Egzamin z przedmiotu METODY ALGEBRY LINIOWEJ W FIZYCE
WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 31 stycznia 2024r.

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część zadaniowa

Zadania z tej części należy rozwiązać na własnych kartkach. Każdą kartkę należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. *(40 pkt) Dane jest odwzorowanie*

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi(p)(x) = (3-x)p''(x) + 4xp'(x).$$

a) (4 pkt) Uzasadnij, że odwzorowanie φ jest liniowe.
b) (5 pkt) Wyznacz jądro odwzorowania φ i określ jego bazę oraz wymiar.
c) (2 pkt) Określ wymiar obrazu φ.
d) (4 pkt) Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.
e) (7 pkt) Uzasadnij, że endomorfizm φ jest diagonalizowalny.
f) (10 pkt) Podaj macierz diagonalizującą P oraz otrzymaną w wyniku diagonalizacji macierz diagonalną D.
g) (8 pkt) Zapisz macierz $M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$ operatora liniowego φ w bazie $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1 + x,\ c_2 = -1,\ c_3 = x - x^2\right)$$

Zadanie 2. *(18 pkt) W przestrzeni $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ rozpatrujemy iloczyn skalarny $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.*
Dana jest podprzestrzeń U, której bazę stanowi układ $\{1, x-1, \cos x\}$.
Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji bazy podprzestrzeni U.

Część testowa

W każdym z zadań należy rozstrzygnąć, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.
Odpowiedzi do zadań należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).
Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe.
Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **2 punkty**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.
Brudnopis z tej części nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie.
Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 3.

a) Argumentem głównym liczby $w = \frac{i^7 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}}{(1+i\sqrt{3})^5}$ jest $\frac{\pi}{3}$.

b) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z+1+i| = 1 \ \wedge\ |z+2+i| = |z+i|\}$ jest zbiorem dwuelementowym.

c) Nie jest możliwe, by wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych stopnia 5 miał dwa pierwiastki rzeczywiste i trzy zespolone.

Verte ↬

Zadanie 4.

a) *Struktura* $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$*, gdzie* $\cdot, +$ *jest odpowiednio mnożeniem i dodawaniem wielomianów, jest ciałem.*

b) *Działanie* $\circ$ *określone w zbiorze* $\mathbb{R}$ *wzorem* $\forall a, b \in \mathbb{R} \;\; a \circ b = a \cdot |b|$ *ma element neutralny.*

c) *Zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych stopnia* n *o elementach z* $\mathbb{R}$ *tworzy z działaniem mnożenia macierzy grupę nieprzemienną.*

Zadanie 5. *Dany jest układ równań* $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases}$ *, gdzie* $a \in \mathbb{R}$ *jest parametrem.*

a) *Dla każdego* $a < -2$ *układ jest sprzeczny.*

b) *Jeśli układ jest oznaczony, to* $a = 1$ *lub* $a = -\frac{3}{2}$.

c) *Można tak wybrać wartość* a*, by otrzymać układ nieoznaczony.*

Zadanie 6. *Dane są proste* $l : \begin{cases} x = -s \\ y = 1 + (1+a)s \\ z = 2 - 2as \end{cases}$ *,* $s \in \mathbb{R}$ *oraz* $k : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = at \end{cases}$ *,* $t \in \mathbb{R}$.

a) *Można tak dobrać wartość parametru* $a \in \mathbb{R}$*, by proste* k *i* l *były równoległe.*

b) *Jeśli proste* k *i* l *są skośne, to wówczas* $a = 0$.

c) *Dla każdego* $a < 2$ *proste* k *i* l *mają punkt wspólny.*

Zadanie 7. *W przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *dany jest układ wektorów*

$$W = \{w_1 = (1,0,2,0),\, w_2 = (-1,1,0,2),\, w_3 = (1,1,4,2),\, w_4 = (0,0,-1,0),\, w_5 = (0,2,4,4).$$

a) $\mathrm{lin} W = \mathbb{R}^4$

b) *Z układu* W *można wybrać wektory, które utworzą bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^4$.

c) *Układ* W *jest liniowo niezależny.*

Zadanie 8. a) *Macierz* $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *reprezentuje odbicie względem prostej.*

b) *Macierz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *spełnia równanie* $B^9 = B$.

c) *Jeśli* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *to dwie dowolne bazy ortogonalne pewnej przestrzeni wektorowej, to wówczas macierz przejścia* $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ *jest macierzą ortogonalną.*

Zadanie 9. *Niech* $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ *będzie odwzorowaniem liniowym.*

a) *Jeśli* $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to* φ *jest izomorfizmem.*

b) *Jeśli* $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to układ wektorów* $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ *jest liniowo niezależny.*

c) *Macierz reprezentująca endomorfizm* φ *w bazie standardowej przestrzeni* $\mathbb{R}_4[x]$ *jest macierzą kwadratową stopnia* 4.

Egzamin z przedmiotu METODY ALGEBRY LINIOWEJ W FIZYCE
WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 31 stycznia 2024r.

KARTA ODPOWIEDZI do części testowej

Imię i nazwisko ....

Numer grupy ćwiczeniowej ....

Odpowiedzi umieść w poniższej tabeli, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).

Test	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5	Zadanie 6	Zadanie 7	Zadanie 8	Zadanie 9
a							
b							
c							

DLA EGZAMINATORA:

ZALICZENIE		**EGZAMIN**					**OCENA KOŃCOWA**	
Punkty	Ocena	zad.1	zad.2	część testowa	Suma punktów	Ocena	Punkty	Ocena