

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right] \quad \text{macierz blokowo-diagonalna}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2 - 7) \cdot (40 - 15) = -125$$

indukcja

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

$\det(A \cdot A) = (\det A) \cdot (\det A)$ $\det(A^2) = (\det A)^2$ stopnia n (n wierszy)

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne: $w_i \leftrightarrow w_j$ zamiana wierszy miejscami (między sobą)
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$ pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$ dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot (-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3} \cdot w_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_4 + 5w_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

Przykład 3.2.13. Dane są macierze $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ takie, że $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \neq j \\ 2(i-1) + j & ; i = j \end{cases}, \text{ zaś } \det B = 9. \text{ Oblicz wyznacznik macierzy } C = 3B^3 A^2 B^T.$$

Korzystając z własności wyznaczników, obliczamy

$$\det C = 3^5 \det(B^3) \det(A^2) \det(B^T) = 3^5 (\det B)^4 (\det A)^2.$$

$\det C = \det(3B^3) \cdot \det(A^2) \cdot \det(B^T)$
 $\det(3B^3) = 3^5 \det(B^3) = 3^5 (\det B)^3$
 $\det(A^2) = (\det A)^2$
 $\det(B^T) = \det B$
 $\det C = 3^5 (\det B)^3 (\det A)^2 \det B = 3^5 (\det B)^4 (\det A)^2$

$$i=j \quad a_{ii} = 2(i-1) + i$$

Ponadto $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2-w_1 \\ w_3-w_1 \\ w_4-w_1 \\ w_5-w_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 = 3^5 \cdot 2^3.$

Zatem $\det C = 3^5 \cdot 9^4 \cdot (3^5 \cdot 2^3)^2 = 3^{23} \cdot 2^6.$

3.3 Macierz odwrotna

$(M_n(K), +, \cdot)$ pierścień nieprzemiennej jednostki | NIE CIAŁO!

Jeśli dla danej macierzy kwadratowej $A \in M_n(K)$ istnieją macierze $B, C \in M_n(K)$ takie, że $AB = I$ oraz $CA = I$, to wówczas $B = C$.² Istotnie,

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1} .

Przykład 3.3.2.

$\rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ nieodwracalna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge c = 1$ sprzeczność

Zatem nie istnieje A^{-1} .

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline c & c & d \\ d & c & d \end{array}$$

$$B = A^{-1}$$

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy *macierzą odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy *macierzą osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją *macierzą nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D .

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemianną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

²Można uzasadnić tenże fakt przy słabszych założeniach, mianowicie jeśli dla danej macierzy $A \in M_n(K)$ istnieje macierz $B \in M_n(K)$ taka, że $BA = I$, to wówczas $AB = I$ i vice versa.

General linear group

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Za pomocą definicji

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a-b & 5a+2b \\ 3c-d & 5c+2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=1 \\ 5a+2b=0 \\ 3c-d=0 \\ 5c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij} . Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{i+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

macierz blokowa

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{tylko na wierszach!}]{\text{operacje elementarne}} \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\rightarrow$ macierz trójkątna górna $\rightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$[A|I] = \begin{array}{c|cccc|cccc} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{w_3 - w_1} \begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}w_3 \\ w_2 \text{ na koniec} \end{array}}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2} w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{Zatem } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^r$ również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$$\text{ii) } (A^{-1})^{-1} = A$$

iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

~~iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$~~

v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

~~vi) $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$~~

$$(2A)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A^{-1}$$

Przykład 3.3.11. Rozwiążemy równanie macierzowe $E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T$ wiedząc, że $D, E, F \in M_4(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, ponadto macierz D jest macierzą symetryczną, zaś

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}$$

$$D = D^T$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 8 & & \\ & & -8 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$E^4 (X - 4I)^T = \frac{1}{2} E^3 F^3 \underbrace{D^{-1} D^T}_I$$

Ponieważ D jest symetryczna, spełnia warunek $D = D^T$. Stąd $D^{-1} D^T = D^{-1} D = I$.

Ponadto F jest diagonalna, zatem $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Macierz E jest nieosobliwa, a zatem odwracalna. Obliczamy

$$\begin{aligned} E^4 (X - 4I)^T &= \frac{1}{2} E^3 F^3 D^{-1} D^T = \frac{1}{2} E^3 F^3 \\ (X - 4I)^T &= E^{-4} \frac{1}{2} E^3 F^3 = \frac{1}{2} E^{-1} F^3 \\ X - 4I &= \left(\frac{1}{2} E^{-1} F^3 \right)^T = \frac{1}{2} (F^3)^T (E^{-1})^T \\ X &= 4I + \frac{1}{2} (F^3)^T (E^{-1})^T. \end{aligned}$$

$(M^T)^T = M$

$\exists E^{-1} \begin{bmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ & & & E \end{bmatrix} E^{-4}$

$E^{-4} \frac{1}{2} E^3 F^3 = \frac{1}{2} E^{-1} E^3 F^3$

$= \frac{1}{2} E^{-1} E^3 F^3$

Pozostaje obliczyć E^{-1} i wykonać odpowiednie mnożenia oraz dodawania.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Twierdzenie 3.3.12. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}, \text{ to } A \text{ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne s\aa$$

macierze $A_1, A_2, \dots, A_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Przykład 3.3.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ jest odwracalna? Jeśli tak, oblicz A^{-1} .

Jest to macierz blokowo-diagonalna $\begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

Każdy z bloków jest macierzą nieosobliwą, zatem A jest odwracalna.

Obliczamy $\begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$

Stąd $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$

metoda dopinacz alg.

$$AB = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

$$ac = 1 \quad c = \frac{1}{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$bd = 1 \quad d = \frac{1}{b} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

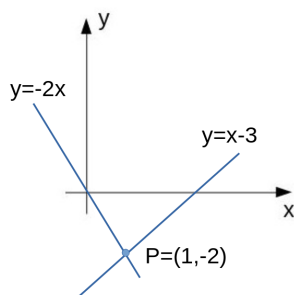
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi*. Jeśli $b_1 = \dots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jeśli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

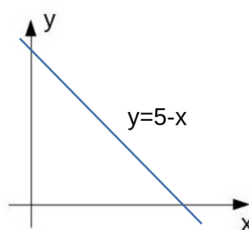
Przykład 4.1.1.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$



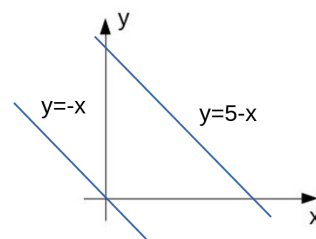
układ oznaczony

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ spreczny

x₁, x₂
m = 2 *m = n* *tylko samo*
równań *w niewiadomych*

ax + by = c
doznanie
prostej

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

macierz
współczynników

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

kolumna
nieznanymi

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

kolumna
wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy układem Cramera.

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą wzorów Cramera

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$$AX=B$$

$$X = A^{-1}B, A^{-1}=?$$

$$\det A = 16, D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}, x = \frac{11}{8}, y = -\frac{7}{16}$$

Wzory Cramera:

$$W = \det A = 16 \neq 0, W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22, W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}, y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \dots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.2.6.

Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. Minorem stopnia k macierzy A , gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. Rzędem macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \neq 0$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\text{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

Przykład 4.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0, r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, r(A) \leq 2, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, r(A) \leq 2, \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, r(B) = 1, \text{ Można zauważyć, że } k_2 = 3k_1.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, w_2 = 2w_1, w_3 = 3w_1, r(D) = 1$$

Gdyby $\det D \neq 0$ to $r(D) = 3$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det D$

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy). Niech $A \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. $\square$

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m \times n}(K)$ nazywamy macierzą schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.3.6.

PIVOTS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4 schodki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

3 schodki

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

to nie postać schodkowa

ta tabela jeszcze coś zrobisz

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątną górną nieosobliwą. $\square$

Przykład 4.3.8.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 - 4w_1 \\ w_4 - 4w_1}]{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 + w_2]{w_3 + 2w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix}, r(D) = 3$$

$w_3 = w_4$

$w_4 - w_3 \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m \times (n+1)}(K)$ nazywamy macierzą uzupełnioną układu $AX = B$.
↓
macierz kwadratowa $m \neq n$
 $\text{rank}(A)$
 $r(A)$
 $r(A)$

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny. (*kontrapozycja*)
 ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.
 iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. (*wiersze niewiadomych*)

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 4w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$r(U) = 3 \neq r(A) = 2 \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M . Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M , przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmiennie niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładniej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \dots, x'_n$.