

Szereg Fouriera

1 Definicje

Szeregiem Fouriera nazywamy rozwinięcie funkcji $f(t)$ dla $t \in \langle a, a+T \rangle$ w następujący szereg:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \quad (1)$$

dla następujących współczynników:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt \quad (2a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad (2b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad (2c)$$

Dla liczb zespolonych szereg ten zdefiniowany jest następująco:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \exp\left(\frac{in\pi t}{T}\right) \quad (3)$$

gdzie:

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp\left(\frac{in\pi t}{T}\right) dt \quad (4)$$

UWAGA:

dla funkcji parzystej [$f(t) = f(-t)$], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki b_n są równe zero;

dla funkcji nieparzystej [$f(t) = -f(-t)$], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki $a_0 : a_n$ są równe zero.

2 Zadania

Policz analitycznie oraz w pakiecie MatLAB ($F_S = 100Hz$) szereg Fouriera dla następujących funkcji:

1. sygnału prostokątnego o szerokości 1, amp.= 1, środka $t=0$ i czasie trwania $|t|<1$;

$$ODP : f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(0.5n\pi)}{n\pi} \cdot \cos(n\pi t) \right) \quad (5)$$

2. sygnału trójkątnego o szerokości 2, amp.= 1, środka dla $t=0$ i czasie trwania $|t|<2$

$$ODP : f(t) = \frac{0.5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} \right] \quad (6)$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ t & \text{dla } t \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases} .$$

$$ODP : f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right] \quad (7)$$

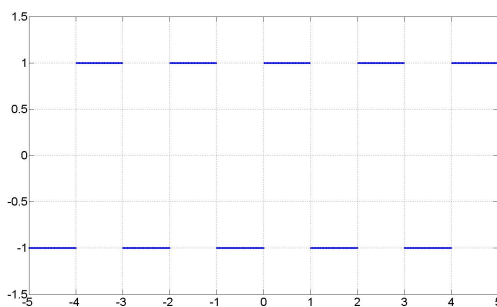
$$4. f(t) = t^2, \text{ dla } t \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$ODP : f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \right] \quad (8)$$

$$5. x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in (2, 4) \\ 1 + 0.5 \cdot \text{sgn}(t) \cdot t^2 & \text{dla } |t| \leq 2 \end{cases}$$

$$ODP : x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{18}{n^3\pi^3} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} - 1 \right) + \frac{12}{n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi}{3} - \frac{4}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \sin \frac{n\pi t}{3} \quad (9)$$

6. dla sygnału widocznego na rys.1.



Rysunek 1: Sygnał okresowy, prostokątny

$$ODP : f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) \right] \quad (10)$$

7. $x(t) = \text{sgn}(t) \cdot \text{trojkat}(t, w = 0, \text{ szer.} = 4, \text{ amp.} = 2)$ dla $|t| \leq 4$

$$ODP : x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n\pi} - \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi t}{4} \quad (11)$$