

Transformata Fouriera

1 Definicje

Para transformat Fouriera dana jest wzorami:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Spektrum Transformaty Fouriera można przedstawić w postaci biegunowej używając widma amplitudowego $|F(\omega)|$ i fazowego $\phi(\omega)$:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\phi(\omega)} \quad (3)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}(F(\omega))^2 + \operatorname{Im}(F(\omega))^2} = \sqrt{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} \quad (4)$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(F(\omega))}{\operatorname{Re}(F(\omega))}\right) \quad (5)$$

Para dyskretnych transformat Fouriera (DFT) dana jest wzorami:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right) \quad (6)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \quad (7)$$

W przypadku tej transformaty spotykany jest również zapis, gdzie mnożenie przez czynnik $\frac{1}{N}$ z równ.7 występuje w prostej DFT (równ.6) zamiast w odwrotnej DFT.

2 Polecenia w pakiecie MatLAB

- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera: `fft(x)` oraz `ifft(X)`
- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera 2D: `fft2(x)` oraz `ifft2(X)`
- widmo amplitudowe i fazowe: `abs(X)` oraz `angle(X)`
- część rzeczywista i urojona widma: `real(X)` oraz `imag(X)`
- sprzężenie liczby zespolonej: `conj(z)`
- jednostka urojona: `1i`, `i`, `j`
- wygładzenie widma fazowego: `unwrap(angle(X))`
- przesunięcie zerowej częstotliwości do środka widma: `fftshift(X)` oraz `ifftshift(X)`
- najmniejsza potęga liczby 2 większa lub równa x: `nextpow2(x)`

3 Własności

W tabeli 1 zebrano najważniejsze własności Transformaty Fouriera.

Tabela 1: Własności Transformaty Fouriera

(źródło: http://home.agh.edu.pl/~lesniak/wyklady/geof_syg_w4.pdf)

Własność	wzór
Liniiowość Transformaty Fouriera	$F[\alpha f(t) + \beta f(t)] = \alpha F(\omega) + \beta F(\omega)$
Twierdzenie o podobieństwie	$F[f(\alpha t)] = \frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Twierdzenie o przesunięciu I	$F[f(t - \alpha)] = e^{-i\omega\alpha} F(\omega)$
Twierdzenie o przesunięciu II	$F[f(t)e^{i\alpha t}] = F(\omega - \alpha)$
Twierdzenie o modulacji	$F[f(t)\cos(\alpha t)] = \frac{1}{2}[F(\omega - \alpha) + F(\omega + \alpha)]$
Twierdzenie o różniczkowaniu	$F[f^n(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$
Twierdzenie o różniczkowaniu Transformaty	$F[(-it)^n f(t)] = F^n(\omega)$
Twierdzenie o całkowaniu	$F\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$
Twierdzenie Parsewala	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$
Twierdzenie o wzajemności Rayleigha	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega$
Twierdzenie o splocie	$F[f(t) * g(t)] = F(\omega) \cdot G(\omega)$

4 Zadania

1. Policz transformatę Fouriera (**analitycznie (a,b) oraz w MatLABie (a-d)** dla $F_S = 100Hz$) dla następujących sygnałów:
 - (a) Sygnał prostokątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0)
dla $t \in < -\pi, \pi >$
 - (b) Sygnał trójkątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0)
dla $t \in < -5, 5 >$
 - (c) Sygnał harmoniczny (amplituda 1, okres 1)
dla $t \in < -4\pi, 4\pi >$
 - (d) Sygnał Gaussowski (średnia 0, odchylenie 1)
dla $t \in < -5, 5 >$
2. Policz dyskretną transformatę Fouriera dla wektorów (dla uproszczenia przyjmij, że pierwszy element ma indeks zero, tj. $x[0]=1$)
 $x = [1 \ 0 \ -2 \ 1]$.
 $x = [1+i, \ 2-i, \ 3, \ i]$
 $x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]; \ x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$.
3. Udowodnij równość widm amplitudowych dla dwóch sygnałów prostokątnych o tej samej szerokości i amplitudzie, różniących się położeniem części niezerowej.