

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny π .

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne: $\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Równanie ogólne: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0, D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Przykład 5.2.1. i) $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3], P_0 \in \pi, \vec{n} \perp \pi, \pi = ?$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\pi : 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0 \text{ równanie normalne}$$

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0 \text{ równanie ogólne}$$

ii) Płaszczyzna Oxz opisana jest równaniem $y = 0$.

iii) Z równania płaszczyzny $\pi : x + z = 0$ możemy odczytać wektor normalny $\vec{n} = [1, 0, 1]$ oraz punkt należący do płaszczyzny $P_0 = (0, 0, 0)$.

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}, \vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{0}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

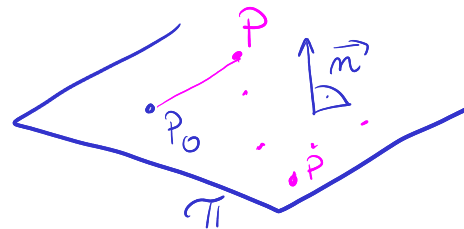
jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są wektorami rozpinającymi płaszczyznę π .

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z] = [ta_x + sb_x, \dots]$$

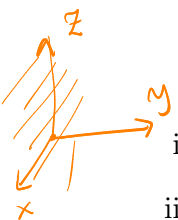
Równanie parametryczne: $\pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

DYGREESJA

parametryzacja płaszczyzny



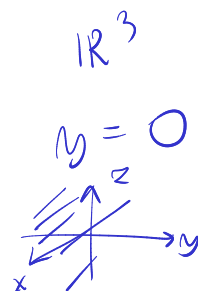
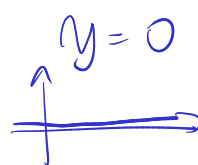
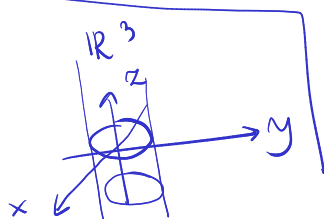
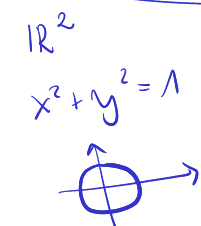
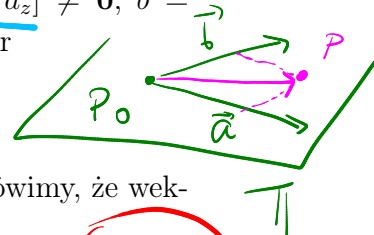
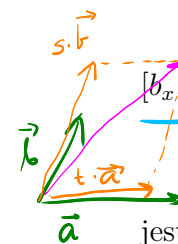
$$\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$$



$$\Rightarrow \vec{n} = [1, -1, 3] \perp \pi$$

$$A=0 \quad C=0 \quad B=1 \quad \vec{n} = [0, 1, 0] \quad P_0 = (0, 0, 0)$$

$$1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 0) = 0$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ współliniowe

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad k \in \mathbb{R}$$

Przykład 5.2.2. i) Napiszemy równanie parametryczne i równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy .

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

Płaszczyznę π możemy opisać równaniem parametrycznym postaci

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s = 4 \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Wektor $\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \hat{j}$ jest wektorem normalnym płaszczyzny π . Znajdziemy jego współrzędne.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 1] \perp \pi$$

Równanie ogólne płaszczyzny π ma postać $\pi : 0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 4) = 0$, skąd $\pi : z = 4$.

ii) Zapiszemy równanie parametryczne płaszczyzny π danej równaniem ogólnym

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0.$$

Przyjmijmy $y = t, z = s$, wówczas

$$\pi : \begin{cases} x = t - 3s + 14 \\ y = t \\ z = s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. Jest to tzw. równanie odcinkowe płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty

$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

nierobowiązkowe

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem $\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}.$

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l .

$$P_0 \in l \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} &= [x-x_0, y-y_0, z-z_0] \\ t\vec{a} &= [ta_x, ta_y, ta_z] \end{aligned}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem parametrycznym prostej l .

$$a_x \neq 0, a_y \neq 0, a_z \neq 0$$

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t , otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy równaniem kierunkowym prostej l .

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0, A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \Leftrightarrow (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0, \pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

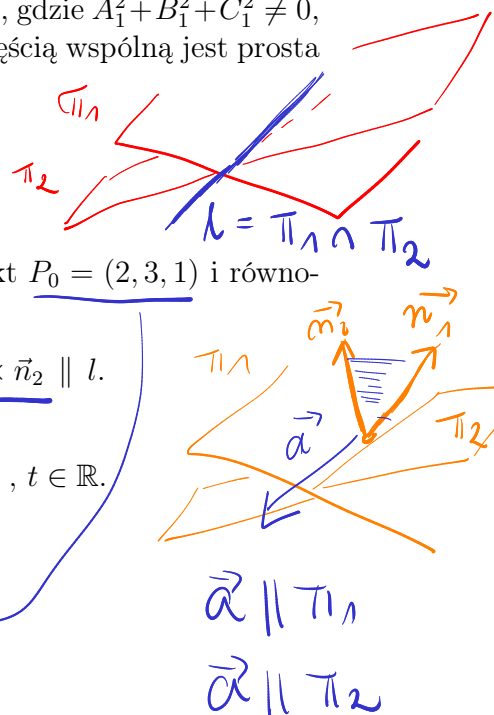
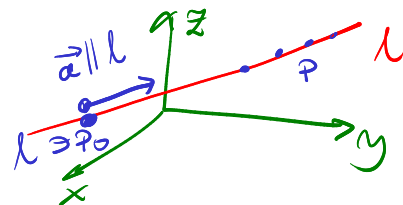
Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1, \vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

$$\text{Wówczas } \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19] \text{ oraz } l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{0}, \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{0}$.



Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

Płaszczyzny mogą być równoległe.

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$$

$$\sin(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$$

kąt 0

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

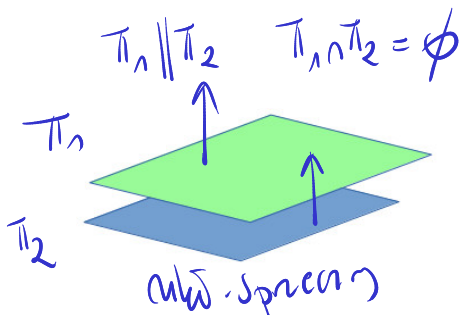
albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2, r(A) = 1$.

tw. Kroneckera - Cappellico

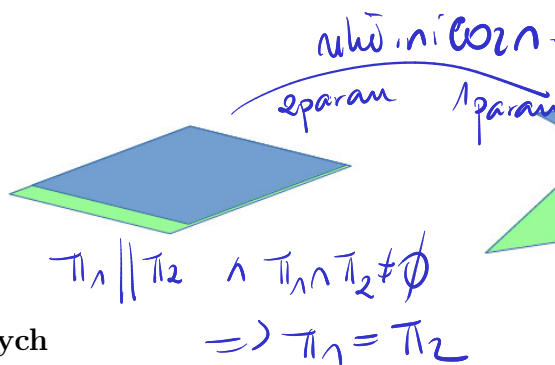
Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.

W szczególności mogą być prostopadłe.

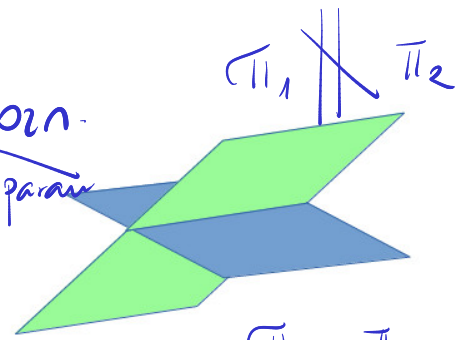
$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$$



ukł. sprzecz.



$$\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$$



$$\pi_1 \cap \pi_2$$

prosta

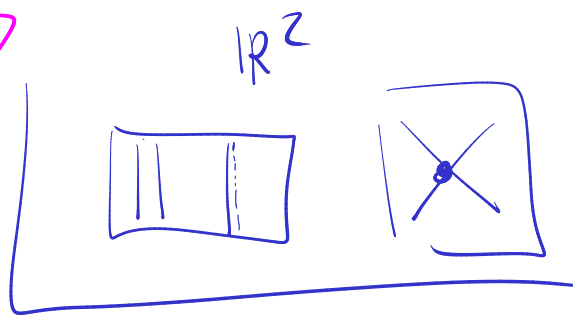
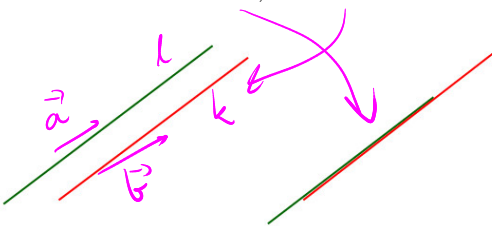
Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Proste mogą być równoległe.

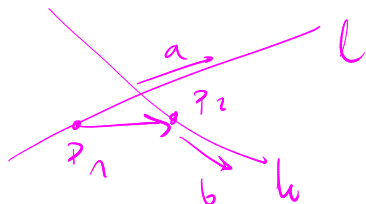
$$l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \emptyset$.



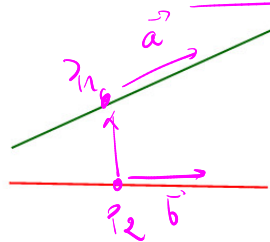
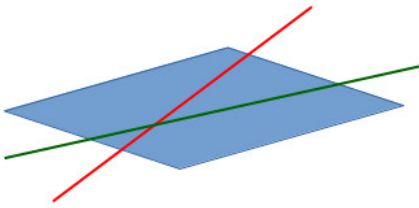
Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$.



2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. proste skośne), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \emptyset$.

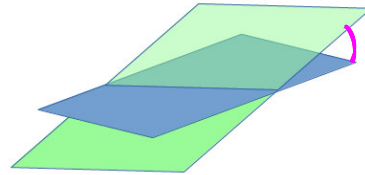
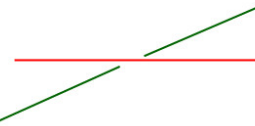
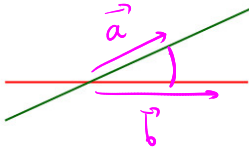
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.



Kąty

Definicja 5.4.1. i) Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

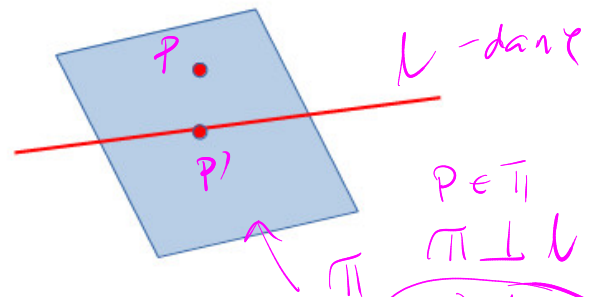
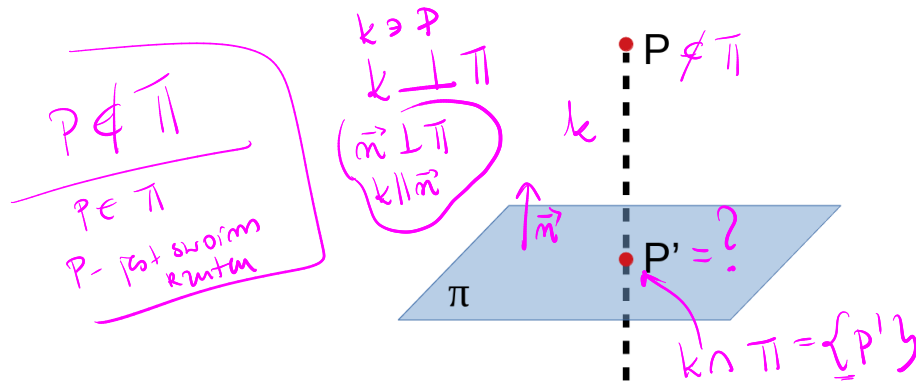
ii) Kątem między dwiema płaszczyznami nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



(projekcja ortogonalna)

Definicja 5.4.2. i) Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

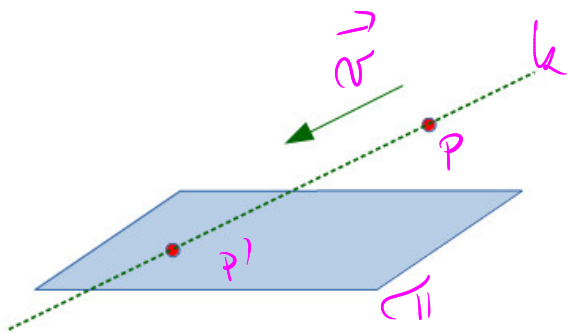
ii) Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.



Można zdefiniować rzut ukośny w kierunku danego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:

$$l \cap \pi = \{P'\}$$



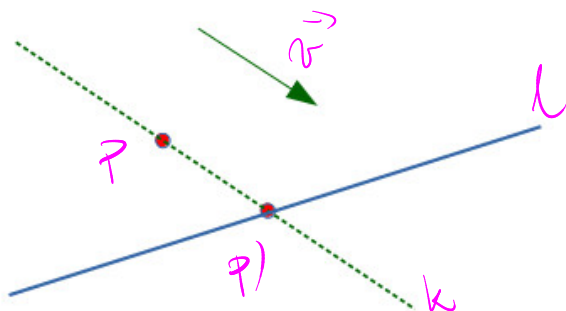
$$k \cap \pi = \{P'\}$$

UWAGA

$$\vec{v} \parallel \pi$$

Rzut nie
istnieje

Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l :



$$k \parallel \vec{v}$$

$$k \ni P$$

$$k \cap l = \{P'\}$$

k, l
skośne

↓
Rzut
nie istnieje

Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

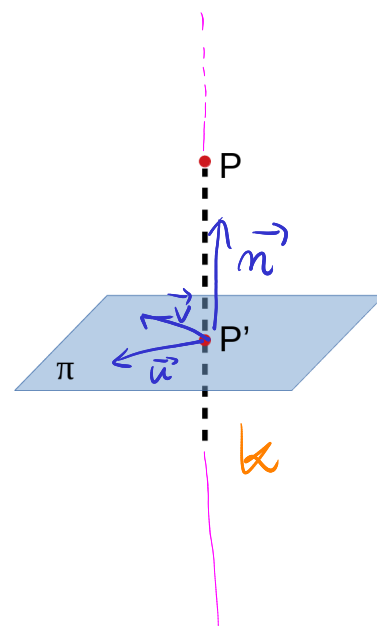
$$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

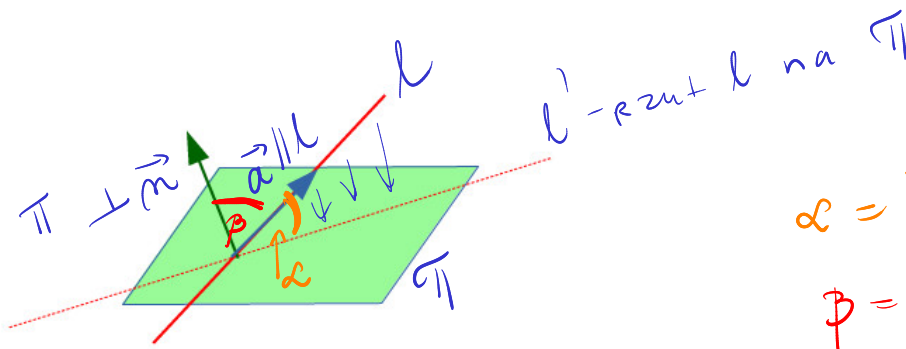
$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$$

$$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$$



Definicja 5.4.4. Kątem między płaszczyzną a prostą nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



$$\alpha = \angle(\pi, l)$$

$$\beta = \angle(\vec{a}, \vec{n})$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą l : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ a płaszczyznę π : $3x + y + z + 1 = 0$.

Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. Oznaczmy $\beta = \angle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Obliczamy $\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+0+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}$,

albo $\sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{55}}$

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = |\vec{a}| \cdot |\vec{n}| \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

Odległości

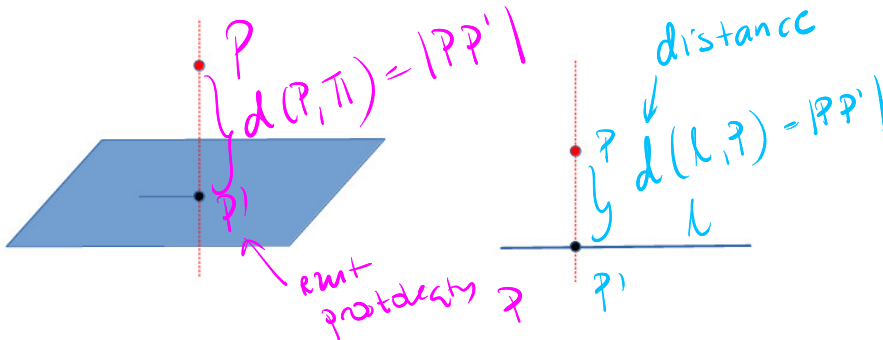
$$\cos \beta$$

$$\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$$

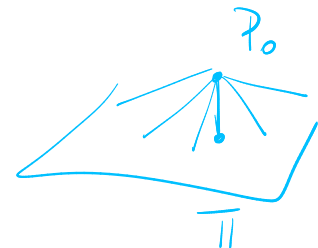
$$\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Definicja 5.4.6. i) Odległością punktu P od płaszczyzny π , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π . Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.

ii) Odległością punktu P od prostej l , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l . Oznaczamy ją $d(P, l)$.



Analiza



Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

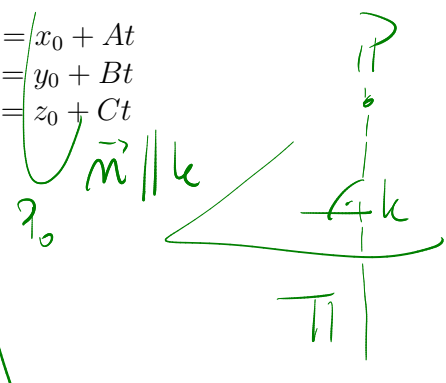
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz π : $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas k :

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

$$\{P'_0\} = k \cap \pi = ?$$



$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

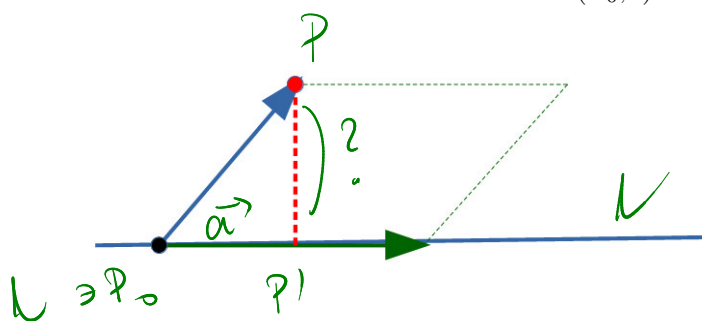
$$d(P, \pi) = |P_0 P'_0| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wzór na odległość punktu od prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Składowe
odległości prostokątnej

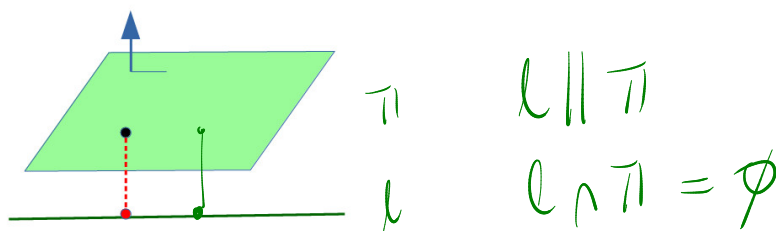
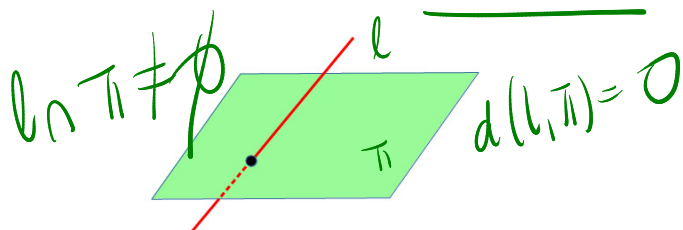


$$\overrightarrow{P_0 P} \perp \vec{a} \parallel l$$

$P_0 \in l$

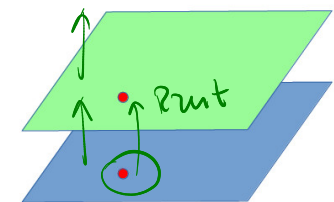
Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.



Definicja 5.4.7. Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

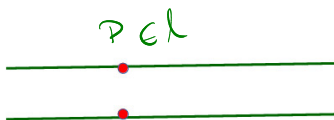
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2$$



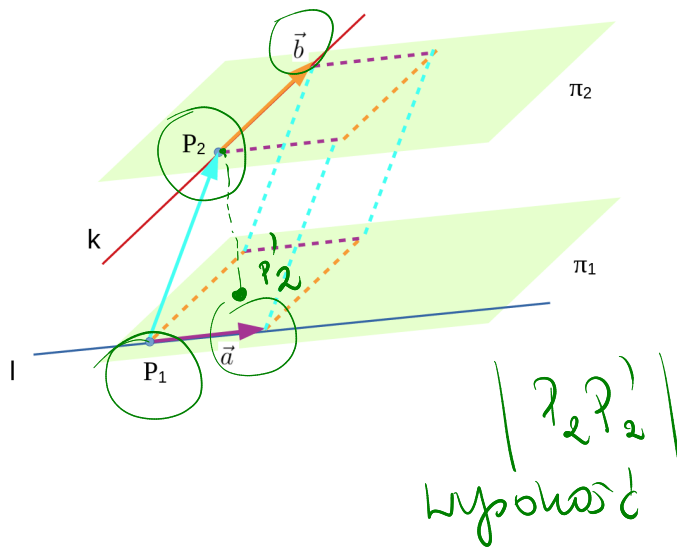
$P' \in l_2$
 $P' \in l_2$ prostej l_2

Odległość prostych skośnych

Przypomnijmy, że jeśli dwie proste leżą w jednej płaszczyźnie, to przecinają się lub są równoległe. Proste, które nie są do siebie równoległe i nie mają punktów wspólnych nazywamy skośnymi. Zatem proste są skośne, gdy nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Założmy że proste te są skośne. Wówczas istnieją płaszczyzna π_1 zawierająca prostą l oraz płaszczyzna π_2 zawierająca prostą k takie, że $\pi_1 \parallel \pi_2$ oraz $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Ponadto płaszczyzny równoległe, na których leżą dane dwie proste skośne są wyznaczone jednoznacznie. Istotnie, π_1 jest płaszczyzną zawierającą l i równoległą do wektora $\vec{b}$. Jej wektorem normalnym jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Podobnie, π_2 jest płaszczyzną zawierającą k i równoległą do wektora $\vec{a}$. Jej wektorem normalnym również jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$.



Definicja 5.4.8. Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Uwaga 5.4.9. Niech l i k będą jak wyżej. Założmy że proste te są skośne, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas

$$h = d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

objętość / pole podstawy

Przykładowe zadanie polegające na wyznaczaniu odległości dwóch prostych skośnych można znaleźć tutaj.

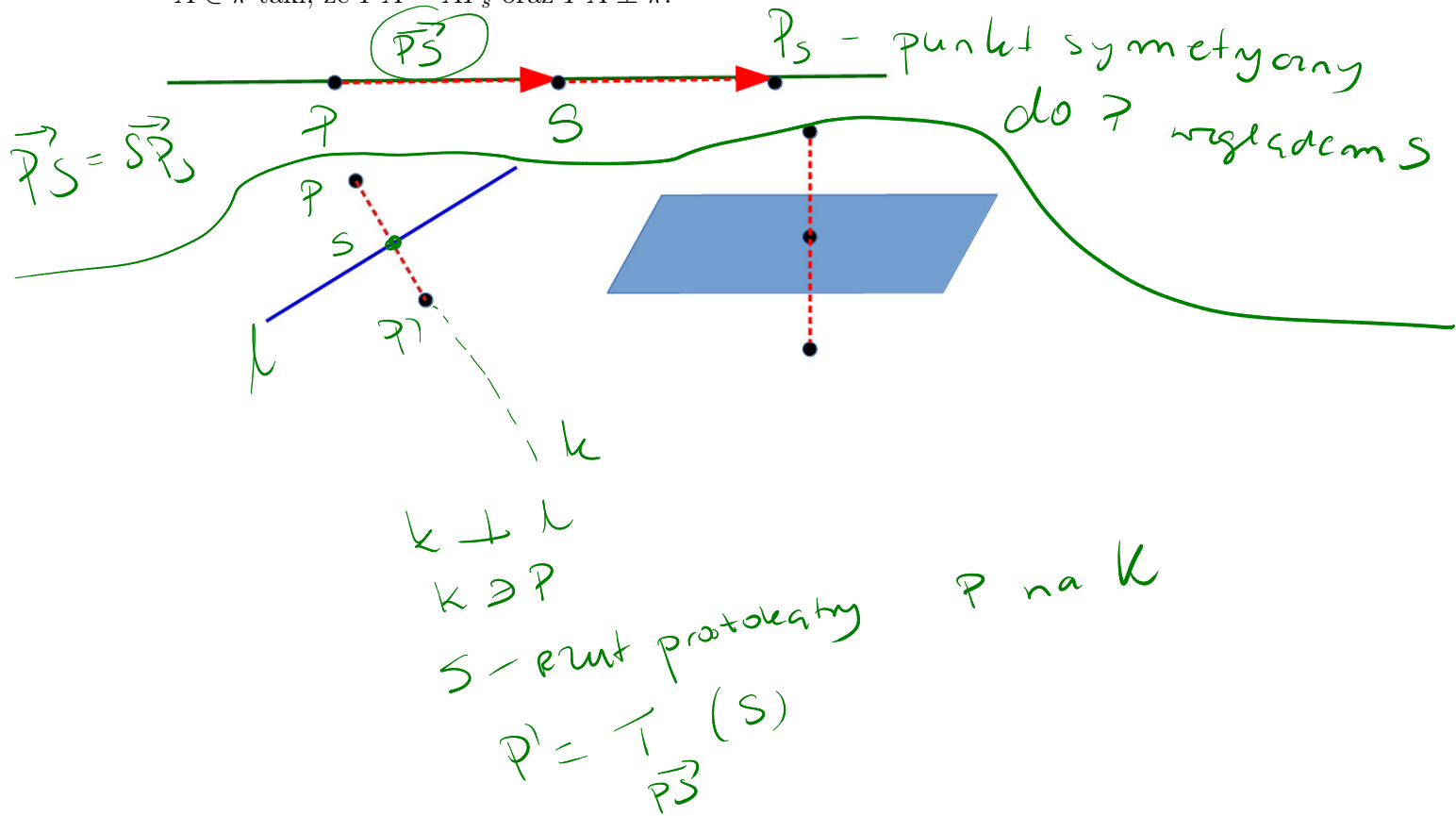
Symetrie

Definicja 5.4.10. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- i) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

$P' = T_{\vec{PS}}(S)$ translacja (przesunięcie) punktu S o wektor $\vec{PS}$

iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\vec{PA} = \vec{AP_s}$ oraz $\vec{PA} \perp \pi$.



TEMAT: Przestrzenie liniowe

$$V = \mathbb{R}^3 \quad \vec{v}, \vec{u} \\ \alpha \in \mathbb{R} = K$$

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, zaś $V \neq \emptyset$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową, $\nwarrow$ dodawanie wektorów

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$ $\nwarrow$ zbiór skalarów

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$ $\nwarrow$ rozdzielność

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$ $\nwarrow$ neutralność

nazywamy przestrzenią wektorową bądź przestrzenią liniową nad ciałem K (albo przestrzenią K -liniową). Elementy zbioru V nazywamy wektorami, zaś elementy ciała K skalarami.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$

Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$, $\alpha \odot u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)$.

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało

Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$, $\alpha \odot u = (\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n)$.

iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Dla $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy

$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$

Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stałe równa zero.

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+$, $\cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

- v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

	$u + v$	suma wektorów
	$\alpha + \beta$	suma skalarów
Wówczas dla $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$	$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
	$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V , zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K . Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami

$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U, \odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V . $\square$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V . Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.