



WYDAWNICTWO  
NAUKOWE  
PWN  
WARSZAWA  
1998

# Wektory pochodne całki

Wiesława Korczak  
Marianna Trajdos

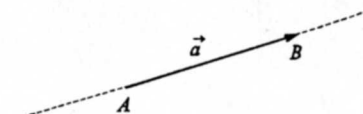
Wydanie drugie

## Rozdział 1

# Działania na wektorach

### 1.1. Skalary i wektory

Wielkości całkowicie określone przez jedną liczbę nazywamy **skalarami**, są nimi na przykład: masa, gęstość, temperatura, potencjał, energia. Inne wielkości wymagają do pełnego określenia podania wartości, kierunku i zwrotu. Nazywamy je **wektorami** i oznaczamy pogrubionymi literami lub literą ze strzałką, np.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}$  albo  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$ . Obrazem geometrycznym wektora jest odcinek skierowany o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  (zob. rys. 1). Długość odcinka  $AB$  jest proporcjonalna do wartości reprezentowanej wielkości fizycznej. Długość (moduł) wektora  $\vec{a}$  oznaczamy  $|\vec{a}|$  lub krócej  $a$ . Oto przykłady wektorów:



Rys. 1

$\vec{r}$  – położenie (przesunięcie),  $\vec{v}$  – prędkość,  $\vec{a}$  – przyspieszenie,  $\vec{F}$  – siła,  $\vec{p}$  – pęd,  $\vec{E}$  – natężenie pola elektrycznego,  $\vec{B}$  – indukcja magnetyczna. Dwa wektory  $\vec{a}$  oraz  $\vec{b}$  są równe, jeżeli mają równe długości, taki sam kierunek i zgodne zwroty (zob. rys. 2a). Wektory różniące się tylko zwrotem (zob. rys. 2b) nazywamy wektorami przeciwnymi i zapisujemy  $\vec{a} = -\vec{b}$ .



Rys. 2a



Rys. 2b

W fizyce ważny jest punkt przyłożenia wektora. Siła działająca na bryłę sztywną może spowodować jej ruch postępowy lub obrotowy.

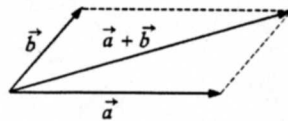
## 1.2. Dodawanie i odejmowanie wektorów

Sumę wektorów można znaleźć *metodą równoległoboku*. Z jednego punktu wykreślamy wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , jak na rysunku 3a. W równoległoboku zbudowanym na tych wektorach poszukiwaną sumą jest przekątna wychodząca ze wspólnego punktu

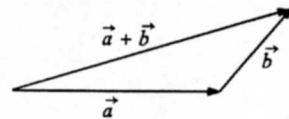
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (1.1)$$

Z rysunku widać, że dodawanie wektorów jest przemienne

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (1.2)$$



Rys. 3a



Rys. 3b

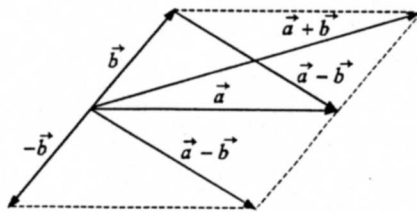
Wektory można też dodawać *metodą wieloboku* (zob. rys. 3b). Z dowolnego punktu wykreślamy wektor  $\vec{a}$ , z końca wektora  $\vec{a}$  – wektor  $\vec{b}$ . Wektor  $\vec{c}$ , którego początek pokrywa się z początkiem wektora  $\vec{a}$ , koniec zaś – z końcem wektora  $\vec{b}$ , nazywamy sumą wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Podobnie tworzymy sumę  $n$  wektorów. Z końca pierwszego wektora wykreślamy drugi wektor, z końca drugiego wektora – wektor trzeci itd. Wektor wypadkowy, łączący początek pierwszego wektora z końcem ostatniego, nazywamy sumą danych  $n$  wektorów. Jeżeli koniec ostatniego wektora pokrywa się z początkiem pierwszego,

to ten wektor wypadkowy nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy symbolem  $\vec{0}$ . Dla każdego wektora  $\vec{a}$  jest spełniona zależność

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \quad (1.3)$$

Odejmowanie wektora  $\vec{b}$  od wektora  $\vec{a}$  definiujemy jako dodawanie wektora przeciwnego  $-\vec{b}$  do wektora  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \quad (1.4)$$

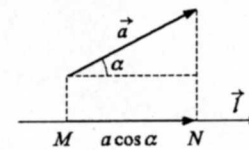


Rys. 4

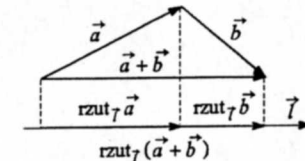
Na rysunku 4 widzimy, że różnicę dwu wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  można przedstawić, podobnie jak sumę wektorów, jako przekątną równoległoboku zbudowanego z tych wektorów; wektor różnicy ma swój początek w końcu wektora, który odejmujemy, a koniec – w końcu wektora, od którego odejmujemy.

## 1.3. Rzut wektora na oś $\vec{l}$ . Składowe wektora

Niech wektor  $\vec{a}$  tworzy z osią  $\vec{l}$  kąt  $\alpha$ , jak na rysunku 5. Prostopadłe do osi, wykreślone z początku i końca wektora  $\vec{a}$ , przetną ją w punktach  $M$  i  $N$ .



Rys. 5



Rys. 6

Wektor  $\vec{MN}$  nazywamy rzutem prostokątnym wektora  $\vec{a}$  na daną oś  $\vec{l}$  i oznaczamy go

$$\text{rzut}_{\vec{l}} \vec{a} = \vec{MN} = a \cos \alpha \cdot \vec{u}, \quad (1.5)$$

gdzie  $a$  oznacza długość wektora  $\vec{a}$ , zaś  $\vec{u}$  – wektor jednostkowy wzdłuż osi  $\vec{l}$ . Wyrażenie  $a \cos \alpha$  nazywamy miarą rzutu wektora  $\vec{a}$ , ma ono wartość dodatnią dla  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , zero dla  $\alpha = \pi/2$  i wartość ujemną dla  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ . Zauważmy, że rzut sumy wektorów jest równy sumie rzutów (zob. rys. 6)

$$\text{rzut}_{\vec{l}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{rzut}_{\vec{l}} \vec{a} + \text{rzut}_{\vec{l}} \vec{b}. \quad (1.6)$$

Weźmy dwie proste prostopadłe przecinające się w punkcie  $O$  i wektory  $\vec{i}$  oraz  $\vec{j}$  o długości jednostkowej, leżące na osiach  $Ox$  i  $Oy$ , jak na rysunku 7. Niech na płaszczyźnie  $Oxy$  wektor  $\vec{a}$  ma początek w punkcie  $O$  i tworzy kąt  $\alpha$  z osią  $Ox$  i kąt  $\beta$  z osią  $Oy$ . Kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi* wektora  $\vec{a}$ , a ich cosinusy – *cosinusami kierunkowymi*. Miary rzutów wektora  $\vec{a}$  na osie  $Ox$  i  $Oy$  nazywamy *składowymi* wektora  $\vec{a}$  wzdłuż tych osi i oznaczamy  $a_x$  i  $a_y$ , czyli

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta = a \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Zauważmy (zob. rys. 7), że

1) wektor  $\vec{a}$  ma długość

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

2) cosinusy kierunkowe są równe

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a};$$

3) wektor  $\vec{a}$  jest sumą rzutów  $a_x \vec{i}$  oraz  $a_y \vec{j}$ , czyli

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad \text{lub} \quad \vec{a} = [a_x, a_y].$$

Wektor  $\vec{a}$  leżący na płaszczyźnie określimy podając jego długość  $a$  i na przykład jeden cosinus kierunkowy lub jego składowe  $a_x$ ,  $a_y$ .

W przestrzeni trójwymiarowej wprowadzamy prawoskrętny prostokątny układ współrzędnych  $Oxyz$ . Na osiach tego układu umieszczamy wektory jednostkowe (wersory)  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  (zob. rys. 8). Wówczas wektor można zapisać w postaci

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = [a_x, a_y, a_z]. \quad (1.8)$$

Wektor  $\vec{a}$  ma długość

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (1.9)$$

tworzy on z osiami  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  odpowiednio kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a cosinusy kierunkowe są równe

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}. \quad (1.10)$$

Zauważmy, że

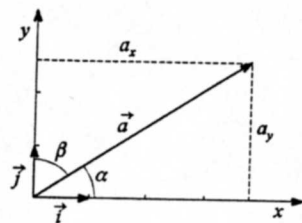
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Dwa wektory są równe tylko wtedy, gdy ich odpowiednie składowe są równe:

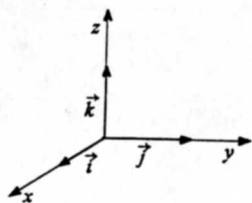
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z. \quad (1.11)$$

Jeśli każdą składową pomnożymy przez stałą  $C$ , to ze wzoru (1.9) otrzymamy wektor o długości  $Ca$ , tzn.

$$C\vec{a} = [Ca_x, Ca_y, Ca_z]. \quad (1.12)$$



Rys. 7



Rys. 8

Składowe sumy (różnicy) wektorów są równe sumie (różnicy) składowych. Dla dwu wektorów mamy

$$\vec{a} \pm \vec{b} = [a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z]. \quad (1.13)$$

### Przykłady

1. Wektor  $\vec{a} = [3, 4, 5]$  ma początek w punkcie  $M(-2, 2, 5)$ . Znaleźć współrzędną jego końca.

*Rozwiązanie.* Oznaczmy koniec wektora przez  $N$ . Wiadomo, że składowe wektora obliczamy odejmując od współrzędnej końca wektora współrzędną jego początku:  $a_x = x_N - x_M$ , podobnie jest dla współrzędnych  $y$  i  $z$ . Współrzędne punktu  $N$  wynoszą więc:

$$x_N = 3 + (-2) = 1, \quad y_N = 4 + 2 = 6, \quad z_N = 5 + 5 = 10.$$

2. Znaleźć długość i cosinusy kierunkowe wektora  $\vec{a}$  o składowych  $a_x = 2$ ,  $a_y = -3$ ,  $a_z = 6$ .

*Rozwiązanie.* Otrzymujemy

$$a = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7;$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}.$$

### 1.4. Iloczyn skalarny wektorów

Iloczynem skalarnym wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazywamy iloczyn długości tych wektorów i cosinusa mniejszego kąta  $\varphi$  zawartego między nimi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (1.14)$$

Kropka jest często używanym znakiem skalarnego mnożenia wektorów. Iloczyn skalarny wektorów jest liczbą.

Mnożenie skalarne jest przemienne, tzn.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (1.15)$$

oraz rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (1.16)$$

Z definicji iloczynu skalarnego (1.14) wynika, że

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad (1.17)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (1.18)$$

Wobec tego iloczyn skalarny wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , gdzie

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

można również zapisać za pomocą składowych

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Zauważmy, że  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , jeżeli wektory są prostopadłe ( $\varphi = \pi/2$ ), a więc warunek prostopadłości dwóch wektorów ma postać

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (1.20)$$

Jeżeli obydwa wektory iloczynu są jednakowe, to za pomocą iloczynu skalarnego

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

można obliczyć moduł wektora  $|\vec{a}|$ , czyli jego długość

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.21)$$

Ze wzoru (1.14) otrzymujemy

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.22)$$

Jak widać, jeśli znamy składowe wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , możemy obliczyć cosinus kąta między wektorami.

### Przykłady

1. Dwa wektory wychodzące z początku układu współrzędnych mają końce odpowiednio w punktach  $A(3, 0, 4)$  i  $B(2, 2, 1)$ . Znaleźć cosinus kąta  $\alpha$  zawartego między nimi.

*Rozwiązanie.* Ponieważ  $\vec{OA} = [3, 0, 4]$  i  $\vec{OB} = [2, 2, 1]$ , to  $OA = 5$  oraz  $OB = 3$ . Zgodnie ze wzorem (1.22) mamy

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

2. Wyznaczyć kąt między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , wiedząc, że

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

*Rozwiązanie.* Podnosimy obie strony do kwadratu i otrzymujemy

$$a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2,$$

skąd mamy  $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , co oznacza, że kąt między wektorami jest równy  $\pi/2$ .

3. Jaką własność mają wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , jeżeli dla dowolnych wartości  $\alpha$  i  $\beta$  wektory  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$  i  $\beta\vec{a} - \alpha\vec{b}$  są prostopadłe względem siebie?

*Rozwiązanie.* Wektory są prostopadłe względem siebie, jeżeli

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot (\beta\vec{a} - \alpha\vec{b}) = 0.$$

Po wymnożeniu otrzymujemy

$$\alpha\beta(\vec{a}^2 - \vec{b}^2) + (\beta^2 - \alpha^2)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Równość ta ma być spełniona dla dowolnych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ , a to jest możliwe, jeżeli

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Pierwsza równość oznacza, że wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mają równe długości, druga zaś, że są prostopadłe względem siebie.

4. Dane są trzy wektory:  $\vec{a} = [3, y, z]$ ,  $\vec{b} = [1, 3, 2]$ ,  $\vec{c} = [2, -4, -1]$ .

a) Wyznaczyć wartości  $y$  i  $z$ , dla których wektor  $\vec{a}$  jest prostopadły do wektorów  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ .

b) Jaki kąt tworzą ze sobą wektory  $\vec{a} - \vec{b}$  i  $\vec{a} + \vec{b}$ ?

Rozwiązanie.

a) Z warunku prostopadłości wynika, że

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0,$$

zatem

$$3 + 3y + 2z = 0,$$

$$6 - 4y - z = 0.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy

$$y = 3, \quad z = -6.$$

b) Zgodnie ze wzorem (1.13)

$$\vec{a} - \vec{b} = [2, 0, -8], \quad \vec{a} + \vec{b} = [4, 6, -4],$$

a cosinus kąta między wektorami wynosi

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{8 + 32}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{68}} = \frac{10}{17}.$$

5. Znaleźć rzut siły  $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  na kierunek wektora  $\vec{P} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

Rozwiązanie. Rzut wektora  $\vec{F}$  na kierunek opisany wektorem  $\vec{P}$  jest równy

$$\text{rzut}_{\vec{P}} \vec{F} = (\vec{F} \cdot \vec{u}) \vec{u},$$

gdzie  $\vec{u}$  oznacza wektor jednostkowy w kierunku wektora  $\vec{P}$ , czyli

$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{P}.$$

Skoro długość wektora  $\vec{P}$  wynosi  $P = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ , to

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Iloczyn skalarny ma wartość

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{2}{3}\vec{i} \cdot \vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} \cdot \vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k} \cdot \vec{k} = -\frac{4}{3},$$

a rzut wektora  $\vec{F}$  na kierunek  $\vec{P}$  jest równy

$$\text{rzut}_{\vec{P}} \vec{F} = -\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{8}{9}\vec{k}.$$

## 1.5. Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazywamy taki wektor  $\vec{c}$ , który jest prostopadły do wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , tworzy z nimi układ prawoskrętny i ma długość

$$c = ab \sin \varphi,$$

gdzie  $\varphi$  oznacza kąt mniejszy z dwóch kątów zawartych między tymi wektorami. Mnożenie wektorowe często oznaczamy wstawiając  $\times$  między mnożone wektory. Jeśli  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , to

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi. \quad (1.23)$$

Mnożenie wektorowe **nie** jest przemienne, gdyż

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (1.24)$$

ale jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (1.25)$$

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że iloczyny wektorowe wektorów jednostkowych  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  mają następujące własności:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= 0, \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Korzystając z własności (1.26), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

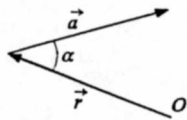


Do zapisu iloczynu wektorowego wykorzystane zostały wyznaczniki drugiego stopnia, które liczymy następująco:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Iloczyn wektorowy  $\vec{a} \times \vec{b}$  można zapisać krócej za pomocą wyznacznika stopnia trzeciego

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$



Rys. 9

W fizyce często występuje moment pędu oraz moment siły. Momentem wektora  $\vec{a}$  względem punktu  $O$  (zob. rys. 9) nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego  $\vec{r}$  i wektora  $\vec{a}$ , co zapisujemy

$$\text{mom}_O \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}. \quad (1.28)$$

Wobec tego

$$|\text{mom}_O \vec{a}| = r a \sin \angle(\vec{r}, \vec{a}) = r a \sin \alpha.$$

W ostatnim zapisie wykorzystano równości kątów  $\angle(\vec{r}, \vec{a}) = \pi - \alpha$  oraz sinusów  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ .

### Przykłady

1. Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów  $\vec{a} = [2, -1, 1]$ ,  $\vec{b} = [1, 0, 1]$  dwoma sposobami: a) korzystając z własności iloczynu wektorowego wektorów jednostkowych  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  (1.26) oraz b) za pomocą wyznacznika (1.27).

Rozwiązanie.

a)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{k}) \\ &= 2\vec{i} \times \vec{i} + 2\vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

b)

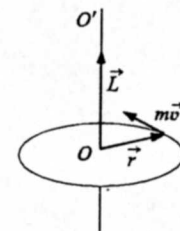
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 0)\vec{i} + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\vec{j} + \\ &\quad + (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1)\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

2. Punkt o masie  $m$  porusza się z prędkością  $\vec{v}$  po okręgu o promieniu  $r$ . Znaleźć moment pędu i moment siły względem środka okręgu.

Rozwiązanie. Ponieważ prędkość jest styczna do toru ruchu, zatem moment pędu punktu względem środka okręgu

$$\text{mom}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \equiv \vec{L}$$

leży na osi  $OO'$  (zob. rys. 10), a jego wartość otrzymujemy prosto ze wzoru  $L = rmv$ . Siła dośrodkowa  $\vec{F}$  działająca na ten punkt tworzy z promieniem wodzącym punktu kąt  $\alpha = \pi$ , a więc moment siły  $\vec{r} \times \vec{F}$  jest równy 0.



Rys. 10

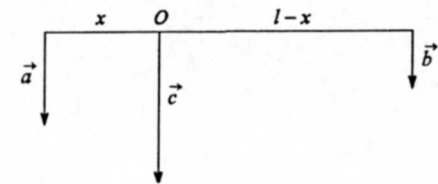
3. Znaleźć sumę dwóch wektorów równoległych  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , odległych od siebie o  $l$ .

Rozwiązanie. Wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mają zgodne zwroty, a więc długość wektora  $\vec{c}$  jest równa sumie długości wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , czyli

$$c = a + b.$$

Punkt przyłożenia  $O$  wektora  $\vec{c}$  jest taki, że

$$\text{mom}_O \vec{a} + \text{mom}_O \vec{b} = 0.$$



Rys. 11

Wobec tego  $ax = b(l-x)$ , czyli  $x = bl/(a+b)$ . Punkt przyłożenia wektora  $\vec{c}$  znajduje się w odległości  $bl/(a+b)$  od wektora  $\vec{a}$ . Rysunek 11 przedstawia sumę dwóch wektorów równoległych  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  odległych od siebie o  $l$  i jednocześnie rozłożenie wektora  $\vec{c}$  na dwa wektory równoległe  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  odległe od siebie o  $l$ .

4. Na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  leży pudełko o ciężarze  $\vec{Q}$ . Rozłóż  $\vec{Q}$  na siłę prostopadłą  $\vec{N}$  i siłę równoległą  $\vec{F}$  do powierzchni równi.

*Rozwiązanie.* Z końca wektora  $\vec{Q}$  prowadzimy równoległe do żądanych kierunków. Z rysunku 12 widać, że

$$N = Q \cos \alpha, \quad F = Q \sin \alpha.$$

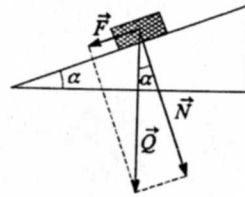
Zapamiętajmy: aby rozłożyć wektor  $\vec{c}$  na dwa zadane kierunki, budujemy równoległobok, rysując z końca wektora  $\vec{c}$  równoległe do tych kierunków, jak na rysunku 13. Rysunek ten możemy zinterpretować na dwa sposoby:

1) w wyniku dodania wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  otrzymujemy wektor  $\vec{c}$ :

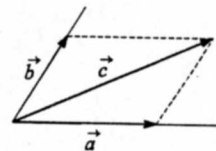
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

2) wektor  $\vec{c}$  został rozłożony na dwa wektory składowe  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , tzn.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$



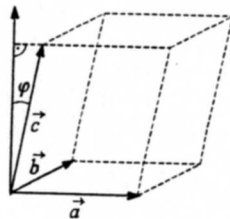
Rys. 12



Rys. 13

## 1.6. Iloczyn mieszany

Rozważmy równoległoscian wyznaczony przez trzy wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  wychodzące z jednego wierzchołka (zob. rys. 14) i tworzące układ prawoskrętny.



Rys. 14

Wektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do podstawy, a jego moduł jest równy polu powierzchni podstawy. Mnożąc pole podstawy przez wysokość  $c \cos \varphi$ , otrzymujemy objętość równoległoscianu

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (1.29)$$

Jeżeli wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tworzą układ lewoskrętny, to objętość jest równa wartości bezwzględnej iloczynu  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Iloczyn (1.29) nazywamy *iloczynem mieszanym*. Każdą ścianę równoległoscianu możemy uważać za podstawę, więc jego objętość można wyrazić trzema sposobami:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

W ostatnim zapisie zostały pominięte nawiasy, ponieważ zawsze najpierw wykonujemy mnożenie wektorowe, a potem skalarne. Iloczyn mieszany można również zapisać za pomocą wyznacznika

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad (1.30)$$

co łatwo sprawdzić, rozpisując lewą i prawą stronę równości.

### Przykład

W kryształach soli kuchennej (NaCl) najmniejszy element powtarzający się w przestrzeni jest wyznaczony przez wektory  $\vec{a} = [l, l, -l]$ ,  $\vec{b} = [-l, l, l]$ ,  $\vec{c} = [l, -l, l]$ , gdzie  $l = 3 \cdot 10^{-10}$  m. Obliczyć objętość tego elementu, zwanego prostą komórką elementarną.

*Rozwiązanie.*

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} l & l & -l \\ -l & l & l \\ l & -l & l \end{vmatrix} = 4l^3 = 1,08 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3.$$

### Zadania

1. Sprawdzić analitycznie i geometrycznie tożsamość

$$\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

2. Z dworca jednocześnie wyjechał autobus i pociąg. Autobus jedzie w kierunku północnym ze średnią prędkością 60 km/h, pociąg w kierunku wschodnim – z prędkością 80 km/h. Z jaką prędkością oddalają się od siebie te pojazdy?

3. Wektor o długości równej 10 jednostek tworzy z osiami  $x$  i  $y$  kąty równe odpowiednio  $\pi/3$  i  $\pi/4$ , a z osią  $z$  tworzy kąt  $\gamma < \pi/2$ . Wyznaczyć składowe tego wektora i kąt, jaki tworzy z osią  $z$ , oraz wektor 5 razy krótszy.
4. Jakie składowe ma wektor  $\vec{a}$ , którego moduł wynosi 6, jeżeli tworzy z osiami  $x$  i  $y$  układu współrzędnych kąty  $\alpha = \beta = \arccos(-\frac{1}{2})$ ? Ile wynosi kąt między wektorem  $\vec{a}$  i osią  $z$ ?
5. Wyznaczyć miarę rzutu wektora  $\vec{a} = [2, 2, 4]$  na wektor  $\vec{b} = [-1, 2, 1]$  oraz składową wektora  $\vec{c} = [4, 0, 3]$  wzdłuż wektora  $\vec{d} = [0, 4, -3]$ .
6. Wykazać, że trójkąt o wierzchołkach  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(1, 1)$  jest prostokątny.
7. Dane są wektory  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  i  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Narysować te wektory, wektor przeciwny  $-\vec{b}$  oraz sumę  $\vec{a} + \vec{b}$ . Obliczyć kąt między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
8. Mamy dwa wektory:  $\vec{a} = [-2, 2, 1]$  i  $\vec{b} = [2, -2, 1]$ . Obliczyć kąt między wektorami oraz ich cosinusy kierunkowe.
9. Jaki warunek muszą spełniać współrzędne punktu  $P(x, y, z)$ , aby wektor łączący początek układu  $O$  z punktem  $A(2, 3, -5)$  był prostopadły do wektora  $\vec{AP}$ .
10. Wyznaczyć wartość  $\lambda$ , dla której wektor  $\vec{a} + \lambda\vec{b}$  jest prostopadły do  $\vec{c}$ , jeżeli  $\vec{a} = [-3, 1, 3]$ ,  $\vec{b} = [1, -3, 4]$ ,  $\vec{c} = [5, 3, -2]$ .
11. Podać współrzędne wierzchołków sześcianu, którego jeden wierzchołek znajduje się w początku układu współrzędnych, a krawędzie o długości 2 jednostek są równoległe do osi układu współrzędnych. Obliczyć kąt, jaki tworzą przekątne sześcianu.
12. Obliczyć  $a$  i  $b$ , wiedząc, że wektor  $[a, b, 1]$  jest prostopadły zarówno do wektora  $[5, 2, 3]$ , jak i do wektora  $[3, 4, 1]$ .
13. Samolot leci w kierunku północno-zachodnim z prędkością  $\vec{v}_1$  względem powietrza. Wiatr wieje ze stałą prędkością  $\vec{v}_2$  w kierunku zachodnim. Podać odległość, którą pokonuje ten samolot nad powierzchnią ziemi w czasie  $t$  oraz ustalić kierunek, w którym porusza się samolot.

14. Żaglówka popłynęła 2 km w kierunku południowym i 3 km w kierunku północno-wschodnim. Jak daleko znajduje się ta łódka od punktu startowego? W którym kierunku musi płynąć, by wrócić do przystani?
15. Obliczyć długość wektora  $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ , wiedząc, że  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$  są wektorami prostopadłymi o długości  $l$ .
16. Wyznaczyć kąt między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , wiedząc, że  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 1$ .
17. Obliczyć wartość sumy  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ , jeżeli wiadomo, że  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , a długość każdego z wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  wynosi 1.
18. Udowodnić, że przekątne rombu są do siebie prostopadłe.
19. W układzie prawoskrętnym  $xyz$  znajdują się dwa wektory: wektor  $\vec{a}$  zgodny z kierunkiem osi  $y$ , równy 10 jednostkom, oraz wektor  $\vec{b}$  o długości równej 10 jednostkom, leżący w płaszczyźnie  $xy$  i tworzący kąt  $\pi/3$  z osią  $x$ . Wyznaczyć iloczyny: skalarny  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  i wektorowy  $\vec{a} \times \vec{b}$ .
20. Na pewne ciało działają w płaszczyźnie poziomej dwie siły o wartości  $F_1 = 4 \text{ N}$  i  $F_2 = 3 \text{ N}$ , tworzące kąt  $2\pi/3$ . Obliczyć wartość i kierunek siły wypadkowej.
21. Sprawdzić, czy wektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do  $\vec{a}$ .
22. Sprawdzić tożsamość  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .
23. Policzyc iloczyn wektorowy wektorów  $\vec{a} = [r \sin \omega t, 0, r \cos \omega t]$  oraz  $\vec{b} = [-r \cos \omega t, 0, r \sin \omega t]$ . Czy iloczyn ten zmienia się w czasie?
24. Dane są punkty  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(2, -1, 2)$ ,  $C(2, 1, 3)$ . Podać moment wektora  $\vec{AB}$  względem punktu  $C$ .
25. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach  $[1, 1, 0]$ ,  $[0, 1, 1]$  i  $[1, 0, 1]$ . Jednostką jest 1 metr.
26. Obliczyć objętość równoległościanu, mając dane współrzędne czterech wierzchołków  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(8, 3, 1)$ ,  $C(1, 2, 0)$ ,  $D(3, 2, 1)$ . Współrzędne zostały podane w centymetrach.
27. Na wózek o masie 500 kg, poruszający się po idealnie gładkich szynach, działa siła 200 N pod kątem  $\pi/3$  do szyn. Wyznaczyć przyspieszenie wózka oraz siłę reakcji podłoża na wózek, jeżeli przyspieszenie ziemskie  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

28. Wrak samochodu o masie 1000 kg wciągany jest za pomocą dźwigu z szybkością 2 m/s na szczyt nasypu nachylonego pod kątem  $\pi/6$  do poziomu. Jakie jest naprężenie liny dźwigu, jeżeli siła tarcia jest równa 500 N, a lina łącząca dźwig z samochodem jest równoległa do podłoża?
29. Ojciec jest pięć razy cięższy od syna. Gdzie należy umieścić podpórkę  $O$ , aby deskę o długości  $l$  można było wykorzystać jako huśtawkę, jeśli obydwaj usiądą na końcach deski?
30. Upartego osła pcha dwóch chłopców, działając siłami  $F_1 = 60$  N oraz  $F_2 = 80$  N. Kierunki sił są wzajemnie prostopadłe, a wypadkowa sił jest skierowana w kierunku północnym. Wyznaczyć wartość siły wypadkowej i kierunki sił.
31. Dwaj wioślarze powinni przepłynąć przez rzekę z punktu  $A$  do punktu  $B$ , leżącego dokładnie naprzeciw  $A$  na drugim brzegu rzeki. Jeden z nich skierował łódkę wzdłuż odcinka  $AB$  i osiągnął brzeg w punkcie  $C$  (leżącym w pewnej odległości od punktu  $B$  w dół rzeki), a następnie do punktu  $B$  poruszał się wzdłuż brzegu rzeki pod prąd. Drugi wioślarz skierował łódkę tak, że osiągnął drugi brzeg akurat w punkcie  $B$ . Który z nich i w ile razy krótszym czasie pierwszy dopłynął do punktu  $B$ , jeżeli szybkość łódki względem wody w obydwu przypadkach jest jednakowa i wynosi  $v = 2$  m/s, a szybkość prądu w rzece  $v_p = 1,2$  m/s?
32. Wagon kolejki górskiej o masie  $m = 500$  kg jest zawieszony na dwóch linach odchylonych od pionu o kąty  $\pi/6$  i  $\pi/3$ . Wyznaczyć naprężenia lin, w przypadku gdy wagon jest nieruchomy.

## Rozdział 2

## Różniczkowanie funkcji

## 2.1. Definicja pochodnej

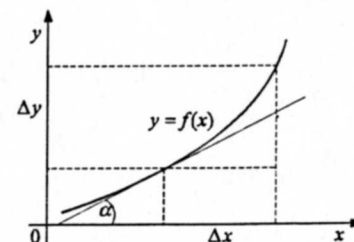
Pochodną funkcji  $y = f(x)$  w punkcie  $x$  nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu funkcji  $\Delta y$  do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej  $\Delta x$ , jeżeli przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera, czyli

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Jeżeli granica taka nie istnieje, to funkcja w tym punkcie nie ma pochodnej. Pochodną funkcji  $y = f(x)$  oznaczamy symbolami

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \dot{y}.$$

Pierwsze dwa symbole wprowadził Lagrange, trzeci i czwarty – Leibniz, ostatni – Newton, do oznaczenia pochodnej względem czasu. Geometrycznie pochodna funkcji  $y = f(x)$  w danym punkcie równa się tangensowi kąta  $\alpha$ , jaki tworzy styczna do wykresu w tym punkcie z dodatnim zwrotem osi  $Ox$  (zob. rys. 15). Funkcję mającą pochodną w każdym punkcie przedziału nazywamy różniczkowalną w przedziale. Znajdowanie pochodnej nazywamy różniczkowaniem funkcji.



Rys. 15