

TEMAT: Zagadnienie własne operatora liniowego

$$\varphi: V \rightarrow V$$

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

$$A = M_{\varphi}$$

KWADRATOWA

Niech $K = \mathbb{R}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n . Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2 .

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennej.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$ ← zachowaj ii iii

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą* względem endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ lub krótko φ -*niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad \text{tzn.} \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \in U.$$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz .

Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ -niezmiennicza.

2) Niech $V, \varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \text{Ker} \varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.

Zatem U jest φ -niezmiennicza.

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ -niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U: U \rightarrow U$, czyli

$$\varphi \in End(V)$$

$$\varphi(V) \subset V$$

89

$$u \in V$$

$$\varphi(u) \in u$$

 zawsze zachowaj

$$\psi = \varphi|_u \quad \psi \in End(u)$$

$\varphi|_U \in \text{End}(U)$.



Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V . Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ wynika, że $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, gdzie $A_1 \in M_k(K)$, $A_2 \in M_{n-k}(K)$, $B \in M_{k \times (n-k)}(K)$, $0 \in M_{(n-k) \times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \rightarrow U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in \text{End}(V)$.

EIGENVALUES

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną endomorfizmu φ , jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ .

EIGENVECTORS

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy zagadnieniem własnym dla endomorfizmu φ .

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $\text{Spec}(\varphi)$ i nazywamy widmem bądź spektrum tego operatora.

zbiór liczb

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ oraz $v \in V$, $v \neq 0_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $0_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq 0_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

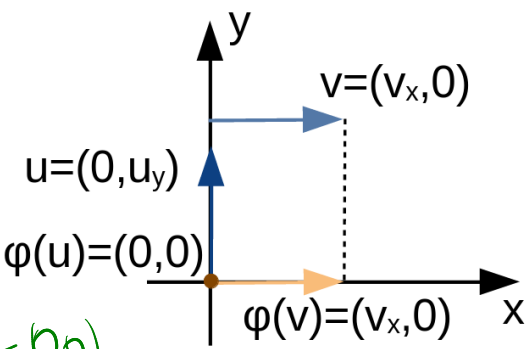
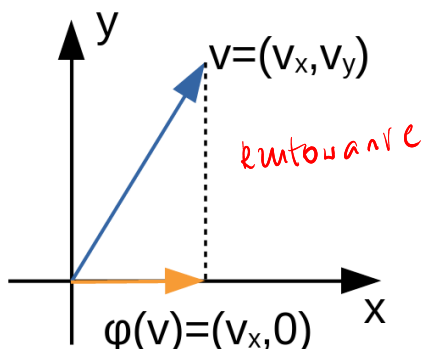
$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox . Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ . Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v , tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:

- 1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
- 2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = 0$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$

$$\vec{v} \xrightarrow{\varphi} \varphi(\vec{v}) = \vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$$

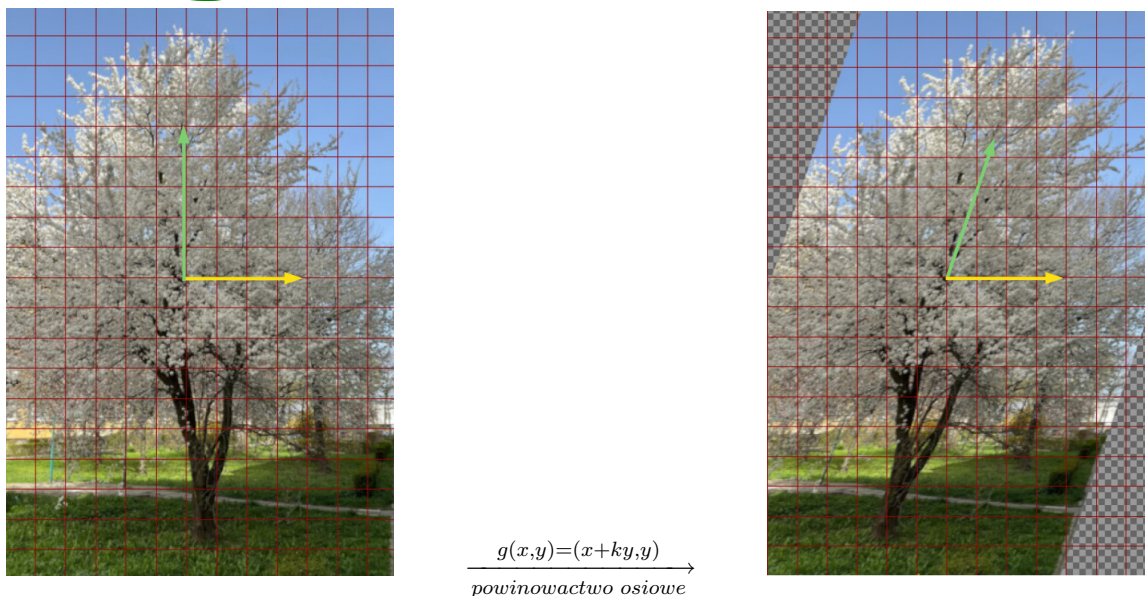
ten sam kierunek co $\vec{v}$



2) $\varphi(u) = (0,0)$
 $\varphi(u) = (0,0) = 0 \cdot u$
 $\lambda = 0$

1) $\varphi(v) = 1 \cdot v$
 $\lambda = 1$

Przykład 8.1.7. Niech $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś żółty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ .

3) Niech $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Stąd $\text{Spec}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu

Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczmy taką bazę przestrzeni liniowej V , że macierz endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ w tej bazie będzie diagonalna.

Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ .

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada

składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

$$(f+2g)(x) = f(x) + 2 \cdot g(x) *$$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

EIGENSOURCE

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

wektory własne odp. λ
PLUS
wektor zerowy

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

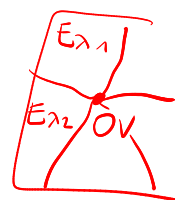
ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ -niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \text{Ker} \psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$.

$$\forall v \in E_\lambda \quad \varphi(v) \in E_\lambda$$

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy podprzestrzenią własną endomorfizmu φ , odpowiadającą wartości własnej λ .

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$, możemy badać jego restrikcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in \text{End}(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i} , gdzie $\lambda_i \in \text{Spec}(\varphi)$.



Twierdzenie 8.1.12. Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

tzn. λ jest wartością własną

ii) $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{0_V\}$

$\exists v \neq 0_V$ tzn. $v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

$A = M_\varphi$

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $0_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = 0, \quad \text{gdzie } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

można wziąć macierz odwz. φ w dowolnej

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Definicja 8.1.15. Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V . Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi odwzorowania φ .

chi

WIELOMIAN ZM. t

$$\det(A - tI) = (1-t)(4-t) - 6$$

$$A - tI = A - t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 4-t \end{bmatrix}$$

$$\varphi: V \rightarrow V \quad V = (V_i + i\mathbb{R}i)$$

to obowiązuje

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała $\mathbb{R}$ to wartości własne endomorfizmu φ .

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V .

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A_{m \times m}$$

$$A' = Q^{-1} A Q$$

$$Q = P$$

$$A = M_\varphi(B, B) \quad A' = M_\varphi(B', B')$$

$$A' = P^{-1} A P$$

Definicja 8.1.17. i) Wielomianem charakterystycznym macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym macierzy A .

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy wartością własną macierzy A . Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $\text{Spec}(A)$ i nazywamy widmem bądź spektrum tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\det(A - tI)$$

$$\det(A' - tI) =$$

$$= \det(P^{-1}AP - tI)$$

$$= \det(P^{-1}AP - tP^{-1}IP)$$

$$\det[P^{-1}(A - tI)P]$$

nazywamy wektorem własnym macierzy A , odpowiadającym wartości własnej λ .

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$\det(P^{-1}) \det(A - tI) \det P$$

Niech V będzie przestrzenią liniową n -wymiarową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ oraz $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy krotnością algebraiczną wartości własnej λ .

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy krotnością geometryczną wartości własnej λ .

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy prostymi. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy widmem prostym.

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V . Wówczas

* i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$, krotność geom. λ nigdy nie przekracza

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$.

Twierdzenie

krotność alg. λ

$$E_\lambda = ? \quad \text{wektory w. odp. } \lambda \oplus 0_V$$

$$\varphi(v) = \lambda v$$

$$\varphi(v) - \lambda \text{id}(v) = 0$$

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}) = ?$$

$$\dim \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}) + \dim \text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}) = \dim V$$

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$.
 Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
 ii) Ponieważ $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$, zatem
 $\dim E_\lambda = \dim V - \dim \text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

1

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_k^3 = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\text{Spec}(\varphi) = ?$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1 \quad \text{widmo proste}$$

$$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$$

3
 $\lambda_3 = -1$
 jakie wektory własne?

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, z \in \mathbb{R}$$

METODA I:

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\} \quad \text{oraz } \dim E_{-1} = 1$$

METODA II:

Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy

$$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1, \quad \text{zatem } \dim E_{\lambda_3} = 1.$$

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2} . Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in \text{Spec}(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k .

$$\varphi \quad A \quad \lambda \in \text{Spec}(\varphi) = \text{Spec}(A)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -1 \\ \varphi(v) &= \lambda_3 \cdot v \\ AX &= \lambda_3 X \\ (A - \lambda_3 I)X &= 0 \\ (A + I)X &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

$\det(A - \lambda_3 I) = 0$
 Wzrost nie jest oznaczony
 układ jednorodny
 nigdy nie jest sprzeczny

2
 $\lambda_2 = 2$
 jakie wektory własne?

NA
 CW

ii) $c \cdot \lambda \in \text{Spec}(c \cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.

iii) $p(\lambda) \in \text{Spec}(p(A))$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$. $A^2 + 2A$ $\lambda^2 + 2\lambda$

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in \text{Spec}(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$. $\rightarrow \text{tzn. } 3A^{-1}$

v) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Spec}(A)$.

$$0 = \lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow \det A = 0$$

8.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in \text{End}(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne. $\dim V = n$

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \dots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V . $\leftarrow k_1 = \dots = k_n = 1$ pierwiastki jednokrotne

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tej bazie ma postać diagonalną. $\rightarrow$ układ n wektorów w n -wymiarze

$$B' = (v_1, \dots, v_n) \quad M_{\varphi(B'/B')} = \underline{A' = D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

v_n - wektor wł. odp. λ_n

$$\text{tzn. } \varphi(v_n) = \lambda_n \cdot v_n$$

$$B' = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . $\rightarrow$ v_{λ_1} w bazie B'

$$= \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$$

n pierwiastków i licząc z krotnościami

$$\dim V = n = \deg \chi_\varphi$$

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy diagonalizowalnym, gdy istnieje taka baza przestrzeni V , że macierz operatora φ w tej bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ . Dokładniej mówiąc, $\varphi \in \text{End}(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{R}$ (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ .

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.6. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.7 (o niezmiennikach macierzy podobnych). Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

iv) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$

Jeżeli $\varphi \in \text{End}(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V .

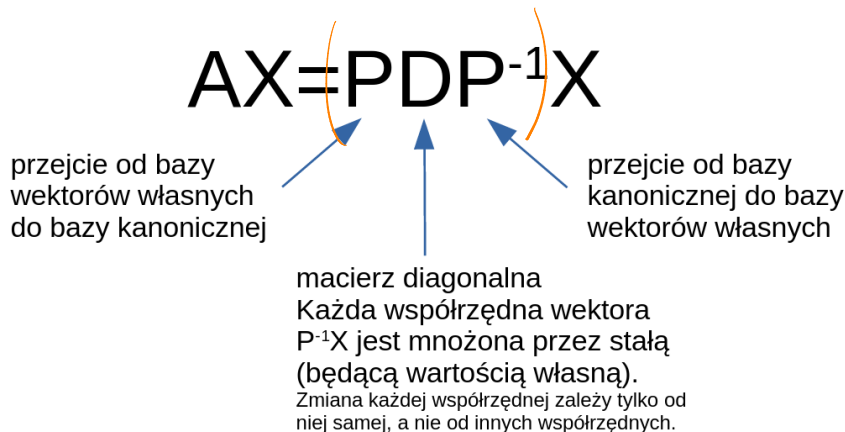
Definicja 8.2.8. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy diagonalizowalną, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P diagonalizuje macierz A .

Wniosek 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A .

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.10. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie diagonalizowalny oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych

φ . Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wówczas $A = PDP^{-1}$.



$$A' = P^{-1}AP$$

$$\parallel$$

$$D$$

$$P \cdot D = P^{-1}AP \cdot P$$

$$PD = AP \quad / \quad \cdot P^{-1}$$

$$\boxed{PD P^{-1} = A}$$

Przykład 8.2.11. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.12. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$, $\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ jest diagonalizowalny?

$$2 \cdot (0, 0, 1)$$

$$\varphi(1, 1, 1) = -1 \cdot (1, 1, 1)$$

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$\lambda_1 = -1$$

Odczytujemy wartości własne i wektory własne

$$\lambda_1 = -1, v_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = 1, v_2 = (0, 1, 1), \lambda_3 = 2, v_3 = (0, 0, 1).$$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.13. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$$

Twierdzenie

$$\deg \chi_\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\text{Spec} \{-1, 1, 2\}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq k_i = 1$$

$$\parallel$$

$$i=1, 2, 3$$

$$1$$

$$(A - \lambda_1 I)X = 0$$

$$+1$$

$$X = ?$$

$$\dim E_{-1} \text{ krotnosci geom}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\text{wynosi } 2 \neq k_1 = 3$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3 \quad \text{tw. Laplace'a}$$

$$\bullet \text{ Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}, k_1 = 3 \quad \text{krotnosci alg}$$

$$\bullet E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x, y, z) : (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\dim \ker(\varphi + \text{id}) \quad \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq k_1 = 3.$$

$$\text{tw. o nadci}$$

$$\dim \text{Im}(\varphi + \text{id})$$

97

$$A + I$$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ .

Przykład 8.2.14. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

Standardowa baza $M_2(\mathbb{R})$

$f \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$

$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ baza $M_2(\mathbb{R})$

$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{11} + \epsilon_{11}^T$

$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{12} + \epsilon_{12}^T$

$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\chi_f(t) = \det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{bmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2((1-t)^2 - 1)$

$(1-t)^2 - 1 = (1-t)^2 - 1^2 = (1-t-1)(1-t+1) = (-t)(2-t) = -t(2-t)$

$\chi_f(t) = (2-t)^2(-t(2-t)) = -t(2-t)^3$

$\text{Spec}(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 3, \dim E_0 = 1, 1 \leq \dim E_2 \leq 3$

1) $E_{\lambda_1} = E_0 = \text{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$

Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$f(B) = B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = d = 0, c = -b$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\dim E_0 = 1$

2) $E_{\lambda_2} = E_2 = \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}, \quad O_{2 \times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$ $f(B) = 2B$

$(A - 2I)x = 0$

$(A - 2I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right] \quad \mathcal{B} = [a, b, c, d]$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

$$\propto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$\dim E_2 = 3 = k_2!$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

Przykład 8.2.15. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$. Możemy wyliczyć $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.

Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.

Układ $\mathcal{C} = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$ jest bazą wektorów własnych.

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

