfrakcyjnych?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że zewnętrzne granice pierwszych bocznych maksimum są wyznaczone przez położenia kątowe drugich minimum dyfrakcyjnych, dla których kąt  $\theta$  dany jest wzorem  $a \sin \theta = m_1\lambda$ , gdzie  $m_1 = 2$ :

$$a \sin \theta = 2\lambda. \quad (37.21)$$

Po podzieleniu stronami równania (37.20) przez (37.21) mamy

$$m_2 = \frac{2d}{a} = \frac{(2)(19,44 \mu\text{m})}{4,05 \mu\text{m}} = 9,6.$$

Ten wynik sugeruje, że drugie minimum dyfrakcyjne znajduje się tuż przed jasnym prążkiem interferencyjnym dla  $m_2 = 10$  w równaniu (37.20). W obszarze każdego pierwszego maksimum dyfrakcyjnego znajdują się prążki odpowiadające  $m_2$  równemu 5, 6, 7, 8, 9; w sumie pięć jasnych prążków interferencyjnych obrazu wytwarzanego przez dwie szczeliny, jak pokazano po prawej stronie u góry rysunku 37.15. Jeżeli jednak jasny prążek odpowiadający  $m_2 = 5$ , który jest silnie słumiony przez pierwsze minimum dyfrakcyjne, będzie zbyt słaby, aby można było go zaobserwować, to pod obwiednią pierwszego bocznego maksimum dyfrakcyjnego będą znajdować się tylko cztery jasne prążki interferencyjne.

**SPRAWDZIAN 5:** Jeżeli w opisanym wyżej przykładzie zwiększymy długość fali światła do 550 nm, to czy wtedy a) szerokość centralnego maksimum dyfrakcyjnego oraz b) liczba jasnych prążków interferencyjnych w obszarze tego maksimum, zwiększa się, zmniejsza, czy też nie ulega zmianie?

## 37.7. Siatki dyfrakcyjne

Jednym z najbardziej użytecznych narzędzi do badania światła i obiektów, które emitują i absorbują światło, jest **siatka dyfrakcyjna**. Urządzenie to jest podobne do układu dwóch szczelin zilustrowanego na rysunku 36.8, ale ma dużo większą liczbę  $N$  szczelin, nawet rzędu tysięcy na milimetr. Na rysunku 37.16 pokazano uproszczoną siatkę dyfrakcyjną, którą stanowi tylko pięć równoległych szczelin. Kiedy światło monochromatyczne przechodzi przez szczeliny, powstają wąskie prążki interferencyjne, które można analizować w celu wyznaczenia długości fali światła. (Siatkami dyfrakcyjnymi mogą być również nieprzezroczyste powierzchnie z wąskimi równoległymi rowkami (rysami), które tworzą układ taki sam, jak układ szczelin na rysunku 37.16. W takim przypadku światło jest odbijane od rys, a nie przepuszczane przez szczeliny).

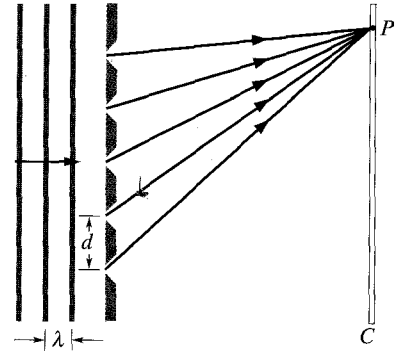
Jeżeli do oświetlania siatki dyfrakcyjnej używamy światła monochromatycznego i przechodzimy stopniowo od dwóch szczelin do coraz większej ich liczby  $N$ , to wykres natężenia zmienia się od typowego dla dwóch szczelin rozkładu natężenia, takiego jak na rysunku 37.13c, do znacznie bardziej skomplikowanego, a w końcu staje się prostym wykresem, takim jak na rysunku 37.17a. Obraz, jaki wtedy widzimy na ekranie obserwacyjnym, używając światła czerwonego, na przykład z lasera helowo-neonowego, pokazano na rysunku 37.17b. Maksyma są teraz bardzo wąskie (i dlatego często nazywa się je *liniami*) i rozdzielają je stosunkowo szerokie ciemne obszary.

Do wyznaczania położenia jasnych linii na ekranie obserwacyjnym wykorzystujemy znaną już nam procedurę. Zakładamy najpierw, że ekran znajduje się dostatecznie daleko od siatki, tak że promienie świetlne docierające do wybranego punktu  $P$  na ekranie wychodzą ze szczelin siatki, tworząc w przybliżeniu wiązkę promieni równoległych (rys. 37.18). Następnie dla każdej pary sąsiednich szczelin korzystamy z takiego samego rozumowania, jak w przypadku dyskusji zjawiska interferencji z dwóch szczelin. Odległość  $d$  między szczelinami nosi nazwę *stałej siatki*. (Jeżeli  $N$  szczelin zajmuje na siatce szerokość  $w$ , to stała siatki jest równa  $d = w/N$ ). Różnica dróg między sąsiednimi promieniami jest równa, tak jak poprzednio,  $d \sin \theta$  (rys. 37.18), gdzie  $\theta$  jest kątem, pod jakim znajduje się punkt  $P$  względem osi siatki dyfrakcyjnej (a więc i obrazu dyfrakcyjnego). W punkcie  $P$  powstaje linia wtedy, gdy różnica dróg sąsiednich promieni jest całkowitą wielokrotnością długości fali, tzn. wtedy, gdy

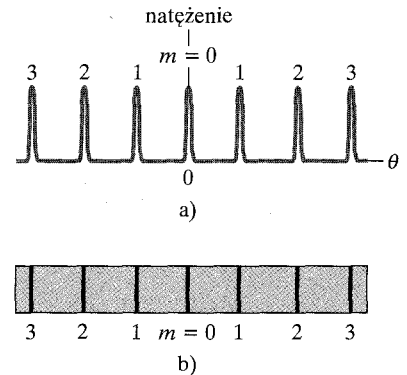
$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima — linie}), \quad (37.22)$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali światła. Każda liczba całkowita  $m$  odpowiada innej linii i wobec tego liczby te mogą być używane do oznaczania linii, tak jak na rysunku 37.17. Liczby  $m$  nazywane są *rzędami*, a linie określane odpowiednio jako: linia zerowego rzędu (linia centralna o  $m = 0$ ), linia pierwszego rzędu ( $m = 1$ ), linia drugiego rzędu ( $m = 2$ ) i tak dalej.

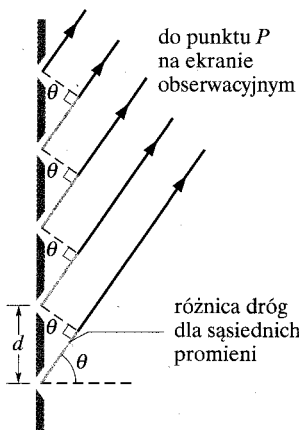
Jeżeli równanie (31.22) przepiszemy w postaci  $\theta = \arcsin(m\lambda/d)$ , to widać od razu, że dla danej siatki dyfrakcyjnej położenie katowe (kąt  $\theta$ ) każdej linii (np. linii trzeciego rzędu) zależy od długości fali światła padającego na siatkę.



Rys. 37.16. Uproszczona siatka dyfrakcyjna, na którą składa się tylko pięć szczelin, wytwarza obraz interferencyjny na odległym ekranie obserwacyjnym  $C$



Rys. 37.17. a) Wykres natężenia w obrazie wytwarzanym przez siatkę dyfrakcyjną o bardzo dużej liczbie szczelin składa się z wąskich linii, które tutaj oznaczone są odpowiadającymi im numerami rzędów  $m$ . b) Odpowiadające rysunkowi (a) jasne prążki obserwowane na ekranie nazywane są liniami. Oznaczone są one również numerami odpowiednich rzędów, a na rysunku pokazane są linie zerowego, pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu



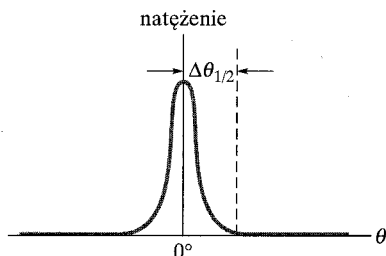
Rys. 37.18. Promienie świetlne wychodzące ze szczelin siatki dyfrakcyjnej i zmierzające w kierunku odległego punktu  $P$  na ekranie obserwacyjnym tworzą wiązki promieni w przybliżeniu równoległych. Różnica dróg dla każdej pary sąsiednich promieni jest równa  $d \sin \theta$ , gdzie kąt  $\theta$  zdefiniowany jest tak jak na rysunku. (Szczeliny rozciągają się ponad i pod kartką)

Dlatego też, jeżeli na siatkę pada światło o nieznannej długości fali, to pomiar kątów  $\theta$  dla linii wyższych rzędów pozwala na wyznaczenie, za pomocą równania (37.22), długości fali tego światła. Nawet wtedy, gdy światło zawiera fale o kilku nieznanach długościach, można je w ten sposób rozróżnić i zidentyfikować. Jest to niewykonalne przy zastosowaniu układu dwóch szczelin z paragrafu 36.4, chociaż i tam stosuje się to samo wyrażenie opisujące związek położenia linii i długości fali światła. W obrazie interferencyjnym dwóch szczelin jasne prążki odpowiadające różnym długościom fali tak silnie nakładają się na siebie, że nie można ich rozróżnić.

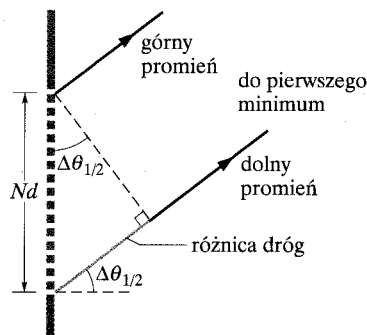
### Szerokość linii

Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej, tzn. jej zdolność do rozdzielania linii o różnych długościach fali, zależy od szerokości linii. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na szerokość połówkową linii centralnej (linii, dla której  $m = 0$ ), a następnie podamy wyrażenie opisujące szerokości połówkowe dla linii wyższych rzędów. Szerokość połówkową linii centralnej definiujemy jako różnicę położenia kąowego  $\Delta\theta_{1/2}$  mierzoną od środka linii ( $\theta = 0$ ) na zewnątrz do miejsca, gdzie linia efektywnie znika, a rozpoczyna się ciemny obszar pierwszego minimum (rys. 37.19). W tym minimum  $N$  promieni świetlnych przychodzących z  $N$  szczelin wygasza się nawzajem całkowicie. (Całkowita szerokość linii centralnej jest oczywiście równa  $2(\Delta\theta_{1/2})$ , ale linie widmowe porównuje się zazwyczaj, podając ich szerokości połówkowe).

W paragrafie 37.2 mieliśmy również do czynienia ze znoszeniem się (wygaszaniem) wielkiej liczby promieni, wywołanym przez ich uginanie się na pojedynczej szczelinie. Otrzymaliśmy wówczas równanie (37.3), które ze względu na podobieństwo obu rozważanych przypadków będziemy mogli zastosować teraz do wyznaczenia położenia pierwszego minimum. Zgodnie z równaniem (37.3) pierwsze minimum powstaje tam, gdzie różnica dróg między skrajnymi promieniami jest równa  $\lambda$ . W przypadku dyfrakcji na pojedynczej szczelinie różnica ta



Rys. 37.19. Na wykresie zależności napięcia  $I$  od położenia kąowego  $\theta$  (takim jak na rysunku 37.17a) szerokość połówkowa  $\Delta\theta_{1/2}$  linii centralnej jest mierzona od jej środka (od maksymalnej wartości napięcia) do sąsiedniego minimum



Rys. 37.20. Odległość między skrajnymi szczelinami (górną i dolną) siatki dyfrakcyjnej o  $N$  szczelinach wynosi  $Nd$ . Różnica długości dróg promieni świetlnych wychodzących z tych szczelin jest równa  $Nd \sin(\Delta\theta_{1/2})$ , gdzie  $\Delta\theta_{1/2}$  jest położeniem kątowym pierwszego minimum. (Dla czytelności rysunku kąt ten został znacznie powiększony)

wynosi  $a \sin \theta$ . Dla siatki o  $N$  szczelinach, odległych od siebie o  $d$ , odległość między skrajnymi szczelinami (z góry i z dołu siatki na rysunku 37.20) wynosi  $Nd$  i wobec tego różnica dróg między skrajnymi promieniami (wychodzącymi ze skrajnych szczelin) jest w tym przypadku równa  $Nd \sin \Delta\theta_{1/2}$ . Stąd wynika, że pierwsze minimum powstaje w miejscu, gdzie

$$Nd \sin \Delta\theta_{1/2} = \lambda. \quad (37.23)$$

Ponieważ  $\Delta\theta_{1/2}$  jest małe, wobec tego  $\sin \Delta\theta_{1/2} = \Delta\theta_{1/2}$  (w mierze łukowej). Po podstawieniu tego wyrażenia do równania (37.23) otrzymujemy szerokość połówkową linii centralnej (linii zerowego rzędu):

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd} \quad (\text{szerokość połówkowa linii centralnej}). \quad (37.24)$$

Bez dowodu podamy, że szerokość połówkowa każdej innej linii zależy od jej położenia kąowego i jest równa

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (\text{szerokość połówkowa linii pod kątem } \theta). \quad (37.25)$$

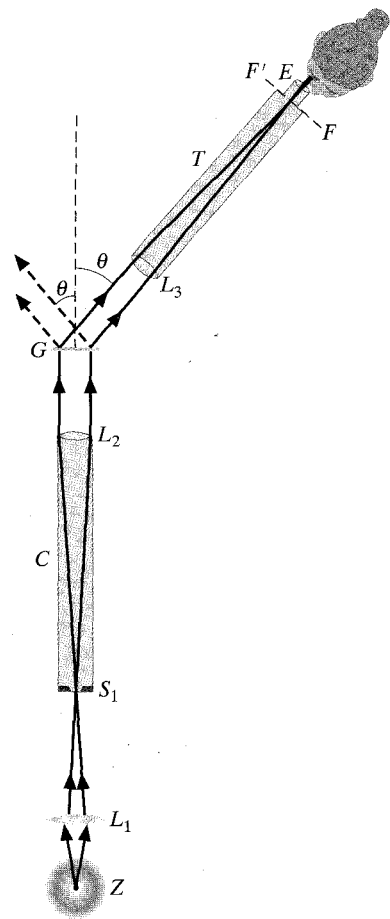
Zauważ, że dla światła o danej długości fali  $\lambda$  i przy zadanej stałej siatki  $d$  szerokość linii będzie się zmniejszać wraz ze wzrostem liczby  $N$  szczelin. Zatem siatka o większej liczbie szczelin  $N$  znacznie lepiej rozdziela linie o różnych długościach fali niż siatka o mniejszym  $N$ , ponieważ wytwarza węższe, a więc słabiej nakładające się linie.

### Zastosowanie siatek dyfrakcyjnych

Siatki dyfrakcyjne są powszechnie używane do wyznaczania długości fali światła wysyłanego przez różne źródła, od lamp po gwiazdy. Na rysunku 37.21 pokazano schemat służącego do tego celu prostego *spektroskopu siatkowego*. Światło ze źródła  $Z$  jest ogniskowane przez soczewkę  $L_1$  na pionowej szczelinie  $S_1$ , która znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej soczewki  $L_2$ . Światło wychodzące z ramienia  $C$  (zwanego *kolimatorem*) jest falą płaską, która pada na siatkę dyfrakcyjną  $G$ , ulega ugięciu i tworzy obraz dyfrakcyjny, na którym kąt ugięcia  $\theta$  dla zerowego rzędu ( $m = 0$ ), względem osi siatki, jest równy  $0^\circ$ .

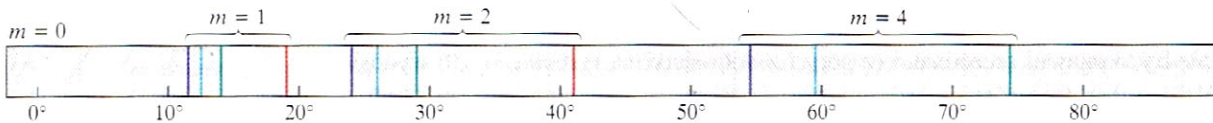
Obraz dyfrakcyjny, powstający pod różnymi kątami  $\theta$  na ekranie obserwacyjnym ustawionym prostopadle do osi siatki dyfrakcyjnej, możemy oglądać w spektroskopie, ustawiając drugie ramię spektroskopu (czyli teleskop  $T$ ) pod żądanym kątem  $\theta$  względem osi kolimatora, tak jak na rysunku 37.21. Soczewka  $L_3$  teleskopu ogniskuje światło ugięte pod kątem  $\theta$  (i pod kątami nieco mniejszymi i nieco większymi od  $\theta$ ) w płaszczyźnie ogniskowej  $F'F'$  teleskopu. Patrząc przez okular  $E$  na wytworzony tam obraz, oglądamy go w powiększeniu.

Zmieniając kąt  $\theta$  ustawienia teleskopu, możemy obejrzeć cały obraz dyfrakcyjny. W każdym rzędzie (poza zerowym rzędem,  $m = 0$ ), światło wchodzące do spektroskopu zostaje rozłożone wedle długości fali (barw), jakie się nań składają (mówimy, że powstaje *widmo* tego światła) i za pomocą równania (37.22) możemy ustalić, jakie długości fali są emitowane przez źródło. Jeżeli promieniowanie źródła ma charakter dyskretny (występują w nim tylko pewne długości fali), to obraz,

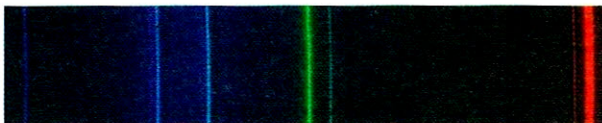


Rys. 37.21. Uproszczona wersja spektroskopu siatkowego, używanego do pomiaru długości fali światła wysyłanego przez źródło  $Z$





Rys. 37.22. Zerowy, pierwszy, drugi i czwarty rząd widma emisyjnego wodoru w zakresie widzialnym. Zauważ, że odległości między liniami wzrastają dla większych kątów ugięcia. (Linie stają się jednocześnie słabsze i szersze, czego nie pokazano na rysunku)



Rys. 37.23. Linie emisyjne kadmu z zakresu widzialnego, oglądane przez spektroskop siatkowy

jaki obserwujemy, zmieniając ustawienie teleskopu w zakresie kątów odpowiadających określonemu rzędowi  $m$ , składa się z pionowych barwnych linii, z których każda odpowiada określonej długości fali, przy czym kąt  $\theta$  jest mniejszy dla linii o mniejszej długości fali, a większy dla linii o większej długości fali.

Na przykład światło emitowane przez lampę wodorową (która wypełniona jest gazowym wodorem) ma w obszarze widzialnym cztery dyskretne długości fali. Światło takie oglądane nieuzbrojonym okiem jest odbierane jako światło białe. Ale wtedy, gdy oglądamy je przez spektroskop siatkowy, możemy zobaczyć, że w kolejnych rzędach widma występują cztery linie, których barwy odpowiadają długościom fali z zakresu światła widzialnego (linie te noszą nazwę *linii emisyjnych*). Cztery rzędy widma wodoru pokazane są na rysunku 37.22. W zerowym rzędzie ( $m = 0$ ) linie odpowiadające wszystkim czterem długościom fali są na siebie nałożone i dla kąta  $\theta = 0$  widoczna jest tylko pojedyncza biała linia. W widmach wyższych rzędów linie są rozdzielone.

Na rysunku 37.22, dla przejrzystości ilustracji, nie pokazano widma trzeciego rzędu, którego linie nakładają się na linie widma drugiego i czwartego rzędu. W widmie czwartego rzędu brakuje linii czerwonej, która nie jest wytwarzana przez siatkę użytego spektrografu. Jeżeli próbujemy wyznaczyć z równania (37.22) kąt  $\theta$  dla długości fali tej czerwonej linii w czwartym rzędzie ( $m = 4$ ), to otrzymujemy  $\sin \theta$  większy od jedności, co nie jest możliwe. Mówimy, że widmo czwartego rzędu jest *niepełne* dla tej siatki; dla innej siatki o większej stałej  $d$  może ono być pełne, siatka taka daje bowiem mniejsze rozdzielenie linii (mniejszy odstęp między liniami) niż na rysunku 37.22. Rysunek 37.23 to fotografia linii (z zakresu widzialnego) w widmie światła emitowanego przez atomy kadmu.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku pokazano dwie linie różnych rzędów wytwarzane przez siatkę dyfrakcyjną dla monochromatycznego światła czerwonego. a) Czy środek obrazu dyfrakcyjnego jest po lewej, czy po prawej stronie tego rysunku? b) Jeżeli tę samą obserwację wykonamy, używając monochromatycznego światła zielonego, to czy wtedy szerokość połówkowa linii w tych samych dwóch rzędach będzie większa, mniejsza, czy też taka sama, jak szerokość połówkowa linii pokazanych na rysunku?



## 37.8. Siatki dyfrakcyjne: dyspersja i zdolność rozdzielcza

### Dyspersja

Przydatność siatki dyfrakcyjnej do rozróżniania bliskich siebie długości fali światła (tak jak w spektroskopie siatkowym) określona jest przez jej **dyspersję kątową**, zdefiniowaną jako

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \quad (\text{definicja dyspersji kątowej}); \quad (37.26)$$

$\Delta\theta$  jest odległością kątową między dwiema liniami, których długości fali różnią się o  $\Delta\lambda$ . Im większe jest  $D$ , tym większa jest odległość pomiędzy dwiema liniami, których długości fali różnią się o  $\Delta\lambda$ . Pokażemy niżej, że dyspersja kątowa siatki dyfrakcyjnej wiąże się z kątem  $\theta$  zależnością

$$D = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (\text{dyspersja kątowa siatki dyfrakcyjnej}). \quad (37.27)$$

Żeby zatem uzyskać większą dyspersję, powinniśmy używać siatki o mniejszej stałej  $d$  (mniejszym odstępnie między szczelinami siatki) i brać pod uwagę wyższy rząd  $m$ . Zauważ, że dyspersja nie zależy od całkowitej liczby  $N$  szczelin. W układzie SI jednostką dyspersji  $D$  jest stopień na metr albo radian na metr.

### Zdolność rozdzielcza

Żeby *rozdzielić* linie, których długości fali są bliskie sobie (tzn. żeby linie były rozróżnialne), powinny one być możliwie jak najwięźsze. Albo mówiąc inaczej, siatka powinna mieć dużą **zdolność rozdzielczą**  $R$ , która jest zdefiniowana jako

$$R = \frac{\lambda_{sr}}{\Delta\lambda} \quad (\text{definicja zdolności rozdzielczej}). \quad (37.28)$$

Tutaj  $\lambda_{sr}$  jest średnią długością fali dwóch linii, które są ledwo rozpoznawalne jako rozdzielone pojedyncze linie, natomiast  $\Delta\lambda$  jest różnicą ich długości fali. Im większe jest  $R$ , tym bliżej siebie mogą być dwie linie, które siatka będzie w stanie rozdzielić. Pokażemy niżej, że zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej jest opisywana prostym wyrażeniem

$$R = Nm \quad (\text{zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej}). \quad (37.29)$$

Dużą zdolność rozdzielczą ma siatka o dużej całkowitej liczbie szczelin (duże  $N$  w równaniu (37.29)).

### Wyprowadzenie równania (37.27)

Wychodzimy od równania (37.22), które podaje położenie linii w obrazie wytwarzanym przez siatkę dyfrakcyjną:

$$d \sin \theta = m\lambda.$$

Potraktujemy  $\theta$  oraz  $\lambda$  jako zmienne i zróżniczkujemy stronami to równanie. Otrzymamy więc

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda.$$

Dla wystarczająco małych kątów różniczki te możemy przybliżyć przez małe przyrosty zmiennych i wtedy

$$d \cos \theta \Delta\theta = m \Delta\lambda, \quad (37.30)$$

czyli

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}.$$

Ale stosunek po lewej stronie równości to po prostu  $D$  (por. równanie (37.26)), a więc rzeczywiście wyprowadziliśmy równanie (37.27).

### Wyprowadzenie równania (37.29)

Wychodzimy od równania (37.30), które podaje położenie linii w obrazie wytwarzanym przez siatkę dyfrakcyjną i które zostało wyprowadzone z równania (37.22). Tutaj  $\Delta\lambda$  jest niewielką różnicą długości dwóch fal uginanych przez siatkę, a  $\Delta\theta$  jest ich odległością katową w obrazie dyfrakcyjnym. Jeżeli  $\Delta\theta$  ma być najmniejszym kątem, przy którym dwie linie są rozdzielone, to musi on (zgodnie z kryterium Rayleigha) być równy szerokości połowkowej każdej z linii, którą określa równanie (37.25):

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}.$$

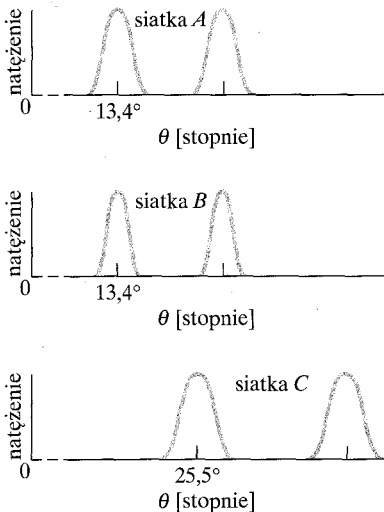
Jeżeli do równania (37.30) zamiast  $\Delta\theta$  podstawimy podane wyżej  $\Delta\theta_{1/2}$ , to otrzymamy wtedy

$$\frac{\lambda}{N} = m \Delta\lambda,$$

skąd już łatwo znajdziemy, że

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm,$$

czyli równanie (37.29), które mieliśmy wyprowadzić.



Rys. 37.24. Krzywe natężenia dla światła o dwóch długościach fali, przechodzącego przez siatki dyfrakcyjne wymienione w tabeli 37.1. Siatka  $B$  ma największą zdolność rozdzielczą, a siatka  $C$  największą dyspersję

### Znaczenie dyspersji i zdolności rozdzielczej

Zdolności rozdzielczej siatki dyfrakcyjnej nie należy mylić z jej dyspersją. W tabeli 37.1 zebrano parametry trzech siatek dyfrakcyjnych, w odniesieniu do linii pierwszego rzędu ( $m = 1$  w równaniu (37.22)), obserwowanych dla światła o długości fali  $\lambda = 589$  nm. Powinieneś w ramach ćwiczenia sprawdzić, czy podane w tabeli wartości  $D$  oraz  $R$  można uzyskać, korzystając odpowiednio z równań (37.27) i (37.29). (W obliczeniach  $D$  konieczna będzie zamiana radianów/metr na stopnie/ $\mu\text{m}$ ).

Dla warunków określonych w tabeli siatki  $A$  i  $B$  mają taką samą *dyspersję katową*, a siatki  $A$  i  $C$  taką samą *zdolność rozdzielczą*.

Na rysunku 37.24 pokazano rozkłady natężeń (albo inaczej *kształty linii*), jakie byłyby wytwarzane przez te siatki dla dwóch linii o długościach fali  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ,

Tabela 37.1. Parametry trzech siatek dyfrakcyjnych ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ,  $m = 1$ )

Siatka	$N$	$d[\text{nm}]$	$\theta$	$D[^\circ/\mu\text{m}]$	$R$
A	10 000	2540	$13,4^\circ$	23,2	10 000
B	20 000	2540	$13,4^\circ$	23,2	20 000
C	10 000	1370	$25,5^\circ$	46,3	10 000

w pobliżu linii o długości  $\lambda = 589 \text{ nm}$ . Siatka B o większej zdolności rozdzielczej wytwarza węższe linie i dlatego można za jej pomocą rozróżnić linie, których długości fali są znacznie bardziej zbliżone do siebie niż w przypadku zilustrowanym na rysunku. Siatka C o większej dyspersji daje większą odległość kątową między liniami.

### Przykład 37.5

Siatka dyfrakcyjna ma  $1,26 \cdot 10^4$  równoodległych szczelin na odcinku  $w = 2,54 \text{ cm}$ . Oświetla ją padające prostopadle do jej powierzchni żółte światło lampy sodowej. W świetle tym występują dwie linie — znane jako dublet sodowy — o niewiele różniących się długościach fali  $589 \text{ nm}$  i  $589,59 \text{ nm}$ .

a) Jakie jest położenie kątowe maksimum pierwszego rzędu (po obu stronach środka obrazu dyfrakcyjnego dla składowej dubletu o długości fali  $589 \text{ nm}$ )?

#### ROZWIĄZANIE:

➤ Kluczowe dla odpowiedzi na to pytanie jest spostrzeżenie, że położenia maksimum wytwarzanych przez siatkę dyfrakcyjną można wyznaczyć, korzystając z równania (37.22). Stała  $d$  tej siatki jest równa

$$d = \frac{w}{N} = \frac{25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,26 \cdot 10^4} = 2,016 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2016 \text{ nm}.$$

Maksimum pierwszego rzędu odpowiada  $m = 1$ . Jeżeli te wielkości wstawimy do równania (37.22), to otrzymamy

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{(1)(589,00 \text{ nm})}{2016 \text{ nm}}\right) = 16,99^\circ \approx 17^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Korzystając ze wzoru na dyspersję siatki, oblicz odległość kątową między liniami dubletu sodowego w pierwszym rzędzie.

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

➤ 1. Odległość kątowa  $\Delta\theta$  pomiędzy dwiema liniami w pierwszym rzędzie zależy, zgodnie z równaniem (37.26), od różnicy ich długości fali  $\Delta\lambda$  oraz od dyspersji siatki  $D$  ( $D = \Delta\theta/\Delta\lambda$ ).

➤ 2. Dyspersja  $D$  zależy od kąta  $\theta$ , dla którego ma być obliczona. Możemy założyć, że w pierwszym rzędzie obie linie du-

bletu sodowego wystąpią dostatecznie blisko siebie, żebyśmy mogli obliczyć dyspersję  $D$  dla kąta  $\theta = 16,99^\circ$ , jaki wyznaczyliśmy dla jednej z tych linii w odpowiedzi na pytanie (a). Wtedy dyspersja z równania (37.27) będzie równa

$$D = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{1}{(2016 \text{ nm})(\cos 16,99^\circ)} = 5,187 \cdot 10^{-4} \text{ rad/nm}.$$

Wówczas z równania (37.26) otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= D\Delta\lambda = (5,187 \cdot 10^{-4} \text{ rad/nm})(589,59 \text{ nm} - 589 \text{ nm}) \\ &= 3,06 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,0175^\circ. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Możesz wykazać, że wynik ten zależy od stałej siatki  $d$ , nie zależy natomiast od całkowitej liczby szczelin siatki.

c) Jaką najmniejszą liczbę szczelin powinna mieć siatka, żeby można było, korzystając z niej, rozdzielić dublet sodowy w pierwszym rzędzie?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

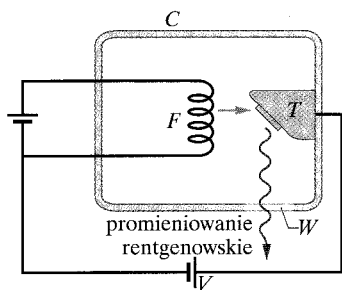
➤ 1. Zgodnie z równaniem (37.29) zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej w każdym rzędzie  $m$  jest wyznaczona przez liczbę szczelin siatki ( $R = Nm$ ).

➤ 2. Zgodnie z równaniem (37.28) najmniejsza różnica długości fali  $\Delta\lambda$ , jaka może być rozdzielona, zależy od średniej długości fali dla dwóch linii i od zdolności rozdzielczej siatki ( $R = \lambda_{\text{sr}}/\Delta\lambda$ ). Na to, żeby linie dubletu sodowego były w ogóle rozdzielane (rozróżnialne jako dwie linie)  $\Delta\lambda$  musi być równa  $0,59 \text{ nm}$ , a  $\lambda_{\text{sr}}$  musi być równa  $589,3 \text{ nm}$ .

Zbierając razem te kluczowe spostrzeżenia, stwierdzamy, że najmniejsza liczba szczelin, przy której siatka dyfrakcyjna rozdziela dublet sodowy, jest równa

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{sr}}}{m\Delta\lambda} = \frac{589,3 \text{ nm}}{(1)(0,59 \text{ nm})} = 999 \text{ szczelin}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## 37.9. Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego



Rys. 37.25. Wytwarzanie promieniowania rentgenowskiego. Elektrony opuszczające rozżarzone włókno  $F$  są przyspieszane przez różnicę potencjałów  $V$  i uderzają w metalową tarczę  $T$ . „Okienko”  $W$  w próżniowej komorze  $C$  jest przezroczyste dla promieniowania rentgenowskiego

Promieniowanie rentgenowskie (promienie X) to promieniowanie elektromagnetyczne z zakresu długości fali rzędu  $1\text{ \AA}$  ( $= 10^{-10}\text{ m}$ ). Dla porównania długość fali ze środka zakresu widzialnego widma promieniowania elektromagnetycznego, czyli światła, wynosi  $550\text{ nm}$ , czyli  $5,5 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ . Na rysunku 37.25 pokazano zasadę wytwarzania promieniowania rentgenowskiego — elektrony opuszczające rozżarzone włókno  $F$  są przyspieszane przez różnicę potencjałów  $V$  i uderzają w metalową tarczę  $T$ , przy czym wytwarzane jest promieniowanie rentgenowskie.

Do rozdzielenia dwóch linii o różnych długościach fali z zakresu promieniowania rentgenowskiego nie można korzystać ze zwykłej optycznej siatki dyfrakcyjnej. Aby to sprawdzić, weźmy siatkę dyfrakcyjną o stałej  $d = 3000\text{ nm}$  i użyjmy promieniowania o długości fali  $\lambda = 1\text{ \AA}$ . Jak wynika z równania (37.22), maksimum pierwszego rzędu powstaje wówczas w odległości kątowej równej

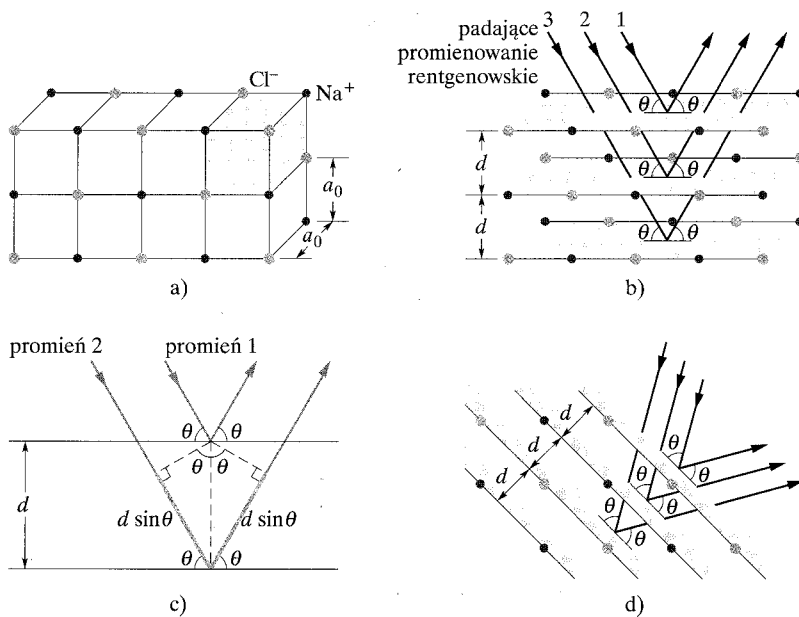
$$\theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{(1)(0,1\text{ nm})}{3000\text{ nm}}\right) = 0,0019^\circ$$

od maksimum centralnego, czyli zbyt blisko tego maksimum, gdyż takiego odchylenia nie da się zmierzyć. Potrzebna byłaby siatka dyfrakcyjna o stałej  $d \approx \lambda$ , ale ponieważ długości fali promieniowania rentgenowskiego są bliskie rozmiarów atomowych, wobec tego takiej siatki nie można wykonać metodami mechanicznymi.

W 1912 r. fizyk niemiecki Max von Laue uświadomił sobie, że krystaliczne ciała stałe, które składają się z uporządkowanych szeregów atomów, mogłyby stanowić naturalną trójwymiarową „siatkę dyfrakcyjną” dla promieniowania rentgenowskiego. Pomysł wziął się stąd, że w kryształach, takim jak chlorek sodu ( $\text{NaCl}$ ), podstawowy układ atomów (zwany *komórką elementarną* kryształu) jest powielany (we wszystkich trzech prostopadłych kierunkach). Z każdą komórką elementarną kryształu  $\text{NaCl}$  związane są cztery jony sodu i cztery jony chloru. Na rysunku 37.26a pokazano przekrój przez fragment kryształu  $\text{NaCl}$  i jego komórkę elementarną, która jest sześcianem o boku  $a_0$ .

Kiedy wiązka promieni rentgenowskich wchodzi do kryształu, takiego jak kryształ  $\text{NaCl}$ , promienie są *rozpraszane* we wszystkich kierunkach przez kryształ. W niektórych kierunkach interferencja rozproszonych fal promieniowania rentgenowskiego jest destruktywna, co prowadzi do minimów natężenia, a w innych kierunkach jest ona konstruktywna, co prowadzi do maksimów natężenia. Taki proces rozpraszania i interferencji jest rodzajem dyfrakcji, chociaż nie jest to dyfrakcja taka, jak dyskutowane przez nas wcześniej ugięcie światła przechodzącego przez szczelinę, czy ugięcie światła na krawędzi.

Chociaż proces dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego na kryształach jest procesem skomplikowanym, to jednak okazuje się, że maksima natężenia powstają w takich kierunkach, *jak gdyby* promieniowanie rentgenowskie było odbijane od *rodziny równoległych płaszczyzn odbijających (płaszczyzn sieciowych)* zawartych w regularnie uporządkowanych atomach kryształu. (W rzeczywistości promieniowanie rentgenowskie nie ulega zwierciadlanemu odbiciu od żadnych płaszczyzn sieciowych; posługujemy się tymi fikcyjnymi płaszczyznami w celu uproszczenia analizy rzeczywistego procesu dyfrakcyjnego).



Rys. 37.26. a) Sześcienna struktura kryształu NaCl z pokazanymi jonami sodu i chloru oraz komórką elementarną kryształu (zacięniowana). b) Padające promieniowanie rentgenowskie ulega dyfrakcji na strukturze (a). Ich ugięcie zachodzi tak, jak gdyby były odbijane od rodziny równoległych płaszczyzn, pod kątem odbicia równym kątowii ich padania (oba kąty są mierzone względem płaszczyzny, a nie jak w optyce względem normalnej do płaszczyzny odbijającej). c) Różnica dróg między falami efektywnie odbitymi przez dwie sąsiednie płaszczyzny jest  $2d \sin \theta$ . d) Inny kierunek promieniowania rentgenowskiego zachodzi na płaszczyznach należących do innej rodziny płaszczyzn odbijających

Na rysunku 37.26b przedstawiono trzy płaszczyzny sieciowe (jednej z wielu rodzin płaszczyzn sieciowych kryształu) o *odległości międzyplaszczynowej*  $d$ , od których — jak mówimy — odbija się promieniowanie rentgenowskie. Promienie 1, 2 i 3 odbijają się odpowiednio od pierwszej, drugiej i trzeciej płaszczyzny. Kąty padania i odbicia na każdej płaszczyźnie są oznaczone jako  $\theta$ . Przeciwnie niż w optyce, kąty te nie są zdefiniowane jako kąty między kierunkami promienia padającego lub odbitego a normalną do płaszczyzny, lecz jako kąty między tymi kierunkami a *płaszczyzną* odbijającą (dlatego nazywa się je także kątami poślizgu). Na rysunku 37.26b płaszczyzny odbijające są odległe od siebie o krawędź komórki elementarnej  $a_0$ .

Na rysunku 37.26c pokazano odbicie od dwóch sąsiednich płaszczyzn. Padające na kryształ fale promieniowania rentgenowskiego, reprezentowane przez promienie 1 i 2, mają zgodne fazy. Po odbiciu muszą one mieć zgodne fazy, gdyż odbicie i płaszczyzny odbijające zostały zdefiniowane wyłącznie w celu objaśnienia powstawania maksimów w dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego na kryształach. Inaczej niż światło, promieniowanie rentgenowskie nie ulega załamaniu przy wejściu do kryształu i nie definiujemy współczynnika załamania dla dyskutowanej sytuacji. Różnica faz między obiema falami, reprezentowanymi przez promienie 1 i 2, jest zatem po wyjściu z kryształu określona wyłącznie

przez różnicę przebytych przez nie dróg. Żeby te promienie miały zgodne fazy, różnica dróg musi być równa całkowitej wielokrotności długości fali  $\lambda$ .

Po dorysowaniu na rysunku 37.26c dwóch prostopadłych do promieni linii przerywanych, z prostych rozważań trygonometrycznych znajdziemy, że różnica dróg jest równa  $2d \sin \theta$ . Jest to słuszne również dla każdej pary sąsiednich płaszczyzn z rodziny odbijających płaszczyzn sieciowych zilustrowanych na rysunku 37.26b. Zatem warunek określający występowanie maksimum natężenia dla dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego będzie miał postać

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{prawo Bragga}), \quad (37.31)$$

gdzie  $m$  jest rzędem maksimum natężenia. Równanie (37.31) zwane jest **warunkiem Bragga**, od nazwiska brytyjskiego fizyka W.L. Bragga, który je po raz pierwszy wyprowadził. (Wspólnie ze swoim ojcem za zastosowanie promieniowania rentgenowskiego do badania struktury kryształów otrzymał on Nagrodę Nobla w 1915 r.). Kąt padania i odbicia w równaniu (37.31) nazywa się *kątem Bragga*.

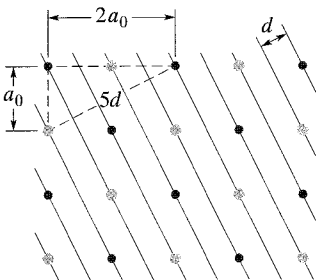
Niezależnie od tego, pod jakim kątem promieniowanie rentgenowskie pada na kryształ, zawsze istnieje rodzina płaszczyzn sieciowych, od której — jak mówimy — ulega ono odbiciu i możemy zastosować warunek Bragga. Zauważ, że na rysunku 37.26d struktura kryształu jest taka sama, jak na rysunku 37.26a, ale kąt, pod jakim promienie wnikają do kryształu, jest inny niż na rysunku 37.26b. Do opisu dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego z wykorzystaniem warunku Bragga temu nowemu kątowi  $\theta$  musimy przypisać nową rodzinę płaszczyzn odbijających, o innej odległości międzypłaszczyznowej  $d$ .

Na rysunku 37.27 pokazano, jak można powiązać odległość międzypłaszczyznową  $d$  z rozmiarem komórki elementarnej  $a_0$ . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że dla pokazanej na rysunku rodziny płaszczyzn sieciowych

$$5d = \sqrt{5}a_0,$$

czyli

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \quad (37.32)$$



Rys. 37.27. Rodzina płaszczyzn odbijających (płaszczyzn sieciowych) w strukturze kryształu z rysunku 37.26a i objaśnienie, jak długość krawędzi komórki elementarnej  $a_0$  wiąże się z odległością międzypłaszczyznową  $d$

Na rysunku 37.27 wskazano, jak można wyznaczyć wymiary komórki elementarnej, jeżeli z pomiarów dyfrakcji wyznaczono odległość międzypłaszczyznową.

Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego jest potężnym narzędziem umożliwiającym badanie zarówno widm promieniowania rentgenowskiego, jak i rozmieszczenia atomów w strukturach krystalicznych. Do badania widm wybiera się określony zespół płaszczyzn sieciowych o znanej odległości międzypłaszczyznowej. Płaszczyzny te odbijają fale o różnych długościach pod różnymi kątami. Używając detektora rozróżniającego kąty, można wyznaczyć długości fali promieniowania zbieranego przez detektor. Kryształy mogą być badane przy użyciu monochromatycznego promieniowania rentgenowskiego, co umożliwia nie tylko wyznaczanie odległości międzypłaszczyznowych dla różnych płaszczyzn kryształu, ale również struktury komórki elementarnej.

**Dyfrakcja** Kiedy fale napotyka krawędź lub przeszkodę bądź otwór o rozmiarach porównywalnych z długością fali, rozpraszając się za nimi, interferują ze sobą. Zjawisko to nazywa się **dyfrakcją**.

**Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie** Fale przechodzące przez długą, wąską szczelinę o szerokości  $a$  wytwarzają na ekranie obraz **dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny**, który zawiera centralne maksimum oraz inne maksima rozdzielone przez minima, których położenia kątowne  $\theta$  w stosunku do osi układu spełniają zależność

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{minima}). \quad (37.3)$$

Natężenie obrazu dyfrakcyjnego dla każdego kąta  $\theta$  jest

$$I(\theta) = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad (37.5, 37.6)$$

a  $I_m$  jest natężeniem w środku obrazu.

**Dyfrakcja na otworze kołowym** Dyfrakcja na otworze kołowym lub na soczewce o średnicy  $d$  prowadzi do powstawania centralnego maksimum i koncentrycznych z nim maksimów i minimów, przy czym pierwsze minimum występuje pod kątem  $\theta$  danym przez równanie

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{pierwsze minimum; otwór kołowy}). \quad (37.12)$$

**Kryterium Rayleigha** Kryterium Rayleigha mówi, że dwa obiekty są na granicy rozdzielania (rozdzielenia jako osobne), jeżeli centralne maksimum jednego z nich znajduje się w miejscu pierwszego minimum drugiego z nich. Najmniejsza odległość kątowa między nimi musi wówczas być równa

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{kryterium Rayleigha}), \quad (37.14)$$

gdzie  $d$  jest średnicą otworu, przez który przechodzi światło.

**Dyfrakcja na dwóch szczelinach** Fala przechodząca przez dwie szczeliny o jednakowych szerokościach  $a$ , których środki są od-

ległe od siebie o  $d$ , wytwarza obrazy dyfrakcyjne o natężeniu  $I$  pod kątem  $\theta$  równym

$$I(\theta) = I_m (\cos^2 \beta) \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (\text{dwie szczeliny}), \quad (37.16)$$

gdzie  $\beta = (\pi d / \lambda) \sin \theta$ , a  $\alpha$  jest takie samo, jak w przypadku dyfrakcji na pojedynczej szczelinie.

**Dyfrakcja na wielu szczelinach** Dyfrakcja na  $N$  szczelinach prowadzi do maksimów (linii), których położenia kątowne  $\theta$  spełniają zależność

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{maksima}), \quad (37.22)$$

a linie mają szerokości połowkowe równe

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (\text{szerokość połowkowa}). \quad (37.25)$$

**Siatki dyfrakcyjne** Siatka dyfrakcyjna to seria „szczelin” używana do rozdzielania padającej fali świetlnej na jej składowe o różnej długości fali przez przestrzenne rozseparowanie ich maksimów dyfrakcyjnych. Siatkę dyfrakcyjną charakteryzują jej dyspersja  $D$  i zdolność rozdzielcza  $R$ :

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}, \quad (37.26, 37.27)$$

$$R = \frac{\lambda_{\text{sr}}}{\Delta\lambda} = Nm. \quad (37.28, 37.29)$$

**Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego** Regularne uszeregowane atomy w kryształach stanowią trójwymiarową siatkę dyfrakcyjną dla promieniowania o małych długościach fali, takiego jak promieniowanie rentgenowskie. W celu analizy zjawiska dyfrakcji na kryształach atomy można opisywać jako uporządkowane w określonych płaszczyznach o charakterystycznej odległości międzypłaszczyznowej  $d$ . Maksima dyfrakcyjne (wytworzone jako wynik konstruktywnej interferencji) pojawiają się wtedy, gdy kierunek padania fali, określany względem powierzchni tych płaszczyzn, oraz długość fali promieniowania  $\lambda$ , spełniają **warunek Bragga**:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{warunek Bragga}). \quad (37.31)$$

## Pytania

1. Światło o częstotliwości  $\nu$  oświetla długą, wąską szczelinę i wytwarza obraz dyfrakcyjny. a) Czy wtedy, gdy szczelinę tę oświetlimy światłem o częstotliwości  $1,3\nu$ , jej obraz dyfrakcyjny ulegnie rozsze-

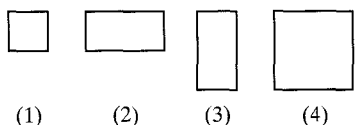
rzeniu od środka na zewnątrz, czy też zawężeniu w stronę środka? b) Jak będzie się zmieniał obraz, jeśli całą aparaturę zanurzymy w przezroczystym syropie kukurydzianym?



2. Przeprowadzasz doświadczenie dyfrakcyjne z dwiema szczelinami przy użyciu światła o długości fali  $\lambda$ . Co zaobserwujesz na odległym ekranie obserwacyjnym w punkcie, w którym różnica dróg przebywanych przez promienie świetlne wychodzące ze skrajnych krawędzi szczeliny (górnej i dolnej) będzie równa: a)  $5\lambda$  i b)  $4,5\lambda$ ?

3. Z takim samym natężeniem głosu przemawiasz raz bez użycia, a drugi raz z użyciem megafonu. W której z tych dwu sytuacji twoje przemówienie brzmi głośniejsz dla osoby, która znajduje się na wprost przed tobą?

4. Na rysunku 37.28 pokazane są cztery możliwe prostokątne otwory wyjściowe ze źródła, które może być źródłem fal dźwiękowych albo fal świetlnych. Boki tych otworów mają długość  $L$  lub  $2L$ , przy czym  $L$  jest trzykrotnie większe od długości fali opuszczającej źródło. Uszereguj te otwory w kolejności malejącej rozciągłości fali uginającej się na nich w kierunkach: a) poziomym oraz b) pionowym.

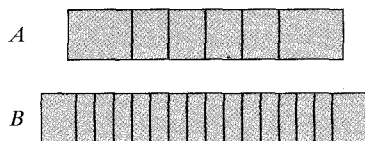


Rys. 37.28. Pytanie 4

5. W doświadczeniu dyfrakcyjnym z pojedynczą szczeliną promienie wychodzące ze skrajnych krawędzi (górnej i dolnej) szczeliny mają w pewnym punkcie na ekranie obserwacyjnym różnicę przebytych dróg równą 4 długościom fali. Z ilu zachodzących na siebie okręgów będzie składał się ich diagram (taki, jak na rysunku 37.6)?

6. Wiele osób widzi nocą pierścienie otaczające jasno świecące lampy uliczne (tzw. halo). Te pierścienie to pierwsze maksima boczne obrazu dyfrakcyjnego wytwarzanego przez struktury, które, jak się przypuszcza, występują w rogówce (a możliwe, że w soczewce) naszego oka. (Maksima centralne dają obraz lampy).  
a) Czy określony pierścień będzie stawał się węższy, czy szerszy, jeżeli barwa światła lampy zmieni się z niebieskiej na czerwoną?  
b) Czy wtedy, gdy lampa wysyła światło białe, zewnętrzna krawędź widzianego pierścienia będzie miała barwę niebieską, czy może czerwoną?

7. Na rysunku 37.29 pokazano jasne prążki obserwowane pod obwiednią dyfrakcyjną centralnego maksimum w dwóch doświadczeniach z dwiema szczelinami, w których padające światło ma taką samą długość fali. Czy: a) szerokość szczelin  $a$ , b) odległość wzajemna szczelin  $d$  i c) stosunek  $d/a$  w doświadczeniu  $B$  są większe, mniejsze, czy też takie same, jak w doświadczeniu  $A$ ?



Rys. 37.29. Pytanie 7

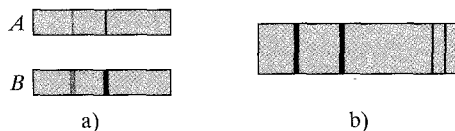
8. Linie czerwona i zielona na rysunku 37.30 należą do tego samego rzędu widma wytwarzanego przez siatkę dyfrakcyjną. Jeżeli zwiększymy liczbę szczelin siatki (np. usuwając taśmę, która początkowo przesłaniała połowę szczelin), to czy wtedy a) szerokość połówkowa linii oraz b) odległość między liniami wzrośnie, zmaleje, czy też się nie zmieni? c) Czy linie przesuną się w prawo, w lewo, czy pozostaną w tym samym miejscu?



Rys. 37.30. Pytania 8 i 9

9. Jeżeli w sytuacji takiej, jak w pytaniu 8, zwiększymy stałą siatki, to czy wtedy a) szerokość połówkowa linii oraz b) odległość między liniami wzrośnie, zmaleje, czy też się nie zmieni? c) Czy linie przesuną się w prawo, w lewo, czy pozostaną w tym samym miejscu?

10. a) Na rysunku 37.31a pokazano linie wytwarzane przez dwie siatki dyfrakcyjne  $A$  i  $B$  oświetlane światłem o takiej samej długości fali. Obserwowane linie należą do tego samego rzędu, a ich położenia katowe  $\theta$  są w obu przypadkach identyczne. Która z dwóch siatek ma większą liczbę szczelin? b) Na rysunku 37.31b pokazano dwa rzędy widma obrazu wytwarzanego przez siatkę przy oświetlaniu jej światłem o dwóch różnych długościach fali z czerwonego zakresu widma widzialnego. Która para linii, prawa czy lewa, jest obserwowana w wyższym rzędzie (większa liczba  $m$ )? c) Czy na rysunku 37.31a środek obrazu dyfrakcyjnego znajduje się na prawo, czy na lewo od obserwowanych linii? d) Czy tak samo jest na rysunku 37.31b?



Rys. 37.31. Pytanie 10

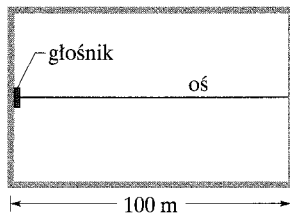
11. a) Czy dla określonej siatki dyfrakcyjnej najmniejsza różnica między dwiema długościami fali  $\Delta\lambda$ , które mogą być rozdzielone przez tę siatkę, będzie wzrastać, maleć, czy też nie będzie się zmieniać wtedy, gdy rośnie długość fali oświetlającego ją światła? b) Czy dla danego obszaru długości fali (np. dla obszaru wokół 500 nm)  $\Delta\lambda$  jest większe w pierwszym, czy też w trzecim rzędzie?

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

## 37.2 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie: położenia minimów

- Światło o długości fali 633 nm pada na wąską szczelinę. Kąt między pierwszymi minimami dyfrakcyjnymi występującymi po obu stronach centralnego maksimum jest równy  $1,2^\circ$ . Ile wynosi szerokość tej szczeliny?
- Światło monochromatyczne o długości fali 441 nm pada na wąską szczelinę. Na ekranie obserwacyjnym, odległym o 2 m od szczeliny, odległość między drugim minimum dyfrakcyjnym i centralnym maksimum wynosi 1,5 cm. a) Oblicz kąt ugięcia  $\theta$  dla drugiego minimum. b) Wyznacz szerokość szczeliny.
- Pojedyncza szczelina jest oświetlana światłem o długościach fali  $\lambda_a$  i  $\lambda_b$ , które są dobrane tak, że pierwsze minimum dyfrakcyjne dla składowej  $\lambda_a$  pokrywa się z drugim minimum dla składowej  $\lambda_b$ . a) Jaka zależność łączy te dwie długości fali światła? b) Czy którekolwiek inne minima w tym obrazie dyfrakcyjnym będą się również pokrywały?
- Ekran obserwacyjny znajduje się w odległości 40 cm od szczeliny oświetlanej światłem o długości fali 550 nm. Na ekranie odległość między pierwszym i piątym minimum w obrazie dyfrakcyjnym tej szczeliny jest równa 0,35 mm. a) Wyznacz szerokość szczeliny. b) Oblicz kąt  $\theta$  dla pierwszego minimum dyfrakcyjnego.
- Fala płaska o długości fali 590 nm pada na szczelinę o szerokości  $a = 0,4$  mm. Między szczeliną i ekranem obserwacyjnym umieszczona jest cienka soczewka skupiająca o ogniskowej  $+70$  cm, która ogniskuje światło na ekranie. a) Jak daleko od szczeliny znajduje się ekran? b) Ile wynosi odległość między środkiem i pierwszym minimum obrazu dyfrakcyjnego obserwowanego na ekranie?

6. Fale dźwiękowe o częstotliwości 3000 Hz i prędkości rozchodzenia się 343 m/s ulegają ugięciu na prostokątnym otworze głośnika i rozchodzą się w dużym audytorium. Otwór ma szerokość poziomą 30 cm i znajduje się naprzeciw



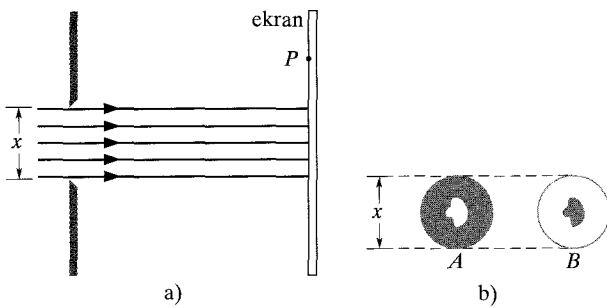
Rys. 37.32. Zadanie 6

ściany odległej o 100 m (rys. 37.32). W którym miejscu wzdłuż tej ściany występuje pierwsze minimum dyfrakcyjne i znajdujący się tam słuchacz ma kłopoty z usłyszeniem dźwięku? (Zaniedbaj odbicia).

7. Szczelina o szerokości 1 mm jest oświetlana światłem o długości fali 589 nm. Na ekranie w odległości 3 m od szczeliny widzimy obraz dyfrakcyjny. Oblicz odległość między dwoma pierwszymi minimami dyfrakcyjnymi występującymi po tej samej stronie centralnego maksimum obrazu.

## 37.4 Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Opis ilościowy

- Szczelina o szerokości 0,1 mm jest oświetlana światłem o długości fali 589 nm. Weź pod uwagę pewien punkt  $P$ , którego położenie kątowe na ekranie obserwacyjnym wynosi  $30^\circ$  w stosunku do osi układu. Ile wynosi różnica faz między wtórnymi (elementarnymi) falami Huygensa wychodzącymi ze środka szczeliny i jej górnej krawędzi, docierającymi do punktu  $P$  na ekranie? (Wskażówka: Patrz równanie (37.4)).
- Jeżeli podwoisz szerokość szczeliny, to natężenie centralnego maksimum obrazu dyfrakcyjnego wzrośnie czterokrotnie, mimo że energia przechodząca przez szczelinę uległa tylko podwojeniu. Wyjaśnij ten problem ilościowo.
- Światło monochromatyczne o długości fali 538 nm pada na szczelinę o szerokości 0,025 mm. Odległość między szczeliną a ekranem obserwacyjnym wynosi 3,5 m. Weź pod uwagę punkt na ekranie, który znajduje się w odległości 1,1 cm od centralnego maksimum. a) Oblicz kąt  $\theta$  dla tego punktu. b) Oblicz kąt  $\alpha$ . c) Oblicz stosunek natężenia w tym punkcie do natężenia centralnego maksimum.
- Pełna szerokość centralnego maksimum dyfrakcyjnego mierzona w połowie jego maksymalnego natężenia  $\Delta\theta$  jest zdefiniowana jako kąt między dwoma punktami w obrazie, w którym natężenie ma wartość połowy natężenia w środku maksimum (patrz rys. 37.7b). a) Pokaż, że natężenie spada do połowy wartości maksymalnej wtedy, gdy  $\sin^2 \alpha = a^2/2$ . b) Sprawdź, czy  $\alpha = 1,39$  rad (ok.  $80^\circ$ ) jest rozwiązaniem równania występującego w punkcie (a). c) Pokaż, że  $\Delta\theta$  jest dana jako  $2 \arcsin(0,443\lambda/a)$ , gdzie  $a$  jest szerokością szczeliny. d) Oblicz  $\Delta\theta$  centralnego maksimum dla szczeliny o szerokościach równych: 1; 5 i 10 długości fali światła. www
- Zasada Babinet'a. Monochromatyczna wiązka równoległych promieni świetlnych pada na „kolimujący” otwór o średnicy  $x \gg \lambda$ . Punkt  $P$  na odległym ekranie leży w obszarze cienia



Rys. 37.33. Zadanie 12

geometrycznego (rys. 37.33a). Na otwór kolimujący nakładane są kolejno dwie przesłony pokazane na rysunku 37.33b. Przesłona *A* jest nieprzezroczystym krążkiem z otworem, natomiast przesłona *B* jest „fotograficznym negatywem” przesłony *A*. Korzystając z zasady superpozycji, wykaż, że przy zastosowaniu przesłony *A* lub *B* natężenie w punkcie *P* jest identyczne.

13. a) Pokaż, że wartości  $\alpha$ , dla których występują maksima natężenia przy ugięciu światła na pojedynczej szczelinie, mogą być ściśle wyznaczone przez różniczkowanie równania (37.5) względem  $\alpha$  i przez przyrównanie wyniku do zera, co prowadzi do warunku  $\text{tg } \alpha = \alpha$ . b) Sporządź wykresy zależności  $y = \text{tg } \alpha$  oraz  $y = \alpha$  i z punktów przecięcia się obu krzywych odczytaj wartości kąta  $\alpha$ , które spełniają warunek z punktu (a); możesz je również znaleźć metodą prób i błędów, korzystając z kalkulatora. c) Znajdź wartości  $m$  (niecałkowite) odpowiadające kolejnym maksimum w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Zwróć uwagę na to, że maksima boczne nie leżą dokładnie w połowie odległości między minimami.

### 37.5 Dyfrakcja na otworze kołowym

14. Przyjmij, że lampa w pytaniu 6 emituje światło o długości fali 550 nm. Ile wynosi przybliżona średnica struktury zawartej w oku, jeżeli sprawia ona, że widziany przez oko jasny pierścień wokół lampy ma średnicę kątową  $2,5^\circ$ ?

15. Odstęp między reflektorami zbliżającego się samochodu wynosi 1,4 m. a) Przy jakiej ich odległości kątowej i b) z jakiej odległości będzie mogło je rozróżnić (rozdzielić) oko obserwatora? Przyjmij, że średnica źrenicy oka jest równa 5 mm oraz że światło reflektorów ma długość fali 550 nm. Przyjmij również, że rozdzielczość ograniczają jedynie efekty dyfrakcyjne i wobec tego można zastosować kryterium Rayleigha.

16. Astronauta na pokładzie promu kosmicznego znajdującego się na wysokości 160 km nad powierzchnią Ziemi stwierdza, że jest w stanie (ledwo) rozróżnić dwa punkty na jej powierzchni. Zakładając, że panują idealne warunki, oblicz a) kątową i b) liniową odległość między tymi punktami. W obliczeniach przyjmij długość fali światła równą 540 nm i średnicę źrenicy oka astronauty równą 5 mm.

17. Znajdź odległość między dwoma punktami na powierzchni Księżyca, które są ledwie rozdzielane przez 200-calowy ( $= 5,1$  m) teleskop na Mount Palomar. Przyjmij, że ich rozdzielczość jest określona przez efekty dyfrakcyjne. Odległość Ziemi od Księżyca wynosi  $3,8 \cdot 10^5$  km. Przyjmij dla światła  $\lambda = 550$  nm. ilw

18. Ściana dużego pokoju pokryta jest płytą akustyczną, w której małe otworki wywiercone są w odstępach 5 mm między środkami. Z jakiej odległości od tej ściany obserwator może jeszcze rozróżnić pojedyncze otworki? Przyjmij, że średnica źrenicy oka obserwatora jest równa 4 mm i że światło oświetlające pomieszczenie ma długość fali 550 nm.

19. Oszacuj liniową odległość między dwoma obiektami na Marsie, które w idealnych warunkach obserwacji mogą być rozróżnione przez obserwatora na Ziemi a) obserwującego Marsa nieuzbrojonym (gołym) okiem, b) korzystającego z 200-calowego ( $= 5,1$  m) teleskopu na Mount Palomar. Zastosuj następujące dane: odległość do Marsa  $= 8 \cdot 10^7$  km, średnica źrenicy oka  $= 5$  mm, długość fali światła  $= 550$  nm.

20. System radarowy krążownika wysłał fale o długości 1,6 cm z kolistej anteny o średnicy 2,3 m. Jaka może być najmniejsza odległość między dwiema łodziami motorowymi, żeby system radarowy krążownika był w stanie z odległości 6,2 km rozróżnić je jako pojedyncze obiekty?

21. Skrzydła trzyszczki są zabarwione w wyniku interferencji w cienkich błonkowatych warstwach. Warstwy te są ułożone w łatach, które mają rozmiary poprzeczne 60  $\mu\text{m}$  i dają różne barwy. Barwa, którą oglądasz, jest pointylistyczną mieszaniną barw powstających w wyniku interferencji w cienkich warstwach, zmieniających się wraz z kątem obserwacji. Z jakiej (w przybliżeniu) granicznej odległości będziesz mógł, zgodnie z kryterium Rayleigha, rozróżnić różnie zabarwione łąty na skrzydłach owada? Przyjmij, że światło ma długość fali 550 nm, a średnica źrenicy twojego oka jest równa 3 mm.

22. W czerwcu 1985 r. z Posterunku Optycznego Sił Powietrznych USA na wyspie Maui (Hawaje) wysłano wiązkę laserową, która odbiła się od powierzchni promu *Discovery* przelatującego na wysokości 354 km. Promieniowanie laserowe miało długość fali 500 nm, a szerokość jego centralnego maksimum w miejscu odbicia od promu wynosiła 9,1 m. Oblicz efektywną szerokość otworu wyjściowego lasera na stanowisku naziemnym (*Wskaźówka*: Powodem rozbieżności wiązki laserowej jest tylko dyfrakcja; przyjmij, że otwór wyjściowy ma kształt koła).

23. Radar pracujący na falach milimetrowych generuje węższe wiązki promieniowania niż radar konwencjonalny (mikrofalowy), co czyni go odporniejszym na wykrycie i atak rakietowy. a) Oblicz szerokość kątową centralnego maksimum (mierzoną od pierwszego minimum, po jednej stronie maksimum, do pierwszego minimum, po jego drugiej stronie) wytwarzanego przez wiązkę

radarową o częstotliwości 220 GHz emitowaną z kolistej anteny o średnicy 55 cm. (Częstość została dopasowana do „okna” absorpcji atmosferycznej). b) Oblicz tę samą wielkość dla radaru opisanego w zadaniu 20. [www](#)

24. Okrągła nieprzezroczysta przesłona wytwarza taki sam obraz dyfrakcyjny, jak okrągły otwór o takiej samej średnicy (z wyjątkiem obszarów bliskich kierunku  $\theta = 0$ ). Przykładem takich przesłon są krople wody unoszące się w powietrzu. Kiedy obserwujesz Księżyc poprzez zawieszony w powietrzu krople wody, takie z jakich składa się mgła, odbierasz obrazy dyfrakcyjne wytwarzane przez wiele kropeł. Centralne maksima wytwarzane przez te krople wody tworzą biały obszar, który otacza Księżyc i rozmywa jego kontury. Widać wówczas dwa słabo widoczne barwne pierścienie otaczające Księżyc. Mniejszy pierścień znajduje się na zewnętrznym skraju centralnych maksimów wytwarzanych przez krople; nieco większy pierścień występuje na zewnętrznym skraju najmniejszych z maksimów bocznych wytwarzanych przez krople (por. rys. 37.9). Pierścienie są barwne, ponieważ sąsiadują z minimami dyfrakcyjnymi (ciemne pierścienie) w obrazie.

a) Jaka jest barwa tych pierścieni na zewnętrznych skrajach maksimów dyfrakcyjnych? b) Barwny pierścień wokół centralnych maksimów ma średnicę kątową 1,35 razy większą od średnicy kątowej Księżycy, która jest równa  $0,5^\circ$ . Przyjmij, że średnice wszystkich kropeł są takie same. Ile wynosi w przybliżeniu ta średnica?

25. a) Ile wynosi odległość kątowa między dwiema gwiazdami, jeżeli ich obrazy są (ledwo) rozdzielone przez teleskop refrakcyjny Thaw w Allegheny Observatory w Pittsburgu? Średnica soczewki teleskopu jest równa 76 cm, a jej ogniskowa wynosi 14 m. Przyjmij, że  $\lambda = 550$  nm. b) Oblicz odległość między tymi gwiazdami, wiedząc, że ich odległość od Ziemi wynosi 10 lat świetlnych. c) Wyznacz średnicę pierwszego ciemnego pierścienia w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej gwiazdy wytwarzanym przez teleskop na płycie fotograficznej umieszczonej w płaszczyźnie ogniskowej soczewki teleskopu. Przyjmij, że struktura tego obrazu jest związana wyłącznie z dyfrakcją na soczewce, a nie z wadami optycznymi soczewki.

26. W radziecko-francuskim eksperymencie badania powierzchni Księżycy za pomocą wiązek światła wysyłano w stronę Księżycy impulsy promieniowania lasera rubinowego ( $\lambda = 0,69 \mu\text{m}$ ) przez teleskop zwierciadlany ze zwierciadłem o promieniu 1,3 m. Reflektor na Księżycu działał jak koliste płaskie zwierciadło o promieniu 10 cm i odbijał to promieniowanie z powrotem w kierunku teleskopu na Ziemi. Światło odbite było ogniskowane przez teleskop i padało na detektor. Jaki ułamek pierwotnej energii światła odbierał detektor? Przyjmij, że dla każdego z obydwu kierunków wędrowki światła cała energia związana jest z centralnym maksimum dyfrakcyjnym.

### 37.6 Dyfrakcja na dwóch szczelinach

27. Przypuśćmy, że pod obwiednią obrazu dyfrakcyjnego dwóch szczelin znajduje się 11 jasnych prążków i że pierwsze minima

dyfrakcyjne tłumią jasne prążki, gdyż wypadają w tym samym miejscu. Ile jasnych prążków znajduje się pod obwiednią dyfrakcyjną między pierwszym i drugim minimum?

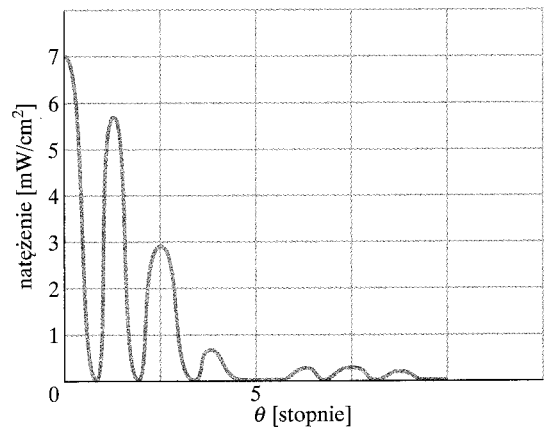
28. W doświadczeniu dyfrakcyjnym z dwiema szczelinami odległość  $d$  między szczelinami jest dwukrotnie większa od szerokości szczeliny  $w$ . Ile jasnych prążków znajduje się pod centralną obwiednią dyfrakcyjną?

29. a) Przy jakim stosunku  $d/a$  w doświadczeniu z dwiema szczelinami czwarty boczny jasny prążek jest wygaszany w wyniku dyfrakcji? b) Które jeszcze prążki będą również wygaszane w obrazie w tych warunkach?

30. Dwie szczeliny o szerokości  $a$  i odległości wzajemnej  $d$  są oświetlane spójną wiązką światła o długości fali  $\lambda$ . Ile wynosi liniowa odległość między jasnymi prążkami interferencyjnymi obserwowanymi na ekranie w odległości  $D$  od szczelin?

31. a) Ile jasnych prążków występuje między pierwszymi minimami dyfrakcyjnymi po każdej stronie centralnego maksimum w obrazie dyfrakcyjnym z dwóch szczelin, jeżeli  $\lambda = 550$  nm,  $d = 0,15$  nm i  $a = 30 \mu\text{m}$ ? b) Ile wynosi stosunek natężenia trzeciego jasnego prążka do natężenia prążka centralnego?

32. Światło o długości fali 440 nm przechodzi przez układ dwóch szczelin i wytwarza obraz dyfrakcyjny. Wykres zależności natężenia  $I$  od położenia kątowego  $\theta$  dla tego obrazu pokazano na rysunku 37.34. Oblicz a) szerokość szczelin i b) odległość między szczelinami. c) Zweryfikuj pokazane natężenia dla prążków  $m = 1$  i  $m = 2$ .



Rys. 37.34. Zadanie 32

### 37.7 Siatki dyfrakcyjne

33. Siatka dyfrakcyjna o szerokości 20 mm ma 6000 szczelin. a) Oblicz odstęp  $d$  między sąsiednimi szczelinami. b) Pod jakimi kątami  $\theta$  na ekranie obserwacyjnym będą występować maksima natężenia przy założeniu, że światło padające na siatkę ma długość fali 589 nm?

34. Siatka ma 315 szczelin/mm. Dla jakich długości fali z zakresu światła widzialnego będzie można obserwować dyfrakcję w piątym rzędzie, używając tej siatki?

35. Siatka ma 400 szczelin/mm. Ile rzędów widma całego zakresu widzialnego (400–700 nm), oprócz rzędu zerowego ( $m = 0$ ), będzie można obserwować, używając tej siatki? *ilw*

36. Prawdopodobnie w celu zmylenia drapieźnika, pewne tropikalne chrząszcze (krętaczki) są zabarwione w wyniku optycznej interferencji zachodzącej w ich łuskach, ustawionych tak, że tworzą siatkę dyfrakcyjną (która nie przepuszcza światła, lecz je odbija). Kiedy promienie światła padającego są prostopadłe do siatki, kąt między maksimami pierwszego rzędu (po przeciwnych stronach maksimum zerowego rzędu) dla światła o długości fali 550 nm wynosi ok.  $26^\circ$ . Ile wynosi stała siatki dyfrakcyjnej tworzonej przez łuski chrząszcza?

37. Światło o długości fali 600 nm pada prostopadłe na siatkę dyfrakcyjną. Dwa sąsiednie maksima występują pod kątami określonymi przez  $\sin \theta = 0,2$  i  $\sin \theta = 0,3$ . W obrazie dyfrakcyjnym brak jest maksimów czwartego rzędu. a) Ile wynosi stała siatki? b) Jaką najmniejszą szerokość może mieć szczelina tej siatki? c) Którego rzędu maksima wytwarza ta siatka (przy odpowiedzi zastosuj dane otrzymane w punkcie (a) i (b))?

38. Siatkę dyfrakcyjną tworzy układ szczelin o szerokości 300 nm i odległych od siebie o 900 nm. Siatkę oświetlają monochromatyczne fale płaskie o długości fali  $\lambda = 600$  nm, padające na nią prostopadłe. a) Ile rzędów ma cały obraz dyfrakcyjny wytwarzany przez tę siatkę? b) Oblicz szerokość linii w pierwszym rzędzie, zakładając, że całkowita liczba szczelin siatki wynosi 1000.

39. Przyjmijmy umownie, że światło widzialne obejmuje zakres od 430 do 680 nm. Oblicz liczbę szczelin siatki przypadającą na milimetr, przy której widmo pierwszego rzędu będzie rozciągać się na szerokości kątowej  $20^\circ$ . *www*

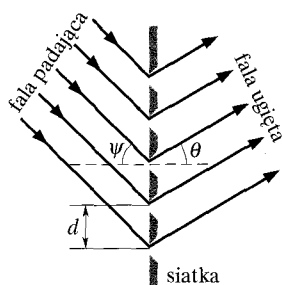
40. Zielone światło z gazowej rury do wyładowań pada prostopadłe na siatkę dyfrakcyjną o stałej siatki  $1,73 \mu\text{m}$ . Ostre maksima obserwowane są pod kątami  $\theta = \pm 17,6^\circ, 37,3^\circ, -37,1^\circ, 65,2^\circ$  i  $-65,0^\circ$ . Oblicz długość fali światła zielonego, która najlepiej pasuje do tych danych.

41. Światło pada na siatkę dyfrakcyjną pod kątem  $\psi$ , tak jak na rysunku 37.35. Pokaż, że jasne prążki występują pod kątami  $\theta$ , które spełniają zależność:

$$d(\sin \psi + \sin \theta) = m\lambda,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

(Porównaj tę zależność z równaniem (37.22)). W tym rozdziale dyskutowaliśmy tylko przypadek specjalny, gdy  $\psi = 0$ .



Rys. 37.35. Zadanie 41

42. Siatka dyfrakcyjna o stałej  $d = 1,5 \mu\text{m}$  jest oświetlana pod różnymi kątami padania przez światło o długości fali 600 nm. Sporządź wykres zależności odchylenia kąтового maksimum pierwszego rzędu względem kierunku padania światła od kąta padania (z zakresu  $0-90^\circ$ ). (Patrz zadanie 41).

43. Wyprowadź równanie (37.25) opisujące szerokość połówkową linii w obrazie siatki dyfrakcyjnej.

44. Siatka dyfrakcyjna, która ma 350 szczelin na milimetrze, oświetlana jest prostopadłe światłem białym. Powstałe widmo obserwowane jest na ekranie obserwacyjnym w odległości 30 cm od siatki. W ekranie tym wycięto kwadratowy otwór o boku 10 mm, którego wewnętrzna krawędź znajduje się w odległości 50 mm od centralnego maksimum (zerowego rzędu widma) i jest do niego równoległa. Jaki jest zakres długości fali światła przechodzącego przez ten otwór?

45\*. Wyprowadź daną niżej zależność, która opisuje rozkład natężeń w obrazie dyfrakcyjnym „siatki dyfrakcyjnej” o trzech szczelinach:

$$I = \frac{1}{9} I_m (1 + 4 \cos \phi + 4 \cos^2 \phi),$$

gdzie  $\phi = (2\pi d \sin \theta) / \lambda$ . Załóż, że  $a \ll \lambda$ ; przy wyprowadzaniu tej zależności postępuj tak, jak przy wyprowadzeniu odpowiedniego wyrażenia dla dwóch szczelin, tzn. równania (36.21).

### 37.8 Siatki dyfrakcyjne: Dyspersja i zdolność rozdzielcza

46. Linia  $D$  w widmie sodu jest dubletem o długościach fali 589 nm i 589,6 nm. Oblicz, jaką najmniejszą liczbę szczelin musi mieć siatka, która ma rozdzielać linie tego dubletu w widmie drugiego rzędu. Patrz przykład 37.5.

47. Źródło zawierające mieszaninę atomów wodoru i deuteru emituje światło czerwone o dwóch długościach fali, które różnią się o 0,18 nm i których wartość średnia jest równa 656,3 nm. Wyznacz najmniejszą liczbę szczelin, jaką musi mieć siatka, która będzie rozdzielać te linie w widmie pierwszego rzędu. *ilw*

48. Siatka dyfrakcyjna ma 600 szczelin/mm, które zajmują szerokość 5 mm. a) Ile wynosi najmniejsza różnica długości fali w pobliżu  $\lambda = 500$  nm, którą siatka ta rozdziela w drugim rzędzie widma? b) Ile rzędów można obserwować przy zastosowaniu tej siatki?

49. Pokaż, że dyspersja siatki dyfrakcyjnej  $D = (tg \theta) / \lambda$ .

50. Pewna siatka dyfrakcyjna umożliwia obserwację (ledwo) rozdzielonego dubletu sodowego (p. przykład 37.5) w trzecim rzędzie widma pod kątem  $10^\circ$  do normalnej. Oblicz; a) stałą siatki oraz b) całkowitą szerokość, jaką zajmują szczeliny siatki.

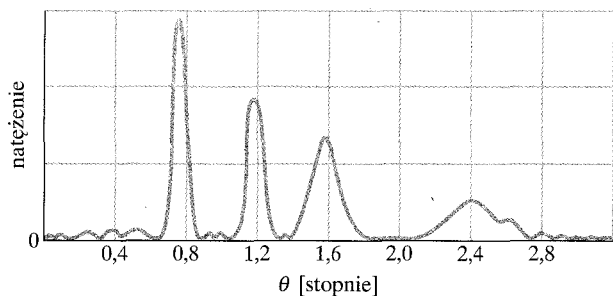
51. Zdolność rozdzielcza siatki  $R = \lambda_{sr}/\Delta\lambda = Nm$ . a) Pokaż, że różnica częstości linii, jakie mogą być rozdzielone, jest dana przez  $\Delta\nu = c/Nm\lambda$ . b) Korzystając z rysunku 37.18, pokaż, że różnica czasów, w jakich do punktu  $P$  dociera światło, rozchodzące się wzdłuż kierunków wyznaczonych przez dolny i górny promień na tym rysunku, jest równa  $\Delta t = (Nd/c)\sin\theta$ . c) Pokaż, że  $\Delta\nu\Delta t = 1$  i że relacja ta jest niezależna od różnych parametrów siatki dyfrakcyjnej. Załóż, że  $N \gg 1$ .

52. a) Znajdź zależność iloczynu szerokości połówkowej linii i zdolności rozdzielczej siatki dyfrakcyjnej od kąta  $\theta$ , który określa położenie linii. b) Oblicz ten iloczyn dla linii pierwszego rzędu dla siatki z zadania 38.

### 37.9 Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego

53. Stwierdzono, że kąt Bragga dla drugiego rzędu odbicia promieniowania rentgenowskiego o długości fali 0,12 nm w kryształe fluoru litu jest równy  $28^\circ$ . Oblicz odległość międzypłaszczyznową płaszczyzn odbijających w tym kryształe.

54. Na rysunku 37.36 przedstawiono wykres zależności natężenia od położenia kąowego w obrazie dyfrakcyjnym wiązki promieniowania rentgenowskiego ugiętej na kryształ. Wiązka zawiera promieniowanie o dwóch różnych długościach fali, a odległość międzypłaszczyznowa w kryształe jest równa 0,94 nm. Jakie są długości fali dwóch składowych wiązek?



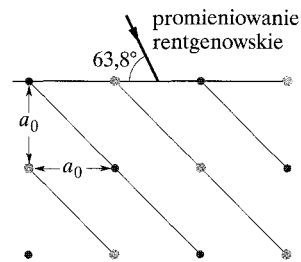
Rys. 37.36. Zadanie 54

55. Wiązka promieniowania rentgenowskiego o nieznannej długości fali pada na kryształ NaCl pod kątem  $30^\circ$  w stosunku do pewnej rodziny odbijających płaszczyzn sieciowych o odległości międzypłaszczyznowej 39,8 pm. Jaka jest długość fali promieniowania rentgenowskiego, jeżeli po odbiciu od tych płaszczyzn powstaje widmo pierwszego rzędu?

56. Wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali  $A$  ulega odbiciu w pierwszym rzędzie wtedy, gdy jej kąt padania na powierzchnię kryształu jest równy  $23^\circ$ , natomiast wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali 97 pm ulega odbiciu w trzecim rzędzie wtedy, gdy jej kąt padania na powierzchnię tego kryształu jest równy  $60^\circ$ . Przyjmując, że obie wiązki ulegają odbiciu od tej samej rodziny odbijających płaszczyzn sieciowych, wyznacz a) odległość międzypłaszczyznową oraz b) długość fali  $A$ .

57. Udowodnij, że pomiar kątów Bragga dla kilku rzędów odbicia nie wystarcza do równoczesnego wyznaczenia długości fali padającego promieniowania rentgenowskiego i odległości międzypłaszczyznowych płaszczyzn odbijających kryształu.

58. Odbicie w pierwszym rzędzie od płaszczyzn pokazanych na rysunku 37.37 zachodzi wtedy, gdy wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali 0,26 nm tworzy z górną powierzchnią kryształu kąt  $63,8^\circ$ . Ile wynosi długość krawędzi  $a_0$  komórki elementarnej kryształu?



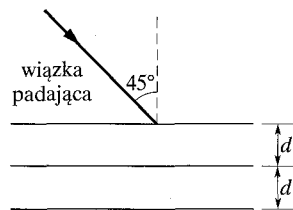
Rys. 37.37. Zadanie 58

59. Rozważ dwuwymiarową kwadratową strukturę krystaliczną (taką, jaką tworzą przednie ściany kryształu na rys. 37.26a). Odstęp między płaszczyznami odbijającymi jest zarazem krawędzią  $a_0$  komórki elementarnej. a) Oblicz i naskikuj pięć następujących, mniejszych odległości międzypłaszczyznowych dla takiej struktury. b) Pokaż, że twoje wyniki z punktu (a) są zgodne z ogólnym wyrażeniem

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

gdzie  $h$  i  $k$  są liczbami całkowitymi (nie mającymi wspólnego dzielnika poza jednością). [www](http://www)

60. Na rysunku 37.38 wiązka promieniowania rentgenowskiego o długościach fali z zakresu od 95 pm do 140 pm pada pod kątem  $45^\circ$  na rodzinę odbijających płaszczyzn sieciowych o odległości międzypłaszczyznowej  $d = 275$  pm. Dla jakich długości fali odbicie od tych płaszczyzn tworzyć będzie intensywne maksima?



Rys. 37.38. Zadania 60 i 61

61. Niech wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali 0,125 nm pada pod kątem  $45^\circ$  na górną powierzchnię kryształu NaCl i zarazem na rodzinę płaszczyzn odbijających, tak jak to pokazano na rysunku 37.38. Niech odległość między płaszczyznami będzie równa  $d = 0,252$  nm. O jakie kąty należy obracać kryształ wokół osi prostopadłej do płaszczyzny kartki, aby w wyniku odbicia od tych płaszczyzn powstawały maksima natężenia promieniowania odbitego.

### Zadania dodatkowe

62. Sygnały telewizyjne są nadawane z wież telewizyjnych do domowych odbiorników. Nawet jeżeli sygnał nie dociera w linii

prostej z wieży do odbiornika, bo przesłaniają go wzgórza czy budynki, to i tak może być odbierany, jeżeli ugina się dostatecznie silnie na przeszkodzie, wnikając do jej „obszaru cienia”. Obecnie sygnały telewizyjne mają długości fali ok. 50 cm, ale w przyszłości sygnały telewizyjny cyfrowej mają mieć długość fali ok. 10 mm.

a) Czy taka zmiana długości fali sygnału nadawczego zwiększy, czy zmniejszy dyfrakcję w obszarze cienia przeszkód? Rozważ to pytanie na przykładzie sygnału przechodzącego przez odstęp o szerokości 5 m między dwoma sąsiadującymi ze sobą budynkami. Ile wynosi kątowa rozciągłość centralnego maksimum dyfrakcyjnego (do pierwszego minimum) dla sygnałów o długości fali b) 50 cm i c) 10 mm?

**63.** Przyjmij, że graniczna rozdzielczość oka astronauty oglądającego powierzchnię Ziemi, z typowej dla promu kosmicznego wysokości 400 km, jest określona przez kryterium Rayleigha. a) W warunkach tego wyidealizowanego założenia oszacuj najmniejszą liniową odległość na powierzchni Ziemi, jaką może rozróżnić astronauta. Przyjmij, że średnica źrenicy oka astronauty jest równa 5 mm, a długość fali światła widzialnego jest równa 550 nm. b) Czy astronauta jest w stanie zobaczyć Wielki Mur Chiński, który ma ponad 3000 km długości, jego szerokość u podstawy wynosi od 5 do 10 m, u wierzchołka 4 m, a wysokość sięga 8 m? c) Czy astronauta będzie mógł zauważyć niezbite dowody istnienia cywilizacji na Ziemi?

**64.** „Latające muszki”. Jak opisano w rozdziale 37.1, cętki i podobne do włosów struktury, które czasem unoszą się w polu twojego widzenia, to w rzeczywistości obrazy dyfrakcyjne wytwarzane na siatkówce twojego oka. Obrazy te są zawsze obecne, ale dostrzegasz je tylko wtedy, gdy spoglądasz na pozbawione szczegółów tło, na przykład na niebo lub jasno oświetloną ścianę. Obrazy te powstają w trakcie przechodzenia światła przez zmętnienia (zagęszczenia) w ciele szklistym wypełniającym większość

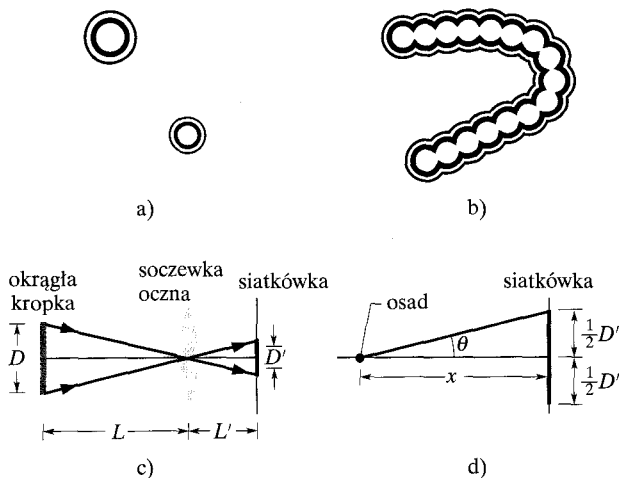
oka. Światło ugina się na zagęszczeniach w ich obszar cienia, tak jak w doświadczeniu Fresnela (patrz paragraf 37.1). Nie widzisz samych zagęszczeń, ale ich obrazy dyfrakcyjne na siatkówce. Obrazy te nazywane są „latającymi muszkami”, bo kiedy poruszasz ciało szkliste chybocze się (podobnie jak wstrząsana galaretką), co sprawia, że obrazy dyfrakcyjne wędrują po obszarze siatkówki. Wraz z wiekiem ciało szkliste chybocze się bardziej, ponieważ jego połączenia z wewnętrzną ścianą oka stają się coraz słabsze i dlatego z wiekiem „latające muszki” stają się coraz bardziej widoczne (i częściej przypominają o istnieniu zjawisk dyfrakcyjnych).

Do celów obserwacyjnych możesz zwiększyć wyrazistość tych obrazów, oglądając je przez dziurkę (np. wykonaną końcem szpilki), ponieważ taki otwór działa jak pojedyncze źródło światła (tak jak na rys. 36.5c). Wówczas możesz zauważyć, że „latające muszki” mogą być okrągłe z jasnym środkiem i z jednym lub kilkoma ciemnymi pierścieniami (rys. 37.39a); mogą one mieć również kształt cienkiego, włosowatego rogalika, z jasnym wnętrzem i z jedną lub kilkoma ciemnymi obwódkami po bokach (rys. 37.39b).

Oszacuj rozmiar „muszek” w ciele szklistym oka, stosując następującą procedurę. Końcem szpilki wykonaj otwór w nieprzezroczystym kawałku kartonu mniej więcej w takiej samej odległości od brzegu kartonu, jak odległość od środka twojego oka do nosa. Na drugiej kartce kartonu zrób kropkę o średnicy  $D = 2$  mm. Tuż przed prawym okiem umieść dziurkę, przed lewym okiem zaś kropkę. Spoglądaj jednocześnie prawym okiem przez dziurkę na niebo, a lewym na kropkę. Po kilku próbach zawsze będziesz w stanie umieścić obraz kropki między obrazami zagęszczeń.

Skoryguj odległość kropki od twojego lewego oka tak, żeby jej rozmiar stał się zbliżony do rozmiaru jednej z pierścieniowatych „muszek”. Niech ktoś ci pomoże zmierzyć odległość  $L$  od kropki do twojego lewego oka (wystarczy jej oszacowanie). Rysunek 37.39c to szkic objaśniający to, co widzisz: Promienie świetlne przechodzą przez soczewkę oczną i tworzą obraz kropki na siatkówce, w odległości  $L' = 2$  cm od soczewki. Opierając się na tym szkicu i korzystając ze zmierzonej wartości  $L$ , wyznacz średnicę  $D'$  obrazu kropki (i obrazu zagęszczenia) na siatkówce.

Przyjmijmy, że zagęszczenie ma kształt kulisty. Wówczas jego obraz dyfrakcyjny jest identyczny (z wykluczeniem samego środka) z obrazem okrągłego otworu o takiej samej średnicy. Zatem obraz „muszki”, jaki widzisz, jest identyczny (z wyjątkiem samego środka) z obrazem pokazanym na rysunku 37.9. Ponadto, położenie pierwszego minimum w jej obrazie dyfrakcyjnym jest dane równaniem (37.12) ( $\sin \theta = 1,22\lambda/d$ ). Przyjmij, że długość fali światła jest 550 nm. Skorzystaj z rysunku 37.39d do powiązania kąta  $\theta$  z promieniem  $D'/2$  obrazu kropki na siatkówce i odległością  $x$  „muszki” od siatkówki. Przyjmijmy, że  $x$  zawiera się w zakresie od 1 mm do 1,5 cm. Ile zatem (w przybliżeniu) wynosi średnica „latających muszek” w ciele szklistym w twoim oku?



Rys. 37.39. Zadanie 64

# 38 Teoria względności

Współczesna nawigacja dalekiego zasięgu wymaga ciągłego i precyzyjnego wyznaczania położenia i prędkości samolotu. System nawigacji satelitarnej NAVSTAR pozwala w dowolnym punkcie Ziemi określić położenie i prędkość z dokładnością odpowiednio 16 m i 2 cm/s. Gdyby zaniedbano efekty wynikające z teorii względności, prędkości nie można by wyznaczyć z dokładnością lepszą niż 20 cm/s, co we współczesnych systemach nawigacyjnych jest nie do przyjęcia.

Jak to możliwe, że coś równie abstrakcyjnego, jak stworzona przez Einsteina szczególna teoria względności znajduje zastosowanie w tak praktycznej dziedzinie, jak nawigacja?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





## 38.1. Czym zajmuje się teoria względności?

Głównym przedmiotem zainteresowania **teorii względności** są pomiary zdarzeń (czegoś, co się dzieje) — ustalenia, gdzie i kiedy one zachodzą, a także jaka odległość dzieli je w czasie i przestrzeni. Ponadto teoria względności zajmuje się transformacjami wyników pomiarów tego typu między poruszającymi się względem siebie układami odniesienia. (Stąd nazwa *teoria względności*). Podobne zagadnienia omawialiśmy już w paragrafach 4.8 i 4.9.

Do roku 1905 fizykom wydawało się, że doskonale rozumieją zagadnienia związane z poruszającymi się układami odniesienia i transformacjami między nimi. Właśnie wtedy Albert Einstein (rys. 38.1) opublikował swoją **szczególną teorię względności**. Przymiotnik *szczególna* oznacza, że dotyczy ona tylko **inercjalnych układów odniesienia**, czyli takich, w których obowiązują zasady dynamiki Newtona. Oznacza to, że układy odniesienia nie przyspieszają, ale przeciwnie — poruszają się względem siebie ze stałymi prędkościami. (Stworzona także przez Einsteina *ogólna teoria względności* opisuje trudniejszy przypadek, w którym układy odniesienia mogą przyspieszać; w tym rozdziale, mówiąc o *teorii względności*, będziemy myśleć tylko o inercjalnych układach odniesienia).

Einstein wprowadził w osłupienie cały świat naukowy, ponieważ wychodząc z dwóch pozornie prostych założeń, wykazał, że stare wyobrażenia na temat względności były błędne, chociaż każdy uznawał je za całkowicie zgodne ze zdrowym rozsądkiem. Ale wspomniany zdrowy rozsądek opierał się na doświadczeniach z ciałami, które poruszały się dość wolno. Stworzona przez Einsteina teoria względności — słuszna dla wszystkich prędkości — przewidywała wiele zjawisk, które wydawały się dziwaczne, gdyż nikt ich nie obserwował.



Rys. 38.1. Einstein w pierwszych latach XX wieku przy biurku w urzędzie patentowym w Bernie, w Szwajcarii, gdzie pracował w momencie opublikowania szczególnej teorii względności

W szczególności Einstein wykazał, że przestrzeń i czas są wzajemnie powiązane; oznacza to, że odstęp czasu dzielący dwa zdarzenia zależy od ich odległości w przestrzeni i na odwrót. Co więcej, zależności te są różne dla obserwatorów poruszających się względem siebie. Jednym z wniosków jest stwierdzenie, że czas nie płynie ze stałą szybkością, jakby odmierzał go z mechaniczną dokładnością jakiś absolutny zegar sterujący Wszechświatem. Szybkość upływu czasu jest zmienna — zależy od względnego ruchu. Przed rokiem 1905 tylko marzyciele myśleli w ten sposób. Dziś naukowcy i inżynierowie przyjmują to za pewnik, gdyż ich doświadczenia ze szczególną teorią względności zmieniły to, co uznajemy za zdrowy rozsądek.

Mówi się, że szczególna teoria względności jest trudna. Nie wynika to ze skomplikowanego aparatu matematycznego, przynajmniej nie będzie tak w przypadku naszego podręcznika. Trudność bierze się stąd, że trzeba zwracać baczną uwagę na to, *кто* dokonuje pomiaru, *co* mierzy i *w jaki* sposób — właśnie to sprawia problemy, gdyż często stoi w sprzeczności z naszym zdrowym rozsądkiem.

## 38.2. Postulaty

Przyjrzymy się teraz dwóm postulatom, które są podstawą stworzonej przez Einsteina teorii:

- **1. Postulat względności:** Dla wszystkich obserwatorów w inercjalnych układach odniesienia prawa fizyki są takie same. Żaden z układów nie jest wyróżniony.

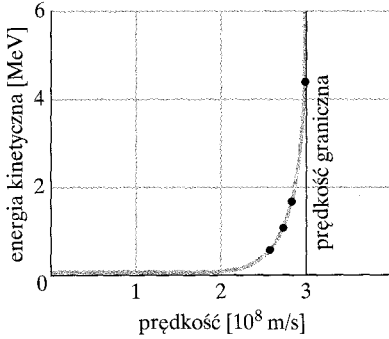
Galileusz założył, że prawa *mechaniki* są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. (Ważną tego konsekwencją jest pierwsza zasada dynamiki Newtona). Einstein rozszerzył to założenie na *wszystkie* prawa fizyki, w tym także elektromagnetyzmu i optyki. Postulat ten *nie* oznacza, że obserwatorzy we wszystkich układach inercjalnych, którzy mierzą wielkości fizyczne, uzyskają takie same wartości — w większości przypadków wcale tak nie będzie. To *prawa fizyki*, które wiążą ze sobą wyniki pomiarów, mają być takie same.

- **2. Postulat stałej prędkości światła:** We wszystkich inercjalnych układach odniesienia i we wszystkich kierunkach światło rozchodzi się w próżni z tą samą prędkością  $c$ .

Ten sam postulat sformułowany inaczej oznacza, że w przyrodzie istnieje pewna *nieprzekraczalna prędkość  $c$* , która ma taką samą wartość we wszystkich kierunkach i wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Okazuje się, że właśnie światło porusza się z tą graniczną prędkością, podobnie jak wszystkie cząstki pozbawione masy (z dobrym przybliżeniem można za takie cząstki uważać neutrina, których masy są niezwykle małe). Prędkość żadnego ciała przenoszącego energię lub informacje nie może przekroczyć prędkości granicznej. Co więcej, żadna cząstka mająca masę nie może osiągnąć prędkości  $c$ , niezależnie od tego, jak długo byłaby przyspieszana.

Obydwa postulaty były wielokrotnie weryfikowane i nigdy nie znaleziono jakiegokolwiek od nich odstępstwa.

## Prędkość graniczna



Rys. 38.2. Punkty przedstawiające wyniki pomiarów energii kinetycznej elektronu w zależności od jego prędkości. Niezależnie jaką energię przełączymy elektronowi (lub dowolnej innej cząstce o różnej od zera masie), jego prędkość nigdy nie przekroczy ani nie osiągnie prędkości granicznej  $c$ . (Krzywa bieżąca przez punkty pomiarowe ilustruje przewidywania stworzonej przez Einsteina szczególnej teorii względności)

Istnienie ograniczenia prędkości przyspieszanych elektronów wykazał eksperyment przeprowadzony w roku 1964 przez W. Bertozziego. Przyspieszał on elektrony, nadając im różne możliwe do zmierzenia prędkości (patrz rys. 38.2), i jednocześnie niezależnymi metodami mierzył ich energię kinetyczną. Stwierdził on, że wzrost siły działającej na poruszający się z dużą prędkością elektron powoduje zwiększenie jego energii kinetycznej do bardzo dużych wartości, chociaż prędkość nie zmienia się w sposób znaczący. Elektrony były przyspieszane do prędkości równej  $0,999\,999\,999\,95$  prędkości światła — niemal tak blisko wartości  $c$ , jak tylko można — ale nie zmienia to faktu, że ich prędkość była ciągle mniejsza od granicznej prędkości  $c$ .

Prędkość graniczna  $c$  jest zdefiniowana jako równa dokładnie

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (38.1)$$

Do tej pory w naszym podręczniku przyjmowaliśmy (poprawnie), że wartość  $c$  jest w przybliżeniu równa  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , ale teraz będziemy korzystać z bardziej precyzyjnego przybliżenia  $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Możecie wpisać tę dokładniejszą wartość do pamięci kalkulatora (jeżeli nie jest ona jeszcze tam zapisana), aby skorzystać z niej, kiedy będzie to potrzebne.

## Weryfikacja postulatu stałej prędkości światła

Jeżeli prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, to światło emitowane przez poruszające się źródło powinno rozchodzić się z taką samą prędkością, jak światło ze źródła spoczywającego w laboratorium. Założenie to udało się potwierdzić wprost w eksperymencie wykonanym z dużą dokładnością. Rolę „źródła światła” spełniał *obojętny pion* ( $\pi^0$ ) — nietrwała cząstka o krótkim czasie życia, która powstaje w zderzeniach cząstek w akceleratorze. Ulega ona rozpadowi na dwa fotony  $\gamma$  zgodnie z równaniem

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (38.2)$$

Promieniowanie  $\gamma$  jest rodzajem fal elektromagnetycznych (o wielkiej częstotliwości) i dlatego postulat stałości prędkości światła odnosi się do niego tak samo, jak do światła widzialnego.

W roku 1964 fizycy z położonego w okolicach Genewy europejskiego laboratorium fizyki cząstek CERN przeprowadzili eksperyment, w którym wytworzyli wiązkę pionów poruszających się w układzie związanym z laboratorium z prędkością  $0,999\,75c$ . Następnie zmierzili oni prędkość promieniowania  $\gamma$  emitowanego przez to poruszające się szybko źródło. Stwierdzili, że prędkość światła emitowanego przez piony jest taka sama, jak w przypadku pionów spoczywających względem laboratorium.

## 38.3. Jak „mierzyć” zdarzenie

**Zdarzenie** to coś, co się dokonuje i co obserwator może wskazać, podając trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzędną czasową. Wśród wielu możliwych

zdarzeń możemy wymienić na przykład: 1) włączenie lub wyłączenie żarówki, 2) zderzenie dwóch cząstek, 3) przejście impulsu światła przez określony punkt, 4) wybuch lub 5) pokrycie się wskazówki zegara z punktem podziałki na jego tarczy. Pewien obserwator zajmujący stałe położenie w jakimś inercyjnym układzie odniesienia mógłby na przykład przypisać jakiemuś zdarzeniu  $A$  współrzędne, które zapisano w tabeli 38.1. W teorii względności przestrzeń i czas są wzajemnie powiązane, dlatego też współrzędne te będziemy nazywać *współzrędnymi czasoprzestrzennymi*. Układ współrzędnych jest częścią układu odniesienia związanego z obserwatorem.

Zdarzenie może zostać zarejestrowane przez wielu obserwatorów, każdy w innym inercyjnym układzie odniesienia. Na ogół różni obserwatorzy przypiszą temu samemu zdarzeniu różne współrzędne czasoprzestrzenne. Trzeba podkreślić, że zdarzenie nie „należy” do konkretnego inercyjnego układu odniesienia. Zdarzenie to coś, co dokonuje się, i każdy w dowolnym układzie odniesienia może je zaobserwować i przypisać mu współrzędne czasoprzestrzenne.

W praktyce ustalenie współrzędnych może okazać się trudnym zadaniem. Wyobraź sobie na przykład, że o 1 km na prawo od ciebie wybuchu balon, a w tej samej chwili 2 km na lewo rozbłyскуje raca — obydwa zdarzenia zachodzą o 9.00. Jednakże nie możesz dokładnie o 9.00 dowiedzieć się o tych zdarzeniach, ponieważ światło jeszcze do ciebie nie dotarło. Aby poznać rzeczywisty czas zdarzeń i stwierdzić, że obydwa wydarzyły się o godzinie 9.00, trzeba obliczyć, jak długo światło podróżowało do obserwatora i odjąć wynik od wskazania zegara w chwili jego przybycia.

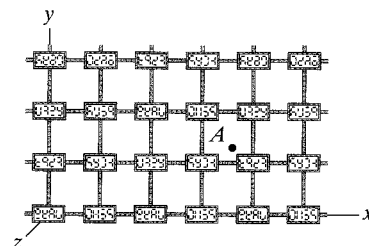
W bardziej złożonych przypadkach opisana procedura jest skomplikowana i dlatego potrzebujemy prostszego rozwiązania, które wyeliminuje problemy z obliczaniem czasu podróży światła od miejsca zdarzenia do obserwatora. W tym celu wyobraźmy sobie, że cały układ inercyjny wypełnia siatka prętów mierniczych i zegarów, sztywno związana z obserwatorem. Taka konstrukcja może się wydać skomplikowana, ale oszczędza wielu nieporozumień oraz obliczeń i pozwala w sposób, który dalej opiszemy, wyznaczać współrzędne przestrzenne, współzrędną czasową oraz współzrędną czasoprzestrzenną.

- 1. Współzrędną przestrzenną.** Wyobraźmy sobie, że układ współrzędnych związany z obserwatorem wypełnia gęsta trójwymiarowa sieć prętów mierniczych ułożonych tak, że każdy z trzech jej podzbiorów jest równoległy do jednej z osi układu. Pręty te pozwalają odczytać współzrędną na każdej z osi. Jeżeli zdarzeniem jest na przykład zapalenie żarówki, to obserwator chcący określić miejsce zdarzenia, odczyta po prostu trzy współzrędną położenia żarówki.
- 2. Współzrędną czasową.** Wyobraźmy sobie teraz, że w każdym punkcie, gdzie przecinają się pręty miernicze, znajduje się mały zegar, którego wskazanie obserwator może odczytać dzięki światłu, które powstało w wyniku zdarzenia. Na rysunku 38.3 pokazano, jak można sobie wyobrażać jedną z płaszczyzn w przypominającym drabinki gimnastyczne gęszczu zegarów i prętów mierniczych.

Sieć zegarów musi być prawidłowo zsynchronizowana. Nie wystarczy zgromadzenie zbioru identycznych zegarów, ustawienie na nich ten sam czas

Tabela 38.1 Współzrędną zdarzenia  $A$

Współzrędną	Wartość
$x$	3,58 m
$y$	1,29 m
$z$	0 m
$t$	34,5 s



Rys. 38.3. Jeden z przekrojów trójwymiarowej sieci zegarów i prętów mierniczych, umożliwiającej obserwatorowi przypisanie współzrędną zdarzeniu takiemu, jak błysk światła w punkcie  $A$ . Współzrędną zdarzenia są w przybliżeniu równe  $x = 3,7$  długości pręta,  $y = 1,2$  długości pręta,  $z = 0$ . Współzrędną czasowa jest równa wskazaniu zegara najbliższego punktu  $A$  w chwili błysku

i przeniesienie ich w wyznaczone im położenia. Nie wiemy na przykład, czy przenoszenie zegarów nie wpłynie w jakiś sposób na szybkość, z jaką odmierzą czas. (W rzeczywistości tak właśnie będzie). Trzeba umieścić zegary we właściwych miejscach i dopiero *wtedy* je zsynchronizować.

Gdybyśmy znali sposób na przesyłanie sygnałów z nieskończoną prędkością, synchronizacja zegarów nie nastęczałaby problemów. Jednakże żaden sygnał nie ma takiej właściwości. Do przesyłania impulsów synchronizujących wykorzystamy więc światło (lub inny rodzaj promieniowania elektromagnetycznego), które w próżni rozchodzi się z największą możliwą prędkością — prędkością graniczną  $c$ .

Oto jedna z wielu metod, które może zastosować obserwator, aby zsynchronizować sieć zegarów za pomocą sygnałów świetlnych. Załóżmy, że ma on całą rzeszę pomocników, a każdy z nich obsługuje jeden zegar. Obserwator staje w punkcie, który wybrał jako początek układu współrzędnych, a następnie — kiedy zegar w początku układu współrzędnych wskazuje czas  $t = 0$  — wysyła impuls światła. Gdy impuls światła mija dowolnego pomocnika, ten reguluje powierzony mu zegar tak, aby wskazywał czas  $t = r/c$ , gdzie  $r$  oznacza odległość zegara od początku układu współrzędnych. W ten sposób zegary zostają zsynchronizowane.

- 3. Współrzędne czasoprzestrzenne.** Obserwator może teraz przypisać dowolnemu zdarzeniu współrzędne czasoprzestrzenne, patrząc, jaki czas wskazuje zegar najbliższy miejsca zdarzenia, i odczytując położenie z najbliższych prętów mierniczych. Jeżeli zachodzą dwa zdarzenia, to obserwator oblicza ich odstęp w czasie, odejmując wskazania najbliższych im zegarów, a odległość w przestrzeni oblicza, biorąc różnicę odczytów najbliższych prętów mierniczych. W ten sposób można uniknąć trudności z obliczaniem czasu podróży sygnału, który musi dotrzeć do obserwatora z miejsca każdego zdarzenia.

## 38.4. Względność jednoczesności

Wyobraźmy sobie, że jeden z obserwatorów (Jacek) stwierdza, że dwa niezależne zdarzenia (zdarzenie czerwone i zdarzenie niebieskie) zaszły jednocześnie. Wyobraźmy sobie też, że inny obserwator (Agata) poruszający się względem Jacka ze stałą prędkością  $\vec{v}$  widzi te same zdarzenia. Czy również Agata stwierdzi, że zdarzenia były jednoczesne?

Odpowiedź brzmi, że na ogół tak nie będzie:

- Dwaj obserwatorzy poruszający się względem siebie na ogół nie będą zgodni co do jednoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdzi, że zdarzenia były jednoczesne, to drugi na ogół będzie innego zdania.

Nie można powiedzieć, że jeden z obserwatorów ma rację, a drugi nie. Ich obserwacje są tak samo poprawne i nie ma żadnych powodów, aby wyróżniać jeden z wyników.

Wniosek, że dwie przeciwstawne opinie dotyczące zdarzenia mogą być słuszne, jest zaskakującą konsekwencją teorii Einsteina. W rozdziale 18 omawialiśmy

już inną sytuację, w której ruch wpływa na pomiar, a nie daje to sprzecznych wyników. W zjawisku Dopplera częstość fali dźwiękowej mierzona przez obserwatora zależy od względnego ruchu obserwatora i źródła. Dlatego dwaj obserwatorzy poruszający się względem siebie zmierzają różne częstości tej samej fali i obydwa pomiary będą poprawne.

Można to podsumować następująco:

► Jednoczesność nie jest pojęciem absolutnym, lecz względnym i zależy od ruchu obserwatora.

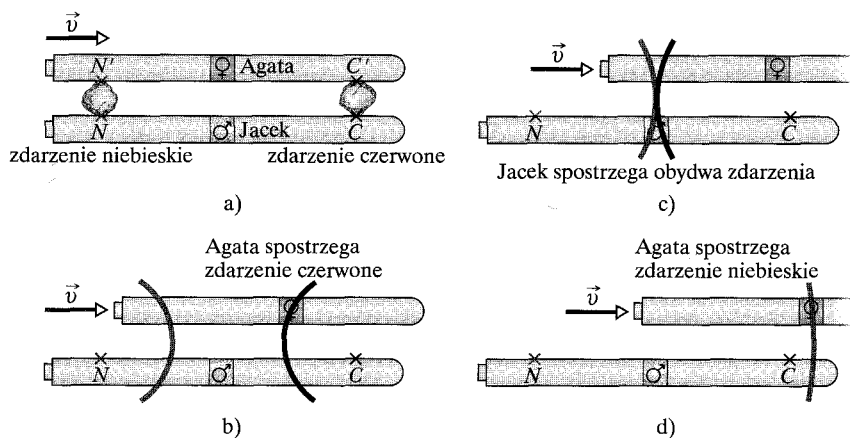
Jeżeli względna prędkość obserwatorów jest dużo mniejsza od prędkości światła, to odchylenia od jednoczesności są na tyle małe, że nie dają się zaobserwować. Tak jest w przypadku naszych codziennych obserwacji i dlatego względność jednoczesności jest dla nas czymś obcym.

### Bliższe spojrzenie na jednoczesność

Wyjaśnimy teraz względność jednoczesności, opierając się na postulatach teorii względności, nie korzystając bezpośrednio z prętów mierniczych ani zegarów. Na rysunku 38.4 przedstawiono dwa statki kosmiczne (SK), nazwane imionami obserwatorów SK Agata i SK Jacek, które posłużą znajdującym się na ich pokładach obserwatorom Agacie i Jackowi za inercjalne układy odniesienia. Każdy z obserwatorów znajduje się dokładnie w połowie długości swojego statku. Statki oddalają się od siebie wzdłuż osi  $x$ , a względna prędkość SK Agata względem SK Jacek wynosi  $\vec{v}$ . Na rysunku 38.4a pokazano statki w chwili, kiedy obydwa obserwatorzy znajdują się przez moment dokładnie naprzeciwko siebie.

Dwa duże meteoroidy uderzają w statki — niekoniecznie jednocześnie — i jeden wzniesia czerwony płomień (zdarzenie czerwone), a drugi niebieski (zdarzenie niebieskie). Każde zdarzenie pozostawia trwałe ślady na każdym ze statków w punktach  $C$  i  $C'$  oraz  $N$  i  $N'$ .

Wyobraźmy sobie teraz, że czoła fal świetlnych związanych z obydwoma zdarzeniami docierają do Jacka w tej samej chwili (rysunek 38.4c). Załóżmy też,



Rys. 38.4. Statki kosmiczne Agaty i Jacka oraz zdarzenia narysowane tak, jak widzi je Jacek. Statek Agaty porusza się w prawo z prędkością  $\vec{v}$ . a) Zdarzenie czerwone zachodzi w punktach  $C$  i  $C'$ , a zdarzenie niebieskie w punktach  $N$  i  $N'$ ; obydwa zdarzenia są źródłem fali świetlnej. b) Agata spostrzega czoło fali od zdarzenia czerwonego. c) Jacek jednocześnie spostrzega czoła fal od zdarzenia czerwonego i zdarzenia niebieskiego. d) Agata spostrzega czoło fali od zdarzenia niebieskiego.

że Jacek, mierząc położenie śladów na swoim statku, stwierdzi, iż w chwili, kiedy zdarzenia nastąpiły, znajdował się rzeczywiście w połowie odległości między punktami  $C$  i  $N$ . Powie on mniej więcej tak:

**Jacek:** Światło związane ze zdarzeniami czerwonym i niebieskim dotarło do mnie w tym samym czasie. Na podstawie śladów na moim statku stwierdziłem, że w chwili, w której ujrzałem obydwa światła, znajdowałem się dokładnie w połowie drogi między ich źródłami. Oznacza to, że zdarzenia czerwone i niebieskie nastąpiły jednocześnie.

Z rysunku 38.4 wynika, że Agata i czoło fali świetlnej od zdarzenia czerwonego poruszają się *ku* sobie. Agata i czoło fali związanej ze zdarzeniem niebieskim poruszają się w *tym samym kierunku*. Dlatego czoło fali od zdarzenia czerwonego dotrze do Agaty *wcześniej* niż czoło fali od zdarzenia niebieskiego. Usłyszymy od niej, że:

**Agata:** Światło związane ze zdarzeniem czerwonym dotarło do mnie wcześniej niż światło związane ze zdarzeniem niebieskim. Na podstawie śladów na moim statku stwierdziłam, że ja także znajdowałam się dokładnie w połowie drogi między obydwojema źródłami światła. Oznacza to, że zdarzenia *nie* były jednoczesne; zdarzenie czerwone nastąpiło wcześniej, a niebieskie — później.

Obydwa raporty są ze sobą sprzeczne. Mimo to *obydwoje* obserwatorów mają rację.

Zauważcie, że istnieje tylko jedno czoło fali związanej z każdym zdarzeniem i to *czoło fali porusza się w obydwu układach odniesienia z taką samą prędkością  $c$* , zgodnie z postulatem stałości prędkości światła.

*Mogłoby się też zdarzyć, że meteoroidy uderzyłyby w statki tak, że obydwa zdarzenia właśnie Agacie wydałyby się jednoczesne. W takim przypadku to Jacek stwierdziłby, że obydwa zdarzenia nie są jednoczesne.*

## 38.5. Względność czasu

Jeżeli obserwatorzy poruszający się względem siebie mierzą pewien odstęp czasu (czyli *odległość w czasie*) między dwoma zdarzeniami, to otrzymają na ogół różne wyniki. Dlaczego? Ponieważ odległość zdarzeń w przestrzeni może wpłynąć na mierzony przez obserwatorów odstęp w czasie.

► Odstęp czasu między zdarzeniami zależy od tego, w jakiej odległości od siebie one nastąpiły zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Oznacza to, że przestrzenne i czasowe odległości zdarzeń są ze sobą powiązane.

W tym paragrafie zastanowimy się, jak powiązać obydwie odległości, rozważając w tym celu pewien przykład, który jednak kryje w sobie istotne ograniczenie: *Dla jednego z dwóch obserwatorów obydwa zdarzenia będą zachodzić w tym samym miejscu*. Bardziej ogólne przykłady podamy dopiero w paragrafie 38.7.

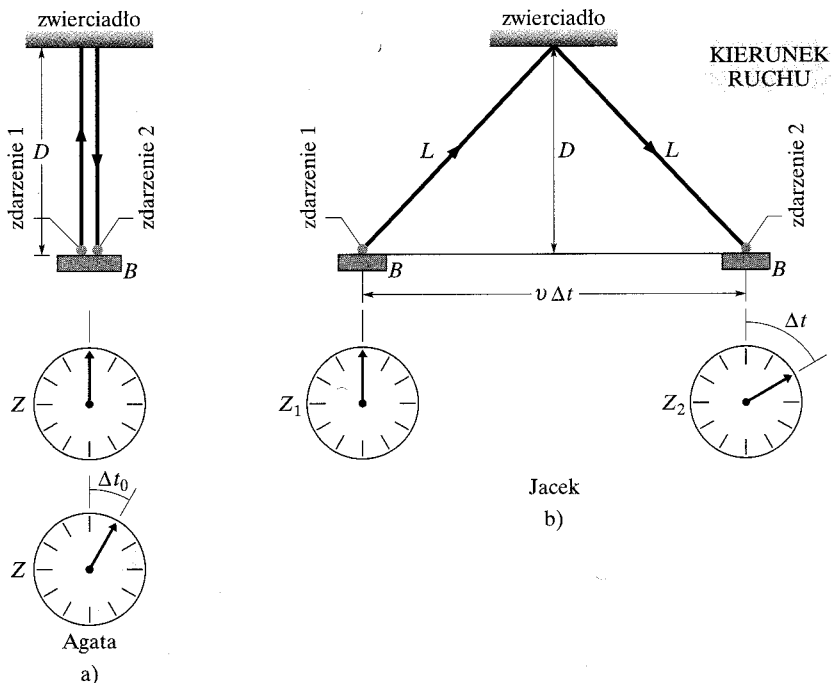
Na rysunku 38.5a przedstawiono istotę doświadczenia, które wykonuje Agata, korzystając z przyrządów umieszczonych w pociągu jadącym ze stałą prędkością  $\bar{v}$  względem stacji. Impuls światła opuszcza źródło  $B$  (zdarzenie 1), porusza się pionowo w górę, odbija się pionowo w dół od zwierciadła i jest rejestrowany w miejscu, w którym znajduje się źródło (zdarzenie 2). Agata mierzy odstęp czasu  $\Delta t_0$  między obydwo zdarzeniami, który jest związany z odległością  $D$  dzielącą źródło światła od zwierciadła następującą zależnością:

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad (\text{Agata}). \quad (38.3)$$

W układzie odniesienia Agaty obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu i dlatego do pomiaru odstępu czasu między nimi wystarcza jej tylko jeden zegar  $Z$  znajdujący się tam, gdzie źródło i odbiornik. Na rysunku 38.5a zegar  $Z$  przedstawiono dwa razy — na początku i na końcu mierzonego odstępu czasu.

Zastanówmy się teraz, jak te same dwa zdarzenia opiszcie Jacek stojący na peronie stacji, przez którą przejeżdża pociąg. Przyrządy poruszają się, gdy światło biegnie do i od zwierciadła, dlatego też Jacek widzi drogę światła tak, jak przedstawiono ją na rysunku 38.5b. W jego układzie odniesienia obydwa zdarzenia zachodzą w innych miejscach i dlatego, aby zmierzyć odstęp czasu między nimi, Jacek potrzebuje *dwóch* zsynchronizowanych zegarów,  $Z_1$  i  $Z_2$ , po jednym dla każdego zdarzenia. Zgodnie z postulatem Einsteina światło porusza się w układzie Jacka z taką samą prędkością  $c$ , jak w układzie Agaty. Teraz jednak światło musi pokonać drogę  $2L$  między zdarzeniami 1 i 2. Odstęp czasu między zdarzeniami, który zmierzy Jacek, wyniesie więc

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad (\text{Jacek}), \quad (38.4)$$



Rys. 38.5. a) W pociągu Agata za pomocą jednego zegara  $Z$  mierzy odstęp czasu  $\Delta t_0$  dzielący zdarzenia 1 i 2, które nastąpiły w pociągu. Zegar narysowany jest dwukrotnie: pierwszy raz przedstawia odczyt dla zdarzenia 1 i drugi — odczyt dla zdarzenia 2. b) Jacek, stojąc na peronie, obserwuje zdarzenia zachodzące w pociągu. Aby zmierzyć odstęp czasu między zdarzeniami 1 i 2, musi mieć dwa zsynchronizowane zegary:  $Z_1$  w miejscu zdarzenia 1 i  $Z_2$  w miejscu zdarzenia 2. Zmierzony przez niego odstęp czasu ma wartość  $\Delta t$



gdzie

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2}. \quad (38.5)$$

Korzystając z równania (38.3), możemy tę zależność przepisać w postaci

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}. \quad (38.6)$$

Jeżeli z równań (38.4) i (38.6) wyeliminujemy  $L$  i rozwiążemy otrzymane równanie względem  $\Delta t$ , to otrzymamy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (38.7)$$

Równanie (38.7) pozwala nam porównać zmierzony przez Jacka odstęp czasu  $\Delta t$  z uzyskanym przez Agatę wynikiem  $\Delta t_0$ . Ponieważ prędkość  $v$  musi mieć wartość mniejszą niż  $c$ , dlatego też mianownik ułamka w równaniu (38.7) jest mniejszy od jedności. Zatem wartość  $\Delta t$  musi być większa niż  $\Delta t_0$ : Jacek zmierzy *większy* odstęp czasu między zdarzeniami niż Agata. Jacek i Agata mierzyli odstęp czasu między *tymi samymi* zdarzeniami, ale ich ruch względem siebie sprawił, że uzyskali *różne* wyniki. Możemy więc wyciągnąć wniosek, że względny ruch zmienia *szybkość*, z jaką płynie czas między dwoma zdarzeniami. U podstaw tego zjawiska leży fakt, że prędkość światła jest taka sama dla obydwu obserwatorów.

Pomiary Jacka i Agaty będziemy rozróżniać dzięki następującej terminologii:

➤ Odstęp czasu zmierzony dla dwóch zdarzeń, które zaszły w tym samym miejscu w inercyjnym układzie odniesienia, będziemy nazywać odstępem czasu własnego lub krócej **czasem własnym**. Mierząc w jakimkolwiek innym inercyjnym układzie odniesienia odstęp czasu dzielący te same zdarzenia, zawsze otrzymamy większą wartość.

Widzimy, że Agata jako wynik pomiaru uzyskuje czas własny, a Jacek pewien większy odstęp czasu. (Określenie *własny* nie jest zbyt szczęśliwe, gdyż może sugerować, że inne pomiary są niewłaściwe, a więc nierzeczywiste lub błędne. Ale to nie jest prawdą). Różnicę między zmierzonym odstępem czasu a odpowiednim czasem własnym nazywamy **dylatacją czasu**. (Dylatacja znaczy tyle, co wydłużenie lub rozciągnięcie; w tym przypadku mamy do czynienia z wydłużeniem odstępu czasu).

Często bezwymiarowy stosunek  $v/c$  występujący w równaniu (38.7) oznaczamy symbolem  $\beta$  i traktujemy jako prędkość w jednostkach  $c$ . Natomiast bezwymiarową odwrotność pierwiastka kwadratowego występującego w równaniu (38.7) oznaczamy przez  $\gamma$  i nazywamy **współczynnikiem Lorentza**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (38.8)$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, możemy zapisać równanie (38.7) w następującej postaci:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{dylatacja czasu}). \quad (38.9)$$

Parametr  $\beta$  jest zawsze mniejszy od jedności, a współczynnik  $\gamma$  jest większy od jedności, jeżeli tylko prędkość  $v$  jest różna od zera. Wartość współczynnika Lorentza nie odbiega znacząco od 1, o ile prędkość  $v$  nie przekracza  $0,1c$ . Tak więc opis nie korzystający z teorii względności (nazywany nierelatywistycznym) daje poprawne wyniki pod warunkiem, że  $v < 0,1c$ . Dla większych prędkości  $v$  trzeba korzystać ze szczególnej teorii względności. Zgodnie z wykresem na rysunku 38.6 wartość  $\gamma$  zaczyna gwałtownie rosnać, kiedy parametr  $\beta$  zbliża się do 1 (prędkość zbliża się do prędkości światła). Tak więc im większa będzie względna prędkość Jacka i Agaty, tym większy odstęp czasu zmierzy Jacek. Gdyby prędkość ta zrównała się z prędkością światła, odstęp czasu wydłużyłby się do „wieczności”.

Można się zastanawiać, co powie Agata, słysząc, że Jacek zmierzył większy odstęp czasu niż ona. Wynik Jacka nie będzie jednak dla niej zaskoczeniem, ponieważ stwierdzi ona, że Jacek, wbrew temu, co sam twierdzi, nie zsynchronizował swoich zegarów  $Z_1$  i  $Z_2$ . Pamiętajmy, że poruszający się względem siebie obserwatorzy mają różne zdania na temat jednoczesności. W tym przypadku Jacek będzie twierdził, że obydwa jego zegary wskazywały ten sam czas, kiedy zaszło zdarzenie 1. Ale według Agaty należący do Jacka zegar  $Z_2$  podczas synchronizacji błędnie ustawiono tak, że wyprzedza on  $Z_1$ . Dlatego Agaty nie zdziwi fakt, że Jacek, który na zegarze  $Z_2$  odczytał czas zdarzenia 2, uzyskał za duży wynik, większy od tego, który ona uzyskała.

## Dwa testy dylatacji czasu

**1. Zegary mikroskopowe.** Cząstki elementarne nazywane *mionami* są niestrawne; oznacza to, że powstały mion żyje przez krótki czas, zanim ulegnie rozpadowi (zamieni się w inne cząstki). Czas życia mionu jest odstępem czasu między dwoma zdarzeniami: 1) jego powstaniem i 2) rozpadem. Gdy miony są nieruchome i czas ich istnienia mierzymy spoczywającymi zegarami (na przykład w laboratorium), stwierdzamy, że żyją one średnio  $2,2 \mu\text{s}$ . Jest to czas własny, ponieważ dla każdego mionu zdarzenia 1 i 2 zachodzą w tym samym miejscu w układzie odniesienia związanym z mionem, tzn. dokładnie tam, gdzie znajduje się mion. Ten czas własny oznaczmy przez  $\Delta t_0$ , a układ odniesienia, w którym został on zmierzony, możemy nazwać *układem spoczynkowym mionu*.

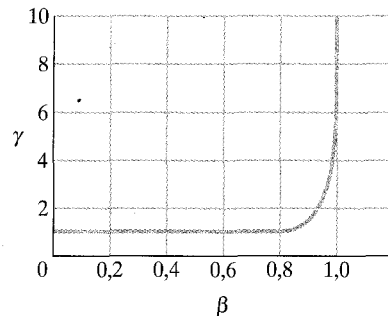
Jeżeli miony będą się poruszać, na przykład lecąc przez laboratorium, to pomiary czasu ich życia dokonane za pomocą zegarów w laboratorium powinny dać większą wartość. Aby potwierdzić to przypuszczenie, zmierzono za pomocą zegara w laboratorium średni czas życia mionów poruszających się z prędkością  $0,9994c$  względem laboratorium. Z równania (38.8) wynika, że jeżeli  $\beta = 0,9994$ , to współczynnik Lorentza ma wartość

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,9994)^2}} = 28,87.$$

Równanie (38.9) pozwala obliczyć wydłużony średni czas życia:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28,87)(2,2 \mu\text{s}) = 63,51 \mu\text{s}.$$

Faktycznie zmierzony czas życia zgadza się z tą wartością w granicach niepewności pomiaru.

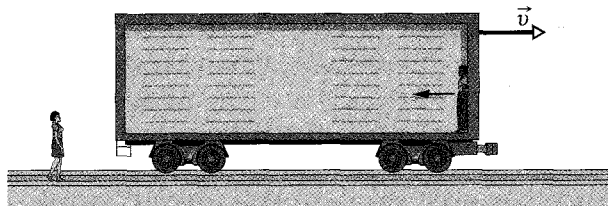


Rys. 38.6. Wykres zależności współczynnika Lorentza  $\gamma$  od parametru  $\beta$  ( $= v/c$ )

2. **Zegary makroskopowe.** W październiku 1977 roku Joseph Hafele i Richard Keating wykonali bardzo pracochłonne doświadczenie. Wysłali oni cztery przenośne zegary atomowe w dwukrotną podróż dookoła świata na pokładach samolotów pasażerskich. Zegary raz okrążyły Ziemię w jedną stronę, a drugi raz w przeciwną. Celem było „sprawdzenie teorii względności Einsteina za pomocą zegarów makroskopowych”. Powiedzieliśmy właśnie, że przewidywana przez szczególną teorię względności dylatacja czasu została sprawdzona w skali mikroskopowej, ale z pewnością jej potwierdzenie za pomocą „prawdziwych” zegarów dałoby uczynom wielką satysfakcję. Pomiar makroskopowe stały się możliwe dzięki niezwykle dużej dokładności współczesnych zegarów atomowych. Hafele i Keating potwierdzili przewidywania teorii z dokładnością do 10%. (*Ogólna teoria względności* przewiduje, że siła grawitacyjna działająca na zegar również ma wpływ na jego wskazanie, a zatem i na wynik tego doświadczenia).

Kilka lat później fizycy z University of Maryland przeprowadzili podobne doświadczenie z jeszcze większą dokładnością. Dzięki kolejnym trwającym po 15 godzin lotom atomowego zegara wokół zatoki Chesapeake zdołali potwierdzić, że wartość dylatacji czasu równa jest wartości przewidywanej przez szczególną teorię względności z niepewnością mniejszą niż 1%. Obecnie, gdy zegary atomowe przewozi się z miejsca na miejsce, na przykład w celu kalibracji, zawsze trzeba uwzględnić dylatację czasu wywołaną ich ruchem.

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Wyobraź sobie, że stojąc obok torów kolejowych, widzisz wagon relatywistyczny, tzn. poruszający się z prędkością bliską  $c$  (rysunek). W jego wnętrzu do brze wyposażony podróżny wysłał z lasera impuls światła, który biegnie od przedniej do tylnej ściany wagonu. a) Czy przeprowadzony przez ciebie pomiar prędkości impulsu da wynik większy, mniejszy, czy taki sam, jak pomiar wykonany w wagonie przez podróżnego? b) Czy zmierzony przez podróżnego czas przebycia długości wagonu przez impuls jest czasem własnym? c) Czy pomiary czasu dokonane przez podróżnego i przez ciebie są powiązane ze sobą równaniem (38.9)?



## Przykład 38.1

Twój statek kosmiczny mija Ziemię z prędkością względną  $0,999c$ . Po 10 latach (według twojego czasu) zatrzymujesz się na posterunku obserwacyjnym nr 13, zawracasz i lecisz z powrotem w kierunku Ziemi z tą samą prędkością względną. Podróż powrotna zajmuje kolejne 10 lat (według twojego czasu). Jak długo trwała ta podróż według pomiarów wykonanych na Ziemi? (Pomiń

wszystkie skutki przyspieszeń działających podczas hamowania, zawracania i ponownego nabierania prędkości).

### ROZWIĄZANIE:

Na początek przeanalizujemy tylko tę część podróży, podczas której statek się oddalał. Zauważmy, że:

➔ 1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonywanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia. Jeden z nich

jest związany z Ziemią, a drugi (twój układ odniesienia) ze statkiem kosmicznym, którym lecisz.

☛ 2. W pierwszej części podróży można wskazać dwa zdarzenia: jej początek, kiedy statek mija Ziemię, i koniec, kiedy dociera on do posterunku nr 13.

☛ 3. Zmierzony przez ciebie czas podróży, równy 10 lat, jest czasem własnym  $\Delta t_0$ , ponieważ obydwa zdarzenia: początek i koniec podróży zachodzą w tym samym miejscu w twoim układzie odniesienia na twoim statku.

☛ 4. Pomiar odstępu czasu  $\Delta t$  dokonany w układzie odniesienia związanym z Ziemią — zgodnie z tym, co wynika z równania (38.9) ( $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ ) wyrażającego dylatację czasu — musi dać wartość większą niż  $\Delta t_0$ .

Korzystając z równania (38.8), podstawiamy do równania (38.9) współczynnik  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{10a}{\sqrt{1 - (0,9999c/c)^2}} = (22,37)(10 a) = 224 a.\end{aligned}$$

W podróży powrotnej mamy dokładnie taką samą sytuację i takie same dane liczbowe. Oznacza to, że cała podróż, która według twojego czasu zajmuje 20 lat, według czasu mierzonego na Ziemi będzie trwać

$$\Delta t_{\text{całk}} = 2 \cdot 224 a = 448 a. \quad (\text{odpowiedź})$$

Innymi słowy, ty postarzałeś się o 20 lat, podczas gdy Ziemia o 448 lat. Chociaż (o ile nam wiadomo) nie można podróżować w czasie wstecz, można podróżować w przyszłość, na przykład Ziemi, poruszając się z bardzo dużą prędkością względną, dzięki czemu wpływa się na szybkość upływu czasu.

## Przykład 38.2

Średni czas życia spoczywającego kaonu dodatniego ( $K^+$  — jedna z cząstek elementarnych) wynosi  $0,1237 \mu\text{s}$ . Jaką drogę w układzie odniesienia związanym z laboratorium może przebyć podczas swojego życia kaon dodatni, jeżeli w chwili swojego powstania porusza się w tym układzie odniesienia z prędkością  $0,99c$ ? Obliczenia wykonaj najpierw w ramach fizyki nierelatywistycznej dającej dobre przybliżenie dla prędkości dużo mniejszych niż  $c$ , a następnie w ramach szczególnej teorii względności dającej poprawne wyniki dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

☛ 1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia — pierwszy jest związany z kaonem, a drugi z laboratorium.

☛ 2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: początek podróży kaonu (w chwili jego powstania) oraz koniec podróży (kiedy kaon się rozpada).

☛ 3. Droga, którą przebywa kaon między tym zdarzeniami, jest związana z jego prędkością  $v$  oraz odstępem czasu za pomocą następującego równania:

$$v = \frac{\text{droga}}{\text{odstęp czasu}}. \quad (38.10)$$

Mając te wiadomości, obliczenia wykonamy najpierw w przybliżeniu nierelatywistycznym, a następnie skorzystamy ze szczególnej teorii względności.

*Opis nierelatywistyczny.* W przybliżeniu nierelatywistycznym, jak wiemy: ☛ pomiary drogi i odstępu czasu dadzą ten sam wynik (równanie (38.10)) niezależnie od tego, czy przeprowadzimy je w układzie odniesienia związanym z kaonem, czy w układzie laboratoryjnym. Możemy więc nie zważać na to, w jakim układzie wykonujemy pomiary. Aby w przybliżeniu nierela-

tywistycznym obliczyć drogę  $d_{\text{niereł}}$  kaonu, zapiszemy najpierw równanie (38.10) w postaci

$$d_{\text{niereł}} = v \Delta t, \quad (38.11)$$

gdzie  $\Delta t$  oznacza odstęp czasu między dwoma zdarzeniami w którymkolwiek z dwóch układów odniesienia. Podstawiając do równania (38.11)  $v = 0,99c$  oraz  $\Delta t = 0,1237 \mu\text{s}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}d_{\text{niereł}} &= (0,99c) \Delta t \\ &= (0,99)(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})(0,1237 \cdot 10^{-6} \text{ s}) \\ &= 36,7 \text{ m}.\end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Taką odległość pokonałby kaon, gdyby fizyka nierelatywistyczna obowiązywała dla prędkości bliskich  $c$ .

*Szczególna teoria względności.* W ramach szczególnej teorii względności musimy spełnić następujący warunek: ☛ odległość i odstęp czasu w równaniu (38.10) muszą być zmierzone w tym samym układzie odniesienia — zwłaszcza wtedy, kiedy prędkość jest bliska  $c$ , jak w naszym przypadku. Aby obliczyć drogę  $d_{\text{rel}}$  kaonu, zmierzoną w układzie odniesienia związanym z laboratorium, zapiszemy równanie (38.10) w postaci

$$d_{\text{rel}} = v \Delta t, \quad (38.12)$$

gdzie przez  $\Delta t$  oznaczymy odstęp czasu między dwoma zdarzeniami, które zostały zmierzone w układzie odniesienia związanym z laboratorium.

Zanim z równania (38.12) obliczymy drogę kaonu  $d_{\text{rel}}$ , musimy wyznaczyć odstęp czasu  $\Delta t$ , korzystając z następującego faktu: ☛ odstęp czasu równy  $0,1237 \mu\text{s}$  jest czasem własnym, ponieważ dwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie związanym z kaonem — dokładnie tam, gdzie znajduje się kaon. Oznaczmy czas własny przez  $\Delta t_0$ . Możemy teraz, korzystając z równania (38.9) na dylatację czasu ( $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ ), obliczyć odstęp czasu mierzony w układzie związanym z laboratorium. Podstawiając współczynnik  $\gamma$  z równania (38.8), otrzymamy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{0,1237 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,99c/c)^2}} = 8,769 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Uzyskana wartość jest około siedem razy większa niż własny czas życia kaonu. Oznacza to, że kaon żyje siedem razy dłużej w układzie odniesienia związanym z laboratorium niż w swoim układzie spoczynkowym — czas życia kaonu ulega dylatacji. Możemy teraz, korzystając z równania (38.12), obliczyć drogę kaonu  $d_{\text{rel}}$  w układzie związanym z laboratorium

$$\begin{aligned} d_{\text{rel}} &= v\Delta t = (0,99c)\Delta t \\ &= (0,99)(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})(8,769 \cdot 10^{-7} \text{ s}) \\ &= 260 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymany wynik jest około siedem razy większy niż droga obliczona w przybliżeniu nierelatywistycznym  $d_{\text{nierel}}$ . Doświadczenia takie jak to, które przed chwilą opisaliśmy, będące testami szczególnej teorii względności, stały się codziennością już kilkadziesiąt lat temu. We wszelkich urządzeniach badawczych lub medycznych, w których cząstki są przyspieszane do wielkich prędkości, należy uwzględniać efekty relatywistyczne.

## 38.6. Względność długości

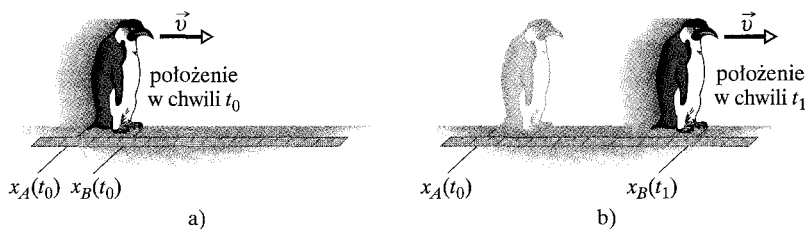
Jeżeli chcesz zmierzyć długość spoczywającego względem ciebie pręta, to możesz bez pośpiechu odczytać na odpowiednio długiej spoczywającej miarce położenie jego końców, a następnie odjąć od siebie odczytane wartości. Jeżeli jednak pręt porusza się, to współrzędne jego końców musisz odczytać *jednocześnie* (w twoim układzie odniesienia), gdyż w przeciwnym razie nie będzie to pomiar długości. Na rysunku 38.7 wskazano trudności, jakie napotkamy, gdy chcąc zmierzyć grubość poruszającego się pingwina, będziemy notować położenie jego pleców i brzuszka w różnym czasie. Pojęcie jednoczesności jest względne, a wiąże się z pomiarami długości, zatem i długość musi być wielkością względną. I tak właśnie jest.

Niech  $L_0$  oznacza długość pręta, którą mierzymy, kiedy pręt spoczywa (znajdujemy się w układzie odniesienia pręta). Jeżeli pręt porusza się względem nas z prędkością  $v$  skierowaną *równoległe do niego*, to wtedy, dokonując jednoczesnego pomiaru położenia końców, uzyskamy długość  $L$  daną wzorem

$$L = L_0\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{skrócenie długości}). \quad (38.13)$$

Współczynnik Lorentza  $\gamma$  jest zawsze większy od jedności, jeżeli tylko prędkość jest różna od zera, dlatego też  $L$  ma wartość mniejszą niż  $L_0$ . Ruch względny powoduje *skrócenie długości*. Wartość  $\gamma$  wzrasta wraz z prędkością  $v$ , zatem skrócenie długości staje się tym wyraźniejsze, im prędkość  $v$  jest bliższa wartości  $c$ .

► Długość obiektu  $L_0$  mierzona w jego układzie spoczynkowym nazywamy **długością własną** lub **długością spoczynkową**. Pomiary długości przeprowadzone w innym układzie odniesienia, który porusza się względem obiektu równoległe do mierzonej długości, dają zawsze wynik mniejszy niż długość własna.



Rys. 38.7. Jeżeli chcesz zmierzyć grubość poruszającego się pingwina, musisz jednocześnie — jak na rysunku (a), a nie (b) — wyznaczyć położenie jego pleców i brzuszka (w swoim układzie odniesienia)

Uważaj jednak: Skrócenie długości zachodzi tylko w kierunku ruchu względ- nego. Poza tym mierzona długość nie musi być wcale długością jakiegoś ciała, jak pręt czy obręcz; może to być odległość między dwoma ciałami spoczywającymi w tym samym układzie odniesienia, na przykład Słońcem i pobliską gwiazdą (które przynajmniej w przybliżeniu spoczywają względem siebie).

Czy poruszające się ciała *rzeczywiście* się kurczą? Rzeczywistość jest wynikiem obserwacji i pomiarów; gdy wyniki są zawsze spójne i nie można znaleźć błędów, wtedy to, co obserwujemy i mierzymy, jest rzeczywistością. W tym sensie ciała *rzeczywiście* się kurczą. Jednakże bardziej ściśle należy powiedzieć, że *według pomiarów* ciała się kurczą — ruch wpływa na pomiary, a tym samym na rzeczywistość.

Co powie obserwator poruszający się wraz z prętem, kiedy usłyszy, że nasz pomiar długości dał mniejszą wartość? Według niego błąd polega na tym, że położenia obydwu końców pręta nie zostały wyznaczone jednocześnie. (Pamiętajmy, że obserwatorzy poruszający się względem siebie mają różne zdanie na temat jed- noczesności). Według obserwatora związanego z prętem najpierw zmierzylśmy położenie przedniego końca pręta, a nieco później tylnego i dlatego otrzymaliśmy mniejszą jego długość.

### Wyprowadzenie równania (38.13)

Skrócenie długości jest bezpośrednią konsekwencją dylatacji czasu. Wróćmy raz jeszcze do naszej pary obserwatorów. Tym razem Agata, która przejeżdża po- ciągiem przez stację, i stojący na peronie Jacek postanawiają zmierzyć długość peronu. Jacek, który korzysta z taśmy mierniczej, stwierdza, że długość peronu wynosi  $L_0$ , co jest długością własną, ponieważ peron spoczywa względem niego. Jacek stwierdza też, że jadąca pociągiem Agata mija peron w czasie  $\Delta t = L_0/v$ , gdzie  $v$  oznacza prędkość pociągu. Mamy więc

$$L_0 = v\Delta t \quad (\text{Jacek}). \quad (38.44)$$

Odstęp czasu  $\Delta t$  nie jest czasem własnym, ponieważ dwa zdarzenia, które go wyznaczają („Agata mija początek peronu” i „Agata mija koniec peronu”) nie zachodzą w tym samym miejscu i Jacek musi użyć dwóch zsynchronizowanych zegarów, aby zmierzyć  $\Delta t$ .

Z punktu widzenia Agaty peron porusza się obok niej. Stwierdza ona, że dwa zdarzenia, które mierzy Jacek, w jej układzie odniesienia zachodzą w *tym samym miejscu*. Może ona je zmierzyć, korzystając tylko z jednego, spoczywającego zegara, i dlatego zmierzony przez nią odstęp czasu  $\Delta t_0$  jest czasem własnym. Według Agaty długość peronu  $L$  można obliczyć ze wzoru

$$L = v\Delta t_0 \quad (\text{Agata}). \quad (38.15)$$

Dzieląc równanie (38.15) przez (38.14) i korzystając z równania (38.9) opisują- cego dylatację czasu, otrzymamy

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma},$$

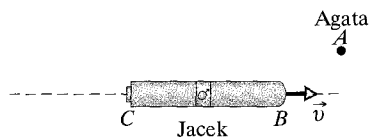
czyli

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (38.16)$$

Jest to dokładnie równanie (38.13), które wyraża skrócenie długości.

## Przykład 38.3

Statek kosmiczny Jacka (o długości własnej  $L_0 = 230$  m) mija ze stałą prędkością względną  $v$  Agatę, która znajduje się w punkcie  $A$  (rysunek 38.8). Agata stwierdza, że statek Jacka mija ją (od punktu  $B$  do punktu  $C$ ) w czasie  $3,57 \mu\text{s}$ . Ile wynosi względna prędkość  $v$  Agaty i statku kosmicznego (w jednostkach  $c$ )?



Rys. 38.8. Przykład 38.3. W punkcie  $A$  Agata mierzy czas, w jakim mija ją statek kosmiczny

### ROZWIĄZANIE:

Założmy że wartość prędkości  $v$  jest bliska prędkości światła  $c$ . Zauważmy teraz, że:

➤ 1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia, pierwszym związanym z Agatą oraz z drugim, związanym z Jackiem i z jego statkiem kosmicznym.

➤ 2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: pierwsze — Agatę mija punkt  $B$  i drugie — Agatę mija punkt  $C$ .

➤ 3. W każdym z układów odniesienia drugi układ odniesienia porusza się z prędkością  $v$  i w czasie między zdarzeniami pokonuje pewną odległość:

$$v = \frac{\text{odległość}}{\text{odstęp czasu}}. \quad (38.17)$$

Prędkość  $v$  z założenia jest bliska prędkości światła, dlatego też musimy pamiętać, aby odległość i odstęp czasu pojawiający się w równaniu (38.17) były zmierzone w *tem samym* układzie odniesienia.

Mamy swobodę wyboru układu odniesienia, w którym chcemy wykonać pomiary. Wiemy, że odstęp czasu dzielący zdarzenia, zmierzony w układzie odniesienia Agaty wynosi  $3,57 \mu\text{s}$ , za-

tem skorzystamy z odległości  $L$  między zdarzeniami, zmierzonej w tym układzie odniesienia. Równanie (38.17) można zapisać w postaci

$$v = \frac{L}{\Delta t}. \quad (38.18)$$

Nie znamy wartości  $L$ , ale możemy ją powiązać z podaną wartością  $L_0$ . Zauważmy, że odległość między dwoma zdarzeniami zmierzona w układzie odniesienia Jacka jest długością własną jego statku  $L_0$ . Dlatego odległość  $L$  mierzona w układzie odniesienia Agaty musi być mniejsza niż  $L_0$ , co wynika z równania (38.13) ( $L = L_0/\gamma$ ), które wyraża skrócenie długości. Podstawiając  $L_0/\gamma$  jako wartość  $L$  do równania (38.18), a następnie podstawiając współczynnik  $\gamma$  dany równaniem (38.8), otrzymujemy

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0\sqrt{1 - (v/c)^2}}{\Delta t}.$$

Rozwiązując to równanie względem  $v$ , dochodzimy do poszukiwanego wyniku

$$\begin{aligned} v &= \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\Delta t)^2 + L_0^2}} \\ &= \frac{(230 \text{ m})c}{\sqrt{(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})(3,57 \cdot 10^{-6} \text{ s})^2 + (230 \text{ m})^2}} \\ &= 0,21c. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Widzimy więc, że względna prędkość Agaty i statku jest równa 21% prędkości światła. Zauważ, że w tym przypadku liczy się tylko względny ruch Agaty i Jacka; to, czy któryś z ich układów znajduje się w spoczynku względem powiedzmy stacji kosmicznej, nie ma znaczenia. Rysunek 38.8 wykonano tak, jakby Agata znajdowała się w stanie spoczynku, ale równie dobrze można by przyjąć, że to ona się porusza. Nie miałoby to żadnego wpływu na uzyskany wynik.

✓ **SPRAWDZIAN 2:** W omówionym przykładzie Agata mierzy czas, w którym mija ją statek. Załóżmy, że Jacek wykonuje ten sam pomiar. a) Który z pomiarów (może obydwa albo żaden) jest czasem własnym i b) w którym z pomiarów otrzymamy mniejszą wartość?

## 38.7. Transformacja Lorentza

Na rysunku 38.9 przedstawiono inercjalny układ odniesienia  $S'$  poruszający się z prędkością  $v$  względem układu  $S$ , w zgodnym dodatnim kierunku ich osi poziomych (oznaczonych  $x$  i  $x'$ ). Obserwator w układzie  $S$  przypisuje pewnemu zdarzeniu współrzędne czasoprzestrzenne  $x, y, z, t$ , a obserwator w układzie  $S'$  przypisuje temu samemu zdarzeniu współrzędne  $x', y', z', t'$ . Jaka jest wzajemna zależność między obydwooma zestawami liczb?

Stwierdzamy od razu (choć wymaga to dowodu), że ruch nie ma wpływu na współrzędne  $y$  i  $z$  odczytywane z osi prostopadłych do jego kierunku, czyli

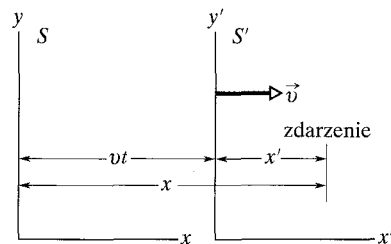
$y = y'$  i  $z = z'$ . Nasze zainteresowanie ogranicza się więc do zależności wiążących  $x$  i  $x'$  oraz  $t$  i  $t'$ .

## Transformacja Galileusza

Przed opublikowaniem przez Einsteina jego szczególnej teorii względności przyjmowano, że cztery interesujące nas współrzędne są powiązane ze sobą transformacją Galileusza:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & (\text{transformacja Galileusza;} \\ t' &= t & \text{prawdziwa dla małych prędkości).} \end{aligned} \quad (38.19)$$

(Równania te zapisaliśmy, zakładając, że  $t = t' = 0$  w chwili, kiedy początki układów współrzędnych  $S$  i  $S'$  się pokrywają). Pierwsze równanie można sprawdzić, korzystając z rysunku 38.9. Drugie równanie oznacza po prostu, że w obydwu układach odniesienia czas płynie w tym samym tempie. Dla poprzedników Einsteina było to tak oczywiste, że nawet o tym nie wspomiano. Gdy prędkość  $v$  jest mała w porównaniu z  $c$ , równania (38.19) są dobrym przybliżeniem.



Rys. 38.9. Dwa inercjalne układy odniesienia: układ  $S'$  porusza się z prędkością  $\vec{v}$  względem układu  $S$

## Transformacja Lorentza

Podamy bez dowodu, że równanie transformacji obowiązujące dla wszystkich prędkości, aż do prędkości światła, można wyprowadzić z postulatów teorii względności. Równania te są nazywane po prostu **transformacją Lorentza**<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \\ & (\text{transformacja Lorentza; prawdziwa dla} \\ & \text{wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości).} \end{aligned} \quad (38.20)$$

(Równania te zapisaliśmy, zakładając, że  $t = t' = 0$  w chwili, kiedy początki układów współrzędnych  $S$  i  $S'$  się pokrywają). Zwróćcie uwagę, że współrzędna przestrzenna  $x$  i współrzędna czasowa  $t$  występują obie w pierwszym i ostatnim równaniu. To powiązanie przestrzeni i czasu było głównym przesłaniem teorii Einsteina — przesłaniem, które długo odrzucało wielu współczesnych mu uczonych.

Rzecz jasna wymaga się, aby równania relatywistyczne przechodziły w dobrze nam znane równania nierelatywistyczne, jeżeli prędkość  $c$  dąży do nieskończoności. Oznacza to, że gdyby prędkość światła była nieskończona, *wszystkie* inne prędkości byłyby „małe” i równania nierelatywistyczne obowiązywałyby zawsze. Jeżeli w równaniach (38.20) przyjęlibyśmy, że  $c \rightarrow \infty$ , to  $\gamma \rightarrow 1$  i — zgodnie z naszymi oczekiwaniami — równania te przeszłyby w transformację Galileusza (38.19). Byłoby dobrze, gdybyście sami się o tym przekonali.

<sup>1</sup>Możecie się dziwić, dlaczego równania te nie są nazywane **transformacją Einsteina** (a także dlaczego współczynnik  $\gamma$  nie nazywa się **współczynnikiem Einsteina**). Jest tak, ponieważ wybitny holenderski fizyk H. A. Lorentz wyprowadził te równania przed Einsteinem, ale jak sam przyznał, nie uczynił tego śmiałego kroku i nie zinterpretował ich jako równań opisujących prawdziwą naturę przestrzeni i czasu. Interpretacji tej, będącej istotą teorii względności, dokonał Einstein.



Równania (38.20) zapisano w postaci, która jest wygodna, jeżeli znamy  $x$  i  $t$ , a chcemy wyznaczyć  $x'$  i  $t'$ . Może się zdarzyć, że chcemy dokonać przekształceń w drugą stronę. W takiej sytuacji wystarczy, że rozwiążemy równania (38.20) względem  $x$  i  $t$ , co prowadzi do układu

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{oraz} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (38.21)$$

Porównanie obydwu układów pozwala dostrzec, że wychodząc z jednego zestawu równań (38.20) lub (38.21), można otrzymać drugi, zamieniając zmienne primowane na nieprimowane (i na odwrót) oraz zmieniając na przeciwny znak prędkości względnej  $v$ .

Równania (38.20) i (38.21) wiążą ze sobą współrzędne jednego zdarzenia widzianego przez dwóch obserwatorów. Czasami jednak chcemy znać nie współrzędne pojedynczego zdarzenia, ale różnicę współrzędnych dla pary zdarzeń. Oznaczmy nasze zdarzenia, nadając im numery 1 i 2. Może nas interesować związek wielkości

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

mierzonych przez obserwatora w układzie  $S$ , oraz

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 \quad \text{i} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1,$$

mierzonych przez obserwatora w układzie  $S'$ .

W tabeli 38.2 podano równania Lorentza w postaci różnicowej, nadającej się do analizy par zdarzeń. Równania te otrzymano bezpośrednio dzięki podstawieniu różnic (takich jak  $\Delta x$  i  $\Delta x'$ ) zamiast czterech zmiennych występujących w układach (38.20) i (38.21).

Zachowaj ostrożność: Wyznaczając wartości wspomnianych różnic, trzeba postępować spójnie i nie pomylić wartości dla pierwszego i drugiego zdarzenia. Jeżeli na przykład  $\Delta x$  jest wielkością ujemną, to nie wolno zapomnieć o znaku minus.

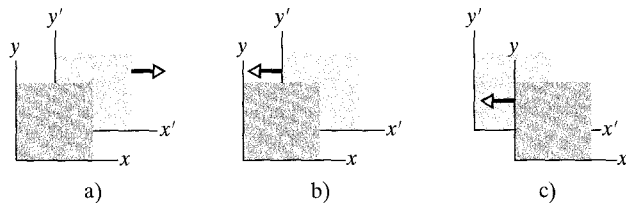
Tabela 38.2. Transformacja Lorentza dla pary zdarzeń

1. $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$	1'. $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$
2. $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$	2'. $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Układ  $S'$  porusza się z prędkością  $v$  względem układu  $S$ .

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których dwa układy odniesienia — niebieski i zielony, poruszają się względem siebie we wspólnym kierunku swoich osi  $x$  i  $x'$ , co zaznaczono za pomocą wektora prędkości jednego z układów. Jaki znak prędkości  $v$  trzeba uwzględnić w równaniach z tabeli 38.2 dla każdego z tych przypadków, jeżeli założymy, że niebieski układ odniesienia jest w stanie spoczynku?



## 38.8. Kilka wniosków z równań Lorentza

Obecnie skorzystamy z równań zapisanych w tabeli 38.2, aby potwierdzić pewne wnioski, do których doszliśmy wcześniej, wychodząc bezpośrednio z postulatów teorii względności.

### Jednoczesność

Przyjrzyjmy się równaniu 2 z tabeli 38.2:

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right). \quad (38.22)$$

Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w różnych miejscach w układzie odniesienia  $S'$  (rys. 38.9), to wartość  $\Delta x'$  w tym równaniu jest różna od zera. Wynika stąd, że nawet wtedy, kiedy zdarzenia są jednoczesne w układzie  $S'$  (czyli  $\Delta t' = 0$ ), nie będą one jednoczesne w układzie  $S$ . (Jest to zgodne z naszym wnioskiem z paragrafu 38.4). Odstęp czasu między zdarzeniami w układzie odniesienia  $S$  będzie równy

$$\Delta t = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2} \quad (\text{zdarzenia jednoczesne w } S').$$

### Dylatacja czasu

Załóżmy teraz, że dwa zdarzenia w układzie  $S'$  zachodzą w tym samym miejscu ( $\Delta x' = 0$ ), ale w różnym czasie ( $\Delta t' \neq 0$ ). Równanie (38.22) redukuje się więc do postaci

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (\text{zdarzenia w tym samym miejscu w } S'). \quad (38.23)$$

Otrzymaliśmy więc potwierdzenie dylatacji czasu. Obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie  $S'$ , zatem odstęp czasu między nimi można zmierzyć za pomocą jednego zegara, znajdującego się w miejscu zdarzenia. Zmierzony odstęp czasu jest więc czasem własnym, który oznaczamy  $\Delta t_0$ . Równanie (38.23) przybiera więc postać

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{dylatacja czasu}),$$

która jest identyczna z równaniem (38.9) opisującym dylatację czasu.

### Skrócenie długości

Przyjrzyjmy się teraz równaniu 1' z tabeli 38.2:

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t). \quad (38.24)$$

Jeżeli pręt jest równoległy do osi  $x$  i  $x'$  zaznaczonych na rysunku 38.9 i spoczywa w układzie odniesienia  $S'$ , to obserwator w układzie  $S'$  może zmierzyć jego długość bez pośpiechu. Może on to zrobić, obliczając różnicę współrzędnych końców pręta. Uzyskana wartość  $\Delta x'$  jest długością własną (spoczynkową)  $L_0$  tego pręta.

Załóżmy teraz, że pręt porusza się w układzie odniesienia  $S$ . Oznacza to, że różnicę współrzędnych jego końców  $\Delta x$  będzie można uznać za długość pręta  $L$  w układzie  $S$  tylko wtedy, kiedy odpowiednie współrzędne będą zmierzone *jednocześnie* — czyli  $\Delta t = 0$ . Jeżeli podstawimy do równania (38.24)  $\Delta x' = L_0$ ,  $\Delta x = L$  i  $\Delta t = 0$ , to otrzymamy

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{skrócenie długości}), \quad (38.25)$$

czyli dokładnie równanie (38.13) wyrażające skrócenie długości.

## Przykład 38.4

Statek kosmiczny został wysłany z Ziemi do bazy na planecie P1407, której księżyc jest miejscem stacjonowania oddziałów wrogo nastawionych Reptulian. Statek lecący po linii prostej najpierw mija planetę, a następnie jej księżyc. W tym czasie załoga statku dostrzega emisję silnego promieniowania mikrofalowego ze stacji Reptulian na księżycu, a 1,1 s później eksplozję w bazie Ziemi na planecie. Według pomiarów w układzie odniesienia związanym ze statkiem obie placówki dzieli odległość  $4 \cdot 10^8$  m. Nie ulega wątpliwości, że Reptulianie zaatakowali Ziemię i załoga statku przygotowuje się do starcia z nimi.

a) Statek porusza się względem planety i jej księżyca z prędkością 0,98c. Jaką odległość i odstęp czasu między emisją promieniowania i wybuchem zmierzy obserwator w układzie związanym z planetą i jej księżycem (jak opisać zdarzenia Ziemianie z bazy na planecie i Reptulianie na Księżycu)?

### ROZWIĄZANIE:

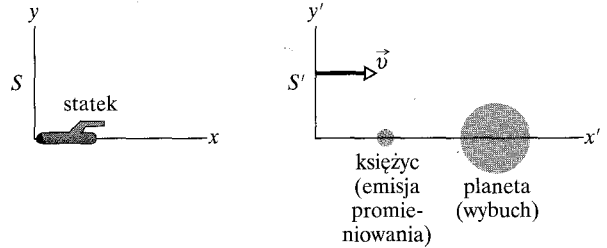
Zauważmy, że:

1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch inercjalnych układach odniesienia: w pierwszym związanym z planetą i księżycem oraz w drugim, związanym ze statkiem kosmicznym.

2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: emisję promieniowania i wybuch.

3. Musimy dokonać transformacji posiadanych danych o odległości i odstępie czasu między zdarzeniami z układu związanego ze statkiem kosmicznym do układu związanego z planetą i jej księżycem.

Zanim dokonamy transformacji, musimy zadbać o wprowadzenie odpowiednich oznaczeń. Zacznijmy od naszkicowania sytuacji, jak na rysunku 38.10. Przyjeliśmy tu, że związany ze statkiem układ  $S$  spoczywa, a układ planeta-księżyc  $S'$  porusza się z dodatnią prędkością (w prawo). (Nasz wybór jest oczywiście dowolny; równie dobrze mogliśmy przyjąć, że spoczywa układ planeta-księżyc. W takim przypadku zaznaczylibyśmy na rysunku 38.10 wektor  $\vec{v}$  jako prędkość układu  $S$  skierowaną w lewo. Wartość  $v$  byłaby ujemna, ale wynik obliczeń nie uległby zmianie).



Rys. 38.10. Przykład 38.4. Planeta i jej księżyc związane z układem odniesienia  $S'$ , poruszają się w prawo z prędkością  $v$  względem układu odniesienia  $S$  związanego ze statkiem kosmicznym

Niech wskaźniki „w” i „e” odnoszą się do zdarzenia wybuchu i emisji promieniowania. Możemy teraz zapisać posiadane przez nas dane, uzyskane w układzie  $S$  (statek):

$$\Delta x = x_w - x_e = +4 \cdot 10^8 \text{ m}$$

oraz

$$\Delta t = t_w - t_e = +1 \text{ s.}$$

W naszym przypadku odległość  $\Delta x$  jest dodatnia, ponieważ na rysunku 38.10 współrzędna wybuchu  $x_w$  jest większa niż współrzędna emisji  $x_e$ . Odstęp czasu  $\Delta t$  jest także dodatni, bo wartość  $t_w$  jest większa niż  $t_e$  (wybuch zaobserwowano później niż emisję promieniowania).

Szukamy odległości  $\Delta x'$  i odstępu czasu  $\Delta t'$ , które możemy wyznaczyć, dokonując transformacji danych z układu  $S$  do układu  $S'$  związanego z planetą i księżycem. Zajmujemy się parą zdarzeń, dlatego też skorzystamy z równań podanych w tabeli 38.2 (równania 1' i 2'):

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad (38.26)$$

oraz

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \quad (38.27)$$

W naszym przypadku  $v = +0,98c$ , co odpowiada współczynnikowi Lorentza równemu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,98c/c)^2}} = 5,0252.$$

Równanie (38.26) pozwala wyznaczyć odległość

$$\begin{aligned}\Delta x' &= (5,0252)[4 \cdot 10^8 \text{ m} - (+0,98)(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})(1,1)] \\ &= 3,86 \cdot 10^8 \text{ m},\end{aligned}\quad (\text{odpowiedź})$$

a równanie (38.27) — odstęp czasu

$$\begin{aligned}\Delta t' &= (5,0252) \left[ (1,1 \text{ s}) - \frac{(+0,98)(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})(4 \cdot 10^8)}{(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} \right] \\ &= -1,04 \text{ s}.\end{aligned}\quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie znaczenie ma znak minus w obliczonym przez nas odstęp czasu  $\Delta t'$ ?

**ROZWIĄZANIE:**

🔑 Ważne jest, aby konsekwentnie stosować notację przyjętą w punkcie (a). Przypomnijmy sobie, że na samym początku zdefiniowaliśmy odstęp czasu między emisją promieniowania a wybuchem jako:  $\Delta t = t_w - t_e = +1,1 \text{ s}$ . Aby zachować zgodność, musimy przyjąć, że odstęp czasu  $\Delta t'$  jest równy  $t'_w - t'_e$ . Oznacza to, że otrzymaliśmy wynik

$$\Delta t' = t'_w - t'_e = -1,04 \text{ s}.$$

Znak minus mówi nam, że  $t'_e > t'_w$ , a więc w układzie odniesienia planeta-księżyc emisja promieniowania nastąpiła 1,04 s po

wybuchu na planecie, a nie o 1,1 s *przed* wybuchem, jak to widziała załoga statku kosmicznego.

c) Czy to emisja promieniowania spowodowała wybuch na planecie, czy może odwrotnie?

**ROZWIĄZANIE:**

Kolejność zdarzeń zmierzona w układzie odniesienia planeta-księżyc jest inna niż w układzie odniesienia związanym ze statkiem. Zauważmy, że 🗑️ jeżeli w pewnym układzie ma istnieć związek przyczynowy między dwoma zdarzeniami, to musimy zdążyć z przesłaniem informacji o zdarzeniu z miejsca pierwszego zdarzenia do miejsca drugiego zdarzenia. Sprawdźmy, z jaką prędkością należałoby przesyłać informacje w obydwu układach odniesienia. W układzie związanym ze statkiem wymagana prędkość wynosi

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^8 \text{ m}}{1,1 \text{ s}} = 3,64 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

i jest wartością niedozwoloną, większą od prędkości światła. W układzie odniesienia planeta-księżyc otrzymamy także niedozwoloną prędkość  $3,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Oznacza to, że żadne z tych zdarzeń nie mogło być przyczyną drugiego, a więc są to zdarzenia *niezależne*. Załoga statku kosmicznego nie powinna więc decydować się na konfrontację z Reptilianami.

## 38.9. Względność prędkości

Skorzystamy teraz z transformacji Lorentza, aby przekonać się, jakie prędkości mierzą obserwatorzy badający ruch tej samej cząstki i znajdujący się w dwóch inercjalnych układach odniesienia  $S$  i  $S'$ .

Załóżmy, że cząstka poruszająca się równoległe do osi  $x$  i  $x'$  (rys. 38.11) wysyła dwa sygnały. Każdy obserwator mierzy odległość przestrzenną i odstęp czasu między tymi zdarzeniami. Wyniki czterech pomiarów wiążą równania 1 i 2 z tabeli 38.2:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

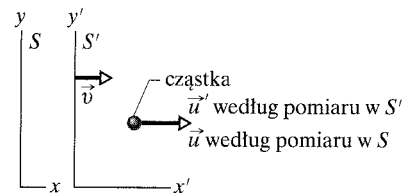
oraz

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right).$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie, otrzymamy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}.$$

Jeżeli licznik i mianownik po prawej stronie równania podzielimy przez  $\Delta t'$ , to



**Rys. 38.11.** Układ odniesienia  $S'$  porusza się z prędkością  $\vec{v}$  względem układu odniesienia  $S$ . Cząstka ma prędkość  $\vec{u}'$  względem układu odniesienia  $S'$  oraz prędkość  $\vec{u}$  względem układu odniesienia  $S$ .

stwierdzimy, że

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}$$

W granicy  $\Delta x/\Delta t$  jest prędkością  $u$  cząstki w układzie odniesienia  $S$ , a  $\Delta x'/\Delta t'$  jest prędkością  $u'$  tej samej cząstki w układzie  $S'$ . Otrzymane równanie możemy więc zapisać w postaci

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (\text{relatywistyczna transformacja prędkości}) \quad (38.28)$$

— jest to relatywistyczna transformacja prędkości. Równanie to redukuje się do transformacji nierelatywistycznej (Galileusza)

$$u = u' + v \quad (\text{nierelatywistyczna transformacja prędkości}), \quad (38.29)$$

gdy prędkość  $c$  dąży do nieskończoności:  $c \rightarrow \infty$ . Innymi słowy równanie (38.28) jest słuszne dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości, podczas gdy równanie (38.29) jest tylko przybliżeniem dla prędkości dużo mniejszych niż  $c$ .

## 38.10. Zjawisko Dopplera dla światła

W paragrafie 18.8 omawialiśmy zjawisko Dopplera (zmianę obserwowanej częstości) dla fal dźwiękowych rozchodzących się w powietrzu. W przypadku fal tego typu zjawisko Dopplera zależy od dwóch prędkości, z jakimi poruszają się źródło i detektor względem powietrza. (Powietrze jest ośrodkiem, w którym fale się rozchodzą).

Sytuacja wygląda inaczej w przypadku światła, które (tak jak wszystkie fale elektromagnetyczne) nie wymaga istnienia jakiegoś ośrodka i może rozchodzić się nawet w próżni. W przypadku zjawiska Dopplera dla światła mamy tylko jedną prędkość — względną prędkość źródła i detektora, którą mierzymy w jednym ze związanych z nimi układów odniesienia. Niech  $\nu_0$  oznacza „częstość własną” źródła, czyli częstość, którą mierzy obserwator w układzie odniesienia źródła. Niech  $\nu$  oznacza częstość mierzoną przez obserwatora poruszającego się z prędkością  $\vec{v}$  względem źródła. Jeżeli źródło i detektor oddalają się od siebie z prędkością  $\vec{v}$  skierowaną dokładnie wzdłuż łączącej je linii, to mamy

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\text{źródło i detektor oddalają się od siebie}), \quad (38.30)$$

gdzie  $\beta = v/c$ . Jeżeli źródło i detektor zbliżają się do siebie z prędkością  $\vec{v}$  skierowaną wzdłuż łączącej je linii, to należy zmienić znaki przed obydwoma współczynnikami  $\beta$  w równaniu (38.30).

## Zjawisko Dopplera dla małych prędkości względnych

W przypadku małych prędkości ( $\beta \ll 1$ ) prawą stronę równania (38.30) można rozwinąć w szereg potęgowy względem  $\beta$  i ograniczyć się do wyrazów drugiego rzędu. Otrzymamy następującą zależność:

$$v = v_0(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2) \quad (\text{źródło i detektor oddalają się od siebie, } \beta \ll 1). \quad (38.31)$$

Odpowiednie równanie, opisujące zjawisko Dopplera dla fal dźwiękowych (i innych poza świetlnymi) w przybliżeniu małych prędkości, ma pierwsze dwa wyrazy identyczne, ale inny współczynnik przy trzecim wyrazie. Jak widać, efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora występują dopiero w wyrazie  $\beta^2$ .

W radarze policyjnym do pomiaru prędkości  $v$  pojazdu wykorzystano zjawisko Dopplera dla mikrofal. Źródło umieszczone w radarze wysyła wiązkę mikrofal o częstotliwości (własnej)  $\nu_0$  skierowaną wzdłuż jezdni. Samochód jadący w kierunku radaru „widzi” wiązkę o częstotliwości większej, przesuniętej na skutek zjawiska Dopplera. Samochód odbija wiązkę do tyłu, kierując ją w stronę radaru. Samochód jedzie w kierunku radaru, dlatego też detektor w radarze będzie odbierał wiązkę mikrofal o jeszcze bardziej zwiększonej częstotliwości. Odpowiednie układy mierzą tę częstotliwość i porównują ją z wartością  $\nu_0$ , a różnicę przeliczają na prędkość  $v$  samochodu.

## Zjawisko Dopplera w astronomii

Obserwując obiekty astronomiczne, takie jak gwiazdy, galaktyki i inne źródła światła, często musimy wyznaczać prędkości, z którymi obiekty te oddalają lub zbliżają się, mierząc *przesunięcie dopplerowskie* docierającego do nas światła. Jeżeli pewna gwiazda spoczywałaby względem nas, to obserwowalibyśmy jej światło o pewnej częstotliwości własnej  $\nu_0$ . Jeżeli gwiazda ta będzie się oddalać lub zbliżać do nas wzdłuż linii łączącej ją z nami, to częstotliwość  $\nu$  obserwowanego światła w wyniku zjawiska Dopplera będzie różna od częstotliwości  $\nu_0$ . Przesunięcie dopplerowskie występuje tylko w wyniku ruchu *radialnego* gwiazdy (ruchu wzdłuż prostej łączącej gwiazdę z obserwatorem). Prędkość, którą wyznaczymy, mierząc przesunięcie dopplerowskie, odpowiada tylko *radialnej składowej* prędkości gwiazdy.

Załóżmy, że prędkość radialna  $v$  pewnej gwiazdy jest na tyle mała (również wartość  $\beta$  jest mała), że możemy zaniedbać wyraz  $\beta^2$  w równaniu (38.31). Zapiszmy także jawnie znak „ $\pm$ ” poprzedzający wyraz  $\beta$ . Przypominamy, że znak „minus” odpowiada oddalaniu się, a „plus” zbliżaniu się gwiazdy do nas. Po przyjęciu tych założeń równanie (38.31) można zapisać w postaci

$$v = v_0(1 \pm \beta). \quad (38.32)$$

W pomiarach astronomicznych odnoszących się do światła zwykle posługujemy się długością fali, a nie częstotliwością i dlatego  $\nu$  zastąpimy przez  $c/\lambda$ , a  $\nu_0$  przez  $c/\lambda_0$ , gdzie  $\lambda$  oznacza obserwowaną długość fali, a  $\lambda_0$  jest **własną długością fali**. Zastępując ponadto w równaniu (38.32)  $\beta$  przez  $v/c$ , otrzymamy równanie

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right),$$

które można przekształcić, wyznaczając prędkość  $v$

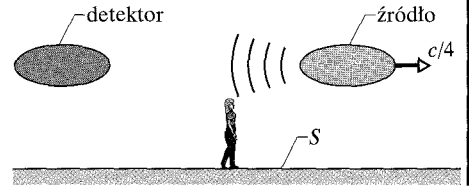
$$v = \pm \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} c.$$

Zazwyczaj zależność tę zapisuje się w postaci

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \quad (\text{radialna prędkość źródła światła, } v \ll c), \quad (38.33)$$

gdzie  $\Delta\lambda (= |\lambda - \lambda_0|)$  jest *dopplerowskim przesunięciem długości fali* dla źródła światła. Jeżeli źródło oddala się od nas, to  $\lambda$  ma większą wartość niż  $\lambda_0$  i przesunięcie dopplerowskie nazywamy *przesunięciem ku czerwieni*. (Nie oznacza to wcale, że obserwowane światło ma barwę czerwoną lub w ogóle jest widzialne; znaczy to tylko tyle, że długość fali wzrosła). Podobnie, jeżeli źródło porusza się w naszą stronę, to  $\lambda$  ma wartość mniejszą niż  $\lambda_0$  i przesunięcie dopplerowskie jest nazywane *przesunięciem ku błękitowi*.

**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku przedstawiono źródło światła o częstości własnej  $\nu_0$ , które porusza się w prawo z prędkością  $c/4$  zmierzoną w układzie odniesienia  $S$ . Na rysunku pokazano także detektor, który mierzy częstość  $\nu > \nu_0$  wysyłanego przez źródło światła. a) Czy detektor porusza się w lewo, czy w prawo? b) Czy prędkość detektora zmierzona w układzie  $S$  jest większa, mniejsza, czy może równa  $c/4$ ?



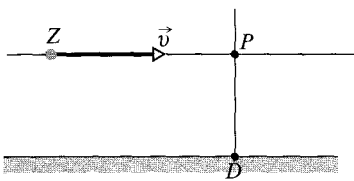
### Poprzeczne zjawisko Dopplera

Dotychczas — teraz i w rozdziale 18 — zajmowaliśmy się zjawiskiem Dopplera w przypadku, kiedy źródło fal i detektor poruszały się wzdłuż łączącej je linii. Na rysunku 38.12 pokazano inną sytuację, w której źródło  $Z$  mija detektor  $D$  w pewnej odległości od niego. Gdy źródło  $Z$  dociera do punktu  $P$ , jego prędkość jest skierowana prostopadłe do linii łączącej  $Z$  i  $D$ . Przez moment nie zbliża się ono, ani nie oddala od detektora. Jeżeli źródło wysyła falę dźwiękową o częstości  $\nu_0$ , detektor rejestruje dokładnie tę częstość, odbierając fale, które były wysłane w punkcie  $P$ . Jeżeli jednak źródło emituje fale świetlne, nadal obserwujemy zjawisko Dopplera, nazywane w tym przypadku **poprzecznym zjawiskiem Dopplera**. Obserwowana częstość światła docierającego ze źródła w punkcie  $P$  wynosi

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{poprzeczne zjawisko Dopplera}). \quad (38.34)$$

Dla małych prędkości ( $\beta \ll 1$ ) można rozwinąć prawą stronę równania (38.34) w szereg potęgowy względem  $\beta$ , co — jeżeli ograniczymy się do wyrazów drugiego rzędu — prowadzi do wzoru

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right) \quad (\text{małe prędkości}). \quad (38.35)$$



**Rys. 38.12.** Źródło światła  $Z$  poruszające się z prędkością  $\vec{v}$  mija w pewnej odległości detektor  $D$ . Szczególna teoria względności przewiduje występowanie zjawiska Dopplera także w punkcie  $P$ , w którym prędkość źródła jest prostopadła do linii łączącej je z detektorem. W opisie nierelatywistycznym takie zjawisko (poprzeczne zjawisko Dopplera) nie powinno być obserwowane

W tym przypadku pierwszy wyraz jest dokładnie taki, jakiego oczekivalibyśmy dla fal dźwiękowych. Także i tym razem efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora dotyczą wyrazu  $\beta^2$ .

W zasadzie radary policyjne mogłyby mierzyć prędkość samochodu nawet wtedy, kiedy wiązka byłaby skierowana prostopadle do kierunku jego jazdy. Z równania (38.35) wynika jednak, że ponieważ nawet dla szybko jadących samochodów wartość  $\beta$  jest bardzo mała, więc człon relatywistyczny  $\beta^2/2$  jest bliski zera. Widzimy więc, że  $v \approx v_0$  i radar wskaże w tym przypadku prędkość równą zero. Dlatego policjanci zawsze starają się kierować wiązkę pomiarową wzdłuż toru jazdy samochodu, aby zmierzyć przesunięcie dopplerowskie i stąd faktyczną jego prędkość. Każde odchylenie wiązki od idealnego ustawienia działa na korzyść kierowcy, ponieważ zmniejsza zmierzoną prędkość.

Przecznne zjawisko Dopplera jest w rzeczywistości kolejnym przejawem dylatacji czasu. Jeżeli przepiszemy równanie (38.34), wprowadzając do niego okres drgań  $T = 1/\nu$ , to otrzymamy zależność

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma T_0, \quad (38.36)$$

w której przez  $T_0 (= 1/\nu_0)$  oznaczyliśmy **okres własny** źródła. Jeżeli uwzględnimy fakt, że okres drgań to nic innego, jak odstęp czasu, z łatwością zobaczymy, że równanie (38.36) to wzór na dylatację czasu (38.9).

## System nawigacyjny NAVSTAR

Każdy satelita należący do systemu NAVSTAR stale nadaje sygnały radiowe informujące o swoim położeniu. Transmisja odbywa się na częstotliwości, która jest stabilizowana za pomocą precyzyjnych zegarów atomowych. Częstotliwości sygnałów odbieranych na przykład przez samolot pasażerski są zmienione na skutek przesunięcia dopplerowskiego. Odbierając jednocześnie sygnały z kilku satelitów NAVSTAR, można wyznaczyć kierunek, w którym znajduje się każdy z nich, a także kierunek prędkości tego satelity. Dzięki temu, na podstawie przesunięcia dopplerowskiego częstotliwości sygnału, odbiornik może wyznaczyć prędkość samolotu.

Przeprowadzając proste obliczenia, spróbujemy przekonać się, jaką dokładność można w ten sposób osiągnąć. Typowa prędkość satelity systemu NAVSTAR mierzona względem środka Ziemi wynosi około  $1 \cdot 10^4$  m/s, a zatem wartość  $\beta$  jest bliska  $3 \cdot 10^{-5}$ . Wyraz  $\beta^2/2$  występujący w równaniach (38.31) i (38.35) (człon relatywistyczny) ma wartość około  $4,5 \cdot 10^{-10}$ . Innymi słowy teoria względności zmienia przesunięcie dopplerowskie o mniej więcej 4,5 części na  $10^{10}$ , czyli w stopniu, który wydaje się niegodny uwagi.

W rzeczywistości jest to bardzo ważne. Zegary atomowe na pokładzie satelitów są tak dokładne, że dopuszczalna zmiana częstotliwości sygnału wynosi zaledwie 2 części na  $10^{12}$ . Z równania (38.35) wynika, że  $\beta$  (a tym samym  $v$ ) zależy od pierwiastka kwadratowego z  $v/v_0$ . Oznacza to, że zmiana częstotliwości zegara o  $2 \cdot 10^{-12}$  spowoduje względną zmianę mierzonej wartości prędkości względnej satelity i samolotu o

$$\sqrt{2 \cdot 10^{-12}} = 1,4 \cdot 10^{-6}.$$



Prędkość względna samolotu i satelity  $v$  jest przede wszystkim wynikiem ogromnej prędkości satelity i wynosi około  $1 \cdot 10^4$  m/s. Dokładność, z jaką można ją wyznaczyć — a tym samym także prędkość samolotu — jest zbliżona do

$$(1,4 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 \cdot 10^4 \text{ m/s}) = 1,4 \text{ cm/s.}$$

Wyobraźmy sobie, że lot samolotu trwa 1 h (3600 s). Znając prędkość z dokładnością do około 1,4 cm/s, możemy określić położenie samolotu na końcu lotu z dokładnością do około

$$(0,014 \text{ m/s})(3600 \text{ s}) = 50 \text{ m,}$$

która wystarcza dla potrzeb współczesnej nawigacji.

Jeżeli pominęlibyśmy w obliczeniach człony relatywistyczne, to nie zdołalibyśmy wyznaczyć prędkości z niepewnością mniejszą niż 21 cm/s, a znajomość położenia samolotu po godzinie lotu byłaby obciążona niepewnością wynoszącą co najmniej 760 m.

### Przykład 38.5

Zaobserwowano światło docierające do nas z międzygwiazdowego obłoku gazowego z galaktyki M87. Na rysunku 38.13a przedstawiono wykres zależności natężenia tego światła od długości fali w przypadku obserwacji światła wysłanego z dwóch części obłoku znajdujących się po przeciwnych stronach centrum galaktyki. Jedna z krzywych osiąga maksimum dla długości fali 499,8 nm, a druga dla 501,6 nm. Gaz okrąża centrum galaktyki po orbicie o promieniu  $r = 100$  lat świetlnych, przy czym z jednej strony porusza się w naszą stronę, a z drugiej — w stronę przeciwną.

a) Która z krzywych na wykresie odpowiada gazowi poruszającemu się w naszą stronę? Ile wynosi prędkość gazu względem nas (i względem centrum galaktyki)?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

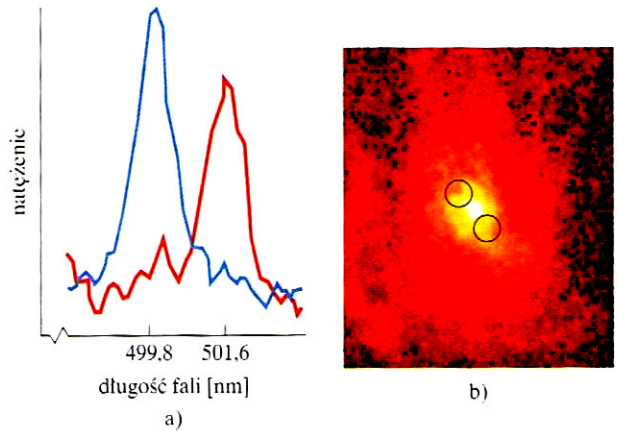
➡ 1. Gdyby gaz nie poruszał się wokół galaktyki, obserwowalibyśmy jedno maksimum natężenia światła.

➡ 2. Ruch gazu wpływa na obserwowaną długość fali dzięki zjawisku Dopplera. Obserwowana długość fali zwiększa się dla oddalającego się źródła, a maleje dla zbliżającego się źródła. Wynika stąd, że krzywa o maksimum dla długości fali 501,6 nm odpowiada ruchowi w kierunku od nas, a krzywa o maksimum dla długości 499,8 nm odpowiada ruchowi ku nam.

Założmy teraz, że zmiany długości fali spowodowane ruchem gazu mają jednakowe wartości. W takim przypadku za długość własną fali można przyjąć średnią arytmetyczną wartości odpowiadających maksimum obu przesuniętych krzywych:

$$\lambda_0 = \frac{501,6 \text{ nm} + 499,8 \text{ nm}}{2} = 500,7 \text{ nm.}$$

Przesunięcie dopplerowskie  $\Delta\lambda$  dla światła pochodzącego z obłoku gazu oddalającego się od nas jest więc równe



Rys. 38.13. Przykład 38.5. a) Obserwowane natężenie światła docierającego z gazu po obydwu stronach galaktyki M87 przedstawione w zależności od długości fali. b) Zdjęcie centralnego obszaru galaktyki M87. Kółka wskazują położenie części gazu, którego promieniowanie przedstawiono na wykresie (a). Jądro galaktyki M87 znajduje się w połowie odległości między kółkami

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= |\lambda - \lambda_0| = 501,6 \text{ nm} - 500,7 \text{ nm} \\ &= 0,9 \text{ nm.} \end{aligned}$$

Podstawiamy uzyskane przesunięcie i długość fali  $\lambda = 501,6$  nm do równania (38.33) i obliczamy prędkość gazu

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{0,9 \text{ nm}}{501,6 \text{ nm}} 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ &= 5,38 \cdot 10^5 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Gaz obiega centrum galaktyki, ponieważ działa nań siła grawitacyjna ze strony zgromadzonej w centrum masy  $M$ . Ile wynosi ta masa wyrażona w jednostkach równych masie Słońca  $M_\odot$  ( $= 1,99 \cdot 10^{30}$  kg)?

## ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Wartość siły grawitacyjnej działającej na ciało o masie  $m$  poruszające się po orbicie kołowej o promieniu  $r$  jest określona równaniem (14.1)

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

2. Ciało poruszające się po orbicie kołowej wokół centrum galaktyki musi mieć przyspieszenie dośrodkowe o wartości  $a = v^2/r$  skierowane w stronę centrum.

3. Druga zasada dynamiki Newtona zapisana dla kierunku radialnego ma postać  $F = ma$ .

Spostrzeżenia te możemy połączyć ze sobą w postaci równania

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Rozwiązując to równanie względem  $M$  i podstawiając znane wartości, obliczymy wartość masy zgromadzonej w centrum galaktyki

$$\begin{aligned} M &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{(5,38 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2 (100 \text{ y})(9,46 \cdot 10^{15} \text{ m/y})}{6,67 \cdot 10^{41} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} \\ &= 4,11 \cdot 10^{39} \text{ kg} = (2,1 \cdot 10^9) M_{\odot}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Wynik ten oznacza, że w centrum galaktyki została zgromadzona ogromna masa odpowiadająca masie 2 miliardów Słońc, co sugeruje, że może tam znajdować się bardzo ciężka czarna dziura.

## 38.11. Nowe spojrzenie na pęd

Wyobraźmy sobie, że kilku obserwatorów — każdy w innym inercjalnym układzie odniesienia — bada izolowane zderzenie dwóch cząstek. W przypadku nierelatywistycznym każdy z obserwatorów mierzy różne prędkości zderzających się cząstek, ale wszyscy twierdzą, że spełniona jest zasada zachowania pędu. Zgodnie stwierdzają oni, że pęd po zderzeniu cząstek jest taki sam, jak przed zderzeniem.

Jak wygląda to z punktu widzenia teorii względności? Możemy przekonać się, że jeżeli nadal będziemy definiować pęd cząstki  $\vec{p}$  jako iloczyn masy i prędkości  $m\vec{v}$ , to według obserwatorów w różnych inercjalnych układach odniesienia całkowity pęd *nie będzie* zachowany. Mamy dwie możliwości: 1) zrezygnować z zasady zachowania pędu lub 2) zmodyfikować definicję pędu w taki sposób, aby zasada zachowania pędu w dalszym ciągu obowiązywała. Właściwym wyborem jest przyjęcie drugiej możliwości.

Rozważmy cząstkę poruszającą się ze stałą prędkością  $v$  w dodatnim kierunku osi  $x$ . W ujęciu nierelatywistycznym pęd cząstki ma wartość

$$p = mv = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{pęd nierelatywistyczny}), \quad (38.37)$$

gdzie  $\Delta x$  oznacza odległość przebytą w czasie  $\Delta t$ . Poszukiwania relatywistycznego wyrażenia na pęd zaczniemy od nowej definicji

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Tak samo jak poprzednio,  $\Delta x$  oznacza drogę przebytą przez cząstkę, którą zmierzył pewien obserwator. Jednak teraz  $\Delta t_0$  nie jest czasem potrzebnym do przebycia tej drogi zmierzonym przez obserwatora patrzącego z boku na poruszającą się cząstkę, lecz czasem, który wyznaczył obserwator poruszający się wraz z cząstką. Cząstka spoczywa względem tego obserwatora i w konsekwencji czas, który on mierzy, jest czasem własnym.

Korzystając ze wzoru na dylatację czasu (równanie (38.9)), możemy to zapisać w postaci równania

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \gamma.$$

Iloraz  $\Delta x/\Delta t$  to nic innego jak prędkość cząstki  $v$ , dlatego też definicja pędu wyraża się wzorem

$$p = \gamma m v \quad (\text{pęd}). \quad (38.38)$$

Zwróćmy uwagę, że ta definicja różni się od definicji nierelatywistycznej (równanie (38.37)) tylko obecnością współczynnika Lorentza  $\gamma$ . Różnica ta jest jednak bardzo ważna: W przeciwieństwie do pędu nierelatywistycznego, pęd relatywistyczny dąży do nieskończoności, gdy prędkość  $v$  dąży do  $c$ .

Definicję zapisaną w równaniu (38.38) można uogólnić do postaci wektorowej

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{pęd}). \quad (38.39)$$

Równanie to poprawnie definiuje pęd dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości. W przypadku prędkości znacznie mniejszych od  $c$  redukuje się do znanej postaci nierelatywistycznej ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ).

## 38.12. Nowe spojrzenie na energię

### Energia spoczynkowa

Chemia przez długi czas rozwijała się przy założeniu, że w reakcjach chemicznych energia i masa są zachowywane niezależnie od siebie. W roku 1905 Einstein wykazał, że w sformułowanej przez niego teorii względności trzeba rozpatrywać masę jak jedną z postaci energii. Dlatego zasada zachowania energii jest w rzeczywistości zasadą zachowania energii i masy.

W *reakcji chemicznej* (procesie, w którym oddziałują atomy i cząsteczki) przemianie na inne postacie energii (lub na odwrót) ulega niezmiernie mała część masy i dlatego nie ma żadnej szansy na zauważenie jej zmiany nawet wtedy, gdy posłużymy się najlepszymi wagami laboratoryjnymi. Może więc *wydawać się*, że masę i energię można rozpatrywać niezależnie od siebie. Jednakże w *reakcji jądrowej* (procesie, w którym oddziałują jądra i cząstki elementarne) wyzwolana energia bywa milion razy większa niż w przypadku reakcji chemicznej i zmianę masy można z łatwością wyznaczyć. Uwzględnianie w reakcjach jądrowych przemian masa–energia jest już od dawna standardowym postępowaniem.

Masa  $m$  i równoważna jej energia  $E_0$  są powiązane ze sobą zależnością

$$E_0 = mc^2, \quad (38.40)$$

która — bez wskaźnika 0 — jest chyba najlepiej znanym równaniem fizyki. Energia związana z masą ciała nosi nazwę **energii spoczynkowej**. Nazwa mówi, że energię  $E_0$  ma ciało nawet wtedy, kiedy spoczywa, i jest to wyłącznie konsekwencją faktu, że ciało ma masę. (Jeśli poznając fizykę, wyjdziecie poza ramy tego podręcznika, to prawdopodobnie spotkacie bardziej szczegółowe rozważania na temat związku masy i energii. Możecie nawet napotkać spory o to, co naprawdę oznacza podana relacja).

Tabela 38.3. Wartości energii spoczynkowej wybranych ciał

Ciało	Masa [kg]	Energia spoczynkowa	
Elektron	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$8,19 \cdot 10^{14}$ J	(= 511 keV)
Proton	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$1,50 \cdot 10^{-10}$ J	(= 938 MeV)
Atom uranu	$3,95 \cdot 10^{-25}$	$3,55 \cdot 10^{-8}$ J	(= 225 GeV)
Drobina kurzu	$1 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^4$ J	(= 2 kcal)
Moneta 1 grosz	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,48 \cdot 10^{13}$ J	(= 41 GWh)

W tabeli 38.3 podano wartości energii spoczynkowej dla kilku ciał. Jak widać, energia spoczynkowa małej monety, na przykład grosza, jest olbrzymia — równoważna ilości energii elektrycznej ma wartości rzędu  $10^7$  zł. Z drugiej strony, cała energia elektryczna wytwarzana w ciągu roku w Stanach Zjednoczonych jest równa masie spoczynkowej kilkuset kilogramów materii (kamieni, naleśników lub czegokolwiek innego).

W praktyce, w równaniu (38.40) rzadko kiedy używa się jednostek układu SI, ponieważ są zbyt duże. Masę wyraża się zwykle w atomowych jednostkach masy

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad (38.41)$$

a energię w elektronowoltach

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (38.42)$$

lub ich wielokrotnościach. Stała  $c^2$  ma w jednostkach przyjętych w równaniach (38.41) i (38.42) wartość

$$\begin{aligned} c^2 &= 9,315 \cdot 10^8 \text{ eV/u} = 9,315 \cdot 10^5 \text{ keV/u} \\ &= 931,5 \text{ MeV/u}. \end{aligned} \quad (38.43)$$

### Energia całkowita

Równanie (38.40) wyraża energię spoczynkową  $E_0$  związaną z masą ciała  $m$ . Energia spoczynkowa nie zależy od tego, czy ciało to spoczywa, czy się porusza. Kiedy jednak ciało jest w ruchu, ma dodatkową energię w postaci energii kinetycznej  $E_k$ . Jeżeli założymy, że jego energia potencjalna jest równa zeru, to energia całkowita  $E$  jest sumą energii spoczynkowej i energii kinetycznej:

$$E = E_0 + E_k = mc^2 + E_k. \quad (38.44)$$

Całkowita energia  $E$  jest też dana równaniem (co podajemy bez dowodu)

$$E = \gamma mc^2, \quad (38.45)$$

gdzie  $\gamma$  jest współczynnikiem Lorentza.

Począwszy od rozdziału 7, rozważaliśmy już wiele przykładów dotyczących zmiany energii całkowitej cząstki lub układu cząstek. Jednakże nigdy to tej pory nie uwzględnialiśmy zmian energii spoczynkowej, ponieważ były one po prostu równe zeru, albo tak małe, że można było je zaniedbać. Zasada zachowania energii całkowitej obowiązuje nawet wtedy, kiedy zmiany energii spoczynkowej są znaczne. Niezależnie od tego, co się dzieje z energią spoczynkową, stwierdzenie podane w paragrafie 8.7 nadal zachowuje swą moc:

► Całkowita energia układu izolowanego nie ulega zmianie.

Jeżeli, na przykład, zmaleje sumaryczna energia spoczynkowa układu izolowanego składającego się z dwu oddziałujących ze sobą cząstek, musi pojawić się energia w jakiejś innej postaci, ponieważ energia całkowita nie może ulec zmianie.

Zmianę energii spoczynkowej układu, spowodowaną zachodzącą w nim reakcją chemiczną lub jądrową, przyjęło się oznaczać symbolem  $Q$  i nazywać energią reakcji. Wartość  $Q$  można obliczyć, posługując się następującym równaniem:

$$\left( \begin{array}{l} \text{całkowita początkowa} \\ \text{energia spoczynkowa układu} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{całkowita końcowa} \\ \text{energia spoczynkowa układu} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{reakcji} \end{array} \right),$$

czyli

$$E_{0,\text{pocz}} = E_{0,\text{końc}} + Q. \quad (38.46)$$

Korzystając z równania (38.40) ( $E_0 = mc^2$ ), można wyrazić energię reakcji  $Q$  w zależności od całkowitej masy początkowej  $M_{\text{pocz}}$  oraz całkowitej masy końcowej  $M_{\text{końc}}$

$$M_{\text{pocz}}c^2 = M_{\text{końc}}c^2 + Q,$$

czyli

$$Q = M_{\text{pocz}}c^2 - M_{\text{końc}}c^2 = -\Delta Mc^2, \quad (38.47)$$

gdzie  $\Delta M = M_{\text{końc}} - M_{\text{pocz}}$  oznacza zmianę masy układu w wyniku reakcji.

Jeżeli część energii spoczynkowej ulega przemianie na przykład w energię kinetyczną, przekazywaną produktom reakcji, to całkowita energia spoczynkowa  $E_0$  układu (a więc i jego całkowita masa  $M_0$ ) zmniejsza się, a energia reakcji  $Q$  jest dodatnia. Przeciwnie, jeżeli reakcja wymaga, aby energia zamieniała się

w energię spoczynkową, całkowita energia spoczynkowa  $E_0$  układu (a więc i jego całkowita masa) rośnie, a energia reakcji  $Q$  jest ujemna.

Dobrym przykładem jest *reakcja syntezy*, w której dwa jądra wodoru łączą się w jedno jądro, czemu towarzyszy emisja dwóch cząstek. Całkowita energia spoczynkowa (a więc i całkowita masa) powstałego jądra i dwóch wyemitowanych cząstek jest mniejsza niż całkowita energia spoczynkowa (a więc i całkowita masa) dwóch jąder wodoru. Oznacza to, że energia  $Q$  reakcji syntezy jest dodatnia i dlatego mówimy, że w reakcji energia jest *wyzwalana* (zmienia się w inne formy kosztem energii spoczynkowej). Ma to dla nas wszystkich niezmiernie ważne konsekwencje, ponieważ synteza jąder wodoru we wnętrzu Słońca jest jednym z procesów, dzięki którym mamy światło słoneczne na Ziemi i może na niej rozwijać się życie.

### Energia kinetyczna

W rozdziale 7 powiedzieliśmy, że energia kinetyczna  $E_k$  ciała o masie  $m$  i prędkości  $v$  dużo mniejszej od prędkości światła  $c$  wyraża się wzorem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (38.48)$$

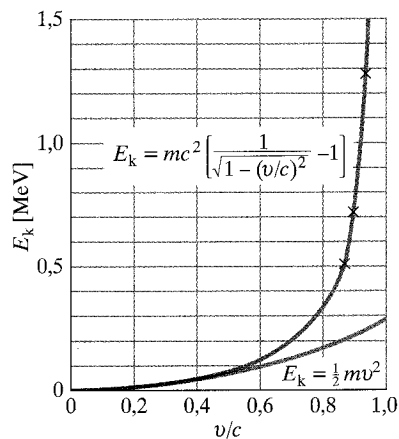
To nierelatywistyczne równanie jest dobrym przybliżeniem tylko wtedy, kiedy prędkość ciała jest naprawdę dużo mniejsza od prędkości światła.

Spróbujmy teraz znaleźć wyrażenie na energię kinetyczną, które będzie prawdziwe dla *każdej* fizycznie dozwolonej prędkości. Rozwiązując równanie (38.44) względem  $E_k$ , a następnie podstawiając do niego wartość  $E_0$  z równania (38.4), otrzymamy

$$\begin{aligned} E_k &= E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \\ &= mc^2(\gamma - 1) \quad (\text{energia kinetyczna}), \end{aligned} \quad (38.49)$$

gdzie  $\gamma (= 1/\sqrt{1 - (v/c)^2})$  jest współczynnikiem Lorentza.

Na wykresie z rysunku 38.14 przedstawiono zależność energii kinetycznej elektronu od stosunku  $v/c$  w przypadku poprawnej definicji (równanie (38.49)) oraz w przybliżeniu nierelatywistycznym. Zwróćmy uwagę, że w lewej części wykresu — w obszarze małych prędkości, dla których do tej pory obliczaliśmy energię kinetyczną — obydwie krzywe się pokrywają. Widzimy, że w tym zakresie prędkości mieliśmy pełne prawo posługiwać się przybliżeniem nierelatywistycznym (38.48). Jednak w prawej części wykresu — kiedy prędkość ciała zbliża



Rys. 38.14. Energia kinetyczna elektronu w ujęciu relatywistycznym (równanie (38.49)) i nierelatywistycznym (równanie (38.48)) wykreślona w zależności od stosunku  $v/c$ , gdzie  $v$  jest prędkością elektronu, a  $c$  — prędkością światła. Zwróćcie uwagę, że obydwie krzywe pokrywają się dla małych prędkości i zupełnie rozbiegają się dla wielkich prędkości. Naniesione punkty pomiarowe (oznaczone symbolem  $\times$ ) pokazują, że dla wielkich prędkości z wynikami doświadczenia zgadza się krzywa relatywistyczna

się do  $c$  — obydwie krzywe się rozbiegają. Gdy stosunek  $v/c$  zbliża się do jedności, krzywa dla przypadku nierelatywistycznego wznosi się powoli, podczas gdy linia wyznaczona na podstawie wzoru relatywistycznego pnie się bardzo stromo do góry, dążąc do nieskończoności dla  $(v/c) \rightarrow 1$ . Widzimy więc, że jeżeli prędkość ciała jest bliska prędkości światła  $c$ , to, obliczając energię kinetyczną, musimy korzystać ze wzoru (38.49).

Na podstawie rysunku 38.14 możemy też wnioskować o pracy, jaką trzeba wykonać, aby zwiększyć prędkość ciała na przykład o 1%. Praca jest równa zmianie energii kinetycznej  $\Delta E_k$  ciała. Jeżeli zmiana dokonuje się w zakresie małych prędkości (lewa strona wykresu), to wymagana praca jest niewielka. Jeżeli jednak zmiana zachodzi w zakresie wielkich prędkości (prawa strona wykresu), to potrzebna praca może mieć olbrzymią wartość, ponieważ energia kinetyczna wzrasta bardzo szybko wraz z prędkością. Nadanie ciału prędkości światła  $c$  wymagałoby przekazania mu nieskończonej energii i dlatego nie jest możliwe.

Energię kinetyczną elektronów, protonów i innych cząstek podaje się zwykle w elektronowoltach lub ich wielokrotnościach. Często mówiąc o energii kinetycznej cząstek, pomijamy określenie „kinetyczna”; o elektronie, który ma energię kinetyczną 20 MeV, mówimy krótko — elektron o energii 20 MeV.

### Pęd a energia kinetyczna

W fizyce nierelatywistycznej pęd  $p$  cząstki wyraża się wzorem  $mv$ , a energia kinetyczna  $E_k$  wzorem  $\frac{1}{2}mv^2$ . Eliminując prędkość  $v$  z obydwu tych wyrażań, można wyznaczyć zależność między pędem a energią kinetyczną:

$$p^2 = 2E_k m \quad (\text{nierelatywistycznie}). \quad (38.50)$$

Podobną zależność można otrzymać w mechanice relatywistycznej, eliminując prędkość  $v$  ze wzoru na pęd (38.38) i energię kinetyczną (38.49). Po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy równanie

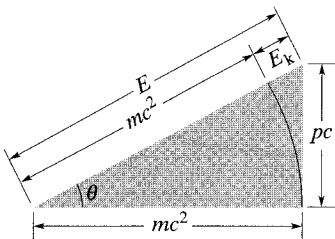
$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2. \quad (38.51)$$

Korzystając z równania (38.44), możemy powyższe równanie przekształcić tak, aby wyrażało zależność między pędem  $p$  a całkowitą energią  $E$  cząstki:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (38.52)$$

Zapamiętanie tych użytecznych zależności może ułatwić diagram w kształcie trójkąta prostokątnego przedstawiony na rysunku 38.15. Spróbujcie wykazać, że we wspomnianym trójkącie,

$$\sin \theta = \beta \quad \text{i} \quad \cos \theta = 1/\gamma. \quad (38.53)$$



Rys. 38.15. Diagram ułatwiający zapamiętanie relatywistycznych zależności między energią całkowitą  $E$ , energią spoczynkową  $mc^2$ , energią kinetyczną  $E_k$  i pędem  $p$

Z równania (38.52) wynika, że iloczyn  $pc$  musi być wyrażany w tych samych jednostkach co energia  $E$ ; dlatego można przyjąć, że jednostką pędu  $p$  jest jednostka energii  $E$  podzielona przez prędkość światła  $c$ . W praktyce, w fizyce cząstek elementarnych pęd często podaje się w jednostkach  $\text{MeV}/c$  lub  $\text{GeV}/c$ .

**SPRAWDZIAN 5:** Czy a) energia kinetyczna i b) całkowita energia elektronu „o energii 1 GeV” jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak protonu „o energii 1 GeV”?

### Przykład 38.6

a) Ile wynosi całkowita energia  $E$  elektronu o energii 2,53 MeV?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że równanie (38.44) pozwala wyrazić całkowitą energię  $E$  elektronu jako sumę jego energii spoczynkowej  $mc^2$  i energii kinetycznej:

$$E = mc^2 + E_k. \quad (38.54)$$

Określenie elektron „o energii 2,53 MeV” w treści zadania oznacza, że to energia kinetyczna elektronu jest równa 2,53 MeV. Aby obliczyć energię spoczynkową  $mc^2$  elektronu, musimy odnaleźć w dodatku B masę elektronu. Wykonawszy obliczenia, otrzymamy

$$\begin{aligned} mc^2 &= (9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= 8,187 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \end{aligned}$$

Jeżeli podzielimy ten wynik przez  $1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV}$ , otrzymamy 0,511 MeV, czyli wartość energii spoczynkowej elektronu w MeV

(wynik zgodny z tabelą 38.3). Z równania (38.54) obliczamy

$$E = 0,511 \text{ MeV} + 2,53 \text{ MeV} = 3,04 \text{ MeV}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest wartość pędu  $p$  elektronu, wyrażona w jednostkach  $\text{MeV}/c$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że pęd  $p$  obliczymy z równania (38.52)

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2,$$

jeżeli będziemy znać energię całkowitą  $E$  i energię spoczynkową  $mc^2$ . Rozwiązując to równanie względem  $pc$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \\ &= \sqrt{(3,04 \text{ MeV})^2 - (0,511 \text{ MeV})^2} = 3 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Dzieląc teraz obydwie strony równania przez  $c$ , stwierdzamy, że

$$p = 3 \text{ MeV}/c. \quad (\text{odpowiedź})$$

### Przykład 38.7

Proton o największej zmierzonej kiedykolwiek energii kinetycznej dotarł na Ziemię wraz z innymi cząstkami składającymi się na promieniowanie kosmiczne. Jego zdumiewająco wielka energia kinetyczna  $3 \cdot 10^{20} \text{ eV}$  była dostatecznie duża, aby ogrzać łyżeczkę wody o kilka stopni.

a) Ile wynosi współczynnik Lorentza  $\gamma$  i prędkość  $v$  protonu o wspomnianej energii (wartości należy podać względem detektora znajdującego się na Ziemi)?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Współczynnik Lorentza  $\gamma$  dla protonu występuje w równaniu (38.45) ( $E = \gamma mc^2$ ), które wiąże energię całkowitą  $E$  z energią spoczynkową  $mc^2$ .

2. Energia całkowita protonu jest sumą jego energii spoczynkowej  $mc^2$  i (podanej) energii kinetycznej  $E_k$ . Zapisując obydwa te spostrzeżenia w postaci jednego równania, otrzymujemy

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + E_k}{mc^2} = 1 + \frac{E_k}{mc^2}. \quad (38.55)$$

Energię spoczynkową  $mc^2$  możemy obliczyć, korzystając z masy

protonu podanej w dodatku B, tak jak zrobiliśmy to dla elektronu w przykładzie 38.6a. Stwierdzamy, że wartość  $mc^2$  wynosi 938 MeV (wynik zgodny z tabelą 38.3). Podstawiając wartość energii spoczynkowej i energii kinetycznej do równania (38.55), mamy

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{3 \cdot 10^{20} \text{ eV}}{938 \cdot 10^6 \text{ eV}} \\ &= 3,198 \cdot 10^{11} \approx 3,2 \cdot 10^{11}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Wartość  $\gamma$  jest tak duża, że prędkości  $v$  nie można obliczyć, posługując się wprost definicją współczynnika Lorentza w postaci równania (38.8). Łatwo się o tym przekonać, próbując wykonać obliczenia za pomocą kalkulatora. Okaże się, że parametr  $\beta$  jest praktycznie równy 1, a więc prędkość  $v$  jest równa  $c$ . Istotnie prędkość  $v$  jest bardzo bliska  $c$ , ale chcemy uzyskać dokładniejszy wynik. Dlatego rozwiążemy równanie (38.8) względem  $1 - \beta$ . Zaczniemy od zapisania wzoru na współczynnik Lorentza w postaci

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - \beta)}}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że wartość  $\beta$  jest bardzo bliska jedności, a więc  $1 + \beta$  jest prawie równe 2. Prędkość, którą chcemy obliczyć,



jest ukryta w członie  $1 - \beta$ . Rozwiązując równanie względem tego wyrazu, otrzymamy

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2(3,198 \cdot 10^{11})^2} = 4,9 \cdot 10^{-24} \approx 5 \cdot 10^{-24}.$$

Jak widać

$$\beta = 1 - 5 \cdot 10^{-24}.$$

Ponieważ  $v = \beta c$ , więc

$$v \approx 0,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyobraźmy sobie, że nasz proton porusza się po średnicy Drogi Mlecznej ( $9,8 \cdot 10^4$  lat świetlnych). Ile czasu — w układzie odniesienia związanym z Ziemią i Drogą Mleczną — zajmie protonowi pokonanie tej drogi?

#### ROZWIĄZANIE:

Przekonał się, że ten *ultrarelatywistyczny* proton porusza się z prędkością nieznacznie mniejszą od prędkości światła. **☛** Z definicji roku świetlnego wynika, że jest to odległość, którą światło pokonuje w ciągu 1 roku. Widzimy, że przebycie odległości  $9,8 \cdot 10^4$  lat świetlnych zajmie światłu  $9,8 \cdot 10^4$  lat. Interesujący nas proton przebędzie tę odległość właściwie w takim samym czasie. W układzie odniesienia Ziemia–Droga Mleczna podróż protonu będzie trwać

$$\Delta t = 9,8 \cdot 10^4 \text{ a}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jak długo będzie trwać ta sama podróż według pomiaru w układzie odniesienia związanym z protonem?

#### ROZWIĄZANIE:

Aby odpowiedzieć na to pytanie, powinniśmy dostrzec, że:

**☛ 1.** W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia: pierwszym związanym z Ziemią oraz Drogą Mleczną i drugim związanym z protonem.

**☛ 2.** W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: pierwszym jest przejście protonu przez początek odcinka uznawanego za średnicę Drogi Mlecznej, a drugim — przejście protonu przez koniec tego odcinka.

**☛ 3.** Odstęp czasu mierzony w układzie odniesienia związanym z protonem jest czasem własnym  $\Delta t_0$ , ponieważ w tym układzie odniesienia obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu — tam, gdzie znajduje się proton.

**☛ 4.** Odstęp czasu  $\Delta t_0$  w układzie związanym z protonem można obliczyć, znając odstęp czasu w układzie Ziemia–Droga Mleczna, korzystając w tym celu z równania (38.9) ( $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ ), które opisuje dylatację czasu.

Rozwiązując równanie (38.9) względem  $\Delta t_0$  i podstawiając doń wartość  $\gamma$  obliczoną w punkcie (a) oraz wartość  $\Delta t$  obliczoną w punkcie (b), otrzymamy

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9,8 \cdot 10^4 \text{ a}}{3,198 \cdot 10^{11}} = 3,06 \cdot 10^{-7} \text{ a} = 9,7 \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W naszym układzie odniesienia podróż protonu trwa 98 000 lat. W układzie odniesienia związanym z protonem zajmuje ona zaledwie 9,7 s! Jak mówiliśmy już na samym początku rozdziału, ruch względny może zmienić szybkość, z jaką płynie czas, i teraz napotkaliśmy ekstremalny przykład takiej zmiany.

## Podsumowanie

**Postulaty** Stworzona przez Einsteina **szczególna teoria względności** jest oparta na dwóch postulatach:

1. Prawa fizyki są takie same dla obserwatorów we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Zaden z układów nie jest wyróżniony.
2. Prędkość światła w próżni ma taką samą wartość  $c$  we wszystkich kierunkach i we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Prędkość światła  $c$  w próżni jest prędkością graniczną, której nie może przekroczyć żadne ciało niosące energię lub informację.

**Współrzędne zdarzenia** Zdarzenie jest określone przez trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzędną czasową. Do zadań szczególnej teorii względności należy między innymi ustalanie związków między współrzędnymi, przypisywanymi zdarzeniom przez obserwatorów poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym.

**Zdarzenia jednoczesne** Dwaj obserwatorzy, którzy poruszają się względem siebie, nie będą na ogół zgodni co do jednoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdza, że dwa zdarzenia zachodzą jednocześnie w różnych miejscach, drugi obserwator będzie innego zdania i na odwrót. Jednoczesność *nie* jest pojęciem absolutnym, lecz względnym, zależnym od ruchu obserwatora. Względność jednoczesności jest bezpośrednią konsekwencją skończonej prędkości granicznej  $c$ .

**Dylatacja czasu** Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w inercjalnym układzie odniesienia w tym samym miejscu, to dzielący je odstęp czasu  $\Delta t_0$ , mierzony za pomocą jednego zegara znajdującego się w miejscu tych zdarzeń, nazywamy **czasem własnym** między zdarzeniami. *Obserwatorzy w układach odniesienia poruszających się względem tego układu zmierzą większy odstęp czasu między tymi samymi zdarzeniami.* Obserwator poruszający się z prędkością względną  $v$  zmierzy odstęp czasu równy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{dylatacja czasu}). \quad (38.7-38.9)$$

Parametr  $\beta = v/c$  wyraża prędkość względną w jednostkach  $c$ , a parametr  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  jest nazywany **współczynnikiem Lorentza**.

**Skrócenie długości** Długość  $L_0$  pewnego ciała zmierzona przez obserwatora w inercjalnym układzie odniesienia, w którym ciało to spoczywa, jest nazywana **długością własną** lub **długością spoczynkową**. Obserwatorzy w układach odniesienia poruszających się względem tego układu, w kierunku równoległym do mierzonej długości, zmierzają mniejszą długość ciała. Obserwator poruszający się z prędkością względną  $v$  zmierzy długość równą

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{skrócenie długości}). \quad (38.13)$$

**Transformacja Lorentza** Transformacja Lorentza wiąże ze sobą współrzędne czasoprzestrzenne pewnego zdarzenia zarejestrowanego przez obserwatorów w dwóch inercjalnych układach odniesienia,  $S$  i  $S'$ , przy czym układ  $S'$  porusza się względem  $S$  z prędkością  $v$  w dodatnim kierunku osi  $x$  i  $x'$ . Cztery współrzędne są powiązane następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (\text{transformacja Lorentza;} \\ \text{prawdziwa dla wszystkich} \\ \text{fizycznie dozwolonych prędkości}). \end{array} \quad (38.20)$$

**Względność prędkości** Jeżeli cząstka porusza się z prędkością  $u'$  w dodatnim kierunku osi  $x'$  inercjalnego układu odniesienia  $S'$ , który sam porusza się z prędkością  $v$  równoległe do osi  $x$  innego inercjalnego układu  $S$ , to prędkość cząstki  $u$  zmierzona w układzie  $S$  będzie równa

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \begin{array}{l} (\text{relatywistyczna} \\ \text{transformacja prędkości}). \end{array} \quad (38.28)$$

**Relatywistyczne zjawisko Dopplera** Jeżeli źródło emitujące fale świetlne o częstości  $\nu_0$  oddala się od detektora ze względną prędkością radialną  $v$  ( $\beta = v/c$ ), to częstość fali zarejestrowana przez detektor będzie równa

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (38.30)$$

Jeżeli źródło zbliża się do detektora, to znaki przy  $\beta$  w równaniu (38.30) trzeba zmienić na przeciwne.

W astronomii mierzy się zwykle długości fali. Dla prędkości dużo mniejszych niż  $c$  równanie (38.30) sprowadza się do

$$\nu = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c, \quad (38.33)$$

gdzie  $\Delta\lambda$  oznacza **przesunięcie dopplerowskie** (zmianę) długości fali spowodowane ruchem względnym.

**Poprzeczne zjawisko Dopplera** Jeżeli ruch źródła fali świetlnej odbywa się prostopadle do linii łączącej źródło i detektor, to wzór na obserwowaną częstość fali ma postać

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (38.34)$$

**Poprzeczne zjawisko Dopplera** jest przejawem dylatacji czasu.

**Pęd i energia** Następujące definicje pędu  $\vec{p}$ , energii kinetycznej  $E_k$  i energii całkowitej  $E$  cząstki o masie  $m$  obowiązują dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{pęd}), \quad (38.39)$$

$$E = mc^2 + E_k = \gamma mc^2 \quad (\text{energia całkowita}), \quad (38.44, 38.35)$$

$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \quad (\text{energia kinetyczna}). \quad (38.49)$$

W tym przypadku  $\gamma$  oznacza współczynnik Lorentza związany z ruchem cząstki, a  $mc^2$  jest **energiją spoczynkową** związaną z jej masą. Wychodząc z tych równań, można otrzymać zależności łączące energię całkowitą, energię kinetyczną i pęd

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2 \quad (38.51)$$

oraz

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (38.52)$$

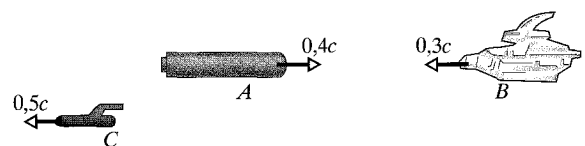
Energia reakcji  $Q$  dla układu cząstek, w którym zachodzi reakcja chemiczna lub jądrowa, jest równa zmianie całkowitej energii spoczynkowej układu ze znakiem minus:

$$Q = M_{\text{pocz}} c^2 - M_{\text{końc}} c^2 = -\Delta M c^2, \quad (38.47)$$

gdzie  $M_{\text{pocz}}$  i  $M_{\text{końc}}$  oznaczają całkowitą masę układu przed i po reakcji.

## Pytania

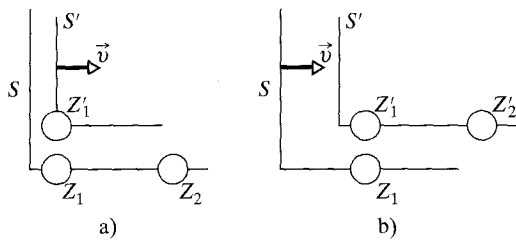
1. Statek  $A$  (rys. 38.16) wysyła impuls laserowy w kierunku zbliżającego się statku  $B$ , w tym samym czasie, kiedy statek zwiadowczy  $C$  się oddala. Wszystkie zaznaczone prędkości zostały zmierzone w tym samym układzie odniesienia. Uszereguj statki według wartości prędkości impulsu (zaczynając od największej) zmierzonej z ich pokładów.



Rys. 38.16. Pytania 1 i 7

2. Na rysunku 38.17a przedstawiono dwa zegary w nieruchomym układzie odniesienia  $S$  (w układzie tym zegary są ze sobą zsynchronizowane) oraz jeden zegar w poruszającym się układzie  $S'$ . Zegary  $Z_1$  i  $Z'_1$  mijają się, wskazują zero. Nieco później mijają się zegary  $Z'_1$  i  $Z_2$ . a) Który z nich wskaże wtedy wcześniejszą chwilę i b) który mierzy czas własny?

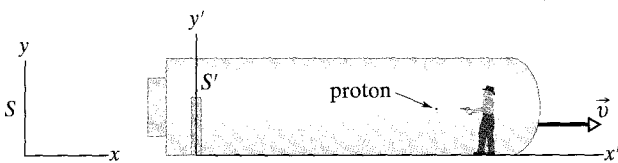
3. Na rysunku 38.17b przedstawiono dwa zegary w nieruchomym układzie odniesienia  $S'$  (w układzie tym zegary są ze sobą zsynchronizowane) oraz jeden zegar w poruszającym się układzie  $S$ . Zegary  $Z_1$  i  $Z'_1$  mijają się, wskazują zero. Nieco później mijają się zegary  $Z_1$  i  $Z'_2$ . a) Który z nich wskaże wtedy wcześniejszą chwilę i b) który mierzy czas własny?



Rys. 38.17. Pytania 2 i 3

4. Jacek opuszcza Wenus na pokładzie statku udającego się na Marsa i mija przebywającą na Ziemi Agatę z prędkością względną  $0,5c$ . a) Jacek i Agata mierzą czas trwania podróży z Wenus na Marsa. Kto mierzy czas własny — Jacek, Agata czy może żadne z nich? b) W trakcie podróży Jacek wysłał w kierunku Marsa impuls świetlny. Jacek i Agata mierzą czas podróży impulsu. Kto z nich mierzy czas własny?

5. Na rysunku 38.18 przedstawiono statek (z jego pokładem jest związany układ odniesienia  $S'$ ), który mija nas (układ odniesienia  $S$ ). Na statku wystrzelono proton, który porusza się z prędkością bliską prędkości światła wzdłuż statku od części przedniej do tylnej. a) Czy odległość przestrzenna  $\Delta x'$  między miejscem wystrzelenia protonu a miejscem jego trafienia w ścianę statku ma wartość dodatnią, czy ujemną? b) Czy odstęp czasu  $\Delta t'$  dzielący obydwie te zdarzenia ma wartość dodatnią, czy ujemną?



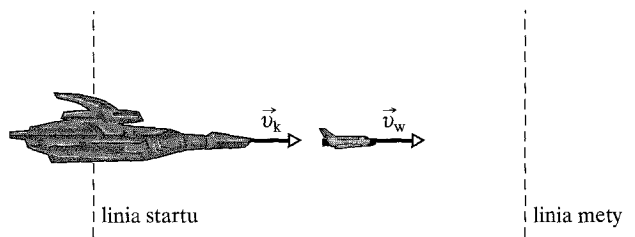
Rys. 38.18. Pytanie 5

6. Wyobraź sobie, że obserwator w układzie  $S'$  (rys. 38.9) stwierdza, że dwa zdarzenia zaszły w tym samym miejscu (powiedzmy w punkcie  $x'$ ), ale w różnym czasie. Czy jest możliwe, aby obserwator w układzie  $S$  również stwierdził, że zdarzenia te zaszły w tym samym miejscu? b) Pewien obserwator stwierdza, że

dwa zdarzenia zaszły jednocześnie i w tym samym miejscu. Czy wszyscy obserwatorzy stwierdzą, że zdarzenia te są jednoczesne? c) Czy wszyscy obserwatorzy stwierdzą, że zaszły one w tym samym miejscu?

7. Statki  $A$  i  $B$  (rys. 38.16) poruszają się naprzeciw siebie po jednej linii. Podane na rysunku prędkości zostały zmierzone w tym samym układzie odniesienia. Czy prędkość statku  $A$  względem statku  $B$  jest większa niż  $0,7c$ , mniejsza niż  $0,7c$ , czy równa  $0,7c$ ?

8. Na rysunku 38.19 przedstawiono jeden z czterech krążowników gwiazdnych, które uczestniczą w wyścigu. Gdy krążowniki mijają linię startu, od każdego z nich oddziela się mały wahadłowiec, który mknie do mety. Wyobraź sobie, że pełnisz funkcję sędziego i znajdujesz się w spoczynku względem linii startu i mety. Prędkości  $v_k$  krążowników mierzone względem ciebie i prędkości  $v_w$  wahadłowców mierzone względem statku macierzystego wynoszą odpowiednio: 1)  $0,7c$  i  $0,4c$ , 2)  $0,4c$  i  $0,7c$ , 3)  $0,2c$  i  $0,9c$  oraz 4)  $0,5c$  i  $0,6c$ . a) Nie wykonując pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według ich prędkości względem ciebie, zaczynając od największej wartości. b) Nie wykonując pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według odległości, jakie zmierzą ich piloci od linii startu do linii mety, zaczynając od największej uzyskanej wartości. c) Każdy z krążowników wysłał do swojego wahadłowca sygnał o pewnej częstotliwości  $\nu_0$  mierzonej na pokładzie krążownika. Nie przeprowadzając pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według częstotliwości, jaką zaobserwują ich załogi, począwszy od największej wartości.



Rys. 38.19. Pytanie 8

9. Wyobraź sobie, że na pokładzie statku kosmicznego odbierasz sygnały pochodzące z czterech wahadłowców, które po linii prostej albo zbliżają się do ciebie, albo się oddalają. Wszystkie sygnały mają taką samą częstotliwość własną  $\nu_0$ . Wartości i kierunki prędkości wahadłowców (zmierzone względem ciebie) wynoszą: a)  $0,3c$ , zbliża się, b)  $0,6c$ , zbliża się, c)  $0,3c$ , oddala się, d)  $0,6c$ , oddala się. Uszereguj wahadłowce według częstotliwości, którą odbierasz, zaczynając od największej wartości.

10. Energia spoczynkowa i energia całkowita trzech cząstek, wyrażona jako wielokrotność pewnej wielkości  $A$  wynosi odpowiednio: 1)  $A$ ,  $2A$ ; 2)  $A$ ,  $3A$ ; 3)  $3A$ ,  $4A$ . Nie wykonując pisemnych obliczeń, uporządkuj cząstki według: a) masy, b) energii kinetycznej, c) czynnika Lorentza i d) prędkości, za każdym razem zaczynając od największej wartości.

- www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

## 38.2 Postulaty

1. Układ odniesienia związany z laboratorium, nawet jeżeli pomi-  
nać ruch obrotowy i orbitalny Ziemi, nie jest dokładnie układem  
inercjalnym, ponieważ umieszczona w nim spoczywająca cząstka  
nie będzie pozostawać w spoczynku, lecz zacznie spadać. Czę-  
sto jednak zdarzenia zachodzą tak szybko, że można zaniedbać  
przyspieszenie grawitacyjne i uznać taki układ za inercjalny. Jako  
przykład rozważmy elektron poruszający się z prędkością  $0,992c$ ,  
który wchodzi poziomo do znajdującej się w laboratorium komo-  
ry. W jej wnętrzu elektron pokonuje odległość  $20\text{ cm}$ . a) Jak  
długo będzie trwał podróż elektronu w komorze? b) Jaką drogę  
w kierunku pionowym przebędzie w tym czasie elektron? Czy  
w tym przypadku można byłoby uznać laboratorium za inercjalny  
układ odniesienia?

2. Jaki ułamek prędkości światła stanowią podane dalej prę-  
dkości (jaką wartość ma parametr  $\beta$ )? a) Typowa prędkość dryfu  
kontynentów ( $3\text{ cm/rok}$ ). b) Maksymalna prędkość na autostra-  
dzie ( $90\text{ km/h}$ ). c) Prędkość samolotu nadźwiękowego o licz-  
bie Macha  $2,5$  ( $1200\text{ km/h}$ ). d) Prędkość ucieczki ciał z po-  
wierzchni Ziemi. e) Typowa prędkość oddalania się odległego  
kwazara ( $3 \cdot 10^4\text{ km/s}$ ).

## 38.5 Względność czasu

3. Zmierzony średni czas życia spoczywających mionów wynosi  
 $2,2\ \mu\text{s}$ . Zmierzono też, że średni czas życia prędkich mionów  
w obserwowanej na Ziemi wiązce promieniowania kosmicznego  
jest równy  $16\ \mu\text{s}$ . Oblicz, jaką prędkość względem Ziemi mają  
miony w wiązce promieniowania kosmicznego.

4. Jaką wartość ma parametr  $\beta$ , jeżeli współczynnik Lorentza  $\gamma$   
jest równy a)  $1,01$ , b)  $10$ , c)  $100$  i d)  $1000$ ?

5. Nietrwała cząstka o dużej energii pozostawiła w detektorze  
śląd o długości  $1,05\text{ mm}$ , a następnie uległa rozpadowi. Prędkość  
cząstki względem detektora wynosi  $0,992c$ . Ile wynosi własny  
czas życia cząstki, to znaczy, jak długo żyłaby cząstka spoczywa-  
jąca względem detektora? ilw

6. Wyobraź sobie, że chcesz odbyć wycieczkę statkiem kosmicz-  
nym. W trakcie podróży będziesz przez 6 miesięcy oddalać się od

Ziemi, poruszając się ze stałą prędkością po linii prostej, a nastę-  
pnie wracać z taką samą stałą prędkością. Chciałbyś, aby Ziemia  
w chwili twojego powrotu była o  $1000$  lat starsza. a) Z jaką prę-  
dkością powinieneś podróżować? b) Czy ważne jest, aby podróż  
odbywała się po linii prostej? Załóżmy, że podróżujesz przez rok  
po okręgu. Czy w chwili powrotu również okaże się, że zegary  
umieszczone na Ziemi odmierzyły  $1000$  lat?

## 38.6 Względność długości

7. Pręt równoległy do osi  $x$  układu odniesienia  $S$  porusza się  
wzdłuż tej osi z prędkością  $0,63c$ . Jego długość spoczynkowa  
wynosi  $1,7\text{ m}$ . Jaką długość zmierzy obserwator w układzie  
odniesienia  $S'$ ?

8. Elektron, którego prędkość wyraża parametr  $\beta = 0,999987$ ,  
porusza się wzdłuż osi rury próżniowej, której długość zmierzona  
przez spoczywającego względem niej obserwatora  $S$  wynosi  $3\text{ m}$ .  
Obserwator  $S'$ , który spoczywa względem elektronu, twierdzi, że  
rura porusza się względem niego z prędkością  $v (= \beta c)$ . Jaką  
długość rury zmierzy obserwator  $S'$ ?

9. Pręt o długości  $1\text{ m}$  w układzie  $S'$  tworzy kąt  $30^\circ$  z osią  $x'$ .  
Założmy, że układ  $S'$  porusza się równoległe do osi  $x$  układu  
odniesienia  $S$  z prędkością względną  $0,9c$ . Jaką długość pręta  
zmierzy obserwator spoczywający w układzie  $S$ ?

10. Długość statku kosmicznego zmierzona przez pewnego ob-  
serwatora jest równa dokładnie połowie jego długości spoczynko-  
wej. a) Ile wynosi prędkość (w jednostkach  $c$ ) statku względem  
obserwatora dokonującego pomiaru? b) Ile razy wolniej biegnie  
czas odmierzany przez zegary umieszczone na statku niż czas od-  
mierzany przez zegary w układzie związanym z obserwatorem  
prowadzącym pomiar?

11. Rakieta o długości  $130\text{ m}$  mija stację pomiaru czasu z prędko-  
ścią  $0,74c$ . a) Jaką długość rakiety zmierzy obserwator znajdujący  
się na stacji? b) Jaki odstęp czasu między minięciem stacji przez  
początek i koniec rakiety zmierzy zegar umieszczony na stacji?

12. a) Czy jest możliwe, aby człowiek w przeciętnym czasie  
swojego życia mógł przebyć odległość dzielącą Ziemię od środka  
Galaktyki równą około  $23\ 000$  lat świetlnych? Uzasadnienie po-  
przyj argumentami odwołującymi się do dylatacji czasu i skró-  
cenia długości. b) Jaką stałą prędkość trzeba by rozwinąć, aby  
podróż trwała  $30$  lat (według czasu własnego)?

13. Kosmiczny obieżyświat wyrusza z Ziemi z prędkością  $0,99c$   
w kierunku gwiazdy Wega znajdującej się w odległości  $26$  lat  
świetlnych. Jaki czas odmierzą zegary umieszczone na Ziemi do  
chwili, a) kiedy podróżnik osiągnie cel podróży i b) kiedy na  
Ziemię dotrze jego wiadomość o tym zdarzeniu? c) Ile wynosi  
czas podróży na Węgę obliczony przez obserwatorów na Ziemi  
w układzie odniesienia podróżnika? www

## 38.8 Kilka wniosków z równań Lorentza

14. Obserwator  $S$  stwierdza, że zdarzenie nastąpiło na osi  $x$  jego układu odniesienia w punkcie  $x = 3 \cdot 10^8$  m i w chwili  $t = 2,5$  s.  
a) Obserwatorka w układzie  $S'$  porusza się wraz ze swoim układem w dodatnim kierunku osi  $x$  z prędkością  $0,4c$ . Początki obydwu układów odniesienia pokrywają się ( $x = x' = 0$ ) w chwili  $t = t' = 0$ . Jakie współrzędne zdarzenia poda obserwator  $S'$ ?  
b) Jakie współrzędne podałyby obserwator, gdyby poruszała się w *ujemnym* kierunku osi  $x$  z taką samą prędkością?

15. Obserwator  $S$  twierdzi, że współrzędne pewnego zdarzenia są równe

$$x = 100 \text{ km} \quad \text{i} \quad t = 200 \text{ } \mu\text{s}.$$

Jakie są współrzędne tego zdarzenia w układzie  $S'$ , który porusza się względem  $S$  w dodatnim kierunku osi  $x$  z prędkością  $0,95c$ ? Przyjmij, że w chwili  $t = t' = 0$  mamy  $x = x' = 0$ .

16. Układ inercjalny  $S'$  porusza się z prędkością  $0,6c$  względem układu odniesienia  $S$  (rys. 38.9). Początki obydwu układów odniesienia pokrywają się ( $x = x' = 0$ ) w chwili  $t = t' = 0$ . Rejestrujemy dwa zdarzenia. W układzie  $S$  zdarzenie 1 zachodzi w początku układu w chwili  $t = 0$ , a zdarzenie 2 — na osi  $x$  w punkcie o współrzędnej  $x = 3$  km i w chwili  $t = 4$   $\mu\text{s}$ . Jakie współrzędne czasowe obydwu tych zdarzeń poda obserwator  $S'$ ? Wyjaśnij różnicę w kolejności zdarzeń w różnych układach.

17. Eksperymentator wyzwała jednocześnie dwie lampy błyskowe, czego skutkiem jest silny błysk w początku jego układu współrzędnych oraz słaby błysk w odległości  $x = 30$  km. Obserwator poruszający się z prędkością  $0,25c$  w dodatnim kierunku osi  $x$  również widzi błyski. a) Jaki jest według niego odstęp czasu między błyskami? b) Który błysk według obserwatora nastąpił wcześniej? www

18. Obserwator  $S$  widzi silny błysk w odległości 1200 m i słaby błysk w odległości o 720 m mniejszej, dokładnie w kierunku silnego błysku. Stwierdza on ponadto, że silny błysk był pierwszy, a odstęp czasu między obydwo ma błyskami wyniósł 5  $\mu\text{s}$ . Ile wynosi względna prędkość  $\vec{v}$  (podaj wartość i kierunek) obserwatora  $S'$ , który stwierdził, że w jego układzie odniesienia obydwa błyski nastąpiły w tym samym miejscu? b) Który błysk według obserwatora  $S'$  nastąpił pierwszy? c) Jaki odstęp czasu między błyskami zmierzył obserwator  $S'$ ?

19. Zegar poruszający się wzdłuż osi  $x$  z prędkością  $0,6c$  wskazywał zero w chwili przejścia przez początek układu współrzędnych. a) Oblicz współczynnik Lorentza dla zegara. b) Jaki czas wskaże zegar, mijając punkt  $x = 180$  m? www

20. Obserwator  $S$  widzi dwa błyski w takich samych położeniach, jak w zadaniu 18, ale tym razem w krótszym odstępie czasu. Ile musiałyby wynosić najmniejszy możliwy odstęp czasu między błyskami w układzie  $S$ , aby obserwator  $S'$  mógł stwierdzić, że nastąpiły one w tym samym miejscu?

## 38.9 Względność prędkości

21. Cząstka porusza się wzdłuż osi  $x'$  układu  $S'$  z prędkością  $0,4c$ . Układ  $S'$  porusza się z prędkością  $0,6c$  względem układu  $S$ . Jaką prędkość cząstki zmierzy obserwator w układzie  $S'$ ?

22. Układ  $S'$  porusza się względem układu  $S$  z prędkością  $0,62c$  w dodatnim kierunku osi  $x$ . Prędkość pewnej cząstki zmierzona w układzie  $S'$  wynosi  $0,47c$  i ma dodatni kierunek osi  $x'$ . a) Ile wynosi prędkość tej cząstki względem układu  $S$ ? Ile wynosiłaby prędkość cząstki względem układu  $S$ , gdyby w układzie  $S'$  poruszała się ona z prędkością  $0,47c$  w *ujemnym* kierunku osi  $x'$ ? W obydwu przypadkach porównaj uzyskane wyniki z przewidywaniami nierelatywistycznych równań na składanie prędkości.

23. Galaktyka  $A$  oddala się od nas z prędkością  $0,35c$ . Galaktyka  $B$ , która znajduje się dokładnie w przeciwnym kierunku, oddala się od nas z tą samą prędkością. Jaką prędkość oddalania się zmierzy obserwator znajdujący się w galaktyce  $A$  a) dla naszej Galaktyki i b) dla galaktyki  $B$ ?

24. Na podstawie pomiarów przesunięcia ku czerwieni światła docierającego z kwazara  $Q_1$  stwierdzono, że oddala się on od nas z prędkością  $0,8c$ . Kwazar  $Q_2$  leżący dokładnie w tym samym kierunku, lecz w mniejszej odległości, oddala się od nas z prędkością  $0,4c$ . Jaką prędkość kwazara  $Q_2$  zmierzy obserwator związany z kwazarem  $Q_1$ ?

25. Rakieta o długości spoczynkowej 350 m porusza się w pewnym układzie odniesienia z prędkością  $0,82c$ . Wzdłuż niej, dokładnie w przeciwnym kierunku przelatuje meteoroid, którego prędkość również wynosi  $0,82c$ . Jak długo, według obserwatora związanego z rakieta, meteoroid będzie mijał raketę? ilw www

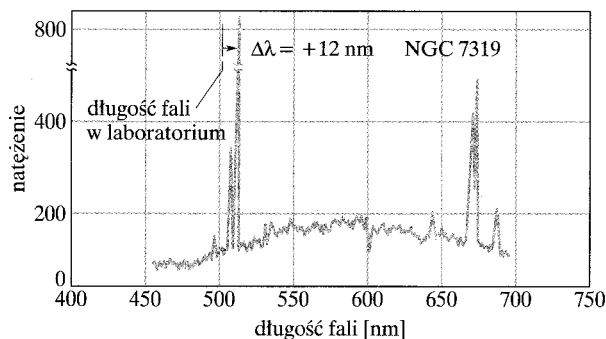
26. Armada statków kosmicznych rozciągająca się na długości 1 roku świetlnego (w jej układzie spoczynkowym) porusza się z prędkością  $0,8c$  względem stacji naziemnej  $S$ . Ze statku znajdującego się na końcu wyrusza w stronę czoła armady kurier lecący z prędkością  $0,95c$  zmierzony względem stacji  $S$ . Jak długo będzie trwał podróż kuriera według zegara a) w układzie spoczynkowym kuriera, b) w układzie spoczynkowym armady, c) znajdującego się na stacji  $S'$ ?

## 38.10 Zjawisko Dopplera dla światła

27. Statek kosmiczny oddalający się od Ziemi z prędkością  $0,9c$  nadaje komunikaty na częstotliwości 100 MHz (w układzie odniesienia statku). Na jaką częstotliwość należy nastroić odbiornik na Ziemi, aby móc odbierać te komunikaty?

28. Na rysunku 38.20 pokazano, jak natężenie światła docierającego na Ziemię z galaktyki NGC 7319 położonej w odległości około  $3 \cdot 10^8$  lat świetlnych zależy od długości fali. W widmie dominuje linia emisyjna tlenu. W laboratorium odpowiada jej długość fali  $\lambda = 513$  nm, ale w widmie obserwowanym dla galaktyki NGC 7319 w wyniku zjawiska Dopplera odpowiada jej długość

fali 525 nm (całe widmo emisyjne galaktyki NGC 7319 jest przesunięte). a) Ile wynosi radialna prędkość galaktyki NGC 7319 względem Ziemi? b) Czy galaktyka ta zbliża się, czy oddala od naszej planety?



Rys. 38.20. Zadanie 28

29. Stwierdzono, że długość fali pewnych linii w widmie galaktyki z gwiazdozbioru Panny jest o 0,4% większa niż w warunkach laboratoryjnych. Ile wynosi radialna składowa prędkości tej galaktyki względem Ziemi? Czy galaktyka ta zbliża się, czy oddala?

30. Oblicz, zakładając, że spełnione jest równanie (38.33), z jaką prędkością trzeba by jechać przez skrzyżowanie, aby światło czerwone zobaczyć jako zielone? Przyjmij, że barwie czerwonej odpowiada długość fali 620 nm, a zielonej 540 nm.

31. Statek kosmiczny oddala się od Ziemi z prędkością  $0,2c$ . Passażerowie widzą, że lampa na końcu statku wysłała światło barwy niebieskiej ( $\lambda = 450$  nm). Jaka będzie barwa światła widzianego przez obserwatora na Ziemi? ilw [www](#)

### 38.12 Nowe spojrzenie na energię

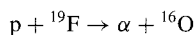
32. Jaką pracę trzeba wykonać, aby spoczywającemu elektronowi nadać prędkość: a)  $0,5c$ , b)  $0,99c$  i c)  $0,999c$ ?

33. Oblicz wartość parametru  $\beta$  i współczynnika Lorentza  $\gamma$  dla elektronu, którego energia kinetyczna wynosi: a) 1 keV, b) 1 MeV, c) 1 GeV.

34. Oblicz wartość parametru  $\beta$  i współczynnika Lorentza  $\gamma$  dla cząstki, której energia kinetyczna wynosi 10 MeV, jeżeli jest ona: a) elektronem, b) protonem i c) cząstką  $\alpha$ ?

35. Ile wynosi prędkość elektronu (w jednostkach  $c$ ), jeżeli jego energia kinetyczna wynosi 100 MeV?

36. Stwierdzono, że masy cząstek uczestniczących w reakcji



są z dużą dokładnością równe:

$$m(p) = 1,007825 \text{ u}, \quad m(\alpha) = 4,002603 \text{ u},$$

$$m(\text{F}) = 18,998405 \text{ u}, \quad m(\text{O}) = 15,9949 \text{ u}.$$

Korzystając z tych danych, oblicz energię reakcji  $Q$ .

37. Uważa się, że kwazary to jądra aktywnych galaktyk na wczesnym etapie ich powstawania. Moc emitowana przez typowy kwazar wynosi  $10^{41}$  W. Z jaką szybkością ubywa masa kwazara, który wypromieniowuje taką energię? Podaj wynik, przyjmując za jednostkę masę Słońca na rok (masa Słońca  $M_{\text{S}}$  jest równa  $2 \cdot 10^{30}$  kg).

38. Jaką pracę trzeba wykonać, aby zwiększyć prędkość elektronu a) od  $0,18c$  do  $0,19c$  i b) od  $0,98c$  do  $0,99c$ ? Zwróć uwagę, że w obydwu przypadkach prędkość wzrasta o  $0,01c$ .

39. Pewna cząstka o masie  $m$  ma pęd o wartości  $mc$ . Ile wynosi: a) prędkość cząstki, b) jej współczynnik Lorentza i c) energia kinetyczna cząstki?

40. Ile wynosi prędkość cząstki, której a) energia kinetyczna jest dwukrotnie większa od jej energii spoczynkowej i b) energia całkowita jest dwukrotnie większa od jej energii spoczynkowej?

41. Jaki pęd musi mieć cząstka o masie  $m$ , aby jej energia całkowita była trzy razy większa od energii spoczynkowej? ilw

42. a) Jeżeli można wyznaczyć energię kinetyczną  $E_k$  cząstki i jej pęd  $p$ , to powinno być możliwe obliczenie masy cząstki, a tym samym jej identyfikacja. Wykaż, że

$$m = \frac{(pc)^2 - E_k^2}{2E_k c^2}.$$

b) Udowodnij, że podane wyrażenie można sprowadzić do dobrze znanej postaci, kiedy  $u/c \rightarrow 0$ , gdzie  $u$  oznacza prędkość cząstki. c) Oblicz masę cząstki, której energia kinetyczna wynosi 55 MeV, a pęd 121 MeV/c. Podaj wynik jako wielokrotność masy elektronu  $m_e$ .

43. Tabletkę aspiryny ma masę 320 mg. Ile kilometrów można by przejechać samochodem, korzystając z energii równoważnej tej masie? Przyjmij, że 1 litr benzyny pozwala przejechać 12,75 km, a ciepło spalania benzyny używanej w samochodach wynosi  $3,65 \cdot 10^7$  J/l.

44. Średni czas życia spoczywających mionów wynosi 2,2  $\mu\text{s}$ . Pomiar wykonany w laboratorium dla wiązki mionów z akceleratora cząstek wykazały, że średni czas życia mionów wynosi 6,9  $\mu\text{s}$ . Ile wynosi w układzie związanym z laboratorium: a) prędkość mionów, b) ich energia kinetyczna i c) pęd? Masa mionu jest 207 razy większa od masy elektronu.

45. W zderzeniu wysokoenergetycznej cząstki promieniowana kosmicznego z pewną cząstką na wysokości 120 km nad poziomem morza powstał pion. Porusza się on pionowo w dół, a jego całkowita energia  $E$  wynosi  $1,35 \cdot 10^5$  MeV. Pion w swoim układzie spoczynkowym rozpadł się po 35 ns od chwili powstania. Na jakiej wysokości nad poziomem morza — według pomiaru w układzie

związanym z Ziemią — nastąpił rozpad pionu? Energia spoczynkowa pionu wynosi 139,6 MeV. [www](#)

46. W paragrafie 29.5 wykazaliśmy, że cząstka o ładunku  $q$  i masie  $m$  poruszająca się prostopadłe do kierunku jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $B$  biegnie po okręgu o promieniu  $r$  danym przez równanie (29.16):

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Wykazaliśmy także, że okres  $T$  obiegu okręgu nie zależy od prędkości cząstki. Uzyskane wyniki są prawdziwe tylko pod warunkiem, że  $v \ll c$ . W przypadku cząstek poruszających się z prędkościami bliskimi  $c$  promień toru można obliczyć ze wzoru

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{\gamma mv}{qb} = \frac{mv}{qb\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Równanie to obowiązuje dla dowolnych prędkości. Oblicz promień toru elektronu o energii 10 MeV poruszającego się prostopadłe do kierunku jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 2,2 T, korzystając ze wzoru a) nierelatywistycznego i b) relatywistycznego. c) Oblicz okres obiegu okręgu  $T = 2\pi r/v$ , korzystając z relatywistycznego wzoru na promień  $r$ . Czy uzyskany wynik nie zależy od prędkości elektronu?

47. Badania jonizacji wykazały, że pewne lekkie jądro ma ładunek  $2e$  i porusza się z prędkością  $0,71c$ . Promień krzywizny jego toru w polu magnetycznym o indukcji 1 T wynosi 6,28 m. (Jądro porusza się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola). Oblicz masę jądra i dokonaj jego identyfikacji. [Wskazówka: Lekkie jądra są zbudowane z podobnej liczby neutronów (które nie mają ładunku) i protonów (które mają ładunek  $+e$ ). Przyjmij, że masa każdej z tych cząstek jest równa 1 u. Skorzystaj też z zadania 46].

48. Proton o energii 10 GeV pochodzący z promieniowania kosmicznego porusza się w polu magnetycznym Ziemi o indukcji  $\vec{B}$  z prędkością  $\vec{v}$  skierowaną prostopadłe do  $\vec{B}$ , w obszarze, w którym średnia wartość indukcji wynosi 55  $\mu$ T. Ile wynosi promień krzywizny toru protonu w tym obszarze? (Patrz zadanie 46).

49. Elektron o energii 2,5 MeV porusza się prostopadłe do kierunku pola magnetycznego po torze o promieniu krzywizny 3 cm. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego  $B$ ? (Patrz zadanie 46).

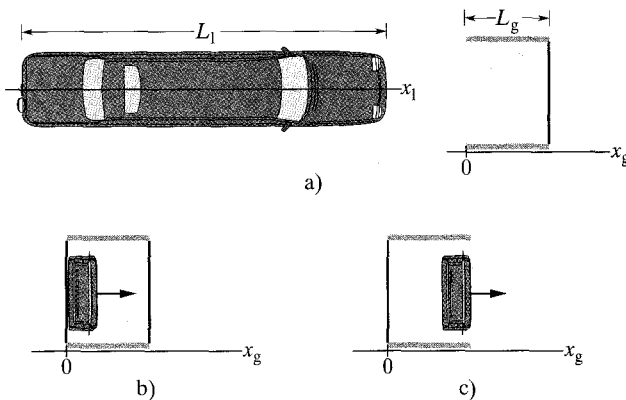
50. Synchrotron w laboratorium im. Fermiego przyspiesza protony, nadając im energię kinetyczną 500 GeV. Przy tak dużej energii efektów relatywistycznych nie można pominąć. W szczególności wraz ze wzrostem prędkości protonu czas potrzebny na pokonanie kołowej orbity w synchrotronie także wzrasta. W cyklotronie, w którym indukcja pola magnetycznego i częstość generatora mają stałe wartości, efekt wynikający z dylatacji czasu sprawiłby, że zanikłaby synchronizacja między czasem obiegu orbity przez proton a częstością generatora, zatem nie następowaloby przyspieszenie protonu przy kolejnych przejściach przez szczelinę i proton nie osiągnąłby energii 500 GeV. W synchrotronie zmienia się zarówno indukcja pola magnetycznego, jak i częstość generatora, tak aby efekt dylatacji czasu skompensować.

Oblicz wartość: a) współczynnika Lorentza  $\gamma$ , b) parametru  $\beta$  i c) indukcji pola magnetycznego  $B$  dla protonu o energii 500 GeV poruszającego się po orbicie o promieniu 750 m. (Patrz zadanie 46; przyjmij, że energia spoczynkowa protonu jest równa 938,8 MeV).

51\*. Cząstka  $\alpha$  o energii kinetycznej 7,7 MeV zderza się ze spoczywającym jądrem  $^{14}\text{N}$ . W wyniku reakcji powstaje jądro  $^{17}\text{O}$  i proton. Tor protonu o energii kinetycznej 4,44 MeV tworzy kąt  $90^\circ$  z torem padającej cząstki  $\alpha$ . Masy cząstek uczestniczących w reakcji są równe: 4,00260 u — cząstka  $\alpha$ ; 14,00307 u — jądro  $^{14}\text{N}$ ; 1,007825 u — proton; 16,99914 u — jądro  $^{17}\text{O}$ . Jaka jest wartość (w MeV) a) energii kinetycznej jądra tlenu i b) energii reakcji  $Q$ ? (Wskazówka: Prędkości cząstek są dużo mniejsze od wartości  $c$ ).

### Zadania dodatkowe

52. *Samochód w garażu.* Pewien samochodziarz kupił najdłuższą limuzynę świata, której długość własna  $L_1$  wynosi 30,5 m. Na rysunku 38.21a pokazano samochód zaparkowany przed garażem o długości własnej  $L_g$  równej 6 m. Garaż ma bramę wjazdową (na rysunku otwartą) i wyjazdową (na rysunku zamkniętą). Nie ulega wątpliwości, że limuzyna jest dłuższa niż garaż. Właściciel garażu, który wie co nieco na temat relatywistycznego skrócenia długości, zakłada się z właścicielem limuzyny, że może się ona zmieścić w garażu przy obydwu zamkniętych bramach. Samochodziarz, który zakończył naukę fizyki, nie zaznajamiając się w ogóle z teorią względności, twierdzi, że coś takiego jest z gruntu niemożliwe.



Rys. 38.21. Zadanie 52

Aby prześledzić rozumowanie właściciela garażu, zwiążmy oś  $x_1$  z limuzyną tak, aby jej początek  $x_1 = 0$  pokrywał się z jej tylnym zderzakiem. Oś  $x_g$  zwiążemy z garażem tak, aby punkt  $x_g = 0$  pokrywał się z przednią (otwartą) bramą. Właściciel limuzyny ma jechać nią na wprost bramy wjazdowej z prędkością  $0,998c$  (co jest oczywiście niemożliwe ze względów technicznych i finansowych).

Właściciel limuzyny spoczywa w układzie odniesienia związanym z osią  $x_1$ , a właściciel garażu w układzie związanym z osią  $x_g$ .

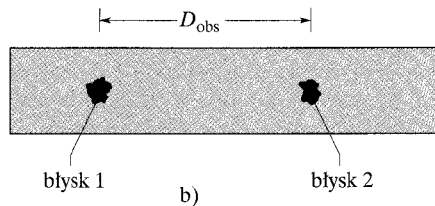
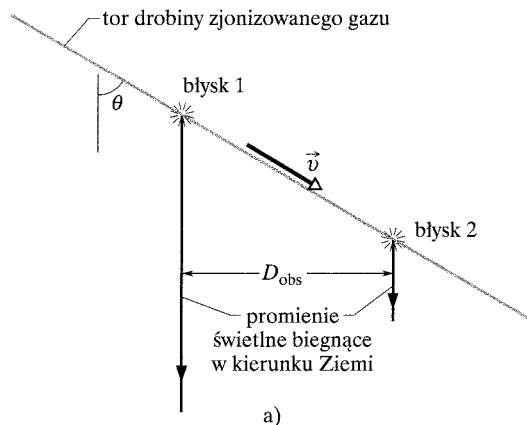
Musimy rozważyć dwa zdarzenia: *Zdarzenie 1*. Kiedy tylny zderzak samochodu mijają bramę wjazdową, ta jest zamykana. Przyjmijmy, że zarówno właściciel limuzyny, jak i właściciel garażu przypisują temu zdarzeniu czas równy zeru  $t_{g1} = t_{11} = 0$ . Zdarzenie nastąpiło w punkcie  $x_1 = x_g = 0$ . Na rysunku 38.21b przedstawiono zdarzenie 1 z punktu widzenia układu odniesienia  $x_g$ . *Zdarzenie 2*. Kiedy przedni zderzak limuzyny dociera do bramy wyjazdowej, ta otwiera się. Na rysunku 38.21c przedstawiono zdarzenie 2 z punktu widzenia układu odniesienia  $x_g$ .

a) Jaka jest długość limuzyny oraz b) jakie są współrzędne czasoprzestrzenne  $x_{g2}$  i  $t_{g2}$  zdarzenia 2 według właściciela garażu? c) Jak długo limuzyna przebywa w garażu, gdy zamknięte są obydwie jego bramy?

Rozważmy teraz sytuację z punktu widzenia układu  $x_1$ , w którym garaż „przejeżdża” przez samochód z prędkością  $-0,998c$ . Ile wynoszą, według właściciela limuzyny d) długość garażu oraz e) współrzędne czasoprzestrzenne  $x_{12}$  i  $t_{12}$  zdarzenia 2? f) Czy w pewnej chwili cała limuzyna mieści się w garażu, którego obydwie bramy są zamknięte i g) które zdarzenie zachodzi pierwsze? h) Naskicuj zdarzenia 1 i 2 tak, jak widzi je właściciel limuzyny. (Czy istnieje związek przyczynowy między obydwoimi zdarzeniami, to znaczy, czy jedno zdarzenie jest przyczyną drugiego?) i) Kto wygrał zakład?

**53. Strumień nadświetlny.** Na rysunku 38.22a przedstawiono szkic toru drobin materii w strumieniu zjonizowanego gazu wyrzucanego przez galaktykę. Drobiną porusza się ze stałą prędkością  $\vec{v}$  pod kątem  $\theta$  do kierunku obserwacji z Ziemi. Drobiną co pewien czas emituje błyski światła, które mogą być obserwowane na Ziemi. Dwa błyski zaznaczone na rysunku 38.22a dzieli odstęp czasu  $t$  zmierzony w spoczywającym układzie odniesienia w pobliżu źródła błysków. Na rysunku 38.22b pokazano, jak wyglądałyby obydwa błyski sfotografowane na jednym kawałku kliszy — najpierw do Ziemi dociera światło z błysku oznaczonego jako 1, a następnie z błysku 2. Odległość  $D_{\text{obs}}$  to przemieszczenie tej

drobin w polu widzenia znajdującego się na Ziemi obserwatora.  $T_{\text{obs}}$  oznacza różnicę między czasem dotarcia na Ziemię światła z obydwu błysków. Obserwowana prędkość jest więc równa  $v_{\text{obs}} = D_{\text{obs}}/T_{\text{obs}}$ . Wyraż a)  $D_{\text{obs}}$  i b)  $T_{\text{obs}}$  za pomocą wielkości  $v$ ,  $t$  i  $\theta$ . c) Oblicz wartość  $v_{\text{obs}}$  dla  $v = 0,98c$  i  $\theta = 30^\circ$ . Kiedy po raz pierwszy zaobserwowano w ten sposób strumienie gazu poruszające się pozornie szybciej niż światło, wydawało się, że leży to w sprzeczności ze szczególną teorią względności. Sprawa wyjaśniła się, gdy właściwie zinterpretowano geometrię obserwacji przedstawioną na rysunku 38.22a.



Rys. 38.22. Zadanie 53



# DODATEK A

## Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)\*

### 1. Jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	„długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy” (1983)
masa	kilogram	kg	„ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odciążony i uważany za jednostkę masy” (1889)
czas	sekunda	s	„czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nadsubtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	A	„natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich, prostoliniowych przewodach o znikomo małym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ niutona na każdy metr długości przewodu” (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	K	„1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967)
ilość substancji	mol	mol	„ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971)
światłość	kandela	cd	„światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian” (1979)

\* Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”, National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wąg (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

## 2. Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki		Symbol
pole powierzchni	metr kwadratowy	$m^2$	
objętość	metr sześcienny	$m^3$	
częstość	herc	Hz	$s^{-1}$
gęstość	kilogram na metr sześcienny	$kg/m^3$	
prędkość	metr na sekundę	m/s	
prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s	
przyspieszenie	metr na sekundę kwadrat	$m/s^2$	
przyspieszenie kątowne	radian na sekundę kwadrat	$rad/s^2$	
siła	niuton	N	$kg \cdot m/s^2$
ciśnienie	paskal	Pa	$N/m^2$
praca, energia, ciepło	dżul	J	$N \cdot m$
moc	wat	W	J/s
ładunek elektryczny	kulomb	C	$A \cdot s$
napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	V	W/A
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m	N/C
opór elektryczny	om	$\Omega$	V/A
pojemność elektryczna	farad	F	$A \cdot s/V$
strumień magnetyczny	weber	Wb	$V \cdot s$
indukcyjność	henr	H	$V \cdot s/A$
indukcja magnetyczna	tesla	T	$Wb/m^2$
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m	
entropia	dżul na kelwin	J/K	
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	$J/(kg \cdot K)$	
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	$W/(m \cdot K)$	
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr	

## 3. Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

# DODATEK B

## Niektóre podstawowe stałe fizyczne\*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
prędkość światła w próżni	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	2,997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	1,602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)	6,673	1500
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)	8,314 472	1,7
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6,022 141 99	0,079
stała Boltzmana	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmana	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> · K <sup>4</sup> )	5,670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego <sup>c</sup>	$V_m$	$2,27 \cdot 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,271 098 1	1,7
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6,626 068 76	0,078
masa elektronu <sup>d</sup>	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg $5,49 \cdot 10^{-4}$ u	9,109 381 88 5,485 799 110	0,079 0,0021
masa protonu <sup>d</sup>	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg 1,0073 u	1,672 621 58 1,007 276 466 88	0,079 $1,3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	$m_p/m_e$	1840	1836,152 667 5	0,0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1,758 820 174	0,040
masa neutronu <sup>d</sup>	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg 1,0087 u	1,674 927 16 1,008 664 915 78	0,079 $5,4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru <sup>d</sup>	$m^1_H$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
masa atomu deuteru <sup>d</sup>	$m^2_H$	2,0141 u	2,014 101 777 9	0,0005
masa atomu helu-4 <sup>d</sup>	$m^4_{He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067

\* Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r. (patrz: [www.physics.nist.gov](http://www.physics.nist.gov)).

cd.

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
masa mionu	$m_{\mu}$	$1,88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	$\mu_p$	$1,41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	$\mu_N$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,050 783 17	0,040
promień Bohra	$a_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	$R$	$1,10 \cdot 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,097 373 156 854 8	$7,6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_C$	$2,43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426 310 215	0,0073

<sup>a</sup> Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę co odpowiednie wartości zaokrąglone.

<sup>b</sup> W jednostkach  $10^{-6}$  (milionowych częściach całości).

<sup>c</sup> W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).

<sup>d</sup> Atomowa jednostka masy  $1 u = 1,660 538 73 \cdot 10^{-27}$  kg.

# DODATEK C

## Niektóre dane astronomiczne

Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca <sup>a</sup>	$3,82 \cdot 10^8$ m	do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do Słońca <sup>a</sup>	$1,50 \cdot 10^{11}$ m	do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4,04 \cdot 10^{16}$ m	do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

<sup>a</sup> Odległość średnia.

Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
średnia gęstość	$\text{kg/m}^3$	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	$\text{m/s}^2$	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu <sup>a</sup>		37 d na biegunach <sup>b</sup> , 26 d na równiku <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania <sup>c</sup>	W	$3,90 \cdot 10^{26}$		

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

<sup>c</sup> Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością  $1340 \text{ W/m}^2$ .

## Wybrane właściwości planet\*

	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, $10^6$ km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lat	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu <sup>a</sup> , d	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	< 28°	≈ 3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni <sup>c</sup> , $m/s^2$	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki <sup>c</sup> , km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16 <sup>d</sup>	18 <sup>e</sup>	17 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	1

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Wenus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.

<sup>c</sup> Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.

<sup>d</sup> + pierścień.

<sup>e</sup> + pierścienie.

# DODATEK D

## Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład 1 stopień =  $2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów, a zatem  $16,7^\circ = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

### Kąt płaski

	°	'	"	radianów	obrotów
1 stopień = 1		60	3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
1 minuta = $1,667 \cdot 10^{-2}$	1		60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
1 sekunda = $2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1		$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
1 <b>radian</b> = 57,30	3438		$2,063 \cdot 10^5$	1	0,1592
1 obrót = 360	$2,16 \cdot 10^4$		$1,296 \cdot 10^6$	6,283	1

### Kąt bryłowy

1 pełny kąt bryłowy =  $4\pi$  steradianów = 12,57 steradianów

### Długość

	cm	metrów	km	cali	stóp	mil
1 centymetr = 1		$10^{-2}$	$10^{-5}$	0,3937	3,281	$6,214 \cdot 10^{-6}$
1 <b>metr</b> = 100	100	1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$
1 kilometr = $10^5$	$10^5$	1000	1	$3,937 \cdot 10^4$	3281	0,6214
1 cal (in) = 2,540	2,540	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$
1 stopa (ft) = 30,48	30,48	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$
1 mila (lądowa) = $1,609 \cdot 10^5$	$1,609 \cdot 10^5$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^4$	5280	1

1 angstrom =  $10^{-10}$  m

1 mila morska = 1852 m = 1,151 mil = 6076 stóp

1 fermi =  $10^{-15}$  m

1 rok świetlny =  $9,460 \cdot 10^{12}$  km

1 parsek =  $3,084 \cdot 10^{13}$  km

1 sążen = 6 stóp

1 promień Bohra =  $5,292 \cdot 10^{-11}$  m

1 jard = 3 stopy

1 nm =  $10^{-9}$  m

## Pole powierzchni

	$m^2$	$cm^2$	$ft^2$	$in^2$
1 metr kwadratowy = 1		$10^4$	10,76	1550
1 centymetr kwadratowy = $10^{-4}$		1	$1,076 \cdot 10^{-3}$	0,1550
1 stopa kwadratowa = $9,290 \cdot 10^{-2}$		929,0	1	144
1 cal kwadratowy = $6,452 \cdot 10^{-4}$		6,452	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

1 mila kwadratowa =  $2,788 \cdot 10^7 ft^2 = 640$  akrów  
 1 barn =  $10^{-28} m^2$   
 1 akr = 43 560  $ft^2$   
 1 hektar =  $10^4 m^2 = 2,471$  akrów

## Objętość

	$m^3$	$cm^3$	l (litrów)	$ft^3$	$in^3$
1 metr sześcienny = 1		$10^6$	1000	35,31	$6,102 \cdot 10^4$
1 centymetr sześcienny = $10^{-6}$		1	$1,000 \cdot 10^{-3}$	$3,531 \cdot 10^{-5}$	$6,102 \cdot 10^{-2}$
1 litr = $1,000 \cdot 10^{-3}$		1000	1	$3,531 \cdot 10^{-2}$	61,02
1 stopa sześcienna = $2,832 \cdot 10^{-2}$		$2,832 \cdot 10^4$	28,32	1	1728
1 cal sześcienny = $1,639 \cdot 10^{-5}$		16,39	$1,639 \cdot 10^{-2}$	$5,787 \cdot 10^{-4}$	1

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231  $in^3$   
 1 galon angielski = 277,4  $in^3 = 1,201$  galonów amerykańskich

## Masa

	g	kg	u	uncji	funtów
1 gram = 1		0,001	$6,022 \cdot 10^{23}$	$3,527 \cdot 10^{-2}$	$2,205 \cdot 10^{-3}$
1 kilogram = 1000		1	$6,022 \cdot 10^{26}$	35,27	2,205
1 atomowa jednostka masy = $1,661 \cdot 10^{-24}$		$1,661 \cdot 10^{-27}$	1	$5,857 \cdot 10^{-26}$	$3,662 \cdot 10^{-27}$
1 uncja handlowa (oz) = 28,35		$2,835 \cdot 10^{-2}$	$1,718 \cdot 10^{25}$	1	$6,250 \cdot 10^{-2}$
1 funt handlowy (lb) = 453,6		0,4536	$2,732 \cdot 10^{26}$	16	1

## Gęstość

	$kg/m^3$	$g/cm^3$	$lb/ft^3$	$lb/in^3$
1 $kg/m^3 = 1$		0,001	$6,243 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-5}$
1 $g/cm^3 = 1000$		1	62,43	$3,613 \cdot 10^{-2}$
1 $lb/ft^3 = 16,02$		$1,602 \cdot 10^{-2}$	1	$5,787 \cdot 10^{-4}$
1 $lb/in^3 = 2,768 \cdot 10^4$		27,68	17,28	1

## Czas

	a	d	h	min	s
1 rok = 1		365,25	$8,766 \cdot 10^3$	$5,259 \cdot 10^5$	$3,156 \cdot 10^7$
1 doba = $2,738 \cdot 10^{-3}$		1	24	1440	$8,640 \cdot 10^4$
1 godzina = $1,141 \cdot 10^{-4}$		$4,167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuta = $1,901 \cdot 10^{-6}$		$6,944 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60
1 sekunda = $3,169 \cdot 10^{-8}$		$1,157 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1



## Prędkość

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 km/h = 1	0,2778	27,78	0,6214	0,9113
1 m/s = 3,6	1	100	2,237	3,281
1 cm/s = $3,6 \cdot 10^{-2}$	0,01	1	$2,237 \cdot 10^{-2}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/h = 1,609	0,4470	44,70	1	1,467
1 stopa/s = 1,097	0,3048	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

## Siła

dyn	N	G	kG	funtów
1 dyna = 1	$10^{-5}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$
1 N = $10^5$	1	102,0	0,1020	0,2248
1 G = 980,7	$9,807 \cdot 10^{-3}$	1	0,001	$2,205 \cdot 10^{-3}$
1 kG = $9,807 \cdot 10^5$	9,807	1000	1	2,205
1 funt = $4,448 \cdot 10^5$	4,448	453,6	0,4536	1

Jednostki: gram-siła (G), kilogram-siła (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-siła jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciężenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ); analogicznie dla kilograma-siły i funta.

## Ciężnienie

	atm	dyn/cm <sup>2</sup>	cali wody	cm Hg	Pa	funtów/in <sup>2</sup>	funtów/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera = 1		$1,013 \cdot 10^6$	406,8	76	$1,013 \cdot 10^5$	14,70	2116
1 dyna/cm <sup>2</sup> = $9,869 \cdot 10^{-7}$		1	$4,015 \cdot 10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody <sup>a</sup> w temp. 4°C = $2,458 \cdot 10^{-3}$		2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \cdot 10^{-2}$	5,202
1 cm rtęci <sup>a</sup> w temp. 0°C = $1,316 \cdot 10^{-2}$		$1,333 \cdot 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$		10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
1 funt/in <sup>2</sup> = $6,805 \cdot 10^{-2}$		$6,895 \cdot 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \cdot 10^3$	1	144
1 funt/ft <sup>2</sup> = $4,725 \cdot 10^{-4}$		478,8	0,1922	$3,591 \cdot 10^{-2}$	47,88	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

<sup>a</sup> W standardowych warunkach ciężenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

1 bar =  $10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$     1 milibar =  $10^3 \text{ dyn/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$     1 tor = 1 mm Hg

## Energia, praca, ciepło

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii,  $E = mc^2$ , i wyrażają energię wyzwalaną przy całkowitej zamianie na energię masy jednego kilograma lub atomowej jednostki masy  $u$  (dwa ostatnie wiersze) oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (dwie ostatnie kolumny tabeli).

	erg	J	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
1 erg = 1		$10^{-7}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$6,242 \cdot 10^5$	$1,113 \cdot 10^{-24}$	670,2
1 dżul = $10^7$		1	0,2389	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$6,242 \cdot 10^{12}$	$1,113 \cdot 10^{-17}$	$6,702 \cdot 10^9$
1 kaloria = $4,186 \cdot 10^7$		4,186	1	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{19}$	$2,613 \cdot 10^{13}$	$4,660 \cdot 10^{-17}$	$2,806 \cdot 10^{10}$
1 kilowatogodzina = $3,600 \cdot 10^{13}$		$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247 \cdot 10^{25}$	$2,247 \cdot 10^{19}$	$4,007 \cdot 10^{-11}$	$2,413 \cdot 10^{16}$
1 elektronowolt = $1,602 \cdot 10^{-12}$		$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	1	$10^{-6}$	$1,783 \cdot 10^{-36}$	$1,074 \cdot 10^{-9}$
1 megaelektronowolt =								
= $1,602 \cdot 10^{-6}$	$1,602 \cdot 10^{-13}$	$3,827 \cdot 10^{-14}$	$4,450 \cdot 10^{-20}$	$10^{-6}$	1	1	$1,783 \cdot 10^{-30}$	$1,074 \cdot 10^{-3}$
1 kilogram = $8,987 \cdot 10^{23}$	$8,987 \cdot 10^{16}$	$2,146 \cdot 10^{16}$	$2,497 \cdot 10^{10}$	$5,610 \cdot 10^{35}$	$5,610 \cdot 10^{29}$	$5,610 \cdot 10^{29}$	1	$6,022 \cdot 10^{26}$
1 atomowa jednostka masy =								
= $1,492 \cdot 10^{-3}$	$1,492 \cdot 10^{-10}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	932,0	932,0	$1,661 \cdot 10^{-27}$	1

## Moc

	KM	cal/s	kW	W
1 koń mechaniczny = 1		178,1	0,7457	745,7
1 kaloria na sekundę = $5,615 \cdot 10^{-3}$		1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186
1 kilowat = 1,341		238,9	1	1000
1 wat = $1,341 \cdot 10^{-3}$		0,2389	0,001	1

## Indukcja magnetyczna

	Gs	T	mGs
1 gaus (Gs) = 1		$10^{-4}$	1000
1 tesla (T) = $10^4$		1	$10^7$
1 miligauss (mGs) = 0,001		$10^{-7}$	1

1 tesla = 1 weber/m<sup>2</sup>

## Strumień magnetyczny

	makswele	weberów
1 makswele = 1		$10^{-8}$
1 weber = $10^8$		1

# DODATEK E

## Wzory matematyczne

### GEOMETRIA

Koło o promieniu  $r$ : obwód  $= 2\pi r$ ; pole powierzchni  $= \pi r^2$ .

Kula o promieniu  $r$ : pole powierzchni  $= 4\pi r^2$ ; objętość  $= \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Walec obrotowy o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni  $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ; objętość  $= \pi r^2 h$ .

Trójkąt o podstawie  $a$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni  $= \frac{1}{2} a h$ .

### RÓWNANIE KWADRATOWE I JEGO ROZWIĄZANIE

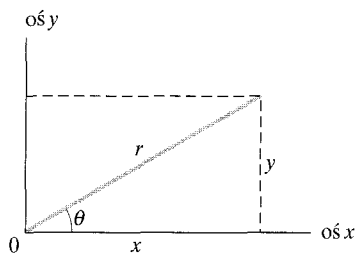
Jeśli  $ax^2 + bx + c = 0$ , to  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE KĄTA $\theta$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \theta = \frac{x}{y}$$

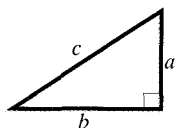
$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$



### TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



### TRÓJKĄTY

Kąty:  $A, B, C$ .

Boki im przeciwległe:  $a, b, c$ .

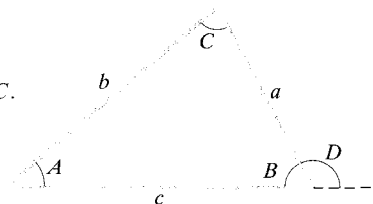
$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Kąt zewnętrzny

$$D = A + C.$$



### SYMBOLE MATEMATYCZNE

$=$  równa się

$\approx$  równa się w przybliżeniu

$\sim$  jest tego samego rzędu wielkości

$\neq$  nie jest równe

$\equiv$  jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$  jest większe niż ( $\gg$  jest dużo większe niż)

$<$  jest mniejsze niż ( $\ll$  jest dużo mniejsze niż)

$\geq$  jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

$\leq$  jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

$\pm$  plus albo minus

$\propto$  jest proporcjonalne do

$\sum$  suma

$x_{\text{sr}}$  wartość średnia  $x$

### TOŻSAMOŚCI TRYGNOMETRYCZNE

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## ROZWIŃNIĘCIA FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(wzór dwumianowy)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

## WZORY CRAMERA

Układ równań z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{oraz} \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

## ILOCZYNY WEKTORÓW

Niech  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  i  $\hat{k}$  będą wektorami jednostkowymi kierunków  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Zachodzą związki:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

Dowolny wektor  $\vec{a}$  o składowych wzdłuż osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  równych  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Niech  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach)  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ — skalar}).$$

Niech  $\theta$  będzie mniejszym z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

## POCHODNE I CAŁKI

W poniższych wzorach  $u$  i  $v$  są dowolnymi funkcjami zmiennej  $x$ , a  $a$  i  $m$  są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

1.  $\frac{dx}{dx} = 1$
2.  $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$
3.  $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4.  $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5.  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
6.  $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
7.  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8.  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
9.  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
10.  $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
11.  $\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12.  $\frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
13.  $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$
14.  $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15.  $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
16.  $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
1.  $\int dx = x$
2.  $\int audx = a \int udx$
3.  $\int (u + v)dx = \int udx + \int vdx$
4.  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$
6.  $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$
7.  $\int e^x dx = e^x$
8.  $\int \sin x dx = -\cos x$
9.  $\int \cos x dx = \sin x$
10.  $\int \operatorname{tg} x dx = \ln |\sec x|$
11.  $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x$
12.  $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$
13.  $\int x e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2} (ax + 1) e^{-ax}$
14.  $\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3} (a^2 x^2 + 2ax + 2) e^{-ax}$
15.  $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16.  $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20.  $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$
21.  $\int \frac{x dx}{x + d} = x - d \ln(x + d)$

# DODATEK F

## Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyn	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	$1,6626 \cdot 10^{-3}$	-189,4	-185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
azot	N	7	14,0067	$1,1649 \cdot 10^{-3}$	-210	-195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	—	—	—	—
bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	-7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	$3,214 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	-101	-34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
dubn	Db	105	262,114	—	—	—	—
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	—	—	—	—
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	—	—	—	—
fluor	F	9	18,9984	$1,696 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
hafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
has	Hs	108	(265)	—	—	—	—
hel	He	2	4,0026	0,1664 · 10 <sup>-3</sup>	-269,7	-268,9	5,23
holm	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
iterb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
itr	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
jod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
kaliforn	Cf	98	(251)	—	—	—	—
kiur	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
krypton	Kr	36	83,80	3,488 · 10 <sup>-3</sup>	-157,37	-152	0,247
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
ksenon	Xe	54	131,30	5,495 · 10 <sup>-3</sup>	-111,79	-108	0,159
lantan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
lit	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
lorens	Lr	103	(257)	—	—	—	—
lutet	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
magnez	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
meitner	Mt	109	(266)	—	—	—	—
mendelew	Md	101	(256)	—	—	—	—
miedź	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
molibden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
neon	Ne	10	20,183	0,8387 · 10 <sup>-3</sup>	-248,597	-246,0	1,03
neptun	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
nikiel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
nobel	No	102	(255)	—	—	—	—
ołów	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
osm	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
pallad	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
platyna	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
pluton	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
polon	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
potas	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
prazeodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
protaktyn	Pa	91	(231)	15,37 (oszacowanie)	(1230)	—	—

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
rad	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
radon	Rn	86	(222)	9,96 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	(-71)	-61,8	0,092
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
rtęć	Hg	80	200,59	13,55	-38,87	357	0,138
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
rutherford	Rf	104	261,11	—	—	—	—
samar	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
seaborg	Sg	106	263,118	—	—	—	—
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
tlen	O	8	15,9994	1,3318 · 10 <sup>-3</sup>	-218,80	-183,0	0,913
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
węgiel	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
wodór	H	1	1,00797	0,08375 · 10 <sup>-3</sup>	-259,19	-252,7	14,4
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
ununnil	Uun	110	(269)	—	—	—	—
ununun	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
ununbi	Unb	112	(264)	—	—	—	—
ununtri	Unt	113	—	—	—	—	—
ununkwad	Unq	114	(285)	—	—	—	—
ununpent	Unp	115	—	—	—	—	—
ununheks	Unh	116	(292)	—	—	—	—

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa” podano w nawiasach wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia.

Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).



# DODATEK G

## Układ okresowy pierwiastków

		metale przejściowe																	
		III A	IV A	VA	VIA	VII A	metale					VIII A	gazy szlachetne 0						
1	metale alkaliczne IA	1 H											2 He						
2		3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3		11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4		19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5		37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6		55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7		87 Fr	88 Ra	89-103 †	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110	111	112	113	114	115	116	117	118

lantanowce *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
aktynowce †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Nazwy pierwiastków o liczbie atomowej od 104 do 109 (rutherford, dubn, seaborg, bohr, has i meitner) zostały ustalone przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC) w 1997 roku. Pierwiastki o liczbie atomowej 110, 111, 112, 114 i 116 zostały już odkryte, lecz nie nadano im jeszcze nazw. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).

# ODPOWIEDZI

## do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych

### Rozdział 34

#### SPRAWDZIANY

1. a) Skorzystaj z rys. 34.5. Po prawej stronie prostokąt  $\vec{E}$  jest skierowane zgodnie z ujemnym kierunkiem osi  $y$ ; po lewej stronie  $\vec{E} + d\vec{E}$  jest większe i ma ten sam kierunek; b)  $\vec{E}$  jest skierowane w dół. Po prawej stronie  $\vec{B}$  jest skierowane zgodnie z ujemnym kierunkiem osi  $z$ ; po lewej stronie  $\vec{B} + d\vec{B}$  jest większe i ma ten sam kierunek. 2. dodatni kierunek  $x$ . 3. a) nie zmienia się; b) zmniejsza się. 4.  $a, d, b, c$  (zero). 5.  $a$ . 6. a) nie; b) tak.

#### PYTANIA

1. a) dodatni kierunek  $z$ ; b)  $x$ . 3. a) nie zmienia się; b) wzrasta; c) maleje. 5.  $c$ . 7.  $a, b, c$ . 9. żaden. 11.  $b$ .

#### ZADANIA

1. a) 0,5 ms; b) 8,4 min; c) 2,4 h; d) 5500 p.n.e. 3. a) 515 nm, 610 nm; b) 555 nm,  $5,41 \cdot 10^{14}$  Hz,  $1,85 \cdot 10^{-15}$  s. 5. a) będzie się stopniowo wydłużał; b) zsumowane rozbieżności między pozornym czasem obiegu i czasem obserwowanym z punktu  $x$ ; promień orbity Ziemi. 7.  $5 \cdot 10^{-21}$  H. 9.  $B_x = 0, B_y = -6,7 \cdot 10^{-9} \cos[\pi \cdot 10^{15}(t - x/c)], B_z = 0$  w jednostkach układu SI. 11. 0,1 MJ. 13.  $8,88 \cdot 10^4$  m<sup>2</sup>. 15. a) 16,7 nT; b) 33,1 mV/m<sup>2</sup>. 17. a) 6,7 nT; b) 5,3 mW/m<sup>2</sup>; c) 6,7 W. 19. a) 87 mW/m; b) 0,3 nT; c) 13 kW. 21.  $1 \cdot 10^7$  Pa. 23.  $5,9 \cdot 10^{-8}$  Pa. 25. a) 100 MHz; b) 1  $\mu$ T wzdłuż osi  $z$ ; c) 2,1 m<sup>-1</sup>; 6,3  $\cdot 10^8$  rad/s; d) 120 W/m<sup>2</sup>; e)  $8 \cdot 10^{-7}$  N,  $4 \cdot 10^{-7}$  Pa. 29. 1,9 mm/s. 31. b) 580 nm. 33. a) 1,9 V/m<sup>2</sup>; b)  $1,7 \cdot 10^{-11}$  Pa. 35. 3,1%. 37. 4,4 W/m<sup>2</sup>. 39. 2/3. 41. a) 2 polaryzatory; b) 5 polaryzatorów. 43. 1,48. 45. 1,26. 47. 1,07 m. 53. 1,22. 55. a) 49°; b) 29°. 57. a) należy zakryć środek każdej powierzchni bocznej nieprzezroczystym krążkiem o promieniu 4,5 mm; b) ok. 0,63. 59. a)  $(1 + \sin^2 \theta)^{1/2}$ ; b)  $\sqrt{2}$ ; c) światło wychodzi z prawej strony; d) światło nie wychodzi z prawej strony. 61. 49°. 63. a) 15 m/s; b) 8,7 m/s; c) wyżej; d) 72°. 65. 1.

### Rozdział 35

#### SPRAWDZIANY

1. 0,2d, 1,8d, 2,2d. 2. a) rzeczywisty; b) odwrócony; c) po tej samej stronie. 3. a) e; b) pozorny, po tej samej. 4. pozorny i prosty, soczewka jest rozpraszająca.

#### PYTANIA

1.  $c$ . 3. a)  $a$  i  $c$  trzy razy; b) trzy razy; c) trzy. 5. wypukłe. 7. a) maleje; b) rośnie; c) rośnie. 9. a) wszystkie, z wyjątkiem wariantu 2; b) dla 1, 3 i 4: prawa; odwrócony; dla 5 i 6: lewa, prosty.

#### ZADANIA

1. 40 cm. 3. a) 3. 7. nowe oświetlenie to 10/9 starego. 9. 10,5 cm. 13. a) 2; b) nie jest to w ogóle możliwe. 17.  $o = -12$  cm. 19. 45 mm, 90 mm. 23. 22 cm. 27. w odległości 30 cm po lewej stronie drugiej soczewki powstaje obraz pozorny, prosty;  $m = 1$ . 33. a) 13 cm; b) 5,23 cm; c) -3,25; d) 3,13; e) -10,2. 35. a) 2,35 cm; b) zmniejszyć; 37. a) 5,3 cm; b) 3 mm.

### Rozdział 36

#### SPRAWDZIANY

1.  $b$  (najmniejsze  $n$ ),  $c, a$ . 2. a) górny; b) umiarkowane oświetlenie (różnica faz wynosi 2,1 długości fali). 3. a)  $3\lambda, 3$ ; b)  $2,5\lambda, 2,5$ . 4. natężenie jest jednakowe dla  $a$  i  $d$  (amplituda fali wypadkowej  $4E_0$ ) oraz dla  $b$  i  $c$  (amplituda fali wypadkowej  $2E_0$ ). 5. a) 1 i 4; b) 1 i 4.

#### PYTANIA

1.  $a, c, b$ . 3. a) 300 nm; b) fazy dokładnie przeciwne. 5. a) stan pośredni bliższy maksimum,  $m = 2$ ; b) minimum,  $m = 3$ ; c) stan pośredni bliższy maksimum,  $m = 2$ ; d) maksimum,  $m = 1$ . 7. a)–c) wzrasta; d) niebieska. 9. a) maksimum; b) minimum; c) na przemian maksima i minima. 11. a) 0,5 długości fali; b) 1 długość fali.

#### ZADANIA

1. a)  $5,09 \cdot 10^{14}$  Hz; b) 388 nm; c)  $1,97 \cdot 10^8$  m/s. 3. 1,56. 5. 22°, załamanie zmniejsza kąt  $\theta$ . 7. a) 3,6  $\mu$ m; b) przypadek pośredni, bliższy w pełni konstruktywnej interferencji. 9. a) 0,833; b) przypadek pośredni, bliższy w pełni konstruktywnej interferencji. 11. a) 0,216 rad; b) 12,4°. 13. 2,25 mm. 15. 648 nm. 17. 16. 19. 0,072 mm. 21. 6,64  $\mu$ m. 23. 2,65. 25.  $y = 27 \sin(\omega t + 8,5^\circ)$ . 27. a) 1,17 m, 3 m, 7,50 m; b) nie. 29.  $I = (1/9)I_m[1 + 8 \cos^2(\pi d \sin \theta / \lambda)]$ ,  $I_m$  = natężenie centralnego maksimum. 31. w pełni konstruktywnej. 33. 0,117  $\mu$ m, 0,352  $\mu$ m. 35. 70 nm. 37. 120 nm. 39. a) 552 nm; b) 442 nm. 43. 140. 45. 1,89  $\mu$ m. 47. 2,4  $\mu$ m. 49.  $[(m + 1/2)\lambda R]^{1/2}$ , dla  $m = 0, 1, 2, \dots$ . 51. 1 m. 53.  $\lambda = (D/2a)(m + \frac{1}{2}\lambda)$  dla  $m = 0, 1, 2, \dots$

55. 588 nm. 57. 1,00030. 59. a) 0; b) w pełni konstruktywna; c) wzrasta.

d)

Różnica faz	Położenie $x$ [ $\mu\text{m}$ ]	Rodzaj
0	$\approx \infty$	K
$0,50\lambda$	7,88	D
$1,00\lambda$	3,75	K
$1,50\lambda$	2,29	D
$2,00\lambda$	1,50	K
$2,50\lambda$	0,975	D

## Rozdział 37

### SPRAWDZIANY

1. a) będzie się rozszerzał; b) będzie się rozszerzał. 2. a) drugie maksimum boczne; b) 2,5. 3. a) czerwona; b) fioletowa. 4. pogorszy się. 5. a) wzrosną; b) nie ulegną zmianie. 6. a) po lewej; b) mniejsza.

### PYTANIA

1. a) ulegnie zawężeniu; b) ulegnie zawężeniu. 3. z megafonem (większy otwór wyjściowy, mniejsza dyfrakcja). 5. a) z czterech. 7. a) mniejsza; b) większa; c) większy. 9. a) zmaleje; b) zmaleje; c) w prawo. 11. a) będzie wzrastać; b) w pierwszym rzędzie widma.

### ZADANIA

1.  $60,4 \mu\text{m}$ . 3. a)  $\lambda_a = 2\lambda_b$ ; b) te, dla których  $m_b = 2m_a$ . 5. a) 70 cm; b) 1 mm. 7. 1,77 mm. 11. d)  $53^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $5,1^\circ$ . 13. b) 0, 4,493 rad itd.; c)  $-0,5$ ,  $0,93$  itd. 15. a)  $1,3 \cdot 10^{-4}$  rad; b) 10 km. 17. 50 m. 19. a)  $1,1 \cdot 10^4$  km; b) 11 km. 21. 27 cm. 23. a)  $0,347^\circ$ ; b)  $0,97^\circ$ . 25. a)  $8,7 \cdot 10^{-7}$  rad; b)  $8,4 \cdot 10^7$  km; c) 0,025 mm. 27. pięć. 29. a) 4; b) każdy czwarty jasny prążek. 31. a) dziewięć; b) 0,255. 33. a)  $3,33 \mu\text{m}$ ; b) 0,  $\pm 10,2^\circ$ ,  $\pm 32,0^\circ$ ,  $\pm 45,0^\circ$ ,  $\pm 62,2^\circ$ .

35. trzy. 37. a)  $6 \mu\text{m}$ ; b)  $1,5 \mu\text{m}$ ; c)  $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$ . 39. 1100. 47. 3650. 53. 0,26 nm. 55. 39,8 pm. 59. a)  $a_0/\sqrt{2}$ ,  $a_0/\sqrt{5}$ ,  $a_0/\sqrt{10}$ ,  $a_0/\sqrt{13}$ ,  $a_0/\sqrt{17}$ . 61.  $30,6^\circ$ ,  $15,3^\circ$  (zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara);  $3,08^\circ$ ,  $37,8^\circ$  (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara). 63. a) 50 m; b) nie, szerokość 10 m jest za wąska, by mogła zostać rozróżniona; c) w ciągu dnia nie, ale tony nocnych światel to niezbita dowody istnienia inteligentnego życia.

## Rozdział 38

### SPRAWDZIANY

1. a) taki sam (postulat stałej prędkości światła); b) nie (punkt początkowy i końcowy mają różne położenia w przestrzeni); c) nie (wynik podróznego nie jest czasem własnym); 2. a) wynik Agaty; b) wynik Agaty; 3. a) dodatni; b) ujemny; c) dodatni; 4. a) w prawo; b) większa niż  $c/4$ ; 5. a) taka sama; b) mniejsza

### PYTANIA

1. wszystkie równe (prędkość impulsu światła zawsze równa  $c$ ) 3. a)  $Z_1$ ; b)  $Z_1$ ; 5. a) ujemną; b) dodatnią 7. mniejsza niż 0,7c 9. b, a, c; d

### ZADANIA

1. a)  $6,7 \cdot 10^{-10}$  s; b)  $2,2 \cdot 10^{-18}$  m 3. 0,99c 5. 0,445 ps 7. 1,32 m 9. 0,63 m 11. a) 87,4 m; b) 394 ns; 13. a) 26 a; b) 52 a; c) 3,7 a 15.  $x' = 138$  km,  $t' = -374 \mu\text{s}$ ; 17. a) 25,8  $\mu\text{s}$ ; b) słaby błysk; 19. a) 125; b) 0,8  $\mu\text{s}$ ; 21. 0,81c; 23. a) 0,35c; b) 0,62c; 25. 1,2  $\mu\text{s}$ ; 27. 22,9 MHz; 29.  $1 \cdot 10^6$  m/s, oddała się; 31. żółta (550 nm); 33. a) 0,0625, 1,00196; b) 0,941, 2,96; c) 0,999 999 87, 1960; 35. 0,999 987c; 37. 18  $M_s/\text{rok}$ ; 39. a) 0,707c; b) 1,41; c)  $0,414mc^2$ ; 41.  $\sqrt{8}mc$ ; 43.  $1,01 \cdot 10^7$  km, czyli 250 obwodów Ziemi; 45. 110 km; 47. 4 u, prawdopodobnie jądro helu; 49. 330 mT; 51. a) 2,08 MeV; b)  $-1,18$  MeV; 53. a)  $vt \sin \theta$ ; b)  $t[1 - (v/c) \cos \theta]$ ; c)  $3,24c$ .

# SKOROWIDZ

## A

absorpcja całkowita 14, 15, 31  
amplituda 30, 87  
—, wektor 88  
analizator 19  
antena 4

## B

Bertozzi W. 148  
Bragg W.L. 136  
Brewster D. 30

## C

całkowite odbicie wewnętrzne 27–28, 31  
— — wsteczne 14, 15, 31  
ciśnienie promieniowania 13–15, 30  
czas własny 154  
częstość kołowa 5, 87  
— własna 166  
czoło fali 5

## D

detektor 166, 167  
długość spoczynkowa 158, 179  
— własna 158, 179  
doświadczenie Younga 81–85, 100  
druga zasada dynamiki Newtona 14  
dyfrakcja 80, 111–137  
— na dwóch szczelinach 123–126, 137  
— — otworze kołowym 120–123, 137  
— — pojedynczej szczelinie 112–115, 137  
— — wielu szczelinach 137  
— promieniowania rentgenowskiego 134–136, 137  
dylatacja czasu 154, 155–156, 159, 163, 178  
dyspersja 131–133  
— kąтова 131, 132

## E

Einstein A. 7, 146, 147  
energia 13, 172–178, 179  
— całkowita 173–175  
— kinetyczna 176–178  
— spoczynkowa 172–173

## F

fala biegnąca 9  
— Huygensa 112  
— padająca 76  
— płaska 4  
— poprzeczna 4  
— świetlna 7  
— załamana 76  
fale elektromagnetyczne 1–39  
— —, rozchodzenie 3–10  
— —, opis ilościowy 7–10  
— —, — jakościowy 3–7  
— —, prędkość 30  
— —, składowa elektryczna 5, 8  
— —, — magnetyczna 5, 9  
— —, widmo 2, 3  
— radiowe 2, 3  
falowa teoria światła 76, 111–112  
fatamorgana 41  
faza 5  
fazory 88  
foton  $\gamma$  148  
Fresnel A. 112

## G

Galileusz 148

## H

Hafele J. 156  
Hertz H. 2  
Huygens C. 75, 111

## I

interferencja 75–108  
— w cienkich warstwach 91–98, 100  
interferometr Michelsona 98–100, 101

## J

jasna plamka Fresnela 111–112  
jednoczesność 151–152, 163

## K

kąt Bragga 136  
— Brewstera 30, 31  
— graniczny 27, 31  
— odbicia 22, 31  
— padania 22  
— widzenia 61  
— załamania 22, 31  
Keating R. 156  
kierunek polaryzacji 19, 31  
kolimator 129  
kryterium Rayleigha 122, 137

## L

laser 87  
liczba falowa 5  
linie emisyjne 130  
Lorentz H.A. 161  
luneta astronomiczna 62–64, 68  
lupa 60–62, 68

## M

maksima interferencyjne 81, 84, 88, 94, 100, 127, 137  
Maxwell J.C. 2  
Michelson A.A. 98  
mikroskop 62, 68

mikroskop elektronowy 122  
minima interferencyjne 81, 84, 88, 94,  
100, 112–115, 118, 121, 128, 137  
mion 155  
miraż 41–42

## N

natężenie 12  
— fali 11  
— promieniowania elektromagnetycz-  
nego 13  
— światła 18–20, 101

## O

obiektyw 62  
obraz 40–74  
— dyfrakcyjny 111  
— interferencyjny 81  
— odwrócony 47  
— pozorny 41, 47, 52, 56, 67  
— prosty 46  
— punktowy 43  
— rzeczywisty 41, 47, 52, 56, 67  
obwód drgający LC 3  
odbicie 21–26, 31  
— całkowite wewnętrzne 27–28, 31  
— — wsteczne 14, 15, 31  
—, zmiana fazy 93  
odległość dobrego widzenia 60  
— obrazu 43  
— przedmiotu 43  
ognisko 46  
— pozorne 46  
— rzeczywiste 46  
ogniskowa 46  
ogniskowanie 47  
okres własny 170  
okular 62  
optyka geometryczna 31  
ośrodek materialny 7  
— przezroczysty 21

## P

Paskal 15  
pęd 13, 15, 171–172, 176–177, 179  
pętla przewodząca 8  
pierwsza zasada dynamiki Newtona 147  
pion 148  
płaszczyzna drgań 16, 17  
— padania 22  
płytką półprzewodząca 98  
— światłodzielną 98  
Poisson D. 112  
polaryzacja 16–20, 31

—, kierunek 19, 31  
— liniowa 16  
— pionowa 16  
— pozioma 16  
— przy odbiciu 29–30, 31  
polaryzator 18–20, 31  
pole elektryczne 7, 30  
— —, gęstość energii 12  
— — indukowane 7–9  
— magnetyczne 6, 7, 30  
— —, gęstość energii 12  
— — indukowane 9–10  
— widzenia 45, 63  
położenie obrazu 49–50  
— — przedmiotów rozciągniętych 57–58  
postulaty 147–148, 178  
— stałej prędkości światła 147  
— względności 147  
powiększenie liniowe 48, 50, 68  
Poynting J.H. 11  
prawo Bragga 136  
— Brewstera 29–30  
— Faradaya 6, 7, 8  
— Maxwella 6, 9  
— odbicia 22  
— Snella 22, 77, 78  
— załamania 22, 76–77  
prążki interferencyjne 81–85  
prędkość fali 5, 9–10  
— graniczna 148  
— światła 7, 14  
promienie przyosiowe 46  
promieniowanie nadfioletowe 2  
— podczerwone 2  
— rentgenowskie 3  
— —, dyfrakcja 134–136, 137  
—  $\gamma$  3, 148  
promień krzywizny 45, 46, 52  
— odbity 22, 31  
— padający 22, 49  
— przechodzący 49, 57  
— równoległy 49, 57  
— załamany 22, 31  
przedmioty rozciągnięte 43–44  
przepływ energii 11–13, 30  
— —, chwilowa szybkość 11  
przesunięcie dopplerowskie 167  
przyrządy optyczne 60–64, 68

## R

reakcja syntezy 175  
refraktor astronomiczny 63  
reguła kwadratu cosinusa 19  
— Lenza 8

— połowy 18  
rozdzielczość 121–123  
rozszczerzenie światła 23–26  
równania transformacji Lorentza 162,  
163–165  
równanie cienkich soczewek 65–67  
— zwierciadła sferycznego 64–65  
różnica dróg 89  
— faz 89, 93  
rzędy obrazu 127

## S

sferyczne powierzchnie załamujące 51–  
52, 67  
siatka dyfrakcyjna 127–130, 137  
— —, dyspersja 131–133  
— —, zastosowanie 129–130  
— —, zdolność rozdzielcza 131–133  
skrócenie długości 158, 159, 163–164,  
179  
soczewka 53, 54  
— cienka 53–58, 67  
— —, obrazy 55–56  
— —, równanie 65–67  
— rozpraszająca 53  
— skupiająca 53  
spektroskop siatkowy 129  
spójność 86, 100  
stała fazowa 87  
— siatki 127  
strumień elektryczny 9  
— magnetyczny 7, 8  
system nawigacyjny NAVSTAR 169–171  
szerokość linii 128–130  
— połówkowa 137  
szkło powiększające 60–62, 68

## Ś

środek krzywizny 45  
światło 75–80  
— białe 24  
—, falowa teoria 75, 111–112  
— monochromatyczne 27  
— niespolaryzowane 17  
— niespójne 87  
—, rozszerzenie 23–26  
— spolaryzowane 17–18  
— — częściowo 17  
— spójne 86  
—, teoria Newtona 111  
— widzialne 2, 3  
—, współczynnik załamania 22, 23, 76,  
78–80, 101  
światłowody 28

## T

teleskop 62–64, 68  
teoria elektromagnetyczna Maxwella 76  
— światła Newtona 111  
— względności 7, 146–186  
— —, ogólna 146, 156  
— —, szczególna 146  
tęcza Maxwella 2–3  
transformacja Galileusza 161  
— Lorentza 160–162, 179  
— —, równania 162, 163–165  
tubus 62

## U

układ odniesienia inercjalny 146  
— spoczynkowy 155  
układy soczewek 58

## V

von Laue M. 134

## W

warunek Bragga 136, 137  
wektor amplitudy 88  
— —, długość 11  
wiązka padająca 14

widmo promieniowania elektromagnetycznego 2, 30  
wrażenie barwne 3  
wskazy 88  
współczynnik Lorentza 154, 155, 158, 174, 175, 179  
— załamania światła 22, 23, 75, 77–80, 100  
współrzędna czasowa 149–150, 161  
współrzędne czasoprzestrzenne 149, 150  
— przestrzenne 149, 161  
wytwarzanie obrazu 67  
względność czasu 152–158  
— długości 158–160  
— jednoczesności 150–152  
— prędkości 166, 179  
wzór sferycznych powierzchni załamujących 65  
— szlifierzy soczewek 54, 65–67

## Y

Young T. 81, 111

## Z

zakres widzialny 3  
załamanie 21–26, 31  
zasada Huygensa 75, 76, 100

zasady dynamiki Newtona 146  
zdarzenia jednoczesne 178  
zdarzenie 148–150, 178  
zdolność rozdzielcza 63, 131–133  
— zbierania światła 63  
zegary makroskopowe 156  
— mikroskopowe 155  
zjawisko Dopplera 151, 179  
— — dla małych prędkości względnych 167  
— — dla światła 166–171  
— — poprzeczne 168–169, 179  
— — w astronomii 167–168  
zmiana fazy przy odbiciu 92  
zwierciadło 42  
— płaskie 42–44, 45  
— sferyczne 44–46, 47, 67  
— —, obrazy 46–50  
— —, ogniska 45–46  
— —, równanie 64–65  
— — wklęsłe 45  
— — wypukłe 45

## Ź

źródło 166, 168  
—, moc 12  
— punktowe 12, 30

Do nabycia w księgarniach

---

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands  
**Feynmana wykłady z fizyki, t. 1-3**

P.G. Hewitt  
**Fizyka wokół nas**

B.M. Jaworski, A.A. Dietłaf  
**Fizyka**  
**Poradnik encyklopedyczny**

I.W. Sawieliew  
**Wykłady z fizyki, t. 1-3**

H. Szydłowski  
**Pracownia fizyczna wspomagana komputerem**

Książki PWN są do nabycia w księgarniach firmowych PWN:

**Warszawa**, ul. Miodowa 10, tel. (22) 635 80 88;

**Gdańsk**, ul. Korzenna 33/35, tel. (58) 305 24 50;

**Kraków**, ul. Piłsudskiego 3/1, tel. (12) 421 75 64;

**Łódź**, ul. Więckowskiego 13, tel. (42) 630 67 69;

**Poznań**, ul. Wodna 8/9, tel. (61) 851 74 94;

**Wrocław**, ul. Kuźnicza 56, tel. (71) 343 54 52

oraz w księgarni agencyjnej PWN

**Katowice**, al. Korfantego 51, tel. (32) 258 32 26.

Zamówienia telefoniczne i pisemne przyjmuje:

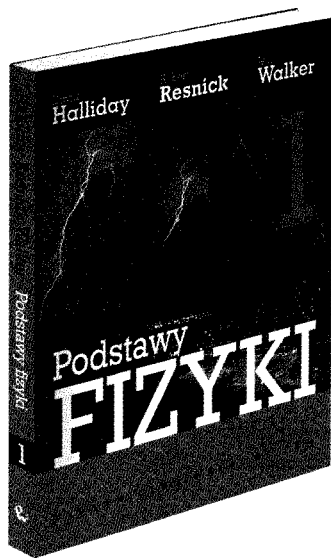
**Księgarnia Wysyłkowa**, ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa,

infolinia 0 801 351 929, fax 69 54 179

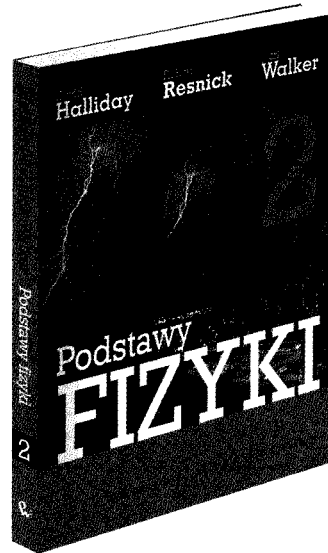
zapraszamy do księgarni PWN w Internecie [www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

David Halliday • Robert Resnick • Jearl Walker

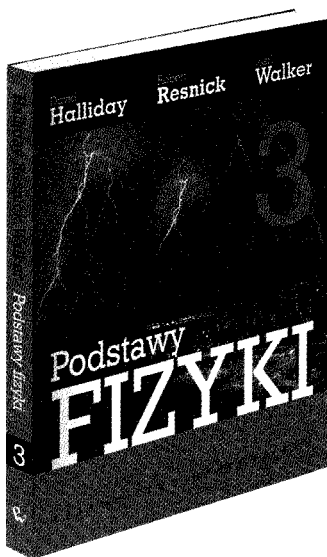
# PODSTAWY FIZYKI t. 1-5



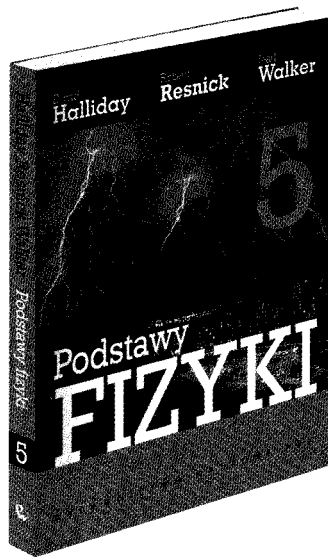
Tom 1  
**MECHANIKA**



Tom 2  
**MECHANIKA cd.  
TERMODYNAMIKA**



Tom 3  
**ELEKTRYCZNOŚĆ  
I MAGNETYZM**



Tom 5  
**FIZYKA  
WSPÓŁCZESNA**



## Wybrane stałe fizyczne\*

prędkość światła	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)
energetyczny równoważnik masy	$c^2$	$8,99 \cdot 10^{16}$ J/kg 931,5 MeV/u
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s $4,14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K $8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
masa elektronu	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa protonu	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
masa neutronu	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa deuteronu	$m_d$	$3,34 \cdot 10^{-27}$ kg
promień Bohra	$r_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T $5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
stała Rydberga	$R$	$0,01097$ nm <sup>-1</sup>

\* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

## Wybrane współczynniki zamiany jednostek\*

### Masa i gęstość

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

### Długość i objętość

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mila} = 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm}$$

$$1 \text{ rok świetlny (y)} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3$$

$$= 264 \text{ galony amerykańskie}$$

### Czas

$$1 \text{ d} = 86400 \text{ s}$$

$$1 \text{ a} = 365\frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

### Miara łukowa kąta

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ obrotu}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ obrotu}$$

### Prędkość

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mili/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mili/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

### Siła i ciśnienie

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0,225 \text{ funta}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dyn/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}$$

### Energia i moc

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergów} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ KM} = 746 \text{ W}$$

### Magnetyzm

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$$

\* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

David **Halliday**  
Robert **Resnick**  
Jearl **Walker**

**4**

# Podstawy fizyki

**RESNICK ■ HALLIDAY** reaktywacja

- kompletny, nowoczesny podręcznik fizyki nareszcie po polsku !
- aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum
- teoria poparta licznymi przykładami
- pytania i zadania sprawdzające po każdym rozdziale
- przejrzysty układ tekstu
- wspaniała szata graficzna
- kolorowe, sugestywne ilustracje wzbogacające i uzupełniające wykład
- nowość: najważniejsze zagadnienia fizyki współczesnej !

**Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów**

**Nieoceniona pomoc dla nauczycieli**

## **Tom 4**

zawiera zagadnienia z następujących dziedzin:

- fale elektromagnetyczne
- optyka
- teoria względności

t.4



t.1-5



Księgarnia internetowa **www.pwn.pl**