copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

05. Filtracja częstotliwościowa, STFT

1 Filtracja w domenie częstotliwości

Filtracja w domenie częstotliwości polega na odpowiedniej modyfikacji widma transformaty Fouriera. Ze względu na pasmo przepuszczania filtra wyróżniamy filtry: dolno-, górno- i pasmoprzepustowe. Szczególnym przypadkiem są filtry wycięciowe (pasmowozaporowe), których zadaniem jest eliminacja konkretnej składowej częstotliwościowej.

Filtracja w domenie częstotliwości sprowadza się do wymnożenia widma sygnału z widmem filtra. Jeżeli filtr jest zdefiniowany w postaci widm transformaty Fouriera, filtracja sprowadza się do poniższej relacji (X - sygnał, F - Filtr):

$$X_{new} = (WA(X) \cdot WA(F)) \cdot e^{i \cdot (WF(X) + WF(F))} \tag{1}$$

2 Przykłady filtrów

- idealny filtr dolnoprzepustowy:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & dla \quad \omega \leqslant \omega_0 \\ 0 & dla \quad \omega > \omega_0 \end{cases} \tag{2}$$

- idealny filtr pasmoprzepustowy:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & dla \quad \omega \in < \omega_{low},\ \omega_{high} > \\ 0 & dla \quad \omega < \omega_{low} \mid \omega > \omega_{high} \end{cases} \tag{3}$$

- filtr dolnoprzepustowy Butterwortha n-tego rzędu:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^{2n}} \tag{4}$$

- filtr pasmozaporowy Butterwortha o szerokości W:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + (\frac{\omega \cdot W}{\omega^2 - \omega_0^2})^{2n}} \tag{5}$$

- filtr dolnoprzepustowy Gaussa

$$H(\omega) = \exp\left(\frac{-\omega^2}{2\omega_0^2}\right) \tag{6}$$

- filtr pasmowoprzepustowy Gaussa

$$H(\omega) = \exp\left(\frac{-(|\omega| - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

3 Transformata Z

Transformata Z zdefiniowana jest za pomocą poniższego równania:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{8}$$

gdzie z jest zmienną zespoloną. Korzystając z transformaty, filtrację liniową (splot) można zapisać jako iloczyn dwóch widm Z, np.:
$\mathbf{A} = [1\ 2\ 0\ 1] = 1 + 2z + z^3$, $\mathbf{B} = [1\ 0\ -1] = 1 - z^2$,
$\mathbf{A} * \mathbf{B} = (1 + 2z + z^3) \cdot (1 - z^2) = 1 + 2z - z^2 - z^3 - z^5 = [1\ 2\ -1\ -1\ 0\ -1]$

4 Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR)

Filtry o skonczonej odpowiedzi impulsowej (FIR - ang. *Finite Impulse Response*) są filtrami bez sprzężenie zwrotnego (nierekursywne), gdzie każda próbka sygnału wyjściowego jest wynikiem obliczenia średniej ważonej pewnej części sygnału wejściowego. Do największych ich zalet zaliczamy stabilność oraz prostotę implementacji. Do wad zaliczyć należy przede wszystkim konieczność stosowania dużej ilości współczynników, aby uzyskać strome przejście pomiędzy pasmem przepuszczania i tłumienia.
W takim przypadku sygnał wyjściowy Y jest wynikiem sumomnożenia sygnału wejściowego X i filtru H:

$$Y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \cdot x[n-m] \tag{9}$$

Transmitacja filtra w wyniku transformacji Z ($z = e^{i\Omega}$) dana jest wzorem:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} \tag{10}$$

Przykładem funkcji realizującej taki typ filtra jest `kaiserord()` lub `firpmord()`.

5 Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)

Filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR - ang. *Infinite Impulse Response*) charakteryzują się sprzężeniem zwrotnym. Jest to, wraz z opóźnieniem wyjścia, konsekwencja istnienia w mianowniku transmitacji wielomianu. Ich główną zaletą jest możliwość tworzenia stosunkowo stromych zboczy filtru. Ceną jest jednak konieczność większej kontroli przy projektowaniu filtrów (możliwość wystąpienia niestabilności obliczeniowych).
Transmitacja takiego filtru ma postać:

$$H(z) = \frac{\sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}{\sum_{m=1}^{M} a_m z^{-m}} \tag{11}$$

Przykładami funkcji realizujących filtru typu IIR są `buttord()`, `cheb1ord()`, `cheb2ord()` czy `ellipord()`.

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

6 STFT

Metoda STFT polega na przesuwania okna o zadanej długości (zwykle będącej potęgą 2) z pewnym krokiem wzdłuż sygnału i analizie składu częstotliwościowego (FFT) takiego sygnału. Ważną cechą tej metody jest rozdzielczość czasowo-częstotliwościowa: im większe okno, tym lepsza rozdzielczość częstotliwościowa oraz gorsza czasowa. I odwrotnie: małe okno czasowe implikuje dobrą rozdzielczość czasową i gorszą częstotliwościową.

7 Zadania

1. Stwórz sygnał o czasie trwania $T = 10s$ i $F_S = 100Hz$ złożony z dwóch sygnałów harmonicznych o następujących parametrach: $Amp_1 = 5$, $f_1 = 10Hz$ i $Amp_2 = 1$, $f_2 = 30Hz$. Korzystając z filtrów z rozdz.2 odfiltruj część wysokoczęstotliwościową.
2. Stwórz sygnał prostokątny ($T = 10s$, $F_S = 100Hz$, $Amp = 1$, środek=5, szerokość=1). Przefiltruj sygnał filtrami idealnymi dolno- i górnoprzepustowymi o zmiennej szerokości pasma przepuszczania.
3. Dla dowolnego sygnału prostokątnego oceń wpływ rzędu filtru Butterwortha na wynik filtracji.
4. Zbadaj wpływ zmiany widma fazowego (przy zachowaniu stałości widma amplitudowego) na wynik filtracji.
5. Wczytaj sygnał *trasa_01.txt* o kroku próbkowania dt=0.25ms. Dokonaj filtracji dolnoprzepustowej celem poprawy jakości sygnału. Wynik porównaj z rezultatami filtracji w domenie przestrzeni.
6. Wczytaj sygnał *trasa_01.txt*. Korzystając z narzędzia `fdatool` stwórz filtry pasmoprzepustowe, a następnie wykonaj filtrację z ich udziałem.
7. Wczytaj dowolny plik muzyczny: `[Y, Fs]=audioread('plik.mp3')`. Spróbuj przefiltrować go częstotliwościowo tak, by wyodrębnić poszczególne składowe (np. tylko głosy męskie/żeńskie lub poszczególne instrumenty). Do odtwarzania użyj funkcji: `sound(y,Fs);` lub zewnętrzny odtwarzacz. Zapis do pliku umożliwia funkcja `audiowrite('plik.mp3',y,Fs);`
8. Stwórz sygnały ($t = 0 - 10$s, $F_s = 100$Hz)

   - x1(t) - suma sygnałów harmonicznych (A1=1, F1=10Hz; A2=0.5, F2=3.75; A3=0.75, F3=18Hz) oraz szumu gaussowskiego (σ=0.02);
   - x2(t) - sklejenie sygnałów harmonicznych z podpunktu 1 (f1 dla t=0-3s, f2 dla t=3-6s, f3 dla t=6-9s, sygnał zerowy dla t>9s) + szum;
   - x3(t) - sygnał harmoniczny o liniowym wzroście częstotliwości f(0s)=0.5Hz, f(10s)=5Hz i stałej amplitudzie A=1;
   - x4(t) - sygnał harmoniczny o f = 5 Hz i A=1 i wartości NaN dla t=4s i t=7s.

   Dla każdego takiego sygnału oblicz i wyświetl:

   - widmo amplitudowe transformaty Fouriera;
   - wynik STFT dla okna 5.11s i 0.63s;