

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA WYŻSZA
WFİS, informatyka stosowana, I rok - 3 termin - 19 lutego 2025r.

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część zadaniowa

Zadania z tej części należy rozwiązać na własnych kartkach. Każdą kartkę należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. (37 pkt) Dane jest odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ takie, że

$$\forall p \in \mathbb{R}_3[x] \quad \varphi(p) = q, \quad \text{gdzie} \quad q(x) = x \cdot p''(x) + (1 - 2x) \cdot p'(x).$$

- a) (5 pkt) Uzasadnij, że odwzorowanie φ jest liniowe.
- b) (7 pkt) Wyznacz jądro odwzorowania φ , podaj jego bazę i określ wymiar.
- c) (2 pkt) Określ wymiar obrazu φ .
- d) (3 pkt) Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.
- e) (5 pkt) Wyznacz macierz φ w bazie $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
- f) (8 pkt) Wyznacz widmo operatora φ i uzasadnij, że φ jest diagonalizowalny.

Wyznacz jedną (dowolnie wybraną) podprzestrzeń własną odpowiadającą niezerowej wartości własnej i podaj jej bazę oraz wymiar.

Podaj otrzymaną w wyniku diagonalizacji macierz diagonalną D .

- f) (7 pkt) Zapisz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ operatora liniowego φ w bazie $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = (c_1 = 1 + x, c_2 = -2x, c_3 = -x + x^2, c_4 = 1 + x + x^3)$$

Zadanie 2. (21 pkt) W przestrzeni $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ rozpatrujemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- a) (2 pkt) Oblicz długość wektora $p = \sin x$.
- b) (10 pkt) Dana jest podprzestrzeń liniowa $U = \text{lin}\{1, x, x^2\}$. Czy podana baza przestrzeni U jest ortogonalna? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli nie, metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.
- c) (9 pkt) Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie znalezioną w poprzednim podpunkcie bazą ortogonalną przestrzeni U . Niech $\Omega = \text{lin}\{c_1, c_2\}$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $v = e^x$ na podprzestrzeń Ω .

Część testowa

W każdym z zadań należy rozstrzygnąć, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe. Odpowiedzi należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując we właściwym polu odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz). Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe.

Za część testową egzaminu można otrzymać maksymalnie 42 punkty.

Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **2 punkty**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.

Jeśli w danym zadaniu wszystkie trzy stwierdzenia ocenisz poprawnie, otrzymasz za to zadanie **dotatkowy 1 punkt**.

Brudnopis z tej części nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie.

Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 3.

- a) $\arg \left[\frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})^6} \right] \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
- b) Równanie $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
- c) Niech $A \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem rozwiązań równania $z^3 = 8 + 2i$. Wówczas $\forall z \in A \operatorname{Im}(z) \neq 0$.

Zadanie 4.

- a) $(\mathbb{R}_5[x], +)$ jest grupa abelową.
- b) Rozważmy przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej $(A, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Zbiór $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych w $\mathbb{R}$ stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni $(A, +, \mathbb{R}, \cdot)$.
- c) Niech $\circ$ będzie działaniem w zbiorze $\mathbb{R}$ danym wzorem $x \circ y = x^y$. Działanie $\circ$ jest łączne.

Zadanie 5.

- a) Niech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$.
- b) Niech π_1 oraz π_2 to dwie dowolne płaszczyzny. Niech A będzie punktem należącym do π_1 , zaś A' rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 . Wówczas $|\overrightarrow{AA'}|$ jest odległością płaszczyzny π_1 od płaszczyzny π_2 .
- c) Zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1-x}{2} = \frac{y}{3} = z\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 6.

- a) Jeśli $A \in M_2(\mathbb{R})$ jest trójkątna górna i ortogonalna, to wówczas A jest diagonalna.
- b) Jeśli $A \in M_5(\mathbb{R})$ oraz $A^T = -A$, to wówczas A jest osobliwa.
- c) Jeśli $A = A^{-1}$, to wówczas $A = I$ lub $A = -I$.

Zadanie 7.

- a) Niech $\varphi : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^5$ będzie odwzorowaniem liniowym. Możliwe jest, by $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$.
- b) Niech $Z = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : r(A) = 1\}$. Zbiór Z jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_3(\mathbb{R})$.
- c) Dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ układ równań $\begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest układem oznaczonym.

Zadanie 8.

- a) Nie istnieje macierz $A \in M_2(\mathbb{R})$ taka, że $A^2 + I = 0$.
- b) Rząd macierzy diagonalizowalnej jest równy liczbie jej niezerowych wartości własnych (licząc z krotnościami).
- c) Jeśli φ jest endomorfizmem, to wówczas złożenie $\varphi \circ \varphi$ również jest endomorfizmem.

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA WYŻSZA
WFİIS, informatyka stosowana, I rok - 3 termin - 19 lutego 2025r.

KARTA ODPOWIEDZI do części testowej

Imię i nazwisko

Numer grupy ćwiczeniowej

Odpowiedzi umieść w poniższej tabeli, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).

Test	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5	Zadanie 6	Zadanie 7	Zadanie 8
a						
b						
c						
Punkty						

SUMA PUNKTÓW Z CZĘŚCI TESTOWEJ:

DLA EGZAMINATORA:

ZALICZENIE		EGZAMIN					OCENA KOŃCOWA	
Punkty	Ocena	zad.1	zad.2	część testowa	Suma punktów	Ocena	Punkty	Ocena