copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

Transformata Fouriera

1 Definicje

Para transformat Fouriera dana jest wzorami:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

Spektrum Transformaty Fouriera można przedstawić w postaci biegunowej używając widma amplitudowego $|F(\omega)|$ i fazowego $\phi(\omega)$:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\phi(\omega)} \tag{3}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{Re(F(\omega))^2 + Im(F(\omega))^2} = \sqrt{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} \tag{4}$$

$$\phi(\omega) = atan\left(\frac{Im(F(\omega))}{Re(F(\omega))}\right) \tag{5}$$

Para dyskretnych transformat Fouriera (DFT) dana jest wzorami:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(\frac{-2\pi ikn}{N}\right) \tag{6}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp\left(\frac{2\pi ikn}{N}\right) \tag{7}$$

W przypadku tej transformaty spotykany jest również zapis, gdzie mnożenie przez czynnik $\frac{1}{N}$ z równ.7 występuje w prostej DFT (równ.6) zamiast w odwrotnej DFT.

2 Polecenia w pakiecie MatLAB

- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera: `fft(x)` oraz `ifft(X)`
- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera 2D: `fft2(x)` oraz `ifft2(X)`
- widmo amplitudowe i fazowe: `abs(X)` oraz `angle(X)`
- część rzeczywista i urojona widma: `real(X)` oraz `imag(X)`
- sprzężenie liczby zespolonej: `conj(z)`
- jednostka urojona: `1i`, `i`, `j`
- wygładzenie widma fazowego: `unwrap(angle(X))`
- przesunięcie zerowej częstotliwości do środka widma: `fftshift(X)` oraz `ifftshift(X)`
- najmniejsza potęga liczby 2 większa lub równa x: `nextpow2(x)`

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

3 Własności

W tabeli 1 zebrano najważniejsze własności Transformaty Fouriera.

Tabela 1: Własności Transformaty Fouriera
(źródło: http://home.agh.edu.pl/~lesniak/wyklady/geof_syg_w4.pdf)

Własność	wzór
Liniowość Transformaty Fouriera	$F[\alpha f(t) + \beta f(t)] = \alpha F(\omega) + \beta F(\omega)$
Twierdzenie o podobieństwie	$F[f(\alpha t)] = \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Twierdzenie o przesunięciu I	$F[f(t-\alpha)] = e^{-i\omega\alpha} F(\omega)$
Twierdzenie o przesunięciu II	$F[f(t)e^{i\alpha t}] = F(\omega - \alpha)$
Twierdzenie o modulacji	$F[f(t)cos(\alpha t)] = \frac{1}{2}[F(\omega-\alpha) + F(\omega+\alpha)]$
Twierdzenie o różniczkowaniu	$F[f^n(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$
Twierdzenie o różniczkowaniu Transformaty	$F[(-it)^n f(t)] = F^n(\omega)$
Twierdzenie o całkowaniu	$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$
Twierdzenie Parsevala	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2 d\omega$
Twierdzenie o wzajemności Rayleigha	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega$
Twierdzenie o splocie	$F[f(t) * g(t)] = F(\omega) \cdot G(\omega)$

4 Zadania

1. Policz Transformatę Fouriera (**analitycznie (a,b) oraz w MatLABie (a-d) dla** $F_S = 100Hz$) dla następujących sygnałów:
   (a) Sygnał prostokątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0) dla $t \in < -\pi, \pi >$
   (b) Sygnał trójkątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0) dla $t \in < -5, 5 >$
   (c) Sygnał harmoniczny (amplituda 1, okres 1) dla $t \in < -4\pi, 4\pi >$
   (d) Sygnał Gaussowski (średnia 0, odchylenie 1) dla $t \in < -5, 5 >$
2. Policz dyskretną Transformatę Fouriera dla wektorów (dla uproszczenia przyjmij, że pierwszy element ma indeks zero, tj. x[0]=1)
   x = [1 0 -2 1].
   x = [1+i, 2-i, 3, i]
   x = [1 2 3 4].
3. Udowodnij twierdzenia zawarte w tab.1.