

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciała liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto n} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto \frac{n}{1}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto (x,0)]{h} \mathbb{C}$$

complex numbers

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$$X^2 - 2 = 0$$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

$$i^2 + 1 = 0$$

$$i^2 = -1$$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto (x, 0)} \Omega$$

$$z = x + iy$$

$$z \in \mathbb{C}$$

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$
 $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$

łączność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$
 $[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia

el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$
 $= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że

$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$. ← zgodne z działaniami

Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujemy $i := (0, 1)$ tzw. jednostka urojona. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(x, 0)}_{x} + (0, 1) \underbrace{(y, 0)}_y = \boxed{x + iy}$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ to tzw. postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa) liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy Re z . Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy częścią urojoną liczby z i oznaczamy Im z . Liczby postaci iy , $y \in \mathbb{R}$ nazywamy czysto urojonymi.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i)(4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

$$w = \frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

$$z \cdot \bar{z} = (x_1 + iy_1) \cdot (x_1 - iy_1) = x_1^2 - i^2 y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \quad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

domnażanie przez

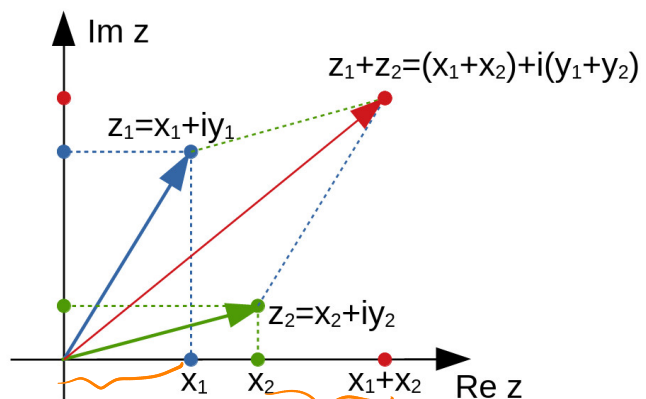
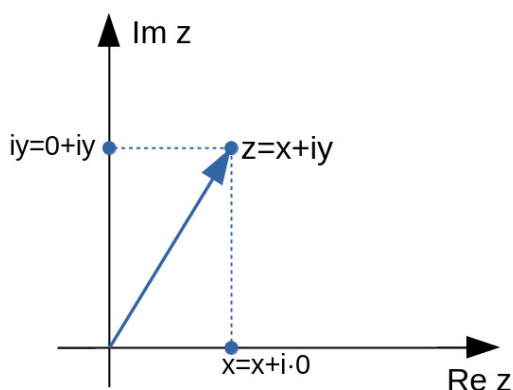
czynniki sprzężony

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

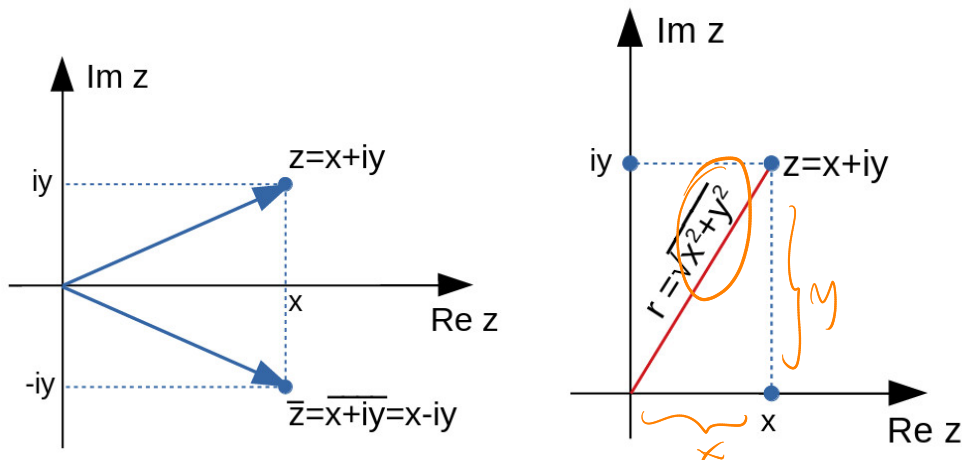
Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$



Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy liczbą sprzężoną do liczby z . Oznaczamy ją $\bar{z}$.
 ii) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z . Oznaczamy ją $|z|$.

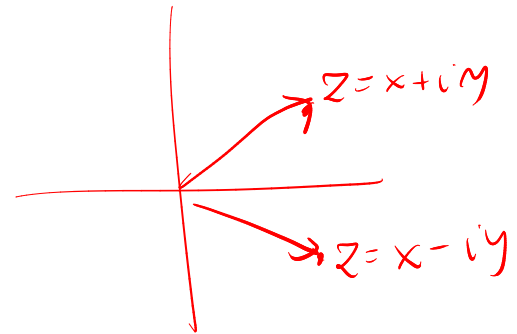


$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$

Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2$
 ii) $\operatorname{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
 iii) $\overline{\bar{z}} = z$
 iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$
 vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
 vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
 viii) $\operatorname{Re}z \leq |\operatorname{Re}z| \leq |z|$, $\operatorname{Im}z \leq |\operatorname{Im}z| \leq |z|$
 ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$



$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

viii) $\operatorname{Re}z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

x) $1 = \operatorname{Re}1 = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2}\right) \stackrel{i)}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \stackrel{\text{def}}{\leq} \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \stackrel{iv)v)}{=} \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \Rightarrow$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \wedge |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|$

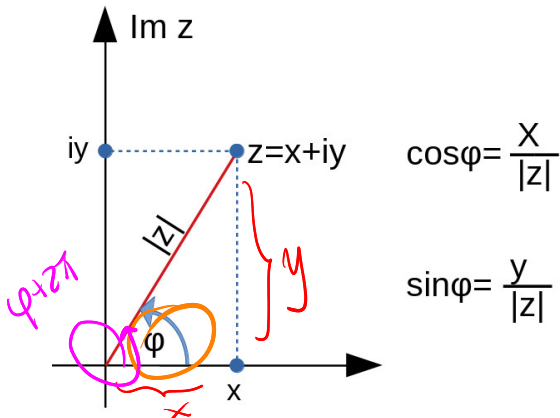
□

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|}$$

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z .

Gdy $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = 7$$

$$z = 7(1 + 0i)$$

$$\varphi = 0 + 2k\pi$$

$$\arg z = 0$$

$$z = 7(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$z = -i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$z = 1(0 + (-1) \cdot i)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = -1 \end{cases}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg z = \frac{3}{2}\pi$$

$$-i = 1(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$$

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i$$

$$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$$

$$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg z = \frac{7}{6}\pi$$

$$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$$

$$27 = 9 \cdot 3$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

III ćwarta

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wówczas:

i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$,

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$,

iii) $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ tzw. wzór de Moivre'a

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$
 $= |z_1| \cdot |z_2| \left(\underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha + \beta)} \right)$

ii) analogicznie

iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. $\square$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi \text{ z II ćwiartki}$$

Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

METODA II: $z = -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i^2 \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right) =$
 $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10} \left(\cos\left(\frac{140}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{140}{12}\pi\right) \right) = 2^{10} \left(\cos\left(\frac{35}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{35}{3}\pi\right) \right) =$$

$$= 2^{10} \left(\cos\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right) = 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2^{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) =$$

$$= 2^9(1 - \sqrt{3}i)$$

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

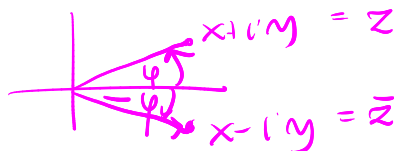
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (k = 0 \text{ lub } k = -1)$

$$\text{ii) } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (k = 0 \text{ lub } k = -1)$$

$$\text{iii) } \arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

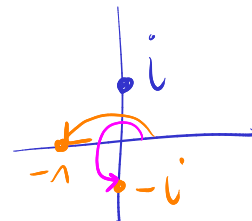
$$\text{iv) } \arg \bar{z} = 2\pi - \arg z, \text{ gdy } \arg z \neq 0$$



Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$. Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.

$$\text{iv) } z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ oraz } 0 = \arg(|z|^2) = \arg z + \arg \bar{z} + 2k\pi, \text{ skąd } \arg \bar{z} = -2\pi - \arg z \quad \square$$

Przykład 2.2.6. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\arg(-1) = \pi$ $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$
 $i = (-1) \cdot (-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$



Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z .

$$\text{Przykład 2.2.7. a) } e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$$

$$\text{b) } e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\text{i) } e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}, \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}},$$

$$\text{ii) } (e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iii) } e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iv) } e^{i\alpha} \neq 0, \quad |e^{i\alpha}| = 1.$$

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.

iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos \alpha = 0$, to $\sin \alpha = \pm 1$. $\square$

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2 e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

$$\text{i) } z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)},$$

$$\text{ii) } z^k = r^k e^{ik\varphi}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iii) } \bar{z} = r e^{-i\varphi}.$$

Dowód. iii) Jeśli $\arg z = \varphi$, to $\arg \bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi-\varphi)i} = e^{2\pi} e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. $\square$

Wzory Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

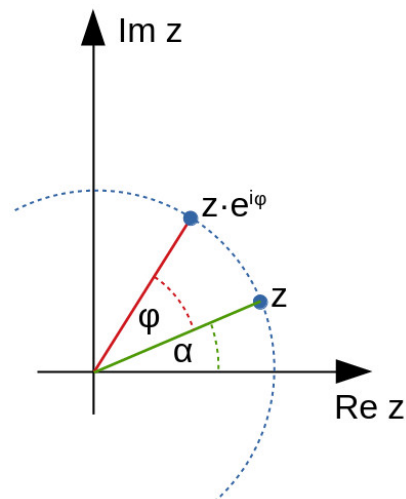
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ

$$z = re^{i\alpha}$$

$$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$$

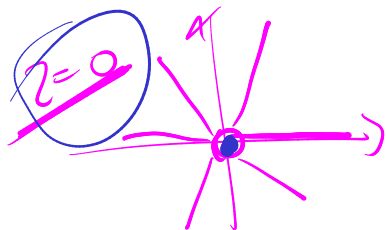
$$|z \cdot e^{i\varphi}| = |z| \cdot |e^{i\varphi}| = |z| \quad |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$



Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\bar{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.

Założmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem



$$\begin{aligned} z^3 &= (\bar{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$z_k = r \cdot e^{i\varphi_k} \quad k=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0, y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby w* .

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

$$z^5 = 2$$

$$z^5 - 2 = 0$$

$$z^2 = 8 + 6i$$

I sposób:
postać algebraiczna

$$z = x + iy, w = 8 + 6i$$

$$z^2 = w$$

$$(x + iy)^2 = 8 + 6i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$y \neq 0 \text{ (gdy } y = 0, \text{ to } z = x, x^2 \neq 8 + 6i)$$

$$x = \frac{3}{y}, \frac{9}{y^2} - y^2 = 8$$

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0, \Delta = 100$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

II sposób:
postać wykładnicza

$$z = |z|e^{i\varphi}, w = 8 + 6i$$

$$|z|^2 e^{2i\varphi} = w = |w|e^{i\alpha}$$

$$|w| = 10$$

$$w = 8 + 6i = 10\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} = 10e^{i\alpha}$$

$$2\varphi = \alpha + 2k\pi, |z| = \sqrt{10}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + k\pi$$

$$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}, k \in \{0, 1\}$$

III sposób:
postać algebraiczna

$$8 + 6i = 9 + 6i - 1 =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$$

$$= (3 + i)^2$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ wówczas

$$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \cdot \text{Otrzymujemy}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k), \text{ gdzie } \alpha_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad \square$$

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

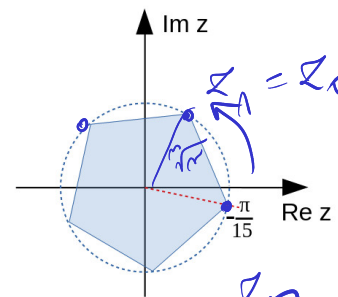
Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Zatem

$$z^5 = w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

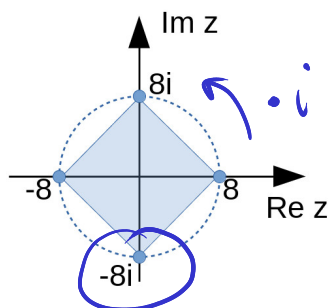
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3 . Będą one wierzchołkami kwadratu.

$$z^4 = ((\sqrt{3} - i)^3)^4$$

$$\text{Niech } z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i.$$

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad z_3 = z_2 \cdot i = -8$$



$$e^{i \cdot \frac{2\pi}{4}} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

$$\left(\sqrt[n]{} \right)$$

Równania wielomianowe

(algebraiczne)

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n .

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem wielomianu W , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout). Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + \text{const.}$ Stąd $W(z_0) = 0 \Leftrightarrow W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z^2 - 1) = (z - 1)^2(z + 1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Faktoryzacja
(rozkład na czynniki)

• **Twierdzenie 2.3.11** (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2, \dots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2, \dots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

5108

Trójkąt kwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

$$\begin{aligned} z^2 + 1 \\ z^2 - (-1) \\ z^2 - i^2 \\ (z-i)(z+i) \end{aligned}$$

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2, \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.

Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0. \quad \square$