

TEMAT: *Zbiory i relacje. Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Notacja

Przyjmujemy następującą notację.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ zbiór liczb naturalnych
 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
 $\mathbb{Z}$ zbiór liczb całkowitych
 $\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych
 $\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych

Oznaczenia kwantyfikatorów

$\forall$ kwantyfikator ogólny (duży) *dla każdego*
 $\exists$ kwantyfikator szczegółowy (mały) *istnieje*
 $\exists!$ *istnieje dokładnie jeden*

Symbol sumy i iloczynu

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ to dowolny ciąg liczb.

Sumę $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^n a_i$. Symbol i to wskaźnik sumowania lub indeks sumowania, m to dolna granica sumowania, zaś n to górna granica sumowania.

Zauważmy że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzą równości
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n)$ oraz
 $c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$, czyli

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i.$$

Przykład 1.1.1. $\sum_{i=1}^6 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$\sum_{i=5}^9 \frac{i}{i+2} = \frac{5}{7} + \frac{6}{8} + \frac{7}{9} + \frac{8}{10} + \frac{9}{11}$

$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ oznaczamy symbolem $\prod_{i=1}^n a_i$. Symbol i to wskaźnik iloczynu, m to dolny wskaźnik iloczynu, zaś n to górny wskaźnik iloczynu.

Przykład 1.1.2. $\prod_{i=0}^6 (9-i) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (-1) \cdot n = n!$$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ razy}} = \prod_{i=1}^n x$$

Definicja 1.1.3. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Analogicznie definiujemy

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Oznaczamy $A^2 = A \times A$ oraz $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-razy}}.$

Przykład 1.1.4. Wyznacz $A \times B$, $B \times A$, B^2 .

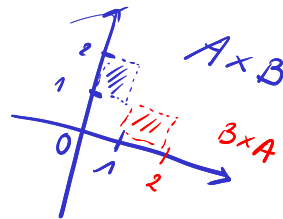
i) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 7\}$

$$A \times B = \{(3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 5), (5, 7)\}$$

$$B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\}$$

$$B^2 = \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (7, 7)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$



ii) przedziały $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $B = (1, 2) \subset \mathbb{R}$

$$A \times B = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 1 < y < 2\}$$

$$B \times A = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$$

iii) $A = B = \mathbb{R}$

$$A \times B = B \times A = A^2 = B^2$$

Oznaczamy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ - płaszczyzna rzeczywista

1.2 Działania wewnętrzne i ich własności

Niech A będzie zbiorem niepustym.

$$(a, b) \mapsto a$$

*h np. 0 **

Definicja 1.2.1. Dowolną funkcję $h : A \times A \rightarrow A$ nazywamy działaniem wewnętrznym w zbiorze A . Wartość funkcji $h(a, b) \in A$ nazywamy wynikiem działania dla pary argumentów $a, b \in A$.

Przykład 1.2.2. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

$$(\mathbb{N}, +)$$

ii) Odejmowanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

$$(\mathbb{N}, -)$$

iii) Dodawanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Własności działań wewnętrznych

niewymiarowe

$$(1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 1$$

Definicja 1.2.3. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym.

i) Działanie $*$ nazywamy *przemienne*, jeśli $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$.

ii) Działanie $*$ nazywamy *łącznym*, jeśli $\forall a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

$$a * b * c$$

iii) Element $e \in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli

$$\exists e \in A \quad \forall a \in A \quad a * e = e * a = a.$$

Przykład 1.2.4. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemienne w $\mathbb{R}$.
 0 jest elementem neutralnym.

ii) Mnożenie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemienne w $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 jest elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.2.5. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $e_1, e_2 \in A$ będące elementami neutralnymi w A . Wówczas $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. $\square$

Przykład 1.2.6. Niech X to dowolny zbiór.

i) Zbiór pusty $\emptyset$ jest elementem neutralnym w $(P(X), \cup)$.

↓ *moderna wszystkich podzbiorów*

ii) Zbiór X jest elementem neutralnym w $(P(X), \cap)$.

zbiorem X

Definicja 1.2.7. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e \in A$. Dla dowolnego $a \in A$ każdy element $a' \in A$ taki, że $a * a' = a' * a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.

$$\forall a \in A \exists a' \in A \quad \begin{cases} a * a' = e \\ a' * a = e \end{cases}$$

Przykład 1.2.8. i) W $(\mathbb{R}, +)$ elementem symetrycznym do 5 jest -5
(tzw. element przeciwny).

$$5 + (-5) = 0 \quad e=0$$

ii) W $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ elementem symetrycznym do 5 jest $\frac{1}{5}$ (tzw. element odwrotny).

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5$$

iii) W $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$, elementem neutralnym jest -1 , zaś elementem symetrycznym do x jest $-2 - x$.

Twierdzenie 1.2.9. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

Dowód. Rozważmy zbiór A z działaniem łącznym $\circ$. Niech e będzie elementem neutralnym działania $\circ$. Niech a', a'' to dwa elementy symetryczne do $a \in A$. Wówczas

$$\begin{aligned} a \circ a' = e &\Rightarrow a'' \circ (a \circ a') = a'' \circ e \\ (a'' \circ a) \circ a' &= a'' \\ e \circ a' &= a'' \\ a' &= a'' \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Podstawowe struktury algebraiczne

Struktura algebraiczna - zbiór wraz z działaniami wewnętrznymi w tymże zbiorze

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $*$: $G \times G \rightarrow G$ działaniem wewnętrznym w G .

Definicja 1.3.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *monoidem*, jeżeli działanie jest łączne i posiada element neutralny.

iii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G .

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej*, *monoidzie przeminnym*, *grupie przemiennej (abelowej)*.

Przykład 1.3.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Czy podane struktury to półgrupy/grupy (przemienne)?

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{Q}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^*, +)$	$(\mathbb{R}^*, \cdot)$
wewnętrzność	✓	✓	✓	✓	nie $-1 + 1 = 0$ $0 \notin \mathbb{R}^*$	✓
łączność	✓	✓	✓	✓		✓
przemienność	✓	✓	✓	✓		✓
el. neutralny	brak $0 \notin \mathbb{N}$	✓ <u>$1 \in \mathbb{Z}$</u>	✓ $0 \in \mathbb{Q}$	✓ $1 \in \mathbb{Q}$		✓ $1 \in \mathbb{R}^*$
el. symetryczny		brak $2 \cdot b = 1$ $b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	✓ $a + a' = 0$ $a' = -a \in \mathbb{Q}$	brak $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ nie dla $a = 0$		✓ $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
	półgrupa przemienna bez el. neutr.	monoid przemienny	grupa abelowa	monoid przemienny		grupa abelowa

Przykład 1.3.3. $(\mathbb{Z}, +)$ jest grupą przemenną. Rozwiązując w $\mathbb{Z}$ równanie $x + 5 = 8$, korzystamy z własności działania w grupie.

$$(\mathbb{Z}, +)$$

$$-5 + (-5)$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= 8 \\ (x + 5) - 5 &= 8 - 5 \quad \text{istnieje element przeciwny do 5, należący do } \mathbb{Z} \\ x + (5 - 5) &= 3 \quad \text{dodawanie jest łączne w } \mathbb{Z} \\ x + 0 &= 3 \quad \text{istnieje element neutralny} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Przykład 1.3.4. Niech $X = \{1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X, \circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Jeśli $a, b, c \in X$, to istnieją $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ takie, że $a = 2^n, b = 2^m, c = 2^k$.

wewnętrzne $a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in A$

przemienne $a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \circ a$

łączne $(a \circ b) \circ c = 2^{n+m} \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n \cdot 2^{m+k} = a \circ (b \circ c)$

el. neutralny $e = 2^s, s \in \mathbb{N}_0 \quad a \circ e = a \Leftrightarrow 2^{n+s} = 2^n \Rightarrow s = 0, e = 1 \in X$

brak el. odwrotnego $a \circ b = 1 \Leftrightarrow 2^{n+m} = 2^0 \Leftrightarrow m = -n \Rightarrow m = -n \notin \mathbb{N}_0$

Wniosek: monoid przemienny (tj. półgrupą przemienną z jedyneką)

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

O innym ciekawym przykładzie grupy można przeczytać w dodatku na końcu wykładu.

Definicja 1.3.5. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \rightarrow A$, $* : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \wedge c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

$$\mathbb{R} \quad (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedyneką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemennym* lub *komutatywnym*.

Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna	
$\circ / +$	dodawanie	$\ast / \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

$$\begin{array}{ll}
 na = \underbrace{a + \dots + a}_n, & n \in \mathbb{N} \\
 0 \cdot a = 0 & \\
 m \in \mathbb{Z}, m < 0 & ma = \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_m
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \\
 a^0 = e = e = 1 & \\
 a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_n
 \end{array}$$

Definicja 1.3.6. Zespół $(K, \circ, \ast)$ złożony ze zbioru K zawierającego co najmniej dwa elementy i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : K \times K \rightarrow K$, $\ast : K \times K \rightarrow K$ nazywamy *ciałem*, jeśli

- $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$),
- $(K \setminus \{e_\circ\}, \ast)$ jest grupą abelową,
- działanie $\ast$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.

(R, +) (R, +, \cdot)
(R \setminus \{0\}, \cdot)
e_+ = 0

Zatem ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_\ast \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne.

Zatem w ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący:

$$\frac{a}{b} := a \ast b^{-1}, \quad a, b \in K, b \neq 0.$$

Przykład 1.3.7. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych

$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała

$(\mathbb{R}^\ast, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów ma strukturę pierścienia przemiennego jedynką.

v) $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ zbiór wszystkich funkcji wymiennych jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji ma strukturę ciała.

- vi) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
 $+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem¹ (tzw. *ciało reszt modulo p*). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało	$+_5$	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	0
	2	2	3	4	0	1
	3	3	4	0	1	2
	4	4	0	1	2	3
	$\cdot_5$	0	1	2	3	4
	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4
	2	0	2	4	1	3
	3	0	3	1	4	2
	4	0	4	3	2	1

Zauważmy, że w ciele $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zachodzi równość $5 \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{5 \text{ razy}} = 0$.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem	$+_4$	0	1	2	3
	0	0	1	2	3
	1	1	2	3	0
	2	2	3	0	1
	3	3	0	1	2
	$\cdot_4$	0	1	2	3
	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3
	2	0	2	0	2
	3	0	3	2	1

Definicja 1.3.8. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A$, $a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy *dzielnikami zera*, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwaga 1.3.9. W ciele nie ma dzielników zera.

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. $\square$

Definicja 1.3.10. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem. Niech 1 oznacza element neutralny mnożenia, zaś 0 element neutralny dodawania w ciele. Najmniejszą liczbę naturalną n taką, że

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} = 0,$$

nazywamy *charakterystyką ciała K* i oznaczamy symbolem $\text{char}(K)$. Jeśli taka liczba naturalna nie istnieje, mówimy, że ciało K jest *charakterystyki zero*.

¹Jest to przykład ciała o skończonej liczbie elementów. Tego typu ciała nazywamy *ciałami skończonymi* lub inaczej *ciałami Galois*.

Można wykazać, że charakterystyka dowolnego ciała albo jest równa zero albo jest *liczbą pierwszą* p . Ciała $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$ są ciałami charakterystyki zero, zaś $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem charakterystyki dodatniej, mianowicie $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$. Każde ciało o skończonej liczbie elementów jest ciałem charakterystyki dodatniej. Ciała o nieskończonej liczbie elementów mogą mieć tak charakterystykę dodatnią jak i równą zero. Przykładem ciała o nieskończonej liczbie elementów, którego charakterystyka jest dodatnia, jest ciało funkcji wymiernych o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Przykład 1.3.11. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$(\mathbb{C}, +)$ jest grupą abelową.

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$

Działanie $+$ jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ jest $(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

łączność: $L = P$

$$\begin{aligned} L &= (a, b) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= (a x_1 x_2 - a y_1 y_2 - b x_1 y_2 - b x_2 y_1, a x_1 y_2 + a x_2 y_1 + b x_1 x_2 - b y_1 y_2) \\ P &= [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2) = (a x_1 - b y_1, a y_1 + b x_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ &= (a x_1 x_2 - b y_1 x_2 - a y_1 y_2 - b x_1 y_2, a x_1 y_1 - b y_1 y_2 + a y_1 x_2 + b x_1 x_2) \end{aligned}$$

el. neutralny: $e = (1, 0)$

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1, 0) \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1 - 0 \cdot y_1, 1 \cdot y_1 + 0 \cdot x_1) = (x_1, y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$:

$$(x_1, y_1) \cdot (a, b) = (1, 0) \Leftrightarrow (a x_1 - b y_1, a y_1 + b x_1) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1, y_1) \neq (0, 0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad b = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$, bowiem $L = P$.

$$L = (a, b) \cdot [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (a x_1 + a x_2 - b y_1 - b y_2, a y_1 + a y_2 + b x_1 + b x_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] + [(a, b) \cdot (x_2, y_2)] = (a x_1 - b y_1, a y_1 + b x_1) + (a x_2 - b y_2, a y_2 + b x_2)$$

Definicja 1.3.12. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.