copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

Szereg i transformata Fouriera

1 Szereg Fouriera

Szeregiem Fouriera nazywamy rozwinięcie funkcji x(t) dla $t \in < a, a+T >$ w następujący szereg:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] \tag{1}$$

dla następujących współczynników:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) dt \tag{2a}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \tag{2b}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \tag{2c}$$

Dla liczb zespolonych szereg ten zdefiniowany jest następująco:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(\frac{2in\pi t}{T}\right) \tag{3}$$

gdzie:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t) \exp\left(\frac{2in\pi t}{T}\right) dt \tag{4}$$

UWAGA:
dla funkcji parzystej [x(t) = x(-t)], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki b_n są równe zero;
dla funkcji nieparzystej [x(t) = -x(-t)], w przedziale symetrycznym, wszystkie współczynniki $a_0 : a_n$ są równe zero.

2 Transformata Fouriera

Para transformat Fouriera dana jest wzorami:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \tag{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{6}$$

Spektrum Transformaty Fouriera można przedstawić w postaci biegunowej używając widma amplitudowego $|F(\omega)|$ i fazowego $\phi(\omega)$:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\phi(\omega)} \tag{7}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{Re(F(\omega))^2 + Im(F(\omega))^2} = \sqrt{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} \tag{8}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

$$\phi(\omega) = atan\left(\frac{Im(F(\omega))}{Re(F(\omega))}\right) \tag{9}$$

Para dyskretnych transformat Fouriera (DFT) dana jest wzorami:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(\frac{-2\pi ikn}{N}\right) \tag{10}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(\frac{2\pi ikn}{N}\right) \tag{11}$$

W przypadku tej transformaty spotykany jest również zapis, gdzie mnożenie przez czynnik $\frac{1}{N}$ z równ.11 występuje w prostej DFT (równ.10) zamiast w odwrotnej DFT.

2.1 Własności transformaty Fouriera

1. Liniowość:
$$F[\alpha f(t) + \beta f(t)] = \alpha F(\omega) + \beta F(\omega) \tag{12}$$

2. Twierdzenie o podobieństwie:
$$F[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{13}$$

3. Twierdzenia o przesunięciu:
$$F[f(t-\alpha)] = e^{-i\omega\alpha} F(\omega) \tag{14a}$$
$$F[f(t)e^{i\alpha t}] = F(\omega - \alpha) \tag{14b}$$

4. Twierdzenie o modulacji:
$$F[f(t) \cdot cos(\alpha t)] = \frac{1}{2}[F(\omega-\alpha) + F(\omega+\alpha)] \tag{15}$$

5. Twierdzenia o różniczkowaniu:
$$F[f^n(t)] = (i\omega)^n F(\omega) \tag{16a}$$
$$F[(-it)^n f(t)] = F^n(\omega) \tag{16b}$$

6. Twierdzenie o całkowaniu:
$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) \tag{17}$$

7. Twierdzenie Parsevala:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{18}$$

8. Twierdzenie o wzajemności Rayleigha:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega \tag{19}$$

9. Twierdzenie o splocie:
$$F[f(t) * g(t)] = F(\omega) \cdot G(\omega) \tag{20}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl

2.2 Polecenia w pakiecie MatLAB

- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera: `fft(x)` oraz `ifft(X)`
- Prosta i odwrotna szybka transformata Fouriera 2D: `fft2(x)` oraz `ifft2(X)`
- widmo amplitudowe i fazowe: `abs(X)` oraz `angle(X)`
- część rzeczywista i urojona widma: `real(X)` oraz `imag(X)`
- sprzężenie liczby zespolonej: `conj(z)`
- jednostka urojona: `1i`, `i`, `j`
- wygładzenie widma fazowego: `unwrap(angle(X))`
- przesunięcie zerowej częstotliwości do środka widma: `fftshift(X)` oraz `ifftshift(X)`
- najmniejsza potęga liczby 2 większa lub równa x: `nextpow2(x)`

3 Zadania - Szereg

Policz analitycznie oraz w pakiecie MatLAB ($F_S = 100Hz$) szereg Fouriera dla następujących funkcji:

1. sygnału prostokątnego o szerokości 1, amp.= 1, środku t=0 i czasie trwania |t|<1;

$$ODP : x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(0.5n\pi)}{n\pi} \cdot \cos(n\pi t) \right) \tag{21}$$

2. sygnału trójkątnego o szerokości 2, amp.= 1, środku dla t=0 i czasie trwania |t|<2

$$ODP : x(t) = \frac{0.5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos\frac{n\pi t}{2} \right] \tag{22}$$

3. $x(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t \in < -\pi, 0) \\ t & dla\ t \in < 0, \pi > \end{cases}$.

$$ODP : x(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right] \tag{23}$$

4. $x(t) = t^2$, dla $t \in < -\pi, \pi >$

$$ODP : x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \right] \tag{24}$$

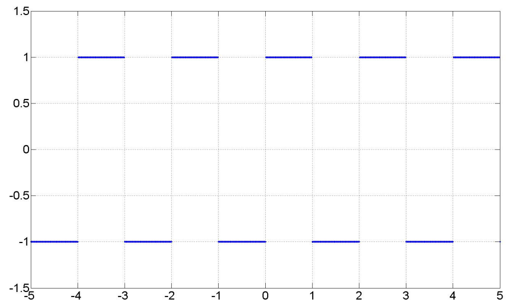
5. $x(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \in (2, 4) \\ 1 + 0.5 \cdot \mathrm{sgn}(t) \cdot t^2 & dla \quad |t| \leqslant 2 \end{cases}$

$$ODP : x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{18}{n^3\pi^3} \left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1 \right) + \frac{12}{n^2\pi^2} \sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{4}{n\pi} \cos\frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \sin\frac{n\pi t}{3} \tag{25}$$

6. dla sygnału widocznego na rys.1.

$$ODP : x(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) \right] \tag{26}$$

copyright: M. Dwornik
dwornik@agh.edu.pl



Rysunek 1: Sygnał okresowy, prostokątny

7. $x(t) = \mathrm{sgn}(2t)\cdot$prostokąt(środek=0, szer.=4, amp.=3) dla $|t| \leqslant 4$

$$ODP : x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \sin\frac{n\pi t}{4} \tag{27}$$

8. $x(t) = \mathrm{sgn}(2t)\cdot$trójkąt(tw=0, szer.=4, amp.=2) dla $|t| \leqslant 4$

9.

$$x(t) = \begin{cases} H(t+2)\cdot(t+2) & dla \quad t \in (-4, 2\rangle \\ -4 & dla \quad t \in (2, 4) \end{cases} \qquad gdzie \quad H(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \geqslant 0 \\ 0 & dla \quad t < 0 \end{cases} \tag{28}$$

4 Zadania - Transformata

1. Policz transformatę Fouriera (**analitycznie (a,b) oraz w MatLABie (a-d) dla** $F_S = 100Hz$) dla następujących sygnałów:
   (a) Sygnał prostokątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0)
   dla $t \in < -\pi, \pi >$
   (b) Sygnał trójkątny (amplituda 1, szerokość 2, środek 0)
   dla $t \in < -5, 5 >$
   (c) Sygnał harmoniczny (amplituda 1, okres 1)
   dla $t \in < -4\pi, 4\pi >$
   (d) Sygnał Gaussowski (średnia 0, odchylenie 1)
   dla $t \in < -5, 5 >$

2. Policz dyskretną transformatę Fouriera dla wektorów (dla uproszczenia przyjmij, że pierwszy element ma indeks zero, tj. x[0]=1)
   x = [1 0 -2 1].
   x = [1+i, 2-i, 3, i]
   x = [1 1 1 1 0 0]; x = [1 2 3 4].

3. Udowodnij równość widm amplitudowych dla dwóch sygnałów prostokątnych o tej samej szerokości i amplitudzie, różniących się położeniem części niezerowej.