

Egzamin z przedmiotu METODY ALGEBRY LINIOWEJ W FIZYCE

WFİIS, fizyka techniczna, I rok - 2 termin - 12 lutego 2025r.

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część zadaniowa

Zadania z tej części należy rozwiązać na własnych kartkach. Każdą kartkę należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Zadanie 1. (31 pkt) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

Dana jest podprzestrzeń liniowa $U = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (5, 1, 1, 5), (2, 0, 0, 2), (0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})\} \subset \mathbb{R}^4$.

- (4 pkt) Podaj bazę przestrzeni U i określ $\dim U$.
- (12 pkt) Czy znaleziona baza przestrzeni U jest ortogonalna?
Jeśli nie, metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.
- (4 pkt) Podaj bazę ortonormalną przestrzeni U .
- (3 pkt) Sprawdź, czy wektor $v = (1, 1, -1, 4)_{\mathcal{B}_k^4}$ należy do U .
- (8 pkt) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, -1, 4)_{\mathcal{B}_k^4}$ na podprzestrzeń U . Podaj współrzędne tego rzutu w bazie kanonicznej $\mathcal{B}_k^4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 2. (27 pkt) Dane jest odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ takie, że $\varphi(a, b, c) = (2a - b) + (2a + 2b)x + (b + c)x^2$.

- (6 pkt) Uzasadnij, że φ jest liniowe.
- (4 pkt) Podaj macierz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, zaś $\mathcal{B}_k^3$ oznacza bazę kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
- (10 pkt) Czy φ jest izomorfizmem? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak, wyznacz wzór odwzorowania odwrotnego φ^{-1} .
- (7 pkt) W przestrzeniach $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}_2[x]$ rozpatrujemy bazy

$$\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1, 3), c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (0, 1, 0)), \quad \mathcal{D} = (d_1 = 1 + x^2, d_2 = 1 + x, d_3 = -1).$$

Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Część testowa

W każdym z zadań należy rozstrzygnąć, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.

Odpowiedzi należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując we właściwym polu odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).

Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe.

Za część testową egzaminu można otrzymać maksymalnie 42 punkty.

Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **2 punkty**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.

Jeśli w danym zadaniu wszystkie trzy stwierdzenia ocenisz poprawnie, otrzymasz za to zadanie **dodatkowy 1 punkt**.

Brudnopis z tej części nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie.

Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 3.

- a) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = |z|\}$ ma skończenie wiele elementów.
- b) Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w ciele $\mathbb{C}$.
- c) $e^{i\alpha} \neq 0$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.

- a) Niech $z = (1 - i\sqrt{3})^7(2 - 2i)^{20}$. Wówczas $|z| = 2^{37}$.
- b) Zbiór $\mathbb{R}$ wraz z działaniem $\circ$ danym wzorem $x \circ y = x + y + xy$ jest grupą abelową.
- c) Zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia 5 z zerami na przekątnej wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

Zadanie 5. Dane są proste $k : \begin{cases} x = 1 \\ y = ps \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ oraz $l : \begin{cases} x = 1 + pt \\ y = 2 + t \\ z = p \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

- a) Jeśli proste k i l są skośne, to $p \neq 0$.
- b) Dla $p = 2$ proste przecinają się w punkcie $(1, 2, 2)$.
- c) Dla każdego $p \in \mathbb{R}$ proste nie mają punktów wspólnych.

Zadanie 6. Dane są macierze $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

- a) $\det(A - B) = \det A - \det B$
- b) $\det(AB) = \det(BA)$
- c) $\det(A^2 - I) = \det(A - I) \cdot \det(A + I)$

Zadanie 7.

- a) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 0, x + y + z)$ jest diagonalizowalny.
- b) Jeśli U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^5$ taką, że $\dim U = 5$, to wówczas $U = \mathbb{R}^5$.
- c) Niech $S \subset \mathbb{R}^4$ będzie dowolnym zbiorem wektorów. Jeśli $(0, 0, 0, 0) \in S$, to wówczas układ S jest liniowo zależny.

Zadanie 8.

- a) Jeśli $0 \in \text{Spec}(A)$, to wówczas kolumny macierzy A są liniowo niezależne.
- b) Jeśli $0 \in \text{Spec}(A)$, to wówczas $\det(A^2) = 0$.
- c) Jeśli $\chi_A(t) = (1-t)(3-t)^2(2-t)^3$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A , to A jest macierzą kwadratową stopnia 6 i taką, że $\det A = 6$.

Egzamin z przedmiotu METODY ALGEBRY LINIOWEJ W FIZYCE

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 2 termin - 12 lutego 2025r.

KARTA ODPOWIEDZI do części testowej

Imię i nazwisko

Numer grupy ćwiczeniowej

Odpowiedzi umieść w poniższej tabeli, wpisując odpowiednio **P** (prawda) lub **F** (fałsz).

Test	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5	Zadanie 6	Zadanie 7	Zadanie 8
a						
b						
c						
Punkty						

SUMA PUNKTÓW Z CZĘŚCI TESTOWEJ:

DLA EGZAMINATORA:

ZALICZENIE		EGZAMIN					OCENA KOŃCOWA	
Punkty	Ocena	zad.1	zad.2	część testowa	Suma punktów	Ocena	Punkty	Ocena