copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

Szereg Fouriera

1 Definicje

Szeregiem Fouriera nazywamy rozwinięcie funkcji x(t) dla $t \in < a, a+T >$ w następujący szereg:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \tag{1}$$

dla następujących współczynników:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) dt \tag{2a}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \tag{2b}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \tag{2c}$$

Dla liczb zespolonych szereg ten zdefiniowany jest następująco:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(\frac{2in\pi t}{T}\right) \tag{3}$$

gdzie:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t) \exp\left(\frac{2in\pi t}{T}\right) dt \tag{4}$$

UWAGA:
dla funkcji parzystej [x(t) = x(-t)], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki b_n są równe zero;
dla funkcji nieparzystej [x(t) = -x(-t)], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki $a_0 : a_n$ są równe zero.

2 Zadania

Policz analitycznie oraz w pakiecie MatLAB ($F_S = 100Hz$) szereg Fouriera dla następujących funkcji:

1. sygnału prostokątnego o szerokości 1, amp.= 1, środku t=0 i czasie trwania |t|<1;

$$ODP : x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(0.5n\pi)}{n\pi} \cdot \cos(n\pi t) \right) \tag{5}$$

2. sygnału trójkątnego o szerokości 2, amp.= 1, środku dla t=0 i czasie trwania |t|<2

$$ODP : x(t) = \frac{0.5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos\frac{n\pi t}{2} \right] \tag{6}$$

 copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

3. $x(t) = \begin{cases} 0 & dla \ t \in < -\pi, 0) \\ t & dla \ t \in < 0, \pi > \end{cases}$.

$$ODP: x(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right] \tag{7}$$

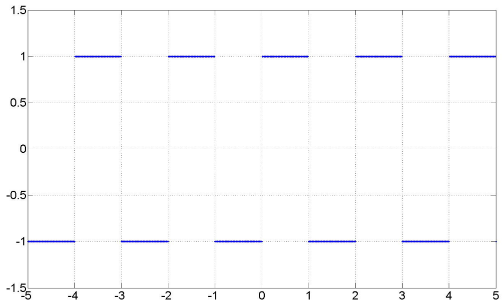
4. $x(t) = t^2$, dla $t \in < -\pi, \pi >$

$$ODP: x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \right] \tag{8}$$

5. $x(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \in (2, 4) \\ 1 + 0.5 \cdot \mathrm{sgn}(t) \cdot t^2 & dla \quad |t| \leqslant 2 \end{cases}$

$$ODP: x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{18}{n^3\pi^3} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} - 1 \right) + \frac{12}{n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi}{3} - \frac{4}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \sin \frac{n\pi t}{3} \tag{9}$$

6. dla sygnału widocznego na rys.1.



Rysunek 1: Sygnał okresowy, prostokątny

$$ODP: x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) \right] \tag{10}$$

7. $x(t) = \mathrm{sgn}(2t) \cdot$prostokąt(środek=0, szer.=4, amp.=3) dla $|t| \leqslant 4$

$$ODP: x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi t}{4} \tag{11}$$

8. $x(t) = \mathrm{sgn}(2t) \cdot$trójkąt(tw=0, szer.=4, amp.=2) dla $|t| \leqslant 4$

9.

$$x(t) = \begin{cases} H(t+2) \cdot (t+2) & dla \quad t \in (-4, 2\rangle \\ -4 & dla \quad t \in (2, 4) \end{cases} \qquad gdzie \quad H(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \geqslant 0 \\ 0 & dla \quad t < 0 \end{cases} \tag{12}$$