

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z^2 - 1) = (z - 1)^2(z + 1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Faktoryzacja
(rozkład na czynniki)

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2, \dots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2, \dots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

Trójkąt kwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

$$\delta^2 = \Delta$$

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

$$\begin{aligned} z^2 + 1 \\ z^2 - (-1) \\ z^2 - i^2 \\ (z-i)(z+i) \end{aligned}$$

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2, \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.

Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{\overline{a_k}} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0. \quad \square$

$$a_k \in \mathbb{R}$$

Własności
wzajemnej

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] = \\ &= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

rozwiązania $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$, $\bar{z}_2 = z_3$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$$(z-2i)(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i) = 0$$

$$(z-2i)(z+1)(z^2 + (1+3i)z + 3i) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

2i jest pierwiastkiem $\Rightarrow -2i$ też

Wzory Viète'a (nieobowiązkowe)

$$\frac{az^2+bz+c}{c} = 0$$

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n[(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n) + (r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n) + \dots + r_{n-1} r_n] &= c_{n-2} \\ \dots & \\ c_n r_1 r_2 \dots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

$$n=2 \quad z_1 + z_2 = -\frac{c_1}{c_2}$$

$$z_1 z_2 = \frac{c_0}{c_2}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2) \dots (z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(z) &= c_n[(-1)^n r_1 r_2 \dots r_n + (-1)^{n-1} r_2 \dots r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \dots r_n \cdot z + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} r_2 r_3 \dots r_{n-1} \cdot z + \dots + (-r_1 - r_2 \dots - r_n) z^{n-1} + z^n]. \quad \square \end{aligned}$$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c .

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.

Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.

Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.

Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \Rightarrow c = 12$.

$$\{z_1, z_2, z_3\}$$

$z_3 = ?$

2.4 Interpretacja geometryczna

$|z|$ - mierz odległość z od 0

$|z - z_0|$ mierz odł. z od z_0

Niech $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej.
Niech $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

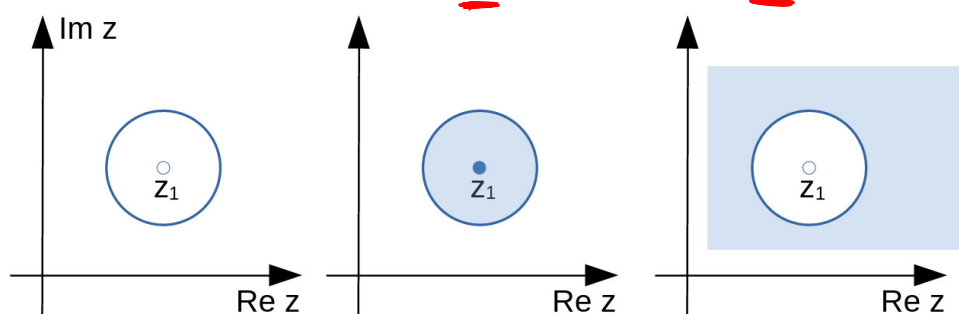
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

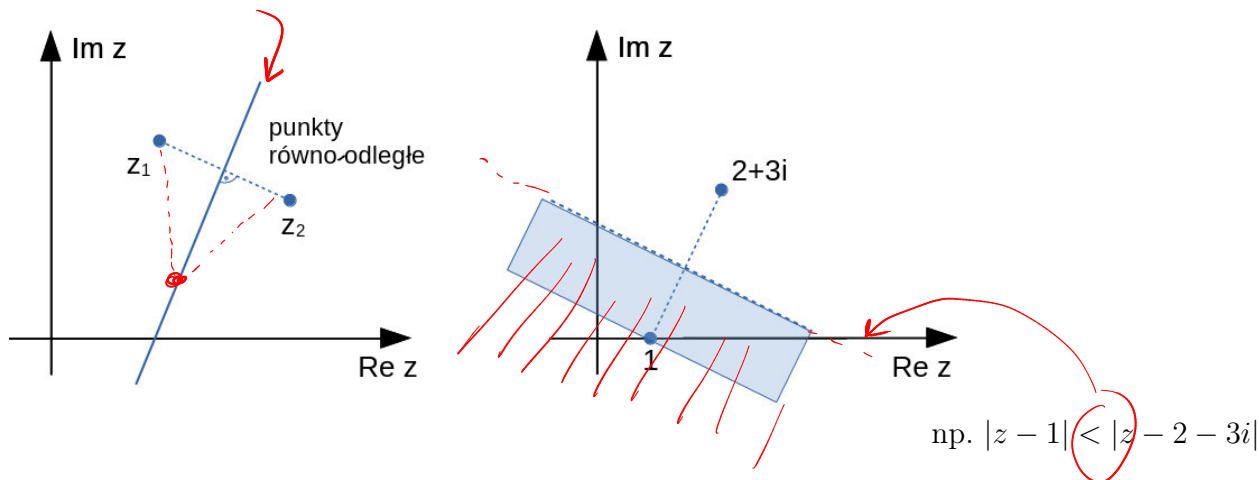
$|z - z_1| = r$ okrąg

$|z - z_1| \leq r$ koło

$|z - z_1| \geq r$ zewnątrz koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 2.4.1.

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$$

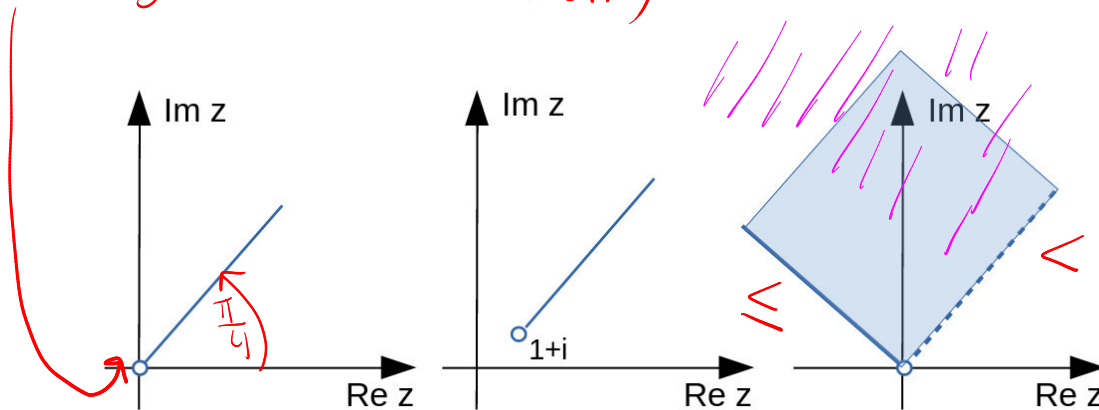
$$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$\arg(z - (1 + i)) = \frac{\pi}{4}$$

$|z|$ - dowolny

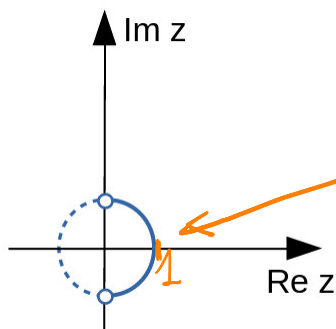
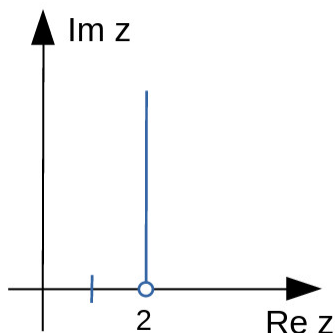
$z=0$ argument nieokreślony

$$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{4}$$



$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$$



5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$z = x + iy$$

$$w = a + bi$$

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x + (y+1)i}{x + (y-1)i} = \frac{[x + (y+1)i] \cdot [x - (y-1)i]}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 - xyi + xi + xyi + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

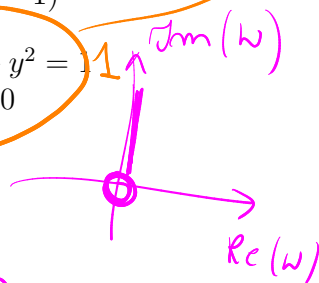
$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\operatorname{Im} w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\arg(w) = \frac{\pi}{2}$$

$$a=0 \quad b>0$$



TEMAT: Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.

K -ciało (Körper)

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy macierzą (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy wyrazami lub elementami macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{23}

2 wiersz
3 kolumna

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy i -tym wierszem macierzy A , zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy j -tą kolumną macierzy A .

Oznaczmy symbolem $M_{m \times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K . Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy macierzą kwadratową stopnia n .

Dla $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$.

$m \times n$

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

3×4

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

kwadratowa stopnia 3

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

macierz zerowa wymiaru $m \times n$

DYKRESJA

$(a_n) \quad f: \mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$
 $f(n) = a_n$

f
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- diagonalną lub przekątniową, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$
- trójkątną górną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$
- trójkątną dolną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy: (na potrzeby wykładu)

$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n

$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n

$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

diagonalne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^G(K) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^D(K)$$

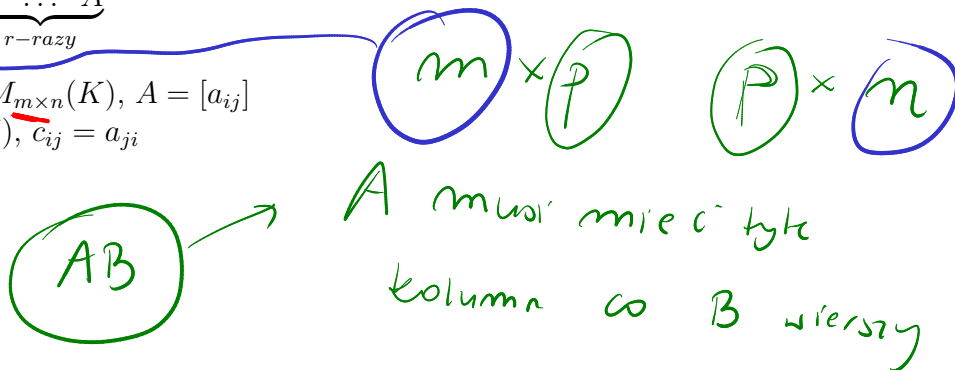
upper/lower

triangular

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
 $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
 $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m \times p}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{p \times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
 $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$
Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
 $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

taki sam wymiar



$$AB \in M_2(\mathbb{R})$$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB , BA , D^2 .

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$$

		1	2	3	
1	2	3	4	5	6
4	5	6			
0	1	4	5	6	
2	2	10	14	18	
-1	1	3	3	3	

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$$[1, 2, 3] \circ [0, 2, -1]$$

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 20$$

$$AB \neq BA$$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$$CD \in M_2(\mathbb{R}), \quad DC \in M_2(\mathbb{R}), \quad CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}, \quad CD \neq DC$$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$ przemienne

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączne

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ element neutralny

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ mieszana łączność

$$-A = (-1)A$$

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m \times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

i, ii, iii

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$ *Łączne*

ii) $(A+B)C = AC + BC$

iii) $A(B+C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

I el. neutralny mnożenia macierzy
A - kwadratowa
 $\Rightarrow AI = IA$

$AB \neq BA$

$M_2(\mathbb{R})$
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Wniosek 3.1.9. i) $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

ii) $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem nieprzemiennym z jedynką.

$\begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{array}$

Poniższy przykład pokazuje, że $(M_n(K), +, \cdot)$ nie jest ciałem, bowiem w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K istnieją dzielniki zera.

Przykład 3.1.10. Rozważmy macierze $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Obli-

czamy $BA = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ oraz $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$AB = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0}$

$\begin{array}{c|cc} & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}$ $-1 \cdot 6 + 2 \cdot 3$

Twierdzenie 3.1.11. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

A
 2×3

B
 3×5

AB
 2×5

A^T
 3×2

B^T
 5×3

$B^T \cdot A^T$
 5×2

Definicja 3.1.12. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ nazywamy śladem macierzy A i oznaczamy symbolem $\text{tr}(A)$.

Przykład 3.1.13. $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

A - kwadratowa

trace

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.14. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ ii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ iv) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.15. Jeśli $A, B \in M_{m \times n}(K)$, to wówczas $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.16. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) symetryczną, gdy $A = A^T$

b) antysymetryczną, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.17. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antisymetryczna

$b_{11} = 0$
 $b_{11} = -b_{11}$
 $b_{22} = -b_{22}$
 $b_{33} = -b_{33}$

Definicja 3.1.19. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij} , dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

A - macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ Wyznacznik - liczba determinant

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa (tylko dla wyznaczników stopnia 3!)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6) - [3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n - 1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$$b_{32} = -6$$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 17$$

dopełnienie algebraiczne
minor elementu b_{32}

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$ *Suma elementów* *jeśli dopełnienie alg.* (rozwiniecie względem i -tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}.$ (rozwiniecie względem j -tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$n_{22} = 2 - 4 = -2$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

$3 = a_{41}$ *$c'w$* *$c'w$*

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

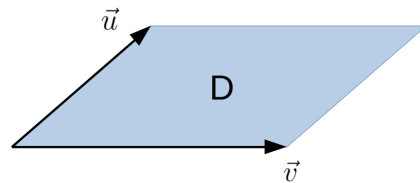
$$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy stopnia 2

Rozważmy wektory na płaszczyźnie $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$. Niech D będzie równoległobokiem rozpiętym na tych wektorach. Wówczas pole $|D|$ tego równoległoboku jest równe $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$.

Dowód można znaleźć w [3].



Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k -tą kolumnę macierzy A , czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

kolumny

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\det A = \det(A^T)$

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A , to wyznacznik nie zmieni się.

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\begin{bmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ ? & ? & \dots & B_n \end{bmatrix},$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś $?$ dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_n$.

Analogiczne twierdzenie dla wierszy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

kolumny proporcjonalne = 0

$$a_{12} = a_{12}^I + a_{12}^{II}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$5(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)$$

tw. Caley'ego