

ALGEBRA - Kartkówka 3 - Zestaw A

Łącznie można otrzymać 20 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. Czy U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V ? Odpowiedź uzasadnij.

a) (2 pkt) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0 \wedge 3x - 4y + \frac{3}{2}z = 0\}$

b) (2 pkt) $V = \mathbb{R}[x]$, $U = \{p \in \mathbb{R}[X] : p(1) + p(2) = 0\}$

Zadanie 2. (3 pkt) Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni liniowej

$$W = \text{lin}\{(1, 6, 7, 8), (2, 1, 3, 5), (2, 3, 5, 7), (3, 1, 4, 7)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 3. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest za pomocą przyporządkowania

$$f(1, 1) = (1, 2, 0), f(0, 1) = (0, -1, 3).$$

a) (2 pkt) Podaj wzór $f(x, y)$.

b) (2 pkt) Wyznacz jądro i obraz odwzorowania f oraz podaj ich bazy i wymiary.

c) (1 pkt) Czy f jest monomorfizmem/epimorfizmem?

Zadanie 4. Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, x + 2y - z)$.

a) (1 pkt) Wyznacz macierz A tego odwzorowania w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

b) (2 pkt) Wyznacz macierz $A' = [\varphi]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ tego odwzorowania w bazach

$$\mathcal{B} = \{b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)\}, \quad \mathcal{C} = \{c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)\}.$$

c) (3 pkt) Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C}' = \{c'_1 = (1, 1), c'_2 = (2, 1)\}$. Wyznacz macierz przejścia $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{C}'$.

d) (2 pkt) Wykorzystując macierz P wyznacz współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^2$ w bazie $\mathcal{C}'$, jeżeli

$$v = [2, 5]_{\mathcal{C}}.$$
