

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V , zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K . Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

rozdzielność
wzgl. odejmowania

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami

$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U, \odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .



Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V . $\square$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V . Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

RESTRYKCJA
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$

$f_1 = f|_{[0, \infty)}$
wektor zerowy

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$.
W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V . Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (C([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

U jest podprzestrzenią liniową V , bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcją ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \text{ parzysty}\}$

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V . Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f+g \notin U$.

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V . Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas

$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n\}$.

Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V .

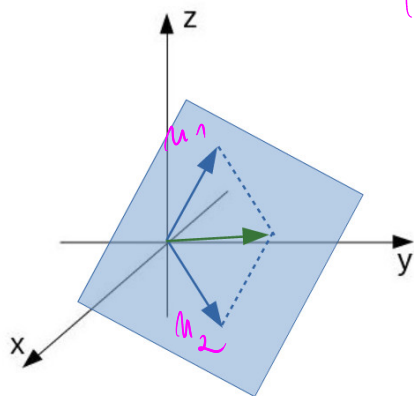
Zatem $\mathbb{R}_n[x]$ to przestrzeń liniowa wielomianów stopnia co najwyżej n -tego.³

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0,0)$.

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0,0,0)$.

³Niektórzy autorzy stosują również oznaczenie $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.



$$U \subset V = \mathbb{R}^3$$

$$u_1, u_2 \in U$$

$$u_1 + u_2 \in U$$

6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W , nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$.

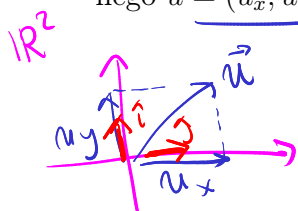
Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{u, v_2, \dots, v_m\}$

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.



$$(u_x, 0) + (0, u_y)$$

62

↑
komb. liniowa $\hat{i}$ oraz $\hat{j}$

$$\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}\} = \text{lin}\{\hat{i} + \hat{j}, \hat{j}\}$$

np. $u = (2, 5) = 2\hat{i} + 5\hat{j}$ $(2, 5) = 2(\hat{i} + \hat{j}) + 3\hat{j}$

$2\hat{i} + (2+3)\hat{j}$ $\hat{j} = 3$ $\hat{j} = 2(\hat{i} + \hat{j}) + 3\hat{j}$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ nazywamy liniowo niezależnymi lub mówimy, że tworzą układ liniowo niezależny, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ zachodzi

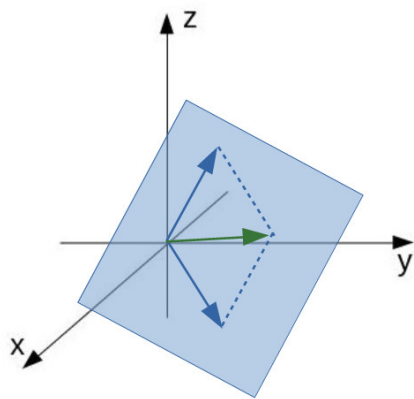
$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy liniowo zależnymi.

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$.

Założmy teraz, że v_1 jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \dots, \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0}$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$. $\square$



$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_m v_m$$

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}\right) v_m$$

$\in K$

$$m=3$$

$$u, v, w \in \mathbb{R}^3$$

Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A , której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \dots, v_k$, jest równy n .

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{lin}\{u, v, w\}$$

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Niewiadomymi są

$$\alpha, \beta, \gamma$$

↑
?
dany dowolnie wektor $b \in \mathbb{R}^3$

Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array} \right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 1 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array} \right]$$

Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x + 2y + z$, $\beta = x - y - 3\gamma = 4x - 7y - 3z$, $\alpha = x - 2\beta - 5\gamma = -2x + 4y + z$. Zatem układ wektorów u, v, w generuje $\mathbb{R}^3$.

Przykład 6.2.11. Czy układ $\{A, B, C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.

$$\text{Niech } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ będą dowolne takie, że } \alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } \begin{bmatrix} \alpha - \beta & -\alpha \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Zatem macierze A, B, C tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.12. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

$$\text{Niech } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ będą dowolne takie, że } \alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0).$$

$$\text{Stąd } (\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 3\gamma, 4\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0).$$

Wektory u, v, w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-4w_1]{w_2-2w_1, w_3-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow r(U) = r(A) = n = 3$$

Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u, v, w są liniowo niezależne.

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 6.2.13. Niech $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 6.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

$k=3$ $n=2$
3 wektory w $\mathbb{R}^2$
 $k=4$ $n=3$
4 wektory w $\mathbb{R}^3$

64

na pewno są lin. zależne
na pewno są lin. zależne

$$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$$

ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.

iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.

iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

lin. zal. $\Rightarrow$ lin. zal.

lin. niezal. (nvc nvc "wyrzucam")

$$\alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Definicja 6.2.15. Niech $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1, \dots, f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

Analiza
II sem.
Równania
różniczkowe

nazywamy macierzą Wrońskiego układu funkcji $f_1, \dots, f_n$, a jej wyznacznik wrońskianem.

Twierdzenie 6.2.16. Niech $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \dots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1, \dots, f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $C(\mathbb{R})$.

Przykład 6.2.17. Zbadaj, czy funkcje f_1, f_2, f_3 takie, że $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$, tworzą układ liniowo niezależny w $C(\mathbb{R})$.

Analiza
II sem
Szereg
Fouriera

METODA I: Skorzystamy wprost z definicji liniowej niezależności. Niech $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ będą takie, że $C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza funkcję tożsamościowo równą zero.

Skoro $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, zatem w szczególności równość jest prawdziwa dla $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = \pi$.

Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \wedge \quad C_1 + C_2 = 0 \quad \wedge \quad C_1 - C_3 = 0.$$

Stąd $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, a zatem układ funkcji f_1, f_2, f_3 jest liniowo niezależny.

METODA II: Skorzystamy z kryterium wrońskianowego opisanego w twierdzeniu 6.2.16.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

$$\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}\} \quad (2,5) = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

Przykład 6.2.18. Układ wektorów $\hat{i} = (1, 0)$, $\hat{j} = (0, 1)$, $\hat{i} + \hat{j} = (1, 1)$ generuje przestrzeń $\mathbb{R}^2$, to jest $\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}\}$.

Rozważmy wektor $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Zauważmy, że $(0,1) + (1,1) = (1,2)$
 $v = 1 \cdot \hat{i} + 2 \cdot \hat{j}, \quad v = 1 \cdot \hat{j} + 1 \cdot (\hat{i} + \hat{j})$.

Wektor v jest kombinacją liniową generatorów przestrzeni $\mathbb{R}^2$, lecz przedstawienie to nie jest jednoznaczne.⁴

Wyróżnimy układy wektorów generujących daną przestrzeń liniową o tej własności, że dowolny wektor z tej przestrzeni przedstawia się jednoznacznie jako ich kombinacja liniowa.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$.

Definicja 6.2.19. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ nazywamy bazą przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Wniosek 6.2.20. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 6.2.9 oraz 6.2.13. $\square$

Przykład 6.2.21. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Układ wektorów $\{e_1, \dots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$$n=3$$

$$\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$$

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3$$

Przykład 6.2.22. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli $U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U , gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leq 4 \neq 5$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = 3 \Rightarrow U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)\}$$

Układ wektorów $(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 6.2.3).

⁴Istnieje więcej niż jeden sposób przedstawienia wektora v jako kombinacji liniowej wektorów $\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}$.

$\mathbb{R}^5$ mam 3 wektory lin. niez. i 2n - zapada się jeszcze kilka, które w sumie dają bazę

Twierdzenie 6.2.23. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{0\}$ posiada bazę.

- ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.
- iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Twierdzenie 6.2.24. (Warunki równoważne do bycia bazą przestrzeni wektorowej)

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$. Następujące warunki są równoważne.

- i) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest bazą przestrzeni V . ukł. generatorów liniowo niezależny
- ii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest minimalnym (w sensie relacji inkluzji) układem generującym V .
- iii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.
- iv) Dowolny wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie jako kombinacja liniowa elementów $b_1, \dots, b_n$. $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$
jednoznaczne
dimension

Definicja 6.2.25. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest n -wymiarowa. Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V , to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{0\} = 0$.

Wniosek 6.2.26. i) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

- ii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.
- iii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze

Wiemy, że wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 6.2.27. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$, $\dots$, $v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.2.26 iii). $\square$

$\mathbb{R}^m$
 $\dim V = m$

$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$
jednoznaczne
dimension

bo bazy są równoliczne

$\mathbb{R}^3$
 $\dim V = 3$

$\dim V = n$
mamy n wektorów $\rightarrow$ to wystarczy

Wniosek 6.2.26. i) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

ii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.

iii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze

Wiemy, że wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 6.2.27. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$, $\dots$, $v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.2.26 iii). $\square$

By były bazą
wystarczy spr. lin. niez.

Macierz $n \times n$
rzad = n
 $\Rightarrow \det A \neq 0$

chwila
Spr.
czyto
baza.
sprawdź
jeden
z warunków
ma być baza.
 n wektorów

il. wektorowy $\neq 3$

Wniosek 6.2.28. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

il. mieszany $\neq 0$

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.2.29. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \dots, b_n)$ nazywamy reperem bazowym lub bazą uporządkowaną.

Często mówimy po prostu o bazie, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = (e_1, \dots, e_n), \text{ gdzie } e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

zbior. wielomianów zm. x o współr. z IR

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots), \quad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \quad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot), \quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

polynomial

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n), \quad \dim \mathbb{R}[x] = n+1$$

$$\text{dla dowolnego } p \in \mathbb{R}_n[x] \text{ mamy } p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

współczynniki
wiodących

4) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{mn}), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (k, l) \\ 0 & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

$$\dim M_{m \times n}(K) = m \cdot n$$

Przykład 6.2.30. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

Twierdzenie 6.2.31. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.