

01. Sygnały, spłot i korelacja

1 Podstawowe sygnały 1D

1. Sygnał prostokątny o amplitudzie A , szerokości S i środku tw :

$$\Pi(t) = \begin{cases} A & dla \quad |t - tw| < 0.5 \cdot S \\ 0.5 \cdot A & dla \quad |t - tw| = 0.5 \cdot S \\ 0.0 & dla \quad |t - tw| > 0.5 \cdot S \end{cases} \quad (1)$$

2. Sygnał trójkątny o szerokości S , amplitudzie A i wierzchołku tw :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{2|t-tw|}{S}\right) & dla \quad |t - tw| \leq 0.5 \cdot S \\ 0.0 & dla \quad |t - tw| > 0.5 \cdot S \end{cases} \quad (2)$$

3. Sygnał harmoniczny o modulowanej amplitudzie $A(t)$, częstotliwości f i przesunięciu fazowym φ_0 :

$$y(t) = A(t) \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_0) \quad (3)$$

4. Sygnał sinc(t):

$$\text{sinc}(\omega_0 \cdot t) = \text{Sa}(\omega_0 \cdot t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t = 0 \\ \frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} & dla \quad t \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

5. Sygnał / funkcja znaku $\text{sgn}(t)$:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ 0 & dla \quad t = 0 \\ -1 & dla \quad t < 0 \end{cases} \quad (5)$$

6. Sygnał jednostkowy (funkcja skoku, Heaviside'a):

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0.0 & dla \quad t < 0 \\ 0.5 & dla \quad t = 0 \\ 1.0 & dla \quad t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

7. Funkcja Diraca:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \neq 0 \\ +\infty & dla \quad t = 0 \end{cases} \quad (7)$$

przy założeniu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8)$$

8. Funkcja Sza (grzebieniowa) o okresie T :

$$\text{Sza}_T(t) = \text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (9)$$

9. Funkcja (rozkład) Gaussa (μ - średnia, σ - odchylenie standardowe):

$$x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

10. Sygnał eksponencjalny (wykładniczy malejący) dla $\alpha > 0$:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & dla \quad t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

11. Funkcja piłokształtna o okresie T i amplitudzie A

$$x(t) = \frac{A}{T} \cdot (t \text{ modulo } T) \quad (12)$$

2 Parametry sygnałów 1D

1. Wartość średnia sygnału w przedziale:

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad \bar{x} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \quad (13)$$

2. Energia sygnału ($x(t)$ - rzeczywistego, $z(t)$ - zespolonego)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]^2 \quad E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt \quad (14)$$

3. Moc średnia sygnału w przedziale

$$P_x(t_1, t_2) = \bar{x^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt \quad P_z(t_1, t_2) = \bar{z^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |z(t)|^2 dt$$

$$P_x(n_1, n_2) = \bar{x^2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]^2 \quad P_z(n_1, n_2) = \bar{z^2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |z[n]|^2 \quad (15)$$

4. Wartość skuteczna sygnału

$$\sqrt{P_x} \quad (16)$$

5. Wariancja sygnału wokół $\bar{x}$ w przedziale

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \bar{x}]^2 dt$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} [x[n] - \bar{x}]^2 \quad (17)$$

6. Momenty zwykłe m -tego rzędu

$$\bar{\tau}_x^m = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m x(t) dt \quad \bar{k}_x^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^m x[n] \quad (18)$$

3 Splot (Konwolucja)

Splotem sygnałów $f(t)$ i $g(t)$ nazywamy funkcję $h(t)$:

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (19)$$

$$h[n] = f[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \cdot g[n - m] \quad (20)$$

Funkcja ta ma następujące własności:

- jest przemienne:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (21)$$

- jest łączna:

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t) \quad (22)$$

- Delta Diraca jest elementem neutralnym dla splotu:

$$\delta(t) * f(t) = f(t) \quad (23)$$

- jest rozdzielcza względem dodawania:

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (24)$$

4 Korelacja

Korelacja dwóch sygnałów $f(t)$ i $g(t)$ dana jest następującym wzorem:

$$R_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g^*(\tau - t) d\tau \quad (25)$$

$$R_{fg}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \cdot g^*[k - n] \quad (26)$$

gdzie g^* - sprzężenie liczby zespolonej. Korelacja sygnału z samym sobą nosi nazwę autokorelacji:

$$R_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot f^*(\tau - t) d\tau \quad (27)$$

Do najważniejszych własności funkcji korelacji zaliczamy:

- Symetryczność:

$$R_{fg}(t) = R_{gf}^*(-t), \quad R_{ff}(t) = R_{ff}^*(-t) \quad (28)$$

- dla dowolnego przesunięcia τ wartość bezwzględna funkcji autokorelacji jest mniejsza lub równa funkcji autokorelacji dla zerowego przesunięcia:

$$|R_{ff}(\tau)| \leq R_{ff}(0) \quad (29)$$

- Energia sygnału $f(t)$ równa jest jego autokorelacji dla zerowego przesunięcia:

$$E_f = R_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (30)$$

-

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{fg}(\tau) d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) dt \right) \quad (31)$$

5 Polecenia MatLAB

- `sign(t)` - funkcja znaku;
- `sinc(t)` - funkcja sinc. UWAGA, w MATLAB: $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$;
- `exp(t)` - funkcja eksponencjalna, $\exp(x) = e^x$;
- `mean(x)`, `var(x)`, `std(x)` - średnia, wariancja i odchylenie stand. zmiennej `x`;
- `length(x)`, `size(A)` - długość wektora `x` i rozmiar macierzy `A`;
- `conv(x, y, 'rozmiar')` - spłot dwóch sygnałów. Opcje rozmiaru: `'full'`, `'same'`, `'valid'`
- `xcorr(a,b)` - korelacja dwóch sygnałów

6 Zadania

1. Policz analitycznie średnią i energię poniższych sygnałów ciągłych i dyskretnych ($F_s=50$ Hz) o czasie trwania $t=\langle 0, 10 \rangle$. Dodatkowo stwórz i wyświetl poniższe sygnały w MatLAB.
 - prostokątnego (amplituda = 2 w przedziale $\langle 3, 6 \rangle$ s);
 - trójkątnego (wierzchołek w 5 s, amplituda = 2, szerokość = 8 s);
 - $x(t) = 3 - i$;
 - (tylko ciągły): $x(t) = \text{Heaviside}(t - 5) \cdot \sin(2\pi t)$;
 - (tylko MatLAB): Gaussa o średniej 4s, odchyleniu 0.5s i amplitudzie 2.0.
 - (tylko ciągły, dla $t \in \langle 0, \pi/4 \rangle$): $x(t) = \sin(2t) + i \cdot \cos(2t)$
 - $x(t) = 2t - 1$
 - $x(t) = \text{Heaviside}(5 - t) \cdot (3 - 4i)$
2. Policz (**ręcznie** i w MatLAB) spłot i korelację następujących par sygnałów:
`A = [-1, 0, 2, -4]` oraz `B = [2, 0, 1]`.
`C = [1 3 3 3 2 2]` oraz `D = [-1 0 1]`.
`E = [0 0 1 0 0]` oraz `F = [0.25 0.5 0.25]`.
`G = [1+i, 1-i, 0, i, 4]` oraz `H = [1, 1+i, -2]`.
3. Policz (**w programie MatLAB**) spłot funkcji gaussowskiej $f(t)$ o parametrach ($\text{sr}=0.0$, $\text{std}=0.2$) z funkcją Sza $g(t) = \text{III}(t)$ (dla $n \in \mathbb{N}$) dla $t \in \langle -5, 10 \rangle$ próbkowanych z $F_S = 50\text{Hz}$. Ćwiczenie powtórz dla różnych wartości odchylenia standardowego funkcji $f(t)$.
4. Policz (**w programie MatLAB**) spłot sygnału harmonicznego $f(t)$ o amplitudzie $A_1 = 1.0$, okresie $\omega_1 = 0.5$ s i czasie trwania $T_1 = 10$ s z sygnałem prostokątnym $g(t)$ o czasie trwania $T_2 = 0.2$ s i amplitudzie $A_2 = 1/(T_2 \cdot F_S)$. Oba sygnały próbkowane są z częstotliwością $F_S = 100$ Hz. Stwórz wykresy sygnałów oraz ich spłotu.
5. Zasymuluj (MatLAB) sekcję sejsmiczną zarejestrowaną (24 odbiorniki, $F_S = 20$ KHz, czas rejestracji 0.25 s) dla płaskiego ośrodka dwuwarstwowego ($h_1 = 20$ m, $v_1 = 400$ m/s, $v_2 = 1000$ m/s). Odległość pierwszego odbiornika od punktu strzałowego: 20 m, odległość między odbiornikami: 2 m. Sygnał źródła: sinc (okres 0.01 s, czas trwania $\langle -0.01, 0.05 \rangle$ s).