Egzamin z przedmiotu ALGEBRA WYŻSZA

WFiIS, informatyka stosowana, I rok - 1 termin - 31 stycznia 2024r.

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część zadaniowa

Zadania z tej części należy rozwiązać na własnych kartkach. Każdą kartkę należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. *(38 pkt) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dane jest za pomocą przyporządkowania*

$$\varphi(-1,0,0) = (-1,3,-2,-4),\ \varphi(1,1,0) = (6,-6,2,6),\ \varphi(0,0,4) = (-8,0,4,4).$$

a) (7 pkt) Podaj wzór φ i macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.
b) (5 pkt) Wyznacz jądro odwzorowania φ, podaj jego bazę i określ wymiar.
c) (2 pkt) Określ wymiar obrazu φ.
d) (4 pkt) Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.
e) (12 pkt) W $\mathbb{R}^4$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Wskaż bazę przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$. Czy wskazana baza jest ortogonalna? Jeśli nie jest, metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.
f) (8 pkt) Wyznacz macierz $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ odwzorowania φ w bazach

$$\mathcal{B}' = \big(b_1' = (1,1,0),\ b_2' = (-1,0,0),\ b_3' = (0,1,-1)\big),$$
$$\mathcal{C}' = \big(c_1' = (2,0,1,0),\ c_2' = (-1,1,0,3),\ c_3' = (0,1,1,0),\ c_4' = (1,-1,2,3)\big).$$

Zadanie 2. *(20 pkt) Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych oraz macierz D endomorfizmu f w tejże bazie.*

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

Część testowa

W każdym z zadań należy rozstrzygnąć, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.
Odpowiedzi do zadań należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).
Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe.
Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **2 punkty**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.
Brudnopis z tej części nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie.
Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 3.

a) *Argumentem głównym liczby $w = \frac{(1+i)^{17}}{i^9(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})}$ jest $\frac{\pi}{12}$.*

b) *Zbiór $\{z \in \mathbb{C} :\ \big(\mathrm{Im}(z+1+i)\big)^4 = |4\sqrt{2} - 7i|\}$ jest zbiorem skończonym.*

c) *Nie jest możliwe, by wielomian $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ stopnia 5 miał dwa pierwiastki rzeczywiste i trzy zespolone.*

Verte ↬

Zadanie 4.

a) *Struktura* $(\mathbb{R}, \cdot)$, *gdzie* $\cdot$ *jest mnożeniem liczb, to grupa abelowa.*

b) *Działanie* $\circ$ *określone w zbiorze* $\mathbb{R}$ *wzorem* $\forall a, b \in \mathbb{R} \;\; a \circ b = \log_2(2^a + 2^b)$ *ma element neutralny.*

c) *Niech* $*$ *będzie dowolnym działaniem wewnętrznym w* $\mathbb{R}$, *posiadającym element neutralny* $e \in \mathbb{R}$. *Wówczas, jeśli dla danego elementu* $a \in \mathbb{R}$ *istnieje element symetryczny, to jest on jedyny.*

Zadanie 5. *Dany jest układ równań* $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases}$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$ *jest parametrem.*

a) *Dla każdego* $a > 1$ *układ jest sprzeczny.*

b) *Jeśli układ jest oznaczony, to* $a = 1$ *lub* $a = -\frac{3}{2}$.

c) *Można tak wybrać wartość* a, *by otrzymać układ nieoznaczony.*

Zadanie 6. *Dane są prosta* $l: \; x = 2 - 2y = \frac{3-z}{2}$ *oraz płaszczyzna* $\pi: \begin{cases} x = t - 2s \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$

a) *Prosta* l *jest prostopadła do płaszczyzny* π.

b) *Prosta* l *i płaszczyzna* π *mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.*

c) *Wektor* $\vec{b} = (0, -8, 2)$ *jest prostopadły do prostej* l.

Zadanie 7. *Niech* $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ *będzie odwzorowaniem liniowym.*

a) $\dim Imf \leq 7$

b) *Jeśli* f *jest monomorfizmem, to* f *jest epimorfizmem.*

c) *Jeśli rząd macierzy reprezentującej odwzorowanie* f *w bazach kanonicznych przestrzeni* $\mathbb{R}^7, \mathbb{R}^9$, *jest równy* 1, *to wówczas* $\dim \mathrm{Ker} f = 6$.

Zadanie 8. *Dany jest układ wektorów* $W = \{w_1 = (1, 0, 3, 5, 0),\ w_2 = (2, -1, 3, 4, 0),\ w_3 = (3, -1, -6, 1, 0)\}$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^5$.

a) *Układ* W *jest liniowo niezależny.*

b) *Układ* W *może być uzupełniony do bazy przestrzeni* $\mathbb{R}^5$.

c) $\dim \mathrm{lin} W = 2$.

Zadanie 9. *Niech* $\varphi: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ *będzie odwzorowaniem liniowym.*

a) *Jeśli* $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to* φ *jest izomorfizmem.*

b) *Jeśli* $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to układ wektorów* $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ *jest liniowo niezależny.*

c) *Macierz reprezentująca endomorfizm* φ *w bazie standardowej przestrzeni* $\mathbb{R}_3[x]$ *jest macierzą kwadratową stopnia* 3.

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA WYŻSZA
WFiIS, informatyka stosowana, I rok - 1 termin - 31 stycznia 2024r.

KARTA ODPOWIEDZI do części testowej

Imię i nazwisko ....

Numer grupy ćwiczeniowej ....

Odpowiedzi umieść w poniższej tabeli, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).

Test	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5	Zadanie 6	Zadanie 7	Zadanie 8	Zadanie 9
a							
b							
c							

DLA EGZAMINATORA:

ZALICZENIE		**EGZAMIN**					**OCENA KOŃCOWA**	
Punkty	Ocena	zad.1	zad.2	część testowa	Suma punktów	Ocena	Punkty	Ocena