Zbiór V jest zbiorem wektorów

jeżeli ($\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dowolne wektory $\in V$)

1. $\vec{a} + \vec{b} \in V$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
4. $\exists\ \vec{O} \in V: \quad \vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$

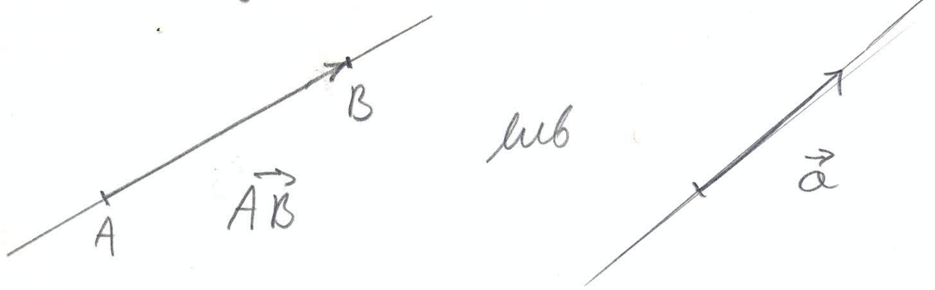
$\forall_{\vec{a} \in V}\ \exists\ -\vec{a} \in V: \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$

Ponadto: $\alpha, \beta \in R$ – zb. liczb rzeczywistych

6. $\alpha \vec{a} \in V$
7. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
8. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
9. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
10. $1\vec{a} = \vec{a}$

Wnioski $\begin{cases} 0\vec{a} = \vec{O} \\ \alpha\vec{O} = \vec{O} \\ (-1)\vec{a} = -\vec{a} \end{cases}$ wynikają z $6 \div 10$

Graficzny obraz wektora: odcinek skierowany

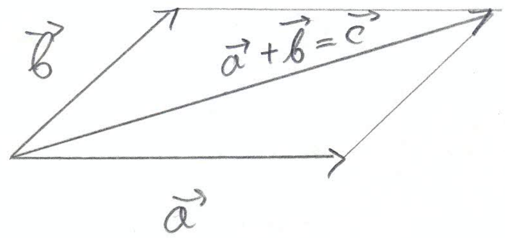


1. kierunek wektora $\vec{a}$: prosta zawierająca odcinek $\overline{AB}$
2. długość wektora $\vec{a} \stackrel{df}{=}$ dług. odcinka AB

   $|\vec{a}| \equiv a$
3. zwrot $\vec{a}$: zadaje para punktów (A, B), zwrot strzałki od A do B

Dodawanie wektorów

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



reg. równoległoboku
nie wyróżnia kolejności dodawania

mnożenie przez liczbę

$\vec{b} = \alpha \vec{a}$; gdy $\alpha \neq 0$

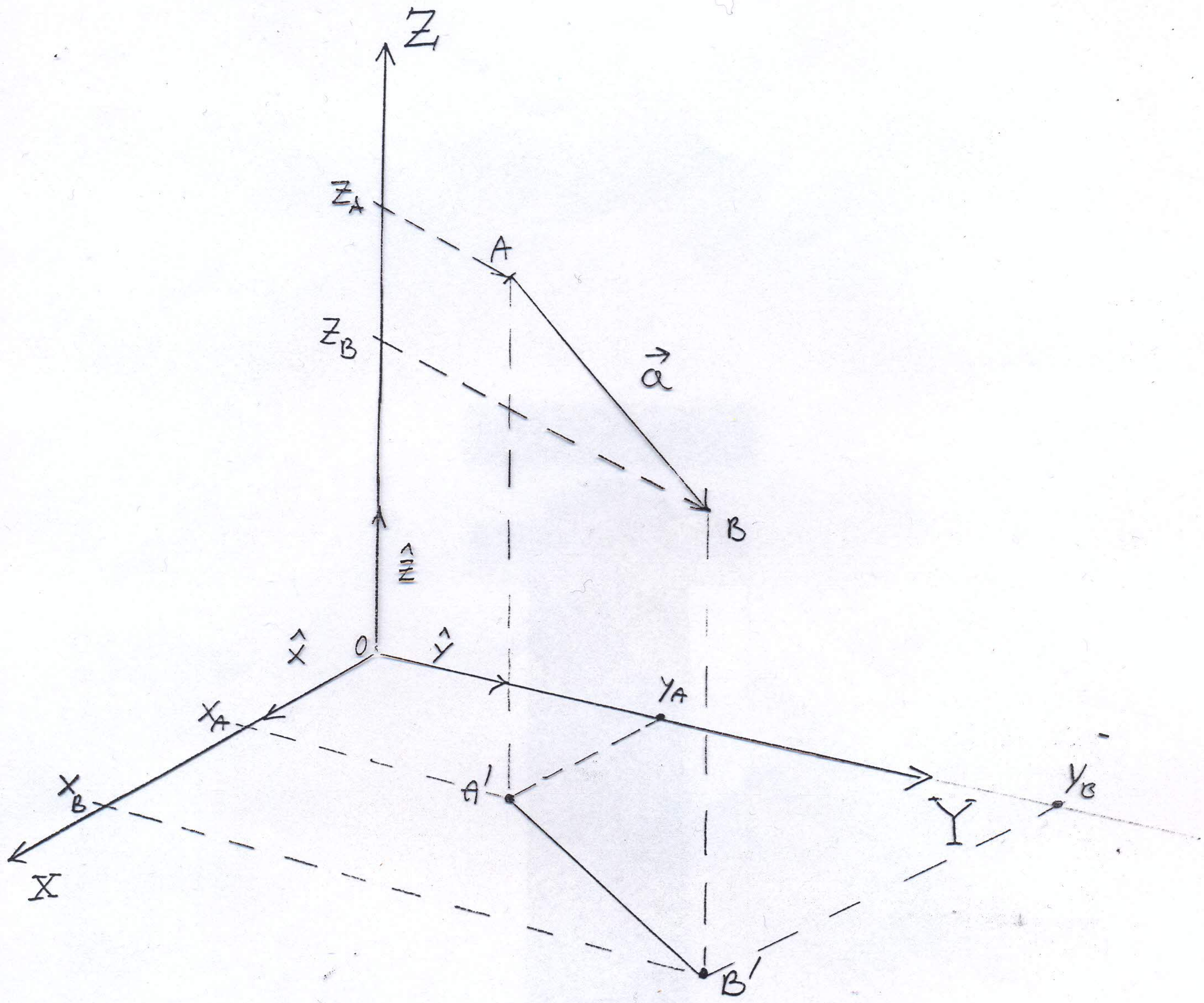
1. kierunek $\vec{b}$ = kier. $\vec{a}$
2. $b = |\alpha|\, a$
3. $\alpha > 0$ to zwroty $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zgodne

   $\alpha < 0$ — " — przeciwne

wektory o przeciwnych zwrotach

$\vec{a} \nearrow \quad \downarrow \vec{b}$, wersor wektora $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\hat{a} \stackrel{df}{=} \frac{1}{a}\vec{a} \; ; \; |\hat{a}| = 1$$



$$a_x = x_B - x_A$$

$$a_y = y_B - y_A$$

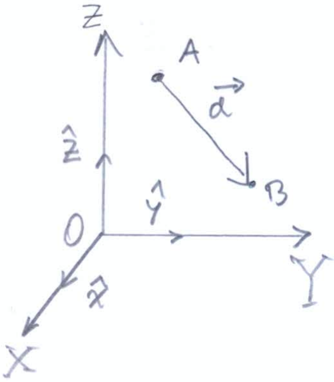
$$a_z = z_B - z_A$$

wersor wektora $\vec a \neq \vec 0$

$$\hat a \overset{def}{=} \frac{1}{a}\vec a \qquad |\hat a| = \left|\frac{1}{a}\vec a\right| = \frac{1}{a}|\vec a| = \frac{1}{a}a = 1$$

stąd $\vec a = a\hat a$

Wektor w układzie współrzędnych (nie koniecznie prostokątnym)



Tw. $\forall_{\vec a \in V}\ \exists\, a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$:

1. $\vec a = a_x \hat x + a_y \hat y + a_z \hat z$
2. $\alpha \vec a + \beta \vec b = \hat x(\alpha a_x + \beta b_x) + \hat y(\alpha a_y + \beta b_y) + \hat z(\alpha a_z + \beta b_z)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

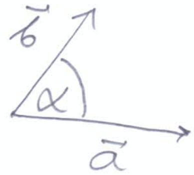
gdzie $\begin{cases} a_x = x_B - x_A \\ a_y = y_B - y_A \\ a_z = z_B - z_A \end{cases}$, oczywiście $a_i \lessgtr 0$, $i = x, y, z$

inne oznaczenia wersorów $\{\hat i, \hat j, \hat k\}$, $\{\hat e_1, \hat e_2, \hat e_3\}$

Gdy zadana baza $\{\hat x, \hat y, \hat z\}$ wtedy $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$
czytamy „ma współrzędne"

Mnożenie wektorów

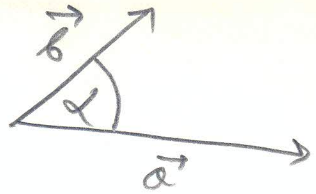
1. Iloczyn skalarny: $\vec a \cdot \vec b \overset{def}{=} a\, b \cos\alpha$



własności

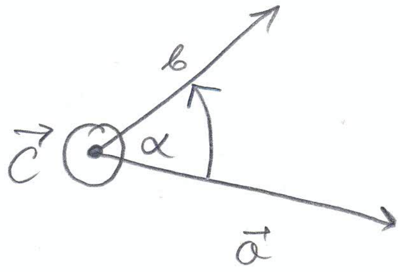
1) $\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$
2) $(\alpha \vec a) \cdot \vec b = \vec a \cdot (\alpha \vec b) = \alpha(\vec a \cdot \vec b)$
3) $\vec a \cdot (\vec b + \vec c) = \vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c$
4) $\vec a \cdot \vec b = 0 \iff \vec a \perp \vec b$
5) $a = \sqrt{\vec a \cdot \vec a}$
6) $\vec a \cdot \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$
w zadanej bazie wektorów $\{\hat x, \hat y, \hat z\}$, które są wzajemnie prostopadłe.

2. Iloczyn wektorowy



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

1. kier. $\vec{c}$: prosta $\perp$ do $\vec{a}$ i $\vec{b}$
2. dług. $\vec{c}$: $c = a\, b \sin\alpha$
3. zwrot $\vec{c}$: reg. śruby prawoskrętnej



Własności:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2) $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$
3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4) Niech $\vec{a}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ wtedy
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$
5) $\vec{a} \times \vec{b} \overset{\text{Ćwicz.}}{=} \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x)$

Uwagi:

$\begin{cases} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \text{itd} \\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$

Ważniejsze twierdzenia

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$
2. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

dowody na egzamin

Spostrzeżenie dot. wektorów bazowych ortonormalnych:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$

Df. Pochodnej f-cji $f(x)$ w p-cie x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

o ile ta granica istnieje.

Przykłady 1. $f(x) = C = const. \Rightarrow f'(x) = C' = 0$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x>0$ - w ogólności

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

5. $x>0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(fg)' = f'g + fg'$

6. $\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'(g)\, g'(x) \left(\equiv \frac{df(g)}{dg} \frac{df(x)}{dx} \right)$

Df. Całki nieoznaczonej $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$, $F: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$

$F(x)$ - jest całką nieoznaczoną f-cji $f(x)$ (lub f-cją pierwotną f-cji $f(x)$)

czyli $F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

siedzi tu dowolna stała

$\tilde{F}(x) = F(x) + C$ - dow. stała $\in \mathbb{R}$

Uwaga to $\tilde{F}(x)$ - także jest całką nieoznacz. f-cji $f(X)$

Całka oznaczona ($f: \langle a,b \rangle \xrightarrow{\text{ciągła}} \mathbb{R}$)

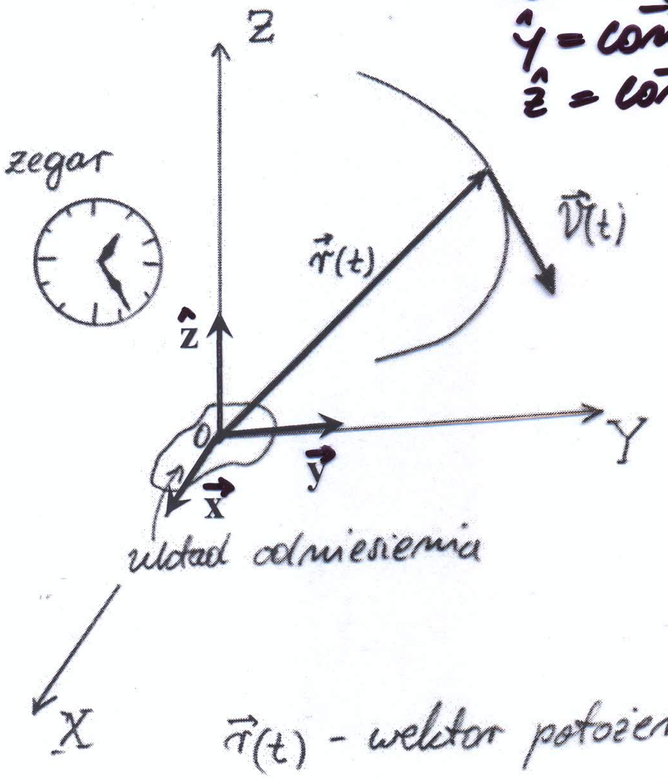
Tw.: $\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{df}{:=} F(b) - F(a)$

gdzie $F(x)$ - f-cja pierwotna f-cji $f(x)$

Przykłady: ...

Punkt materialny jest w ruchu względem innego ciała jeżeli jego położenie względem tego ciała zmienia się w czasie. Ciało to nazywamy <u>układem odniesienia</u>

niech
$\hat{x} = \overrightarrow{const.}$
$\hat{y} = \overrightarrow{const.}$
$\hat{z} = \overrightarrow{const.}$



$\vec{r}(t)$ - wektor położenia

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\, x(t) + \hat{y}\, y(t) + \hat{z}\, z(t)$$

$$\vec{v}(t) \stackrel{df}{=} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{x}\, \dot{x}(t) + \hat{y}\, \dot{y}(t) + \hat{z}\, \dot{z}(t) = \\ = \hat{x}\, v_x(t) + \hat{y}\, v_y(t) + \hat{z}\, v_z(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{a}(t) \stackrel{df}{=} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \hat{x}\, \dot{v}_x(t) + \hat{y}\, \dot{v}_y(t) + \hat{z}\, \dot{v}_z(t) = \\ = \hat{x}\, a_x(t) + \hat{y}\, a_y(t) + \hat{z}\, a_z(t) \equiv \dot{\vec{v}}(t)$$

„ $\dot{}$ " $\equiv \frac{d}{dt}$

Kinematyka, niech $\hat{x} = \text{const.}$ $\hat{y} = \text{const.}$ $\hat{z} = \text{const.}$ 6

- Wektor prędkości p-tu

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) \right)$$

Tw.

$$\vec{v}(t) = \hat{x}\,\dot{x}(t) + \hat{y}\,\dot{y}(t) + \hat{z}\,\dot{z}(t)$$

Uwaga:

lecz $\vec{v}(t) = \hat{x}\, v_x(t) + \hat{y}\, v_y(t) + \hat{z}\, v_z(t)$

czyli $v_x(t) = \dot{x}(t)$, $v_y(t) = \dot{y}(t)$, $v_z(t) = \dot{z}(t)$

- wektor przyspieszenia p-tu

$\boxed{\vec{a}(t) := \frac{d\vec{v}(t)}{dt}} \equiv \dot{\vec{v}}(t)$, stąd $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$

Uwaga:

$$\vec{a}(t) = \hat{x}\,\dot{v}_x(t) + \hat{y}\,\dot{v}_y(t) + \hat{z}\,\dot{v}_z(t)$$

stąd

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t)$$
$$a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t)$$
$$a_z(t) = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)$$

przykład $\vec{r}(t) = \hat{x}\sin(\omega t) + \hat{y}\, e^{-\beta t} + \hat{z}\ln[\cos(\gamma t)]$

$\vec{v}(t) = \dots$, $\vec{a}(t) = \dots$

Najprostsze ruchy

1. Ruch jednostajny p-tu: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \text{const}$

Trzeba znaleźć $\vec{r}(t) = ?$

$$\vec{v}_0 = \hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y} + \hat{z}\, v_{0z} = \hat{x}\,\dot{x}(t) + \hat{y}\,\dot{y}(t) + \hat{z}\,\dot{z}(t)$$

czyli $\dot{x}(t) = v_{0x} = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int v_{0x}\, dt = v_{0x} t + x_0 \;/\hat{x} \\ y(t) = v_{0y} t + y_0 \;/\hat{y} \\ z(t) = v_{0z} t + z_0 \;/\hat{z} \end{cases}$

itd.

stąd

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\, x(t) + \hat{y}\, y(t) + \hat{z}\, z(t) = \overbrace{(\hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y} + \hat{z}\, v_{0z})}^{\vec{v}_0} t + \overbrace{\hat{x} x_0 + \hat{y} y_0 + \hat{z} z_0}^{\vec{r}_0}$$

czyli $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0}$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ wektor

2. ruch jednostajnie zmienny $\iff \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = const.$

nie zależ. od czasu (7)

czyli $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{a}_0$

$\Downarrow$

ruch płaski

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{V}_0}, \quad \vec{V}_0 = \vec{V}(t=0)$$

warunek początkowy

szukany $\vec{r}(t) = ?$

bo $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{V}(t)$, wykaż, że

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0 t^2}{2} + \vec{V}_0 t + \vec{r}_0}$$

widać, że $\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) \\ \vec{V}_0 = \vec{V}(t=0) \end{cases}$ – warunki początkowe

Przykład – rzut ukośny demonstracje

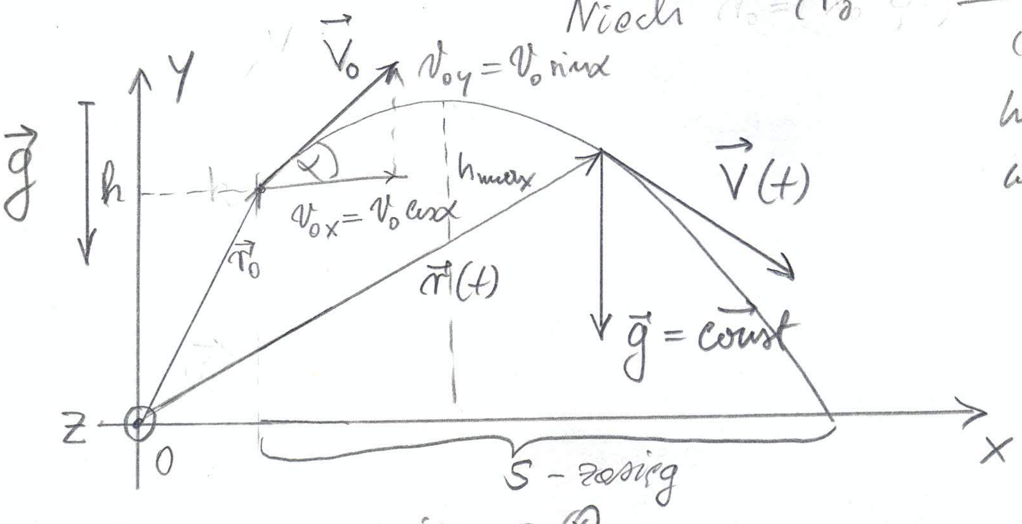
gdy $\vec{a}_0 = \vec{g} = const$ przyspieszenie ziemskie

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0}$$

to $\vec{r}(t)$ opisuje rzut ukośny

Niech $\vec{r}_0$ – leży w płaszczyźnie ruchu

W tym układzie współrz.



w płaszczyźnie $\vec{g}$ i $\vec{V}_0$ wybrałem układ współrz.

rzutuję na osie r. (*)

$$x: \begin{cases} x(t) = V_{0x} t + x_0 \\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_{0y} t + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

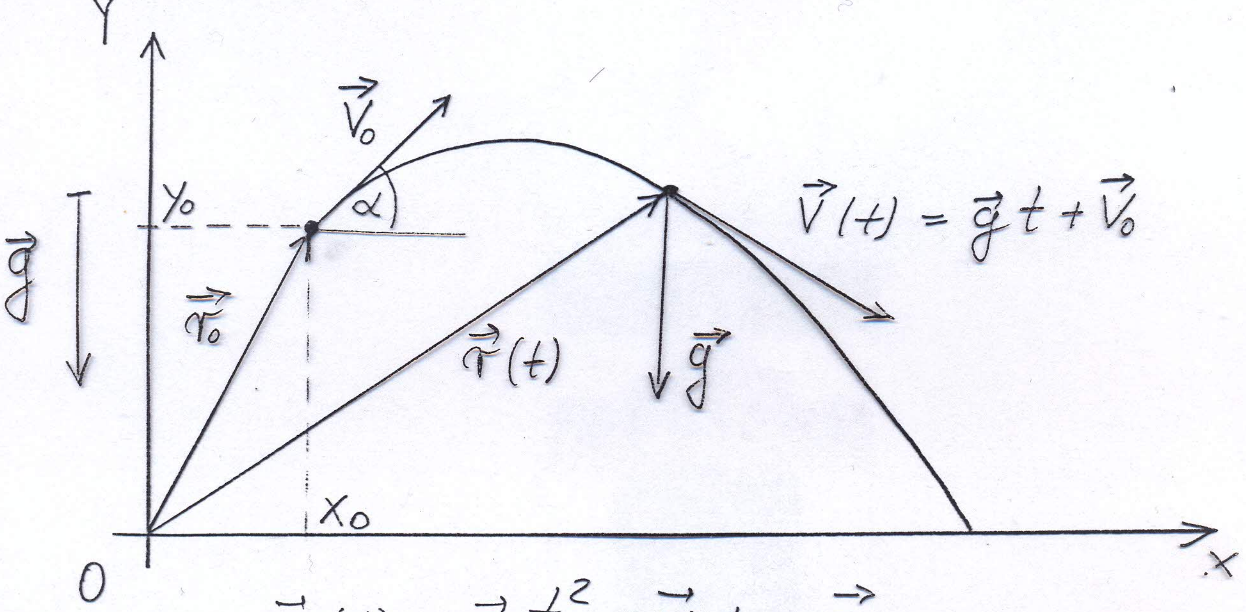
– równania parametryczne toru

Oblicz:
a) zasięg, $S = ?$
b) $h_{max} = ?$
c) $v(t) = ?$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$, $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$

$$\begin{cases} v_x(t) = V_{0x} = const \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Rzut ukośny



$$\vec{r}(t) = \vec{g}\,\frac{t^2}{2} + \vec{V_0}\,t + \vec{r_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = V_{0x}\,t + x_0 \\ y(t) = -g\,t^2/2 + V_{0y}\,t + y_0 \end{cases}$$

równania parametryczne toru

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{0x} \\ V_y(t) = -gt + V_{0y} \end{cases}$$

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha$$

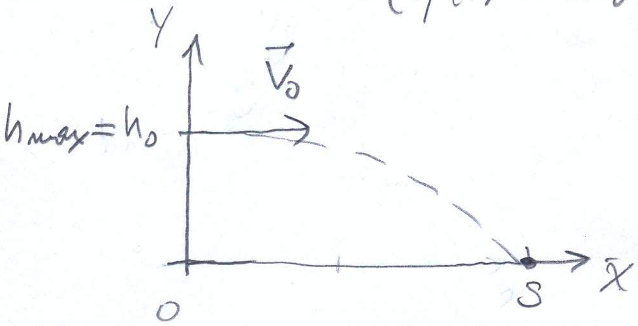
Szczególne przypadki rzutu ukośnego

Uwagi: Niech $x_0=0$:

1. $\alpha = 0 \Rightarrow$ rzut poziomy z wys. $h_0 = y_0$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$
$v_{0y} = 0$

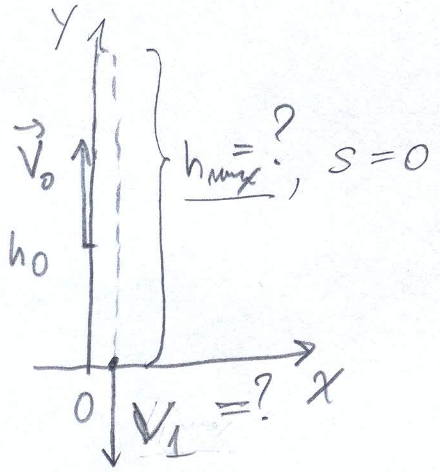
$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt \end{cases}$$



$\underline{s = ?}$

!

2. $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ rzut pionowo do góry z wysokości h_0



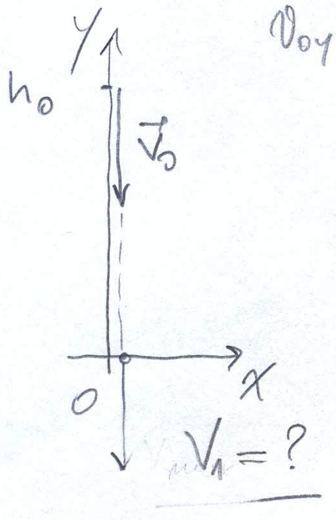
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} ; \; V_{0y} = V_0$$

$$\Downarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = V_0 - gt \end{cases}$$

!

3. $\alpha = -90^\circ \Rightarrow$ rzut pionowo w dół z wys. h_0

$v_{0y} = -v_0$



$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = h_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} ; \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -v_0 - gt \end{cases}$$

!

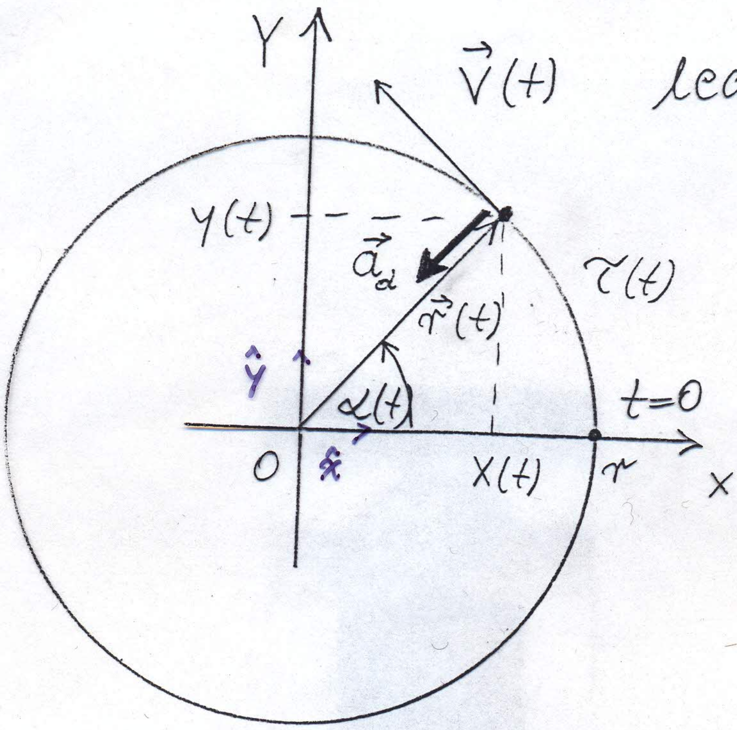
Trajektoria rzutu ukośnego: $x(t) = V_{0x} t + x_0$; $x_0 = 0$

$t = x/V_{0x}$

$$y(x) = y_0 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}} t - \frac{gx^2}{2V_{0x}^2} =$$

$$= y_0 + x \operatorname{tg}\alpha - gx^2/(2V_0^2 \cos^2\alpha)$$

Jednostajny ruch po okręgu (V = const)



lecz V = const

$$\alpha(t) = \frac{\tau(t)}{r}$$

niech $\tau(t=0) = 0 \Rightarrow \tau(t) = Vt$

$$\alpha(t) = \underbrace{\frac{V}{r}}_{\omega} t = \omega t$$

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\, x(t) + \hat{y}\, y(t)$$

gdzie

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(\omega t) \\ y(t) = r\sin(\omega t) \end{cases}$$

równania parametryczne toru

(sprawdzić, że okrąg)

Jest to ruch <u>niejednostajnie</u> przyspieszony!

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}, \dot{y}), \quad \begin{cases} \dot{x} = -r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{y} = r\omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}), \quad \begin{cases} \ddot{x} = -r\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -r\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 (x, y) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)}$$ – przysp. dośrodkowe

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r^2} r = \frac{v^2}{r}, \quad \omega \overset{df}{=} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v(t)}{\rho(t)}$$ – prom. krzyw.

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$ – długość przysp. dośrodkowego