

$$\varphi(x, y, z, t) = (x+y+z+2t, x-y+z+6t, x+y-z-4t) \in \text{Im } \varphi$$

$$= (x, x, x) + (y, -y, y) + (z, z, -z) + (2t, 6t, -4t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ker } \varphi = \{t, 2t, -3t, t\}, t \in \mathbb{R} = \text{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$$

Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\text{Ker } \varphi$ oraz $\dim \text{Ker } \varphi = 1$.

Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto

$$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } \varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \text{ zatem } \varphi \text{ jest epimorfizmem.}$$

Stąd $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$$

$$\text{Im } \varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Im } \varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\text{Im } \varphi$.

$$\text{Im } \varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \text{Im } \varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3.$$

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie iniekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie iniekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V . Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W .

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U, V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,

jest przestrzenią liniową nad ciałem K .

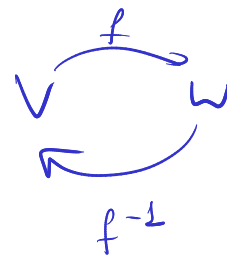
$\Rightarrow$ Suma odwz. liniowych jest odwz. lin.
tzn. $\alpha \in \mathbb{R}, f$ -liniowe $\Rightarrow \alpha f$ -tż lin.owe

Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie bijeckją.⁶ Odwzorowaniem odwrotnym do f nazywamy odwzorowanie liniowe $g \in \mathcal{L}(W, V)$ takie, że

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \quad f(v) = w \Leftrightarrow g(w) = v.$$

Jesli takie odwzorowanie istnieje, to jest jedyne. Oznaczamy je symbolem f^{-1} .

⁶W szczególności wynika stąd, że $\dim V = \dim W$.





2D obraz odwz. liniowych jest odwz. liniowym

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

f -izomorfizm $\Rightarrow f^{-1}$ -izomorfizm

Oznaczmy przez $\text{Aut}_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) : f - \text{bijekcja}\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V .

$$f: V \rightarrow V$$

Wniosek 7.3.3. Zbiór $\text{Aut}_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprze-
mienną.

Dowód. Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe id_V . Elementem symetrycznym do $f \in \text{Aut}_K(V)$ jest f^{-1} , bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii) $f^{-1} \in \text{Aut}_K(V)$. $\square$

Grupa $\text{Aut}_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $\boxed{GL(V)}$ i nazywana pełną lub ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej V .

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

$$\dim V = m \quad \dim W = m$$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi: V \rightarrow W$.

! $\rightarrow$ ustalane bazy

$$b_i \in V \rightarrow \varphi(b_i) \in W \leftarrow \text{komb. liniowa } c_{i1} \dots c_{im}$$

Definicja 7.4.1. Macierzą (lub reprezentacją macierzową) odwzorowania liniowego φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m \times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$$\mathcal{B}_V^3 = (e_1, e_2, e_3) \quad \mathcal{B}_W^2 = (i, j)$$

$$\varphi(e_1)$$

$$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0), \varphi(0, 1, 0) = (0, 2), \varphi(0, 0, 1) = (0, 1)$$

$$M_\varphi(\mathcal{B}_V^3, \mathcal{B}_W^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = ? \quad \varphi(x, y, z) = ?$$

b) bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

-> a mój $\mathbb{R}^3$ zmiana bazy

$$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_{\mathcal{C}}$$

$$(3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1)$$

$$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_{\mathcal{C}}$$

$$(3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2, \varphi(b_1) = [3, -2]_{\mathcal{C}}$$

konwencja

$$3i + 4j$$

$$(a|b) \quad [a|b]_{\mathcal{B}_W^2}$$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$\varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_C, \quad (0, 1) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3, \varphi(b_2) = [3, -3]_C$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_C$$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

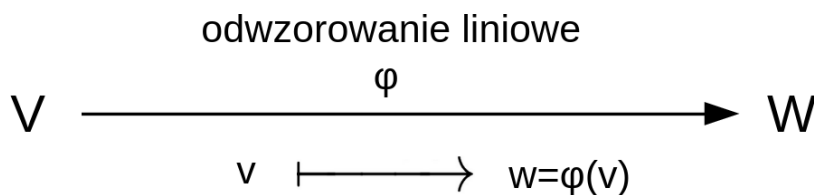
Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ AX

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Uwaga 7.4.4. Rozważmy dwie przestrzenie liniowe V oraz W nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V , zaś $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W .



$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)} \mathbb{R}^m$$

$$[v_1, v_2, \dots, v_n]_B \longmapsto [w_1, w_2, \dots, w_m]_C$$

$\mathbb{R}_n[x]$ - zbiór wielom. o współcz. z $\mathbb{R}$ zmiennej x stopnia $\leq n$

Przykład 7.4.5. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.

Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni

$$\dim \mathbb{C}_1[z] = 2$$

79

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim M_2(\mathbb{C}) = 4$$

$$1 = \underbrace{0}_{\alpha} \cdot z + \underbrace{1}_{\beta}$$

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C})$$

$M_2(\mathbb{C})$.

$$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$$

$$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_{\mathcal{C}}$$

$$z = \alpha \cdot z + \beta \cdot 1$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2, \dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4, \Rightarrow M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C}), M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) =$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

$$(1, z) \xrightarrow{\alpha z + \beta} \begin{bmatrix} \alpha z + \beta \\ \beta \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f(\alpha z + \beta) = ?$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = ?$$

Twierdzenie 7.4.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

brzydką

Uwaga 7.4.7. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.8. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\text{rank}(\varphi) = \text{rank} A$.

$$\text{rank} A = \dim \text{Im} \varphi$$

Wniosek 7.4.9. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.6. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = n$.

$$\dim V = n$$

$$\dim W = m$$

$$\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$$

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy

Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$ oraz za pomocą $M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem?

$$\text{Oznaczmy } A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A' = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sprawdzenie } \varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$$

$$2$$

$$\uparrow$$

$$2c$$

$$wzoru$$

80

$$\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$$

$$\begin{aligned} &\text{r}(\varphi) \\ &\parallel \\ &\text{r}(A) \end{aligned}$$

$B = (b_1, b_2, b_3)$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (c_1, c_2)$ $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_3 = [1, 0, 3]_B$

$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Stąd $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_C = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$.
 Dodatkowo zauważamy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
 Ponadto $\dim \text{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

$\dim \mathbb{R}^3 - r(A)$

$A' = M_\varphi(B, C)$

$\dim \text{Im} \varphi = 0$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.10. Przy powyższych założeniach

$M_f + M_g$ $A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ oraz $\alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.11. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) f jest izomorfizmem
 ii) $\text{Ker} f = \{0_V\}$
 iii) $\text{Im} f = W$
 iv) $r(A) = \dim V$
 v) $\det A \neq 0$
- $\varphi: V \rightarrow W$ A $n \times n$ kwadratowa $r(A)$
- $\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$
- $\dim W$

Wniosek 7.4.12. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 7.4.13. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$M_g \cdot M_f = B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.14. Dane są odwzorowania liniowe

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z)$,

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - 3z, x + y)$,

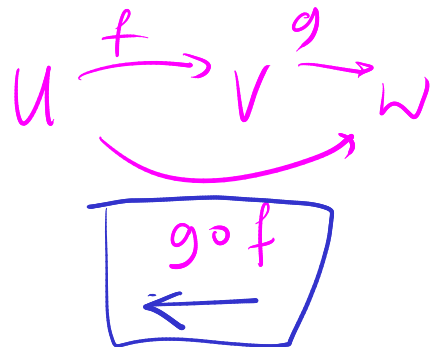
$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y, x - y)$.

Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania

$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

$g(e_1) \quad g(e_2) \quad g(e_3)$

$$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy h jest odwracalne?

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h \text{ jest odwracalne}$$

$$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = (M_h)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}^2 M_{f+g} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x, y, z) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z \right)$$

$$\varphi(1, 2, 3) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = \left(-\frac{44}{9}, \frac{112}{9} \right)$$

Uwaga 7.4.15. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\text{id} : V \rightarrow V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \text{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \dots + a_{n1}b_n \\ \dots \\ \text{id}(b'_n) = b'_n = a_{1n}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\text{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$

$$(V, \mathcal{B}') \xrightarrow{\text{id}} (V, \mathcal{B})$$

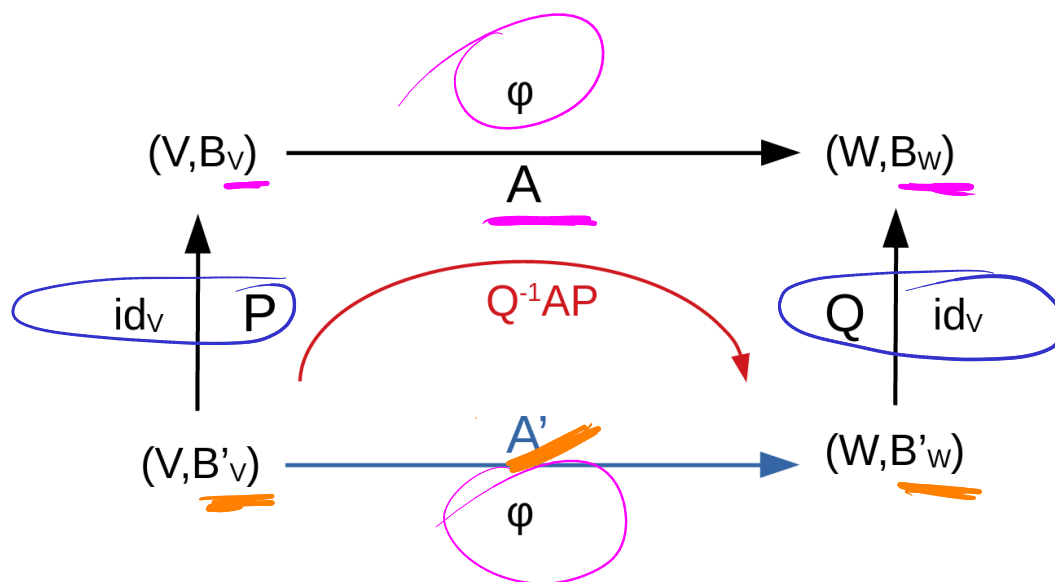
$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\text{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W . Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$



$$Q^{-1}AP = A'$$

$$A' = ?$$

Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczmy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$.

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

Także $P = P_{\mathcal{B}_k^3 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

+ o samo odwzorowanie

Uwaga 7.5.2. Zmiana bazy prowadzi do liniowej zmiany zmiennych lub podstawienia liniowego. Równość $X = PX'$ oznacza, że każda ze zmiennych $x_1, \dots, x_n$ wyraża się jako kombinacja liniowa $x'_1, \dots, x'_n$. Ponieważ $\det P \neq 0$, możemy wywnioskować, że $X' = P^{-1}X$ i wyrazić każdą ze zmiennych $x'_1, \dots, x'_n$ jako kombinację liniową $x_1, \dots, x_n$.

W powyższym przykładzie zmiana baz w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ oznacza zmianę układów współrzędnych (a zatem zmianę zmiennych). Powoduje to zmianę przepisu odwzorowania φ , ale w żaden sposób nie wpływa na to jaki wektor $\varphi(v) \in \mathbb{R}^2$ jest przypisywany danemu wektorowi $v \in \mathbb{R}^3$.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \boxed{PX' = X}$$

Korzystamy z równości $X' = P^{-1}X$. Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ 2x - y \\ -2x + y + z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}$$

Ponadto $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $Y' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$, $Y = QY' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ 2a' + b' \end{bmatrix}$.

Korzystając z macierzy A oraz A' otrzymujemy

$(a, b) = \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ oraz $(a', b') = \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z')$.

Możemy sprawdzić, że

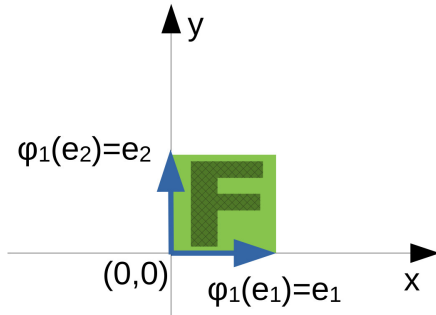
$$(a', b') = \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z') =$$

$$= (3(-x + y) + 3(2x - y), -2(-x + y) - 3(2x - y) + (-2x + y + z)) = (3x, -6x + 2y + z).$$

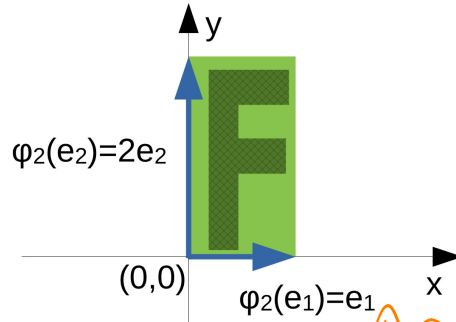
Stąd $a = a' = 3x$ oraz $b = 2a' + b' = 6x - 6x + 2y + z = 2y + z$.

Przykład 7.5.3. Endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^2$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

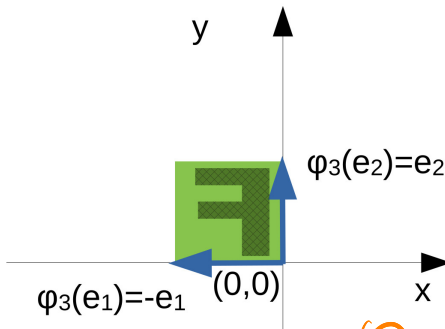


identyczność $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

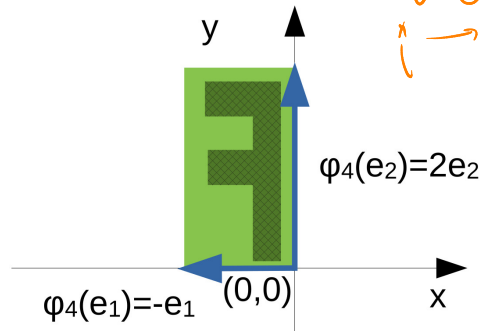


rozciąganie $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

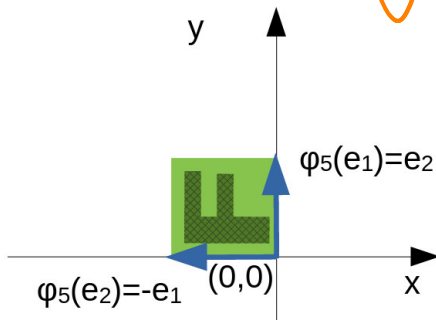
$j \rightarrow 2j$



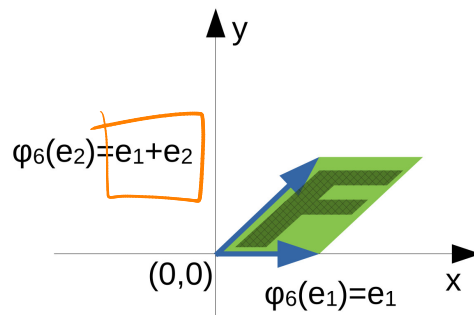
odbicie (symetria osiowa) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



rozciąganie i odbicie $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 ↑ odbicie ↑ rozciąganie



obróć (rotacja) o kąt $\frac{\pi}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



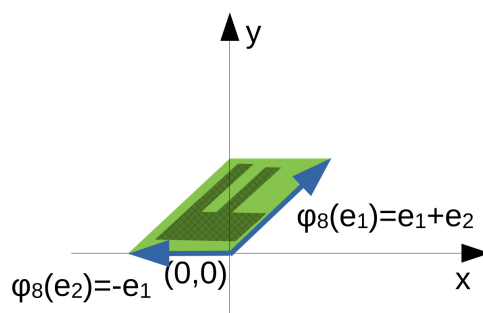
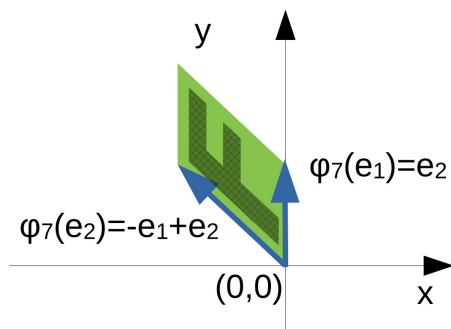
powinowactwo ścinające (ang. shear) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

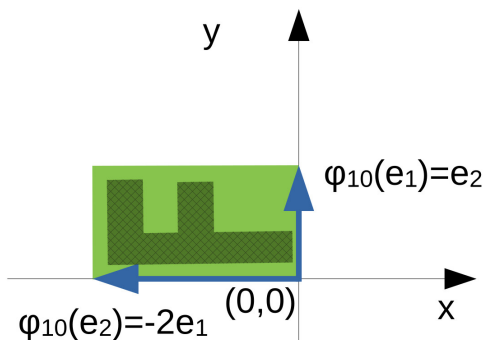
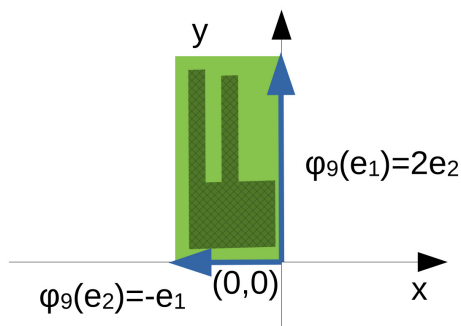
Zmiana bazy

tutaj
macierze
nieodwracalne



powinowactwo ścinające i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

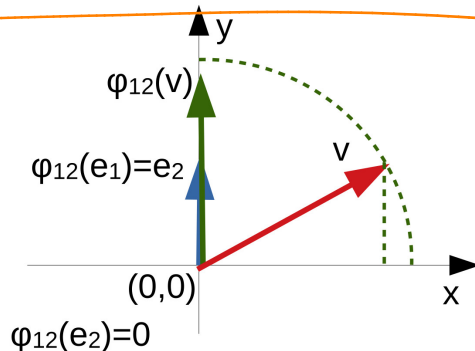
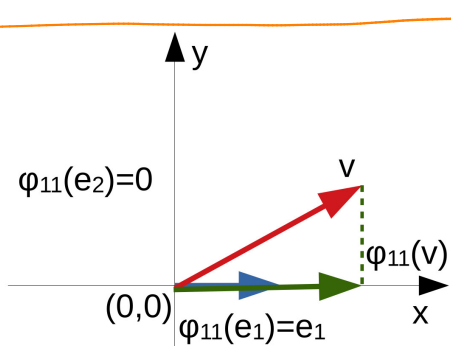
rotacja i powinowactwo ścinające $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



rotacja i rozciąganie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

rozciąganie i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

*macierz
nieliniowa
zmiana
zmiennych*



rzutowanie (projekcja) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

projekcja i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czym jest powinowactwo ścinające, dowiesz się tutaj.

nieliniowa

7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

$AX = B$

↑
niejednorodny

Przy ustalonych bazach przestrzeni K^n, K^m macierz A jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m$. Rozwiązywanie układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ polega na wyznaczeniu jądra $\text{Ker} \varphi_A$ odwzorowania φ_A .

Wniosek 7.6.1. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $AX = \mathbf{0}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K . Jej wymiar jest równy $n - r(A)$.

W szczególności wektor zerowy zawsze należy do zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Ponadto suma rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązaniem tegoż układu jednorodnego.

Twierdzenie 7.6.2. Niech $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ będzie jednym z rozwiązań niesprzecznego niejednorodnego układu równań liniowych $AX = B$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań układu $AX = B$ ma postać

$$\left\{ (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \text{ dowolne rozw. } \underline{AX = \mathbf{0}} \right\}.$$

Przykład 7.6.3. Rozważmy raz jeszcze układ równań z przykładu 4.4.2.

$m = 5$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u = 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u = 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u = 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u = 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Jak już wiemy, $r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ i jest to układ nieoznaczony, posiadający nieskoń-

czenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów. Rozwiązania są postaci

$$\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$m - r = 5 - 3 = 2$

$t=0$
 $y=0$

Jedno szczególne
rozwiązanie $AX=B$

Wymiar przestrzeni rozwiązań
wynosi 2 $AX=0$

Równoważnie

$$(x, y, z, t, u) = (11 - 2y, y, -3 + \frac{7}{3}t, t, 3 - \frac{8}{3}t) = (11, 0, -3, 0, 3) + (-2, 1, 0, 0, 0)y + (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})t.$$

Dla $y = 0$ i $t = 0$ otrzymujemy $(11, 0, -3, 0, 3)$ jako jedno z rozwiązań rozważanego układu.

Zbiór rozwiązań korespondującego układu jednorodnego jest przestrzenią liniową wymiaru 2, zaś układ wektorów $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})\}$ jest bazą tej przestrzeni.