Algebra – Zad. domowe nr 1 – Odwz. liniowe
Przestrzenie wektorowe

(1) Czy U to podprzestrzeń liniowa V?

a) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 4y^2\}$

nie $\quad$ np. $(4,1) \in U$, $(16,2) \in U$

$(4,1) + (16,2) = (20,3) \notin U$

$20 \neq 4 \cdot 3^2$

b) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 = 0\}$

$x^2 + y^4 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow U = \{(0,0,z);\ z \in \mathbb{R}\}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (0,0,z) = (0,0,\alpha z) \in U$ $\quad$ tak

$\underset{U}{\underset{\cap}{(0,0,z_1)}} + \underset{U}{\underset{\cap}{(0,0,z_2)}} = (0,0,z_1+z_2) \in U$

(2) • Czy układ $p = 1+x$, $q = 2-3x$, $r = 3-x+5x^2$ stanowi bazę $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \rightarrow$ jeśli $\{p,q,r\}$ liniowo niezal. $\rightarrow$ to baza

$B = (1, x, x^2)$

$p = [1,1,0]_B \quad q = [2,-3,0]_B \quad r = [3,-1,5]_B \qquad r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 3$

tak to baza $\quad B' = (p,q,r)$ $\qquad$ bo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 10 \neq 0$

• współrzędne $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x - 5x^2$ w B'

$w = [a,b,c] = ?$ $\quad X' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 \\ -9/2 \\ -5 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ ćw. $P^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25}$

$PX' = X$

$P = P_{B \to B'}$

$X' = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Zadanie domowe nr 4

Zad. 3 $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ $\quad f(p)(x) = (3-x)\,p''(x) + 4p'(x)$

o macierz f w bazach standardowych $\to$ Bazy $(1, x, x^2)$ i $(1, x)$

$f(1) = 0 \quad f(x) = (3-x)\cdot 0 + 4 = 4 \quad f(x^2) = (3-x)\cdot 2 + 4\cdot 2x = 6x+6$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- $\operatorname{Ker} f = ?$ $\quad p = ax^2+bx+c \quad p' = 2ax+b \quad p'' = 2a$

$f(p)(x) = 0 \iff (3-x)\cdot 2a + 4\cdot(2ax+b) = 0$

$6a - 2ax + 8ax + 4b = \underbrace{6a+4b}_{=0} + \underbrace{6a}_{=0}x = 0$

$a = 0,\ b = 0$

$p = c\ ;\ c \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Ker} f = \{ p(x) = c\ ;\ p \in \mathbb{R}_2[x],\ c \in \mathbb{R} \}$ $\quad \dim \operatorname{Ker} f = 1$

nie monomorfizm

- $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$

lub $= \operatorname{rank} M_f = 2 \implies \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_1[x]$ epimorfizm

Zad. 4 Dane jest odwz. liniowe

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(1,1,1) = (2,2)$, $f(1,0,1) = (1,0)$

$f(0,1,1) = (1,1)$

a) Podaj wzór φ.

b) Wyznacz macierz $A = M_{BC}(f)$ tego odwz. w bazach

$B = \{(3,1,1), (5,1,6), (4,-1,2)\}$, $\quad C = \{(-1,1), (1,0)\}$

c) Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ bazę $C' = \{ c_1' = (1,1),\ c_2' = (2,1) \}$

Wyznacz macierz przejścia $\quad P = P_{C \to C'}$

d) Za pomocą P oblicz współrzędne $\overline{v} \in \mathbb{R}^3$ w bazie C'

jeśli $v = [2,5]_C$

Zadanie domowe nr 4

Zad. 4 (ciąg dalszy)

ad. a) $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ baza standardowa $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} f(1,1,1)=f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=(2,2) \\ f(1,0,1)=f(e_1)+f(e_3)=(1,0) \\ f(0,1,1)=f(e_2)+f(e_3)=(1,1) \end{cases} \implies \begin{aligned} f(e_2)&=(2,2)-(1,0)=(1,2) \\ f(e_1)&=(2,2)-(1,1)=(1,1) \\ f(e_3)&=(1,1)-f(e_2)=(0,-1) \end{aligned}$$

$$f(x,y,z)=x\,f(e_1)+y\,f(e_2)+z\,f(e_3)=x(1,1)+y(1,2)+z(0,-1)$$
$$=(x+y,\ x+2y-z) \quad \text{wzór } f$$

ad. b) $f(3,1,1)=(4,4)=[4,8]_C$

$f(5,1,6)=(6,1)=[1,7]_C$

$f(4,-1,2)=(3,0)=[0,3]_C$

$\alpha\cdot(-1,1)+\beta(1,0)=(\beta-\alpha,\alpha)$

$C=\{(-1,1),(1,0)\}$

$$A=[f]_{BC}=M_{BC}(f)=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ad. c) $C'=\{(1,1),(2,1)\}$ $\quad P=P_{CC'}=?$

$(1,1)=[1,2]_C$, $(2,1)=[1,3]_C$ $\quad P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ad. d) $v=[2,5]_C$ $\quad X=PX'$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix};\quad [\alpha,\beta]_{C'}=v$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_1-w_2]{} \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right] \qquad v=[1,1]_{C'}$$