 dwornik@agh.edu.pl

Filtracja częstotliwościowa II

1 Transformata Z

Transformata Z zdefiniowana jest za pomocą poniższego równania:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1}$$

gdzie z jest zmienną zespoloną. Korzystając z transformaty, filtrację można zapisać jako iloczyn dwóch widm Z, np.:
$\mathbf{A} = [1\ 2\ 0\ 1] = 1 + 2z^{-1} + z^{-3}$, $\mathbf{B} = [1\ 0\ -1] = 1 - z^{-2}$,
$\mathbf{A} * \mathbf{B} = (1 + 2z^{-1} + z^{-3}) \cdot (1 - z^{-2}) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - z^{-5} = [1\ 2\ -1\ -1\ 0\ -1]$

2 Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR)

Filtry o skonczonej odpowiedzi impulsowej (FIR - ang. *Finite Impulse Response*) są filtrami bez sprzężenie zwrotnego (nierekursywne), gdzie każda próbka sygnału wyjściowego jest wynikiem obliczenia średniej ważonej pewnej części sygnału wejściowego. Do największych ich zalet zaliczamy stabilność oraz prostotę implementacji. Do wad zaliczyć należy przede wszystkim konieczność stosowania dużej ilości współczynników, aby uzyskać strome przejście pomiędzy pasmem przepuszczania i tłumienia.
W takim przypadku sygnał wyjściowy Y jest wynikiem sumomnożenia sygnału wejściowego X i filtru H:

$$Y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \cdot x[n-m] \tag{2}$$

Transmitacja filtra w wyniku transformacji Z ($z = e^{i\Omega}$) dana jest wzorem:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} \tag{3}$$

Przykładem funkcji realizującej taki typ filtra jest `kaiserord()` lub `firpmord()`.

3 Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)

Filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR - ang. *Infinite Impulse Response*) charakteryzują się sprzężeniem zwrotnym. Jest to, wraz z opóźnieniem wyjścia, konsekwencja istnienia w mianowniku transmitacji wielomianu. Ich główną zaletą jest możliwość tworzenia stosunkowo stromych zboczy filtru. Ceną jest jednak konieczność większej kontroli przy projektowaniu filtrów (możliwość wystąpienia niestabilności obliczeniowych).
Transmitacja takiego filtru ma postać:

$$H(z) = \frac{\sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}{\sum_{m=1}^{M} a_m z^{-m}} \tag{4}$$

Przykładami funkcji realizujących filtru typu IIR są `buttord()`, `cheb1ord()`, `cheb2ord()` czy `ellipord()`.

4 Okna

Okna w analizie częstotliwościowej stosowane są głównie w dwóch przypadkach: poprawie jakości analizy spektralnej oraz poprawie jakości tworzenia filtrów typu FIR. W obu tych przypadkach mają za zadanie zmniejszenie efektu fenomenu Gibbsa. W pakiecie MatLAB dostępne jest kilkanaście okien czasowych. Ich implementację można albo poprzez wywołanie konkretnej funkcji albo poprzez narzędzie `wintool`. Do najważniejszych okien zaliczamy:

- `barthannwin(M)` - okno Barletta-Hanna o długości M dane wzorem (dla N=M-1 i n=0:N):

$$w(n) = 0.62 - 0.48\left|\frac{n}{N} - 0.5\right| + 0.38\cos\left(2\pi\left(\frac{n}{N} - 0.5\right)\right) \tag{5}$$

- `bartlett(M)` - okno Bartletta o długości M dane jest wzorem (dla N=M-1):

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N}, & 0 \leqslant n \leqslant N/2 \\ 2 - \frac{2n}{N}, & N/2 \leqslant n \leqslant N \end{cases}$$

- `blackman(M)` - M-punktowe okno Blackmana dane jest wzorem:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(4\pi\frac{n}{N}\right), \tag{6}$$

dla n<N i N=M-1;

- `bohmanwin(M)` - okno Bohmana o długości M (x - wektor liniowy o długości M o wartościach od -1 do 1)

$$w(x) = (1 - |x|)\cos(\pi|x|) + \frac{\sin(\pi|x|)}{\pi} \tag{7}$$

- `czebwin(M,R)` - M-punktowe okno Czebyszewa o magnitudzie zbocza R (domyślnie 100 dB).
- `gausswin(M,`α`)` - okno Gaussowskie (dla m=<-(M-1)/2, (M-1)/2>)

$$w(m) = \exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{2\alpha m}{M}\right)^2\right);\ \sigma = \frac{M}{2\alpha} \tag{8}$$

- `hamming(M)` - M-punktowe okno Hamminga, dane jest wzorem:

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right) \tag{9}$$

- `hann(M)` - M-punktowe okno Hanninga

$$w(n) = 0.5 \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right)\right) \tag{10}$$

- `kaiser(M,beta)` - M-punktowe okno Kaisera z parametrem β. Domyślna wartość $\beta = 0.5$.
- `parzenwin(M)` - M-punktowe okno Parzena (dla m=<-(M-1)/2, (M-1)/2>)

$$w(m) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{2|m|}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{2|m|}{M}\right)^3 & dla\ 0 \leqslant |m| \leqslant (M-1)/4 \\ 2\left(1 - \frac{2|m|}{M}\right)^3 & dla\ (M-1)/4 < |m| \leqslant (M-1)/2 \end{cases} \tag{11}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

- `rectwin(M)` - okno prostokątne. Tożsame z poleceniem `ones(M,1)`. W praktyce oznacza to, że filtr nie jest okienkowany (brak zmian w filtrze);
- `taylorwin(M)` - Okno Taylora, zbliżone efektem do okna Czebyszewa.
- `triang(M)` - okno trójkątne o długości M. Jeżeli M jest nieparzyste jest tożsame z oknem bartletta.

5 Zadania

1. Policz transformatę Z ciągów: $y_1[n] = a^n$ oraz $y_2[n] = (-1)^n \cdot a^n$.
   Pamiętaj, że dla |x|<1 prawdziwe jest: $\sum_n^\infty (x^n) = 1/(1-x)$;

2. Korzystając z rozwiązania zad.1 i właściwości różniczkowalności szeregów wewnątrz obszarów zbieżności policz transformatę ciągów:
   $y_1[n] = n$, $y_2[n] = n^2$

3. Korzystając z metody rozkładu na ułamki proste policz transformatę odwrotną Z:

$$Z(z) = \frac{z}{(z^2 - z - 2)} \tag{12}$$

$$Z(z) = \frac{8z + 4}{z^2 - 2z - 3} \tag{13}$$

4. Korzystając z narzędzia `fdatool` porównaj działanie i wygląd wybranych filtrów IIR i FIR. Jako sygnał wejściowy wykorzystaj ($T = 10s$, $F_s = 20Hz$): sygnał prostokątny (środek = 5, amp. = 1, szer. = 2), sumę sygnałów harmonicznych (amp1.=1, f1=6, amp2.=0.01 f2=$\sqrt{2}$);

5. Korzystając z narzędzia `wintool` porównaj wygląd wybranych okien.

6. Sprawdź działanie wybranych okien na wybrane sygnały wejściowe.