

il. wektorowy $\neq 3$

Wniosek 6.2.28. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.2.29. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \dots, b_n)$ nazywamy reperem bazowym lub bazą uporządkowaną.

Często mówimy po prostu o bazie, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ Baza kanoniczna $\mathbb{R}^m$

$\mathcal{B}_k^n = (e_1, \dots, e_n)$, gdzie $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$ zbiór wielomianów zm. x o współr. z $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots), \quad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \quad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$ polynomial

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n), \quad \dim \mathbb{R}[x] = n+1$$

$$\text{dla dowolnego } p \in \mathbb{R}_n[x] \text{ mamy } p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n.$$

4) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{mn}), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (k, l) \\ 0 & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

$$\dim M_{m \times n}(K) = m \cdot n$$

Przykład 6.2.30. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

Twierdzenie 6.2.31. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

$$W \subset V$$

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

$$\mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B}_k^2 = (\hat{i}, \hat{j})$$

$$\vec{u} = [2, 7] = 2\hat{i} + 7\hat{j}$$



Przykład 6.2.32. Podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$.

	podprzestrzenie $\mathbb{R}$	podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$	podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$
wymiaru 0	$\{0\}$	$\{(0, 0)\}$	$\{(0, 0, 0)\}$
wymiaru 1	$\mathbb{R}$	proste przechodzące przez $(0, 0)$	proste przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 2		$\mathbb{R}^2$	płaszczyzny przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 3			$\mathbb{R}^3$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie. !

Definicja 6.2.33. Skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ nazywamy współrzędnymi wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

NOTACJA: Dla $v \in \mathbb{R}^n$ będziemy pisać $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ zamiast $u = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{\mathcal{B}_k^n}$.

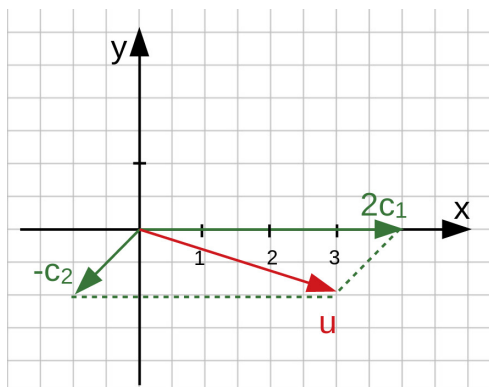
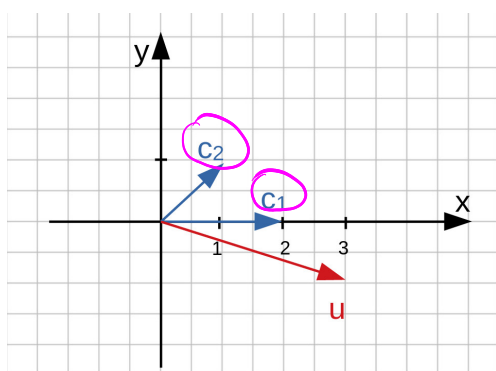
Przykład 6.2.34. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (2, 0)$, $c_2 = (1, 1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$u = [2, -1]_{\mathcal{C}} = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot (2, 0) - (1, 1) = (3, -1)$

$\vec{u} = (3, -2)$



$\vec{u} = (3, -2)$
 $= 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$
 $= 3e_1 - 2e_2$

Przykład 6.2.35. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

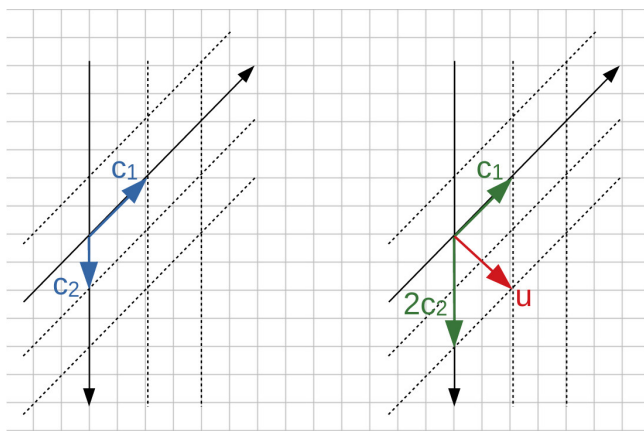
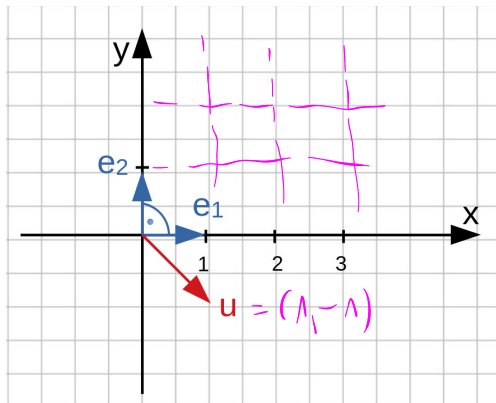
$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (1, 1)$, $c_2 = (0, -1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$u = (1, -1)$ oraz $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{C}}$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$$(1, -1) = \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha(1, 1) + \beta(0, -1) = (\alpha, \alpha - \beta)$$

Stąd $\alpha = 1$, $\beta = 2$ oraz $u = [1, 2]_{\mathcal{C}}$.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases}$$



Przykład 6.2.36. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Skalary 4, 2, 1 to współrzędne b'_1 w bazie kanonicznej.

Piszemy $b'_1 = (4, 2, 1)$ zamiast $b'_1 = [4, 2, 1]_{\mathcal{B}_k^3}$.

Ponadto $b'_1 = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$.

$$b'_1 = 1 \cdot b'_1 + 0 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3$$

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczmy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.

Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b'_1 + \beta b'_2 + \gamma b'_3$. Otrzymujemy

$$(-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta).$$

Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ , należy rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 4w_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{-1 \cdot w_2 \\ w_3 \leftrightarrow w_2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 - 11w_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'} = 1 \cdot b'_1 + 2 \cdot b'_2 + 3 \cdot b'_3 \end{aligned}$$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema

$\mathcal{B}$ "stara" baza

$\mathcal{B}'$ "nowa" baza

bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{aligned} b'_1 &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{n2}b_n \\ &\vdots \\ b'_n &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned}$$

Definicja 6.2.37. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

W kolumnach
mamy
współrzędne
wektorów z nowej
bazy
w starej bazie

nazywamy macierzą przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

więc odwracalna

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.2.38. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x'_1, \dots, x'_n]_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$,

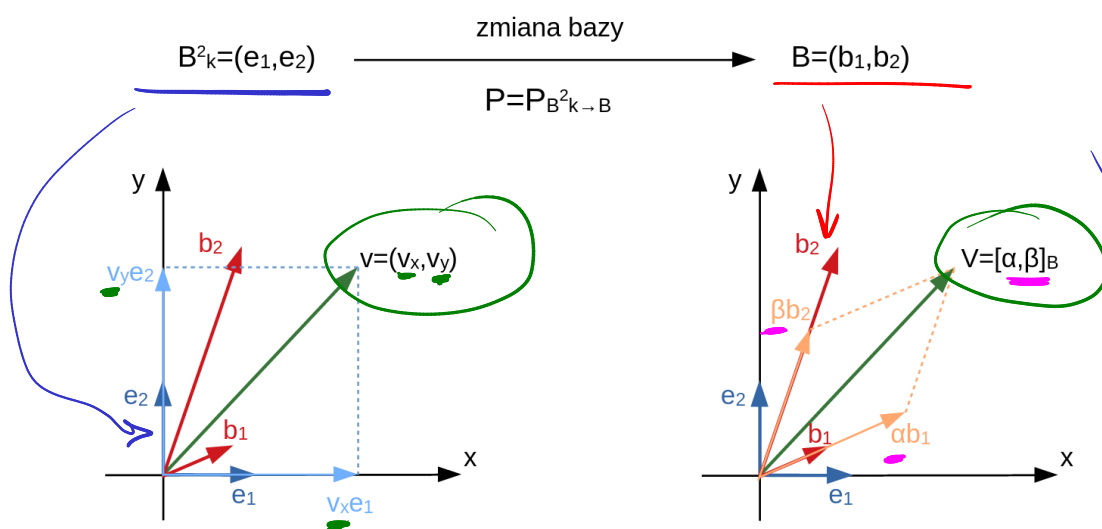
gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$.

↑
współrzędne
w starej
bazie

↑
w nowej bazie

$\det P \neq 0$

$$X' = P^{-1} \cdot X$$



Przykład 6.2.36 - ciąg dalszy

$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznamy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, X' = P^{-1}X = ?$$

Wyznamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.2.39. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy

$\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, 1+x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Wyznamy macierz $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

$$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1+x) + \beta_1(x+x^2) + \gamma_1(1+x^2) = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\beta_1 + \gamma_1)x^2$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że $1+x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}}$.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1+x+x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

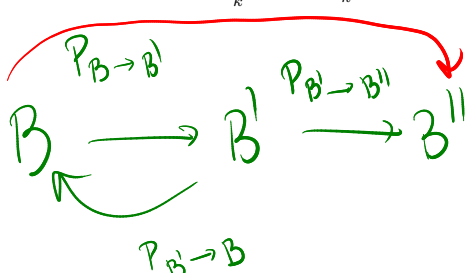
$$\text{i otrzymujemy } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6.2.40. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$,

ii) $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}$.

Uwaga 6.2.41. W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy baza początkowa to baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^n$, łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}$ oraz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wypisanie macierzy $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.40 otrzymujemy $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, skąd $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$.



$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}''}$$

$$P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$$

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$$

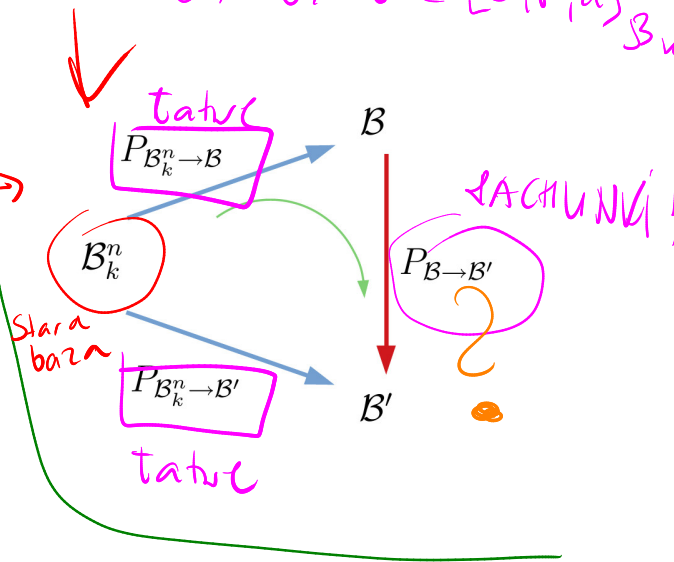
$$\mathbb{R}_2[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 2\}$$

$$\mathcal{B} = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

baza stand.

$$\mathcal{B}_k = (1, x, x^2)$$

$$ax^2 + bx + c = [c, b, a]_{\mathcal{B}_k}$$



TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K .

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ spełniające warunki

- i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$ *wartości o d sumy jest suma wartości*
 ii) własność homogenity $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$

nazywamy odwzorowaniem liniowym lub przekształceniem liniowym lub homomorfizmem przestrzeni liniowych.⁵

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \rightarrow W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) φ jest liniowe *komb. liniowa*
 ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$
 iii) $\forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$
 $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$ *

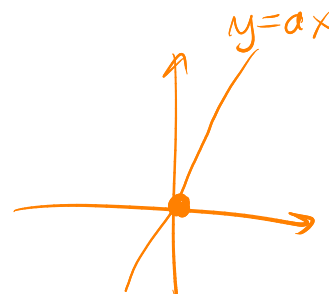
Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $\text{Hom}_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $\text{Hom}(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W , mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

- 1) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy
 $\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
 $\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.



$y = ax$

⁵Odwzorowanie to wektorowi przypisuje wektor.

2) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem

$$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b.$$

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y) \text{ oraz}$$

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2).$$

Odwzorowanie jest liniowe.

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.

$$L = \varphi(\alpha(x, y, z)) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$$

$$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - y + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$$

Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład

$$\varphi(5 \cdot (1, 0, 0)) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$$

Uwaga 7.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem

$$\varphi(p)(x) = (3-x)p''(x) + 4p'(x), \text{ dla dowolnego } p \in \mathbb{R}_2[x], \text{ jest liniowe?}$$

Sprawdźmy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.

Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi(p+q)(x) &= (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)(p''(x) + q''(x)) + 4(p'(x) + q'(x)) = \\ &= ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) + ((3-x)q''(x) + 4q'(x)) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x), \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.

Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha p)(x) &= (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha p''(x) + 4\alpha p'(x) = \alpha \cdot ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) = \\ &= \alpha \cdot \varphi(p)(x). \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}. \text{ Zatem } \varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p). \end{aligned}$$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ jest liniowe, to wówczas

$$i) \varphi(0_V) = 0_W,$$

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1) Odwz. liniowe

2) to nie to samo
co funkcja liniowa

ANALIZA

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$m=k$$

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}_1[x] = \{dx + e : d, e \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}_1[x]$$

$$\varphi(p) = \checkmark$$

p-polynomial

$$\begin{aligned} p+q &\xrightarrow{\varphi} p(x) \\ m &= \varphi(p+q) \\ m(x) &= \varphi(p+q)(x) \end{aligned}$$

$$\varphi(-1 \cdot v) = -1 \cdot \varphi(v)$$

ii) $\forall v \in V \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $0_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + 0_V) = \varphi(x) + \varphi(0_V)$, zatem $\varphi(0_V) = 0_W$.

ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $0_W = \varphi(0_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. $\square$

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \rightarrow W$. Jeśli $\varphi(0_V) \neq 0_W$, to φ nie jest liniowe.

KONTRADYKCYJN
TW. 7.1.7

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. $\square$

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy:

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg \varphi \Rightarrow \neg \psi)$$

i) monomorfizmem, jeśli φ jest injekcją, *nie zero wartościuje*

ii) epimorfizmem, jeśli φ jest surjekcją,

iii) izomorfizmem, jeśli φ jest bijekcją, *(injekcja + surjekcja)*

iv) endomorfizmem, jeśli $V = W$,

$$\varphi : V \rightarrow V \quad \text{"endo" (do wewn.)}$$

v) automorfizmem, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) formą liniową, jeśli $W = K$.

$$\varphi : V \rightarrow K$$

$$V = (V_1 + 1, K, \cdot) \quad \text{forma liniowa}$$

$$K = (K_1 + 1, \cdot)$$

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K . Niech $(b_1, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \dots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\varphi : V \rightarrow W$$

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V .

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ , jeśli

(podać wzór)

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases} \Rightarrow \varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2) = ?$$

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

$$\varphi(p) = ?$$

? Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

$$p_1 = x^2 + x = [0, 1, 1]_{\mathcal{B}} \quad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

75

p_1, p_2, p_3 - 3 wektory
tzn. jeśli p_1, p_2, p_3 są lin. niezal.
to są bazą.

z liniowości

THK



$$\varphi: V \rightarrow W \text{ liniowe}$$

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 7.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = 0_W\} \subseteq V$ nazywamy jądrem odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Ker } \varphi$.

KERNEL

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy obrazem odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Im } \varphi$ lub $\varphi(V)$.

zbiór wartości

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi: V \rightarrow W$ zbiory $\text{Ker } \varphi$ oraz $\text{Im } \varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(0_V) = 0_W$, zatem $0_V \in \text{Ker } \varphi$ oraz $0_W \in \text{Im } \varphi$. $\square$

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\text{Ker } \varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś zbiór $\text{Im } \varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W .

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) φ jest iniekcją $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \text{Im } \varphi = W$.



Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \text{Im } \varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy rzędem odwzorowania liniowego $\varphi: V \rightarrow W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\text{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim V.$$

wymiar
przebiegający

$$\varphi: V \rightarrow W \text{ liniowe}$$

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \text{Im } \varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ , ich bazy i wymiary. Podaj własności φ .

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\dim \text{Im } \varphi = 3$$

$$\text{Im } \varphi \neq \mathbb{R}^3$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5 \text{ liniowe}$$

$$\dim \text{Im } \varphi \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

nie epimorfizm (nie surjekcja)

$$\varphi(x, y, z, t) = (x+y+z+2t, x-y+z+6t, x+y-z-4t) \in \text{Im } \varphi$$

$$= (x, x, x) + (y, -y, y) + (z, z, -z) + (2t, 6t, -4t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ker } \varphi = \{t, 2t, -3t, t\}, t \in \mathbb{R} = \text{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$$

Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\text{Ker } \varphi$ oraz $\dim \text{Ker } \varphi = 1$.

Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto

$$1) \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } \varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \text{ zatem } \varphi \text{ jest epimorfizmem.}$$

Stąd $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$$2) \varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$$

$$\text{Im } \varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Im } \varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\text{Im } \varphi$.

$$\text{Im } \varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \text{Im } \varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3.$$

bo $\text{Ker } \varphi \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$

NIE INJEKCYJN

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\dim V = 4$$

$$\dim W = 3$$

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = 1 + 3 = 4$$

$$\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}^3$$

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V . Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W .

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U, V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, jest przestrzenią liniową nad ciałem K .

Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie bijekcją.⁶ Odwzorowaniem odwrotnym do f nazywamy odwzorowanie liniowe $g \in \mathcal{L}(W, V)$ takie, że

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \quad f(v) = w \Leftrightarrow g(w) = v.$$

Jesli takie odwzorowanie istnieje, to jest jedyne. Oznaczamy je symbolem f^{-1} .

⁶W szczególności wynika stąd, że $\dim V = \dim W$.