

Splot (konwolucja)

1 Definicje i własności

Splotem sygnałów $f(t)$ i $g(t)$ nazywamy funkcję $h(t)$:

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

$$h[n] = f[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot g[n - m] \quad (2)$$

Funkcja ta ma następujące własności:

- jest przemienna:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (3)$$

- jest łączna:

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t) \quad (4)$$

- Delta Diraca jest elementem neutralnym dla splotu:

$$\delta(t) * f(t) = f(t) \quad (5)$$

- jest rozdzielcza względem dodawania:

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (6)$$

2 Implementacja

W pakiecie MathWorks MatLAB splot sygnałów realizowany jest poprzez funkcję

```
z = conv(x, y, 'shape');
```

gdzie parametr 'shape' przyjmuje następujące wartości:

- **full** - zwraca całą długość wektora splotu (wartość domyślna):
 $\text{length}(z) = \text{length}(x) + \text{length}(y) - 1;$
- **same** - wektor splotu ma rozmiar pierwszego argumentu:
 $\text{length}(z) = \text{length}(x);$
- **valid** - zwraca tylko tę część wektora splotu, która została policzona bez wykorzystania wartości zerowych krótszego sygnału dodanych na brzegach:
 $\text{length}(z) = \max(\text{length}(x) - \max(0, \text{length}(y) - 1), 0);$

3 Zadania

1. Policz (**analitycznie oraz w pakiecie MatLAB**) splot dwóch funkcji prostokątnych:

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases} \quad (7)$$

2. Policz (**ręcznie**) spłot dwóch sygnałów:
A = [-1, 0, 2, -4] oraz B = [2, 0, 1].
C = [1, 2, 2, 3, 3, 3] oraz D = [-1, 0, 1].
E = [0, 0, 1, 0, 0] oraz F = [0.25, 0.5, 0.25].
G = [1+i, 1-i, 0, 3i] oraz H = [2i, 1, 1+i].
3. Policz spłot (**ręcznie oraz w programie MatLAB**) funkcji prostokątnej $f(t)$ o parametrach: amplituda=1.0, szerokość=3.0, środek=0.5; z funkcją:
 $g(t) = \text{sgn}(t) \cdot \delta(|t| - 1)$ dla $t = -10 : 1 : 10$.
Wyświetl wykresy funkcji oraz wynik ich spłotu.
4. Stwórz w MatLAB sygnał $x(t)$ ($t = \langle 0, 8 \rangle$ s, $F_s = 25$ Hz):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 2 \\ 0 & \text{dla } t \in (2, 6) \\ 2 & t \geq 6 \end{cases} \quad (8)$$

Wykonaj spłot tego sygnału z sygnałem $\text{ones}(1, N)/N$ dla $N = 3, 13, 23$. Stwórz wykres zawierający funkcję $x(t)$ oraz wyniki spłotów.

5. Policz (**w programie MatLAB**) spłot funkcji gaussowskiej $f(t)$ o parametrach ($\text{sr}=0.0$, $\text{std}=0.2$) z funkcją Sza $g(t) = \text{III}(t)$ (dla $n \in \mathbb{N}$) dla $t \in \langle -5, 10 \rangle$ spróbkowanych z $F_s = 50\text{Hz}$. Ćwiczenie powtórz dla różnych wartości odchylenia standardowego funkcji $f(t)$.
6. Policz (**w programie MatLAB**) spłot sygnału harmonicznego $f(t)$ o amplitudzie $A_1 = 1.0$, okresie $\omega_1 = 0.5\text{s}$ i czasie trwania $T_1 = 10\text{s}$ z sygnałem prostokątnym $g(t)$ o czasie trwania $T_2 = 0.2\text{s}$ i amplitudzie $A_2 = 1/(T_2 \cdot F_s)$. Oba sygnały spróbkowane są z częstotliwością $F_s = 100\text{Hz}$. Stwórz wykresy sygnałów oraz ich spłotu.
7. Zasymuluj (MatLAB) sekcję sejsmiczną zarejestrowaną (24 odbiorniki, $F_s = 20\text{kHz}$, czas rejestracji 0.25 s) dla płaskiego ośrodka dwuwarstwowego ($h_1 = 20$ m, $v_1 = 400$ m/s, $v_2 = 1000$ m/s). Odległość pierwszego odbiornika od punktu strzałowego: 20 m, odległość między odbiornikami: 2 m. Sygnał źródła: sinc (okres 0.01 s, czas trwania $\langle -0.01, 0.05 \rangle$ s).
8. Wygeneruj poziomy sygnał dyskretny o $t = \langle 0, 5 \rangle$ s i $F_s = 200\text{Hz}$, który będzie wypełniony liczbami z rozkładu normalnego $N(0, 0.5)$. Zaimplementuj spłot z wektorem $\text{ones}(1, N)/N$, dla N będącego liczbą nieparzystą. Stwórz wykres zmienności odchylenia standardowego sygnału wynikowego w zależności od wartości N .