

Uwaga 8.2.16. W dalszej części wykładu przekonamy się, że każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych. A zatem rzeczywiste macierze symetryczne są zawsze diagonalizowalne. Co więcej, wśród wszystkich możliwych macierzy diagonalizujących daną rzeczywistą macierz symetryczną, znajdziemy zawsze taką macierz diagonalizującą P , dla której $P^{-1} = P^T$.

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

$$A = M_\varphi(B_k, B_k) \quad \tilde{A} = M_{\varphi^r}$$

$\varphi: V \rightarrow V$ **Wniosek 8.3.1.** Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V . Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V , to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n\text{-razy}} = \varphi^r = ?$$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^r P^{-1}, \quad \text{gdzie } P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}, \quad D =$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = P^{-1} A P$$

diagonalna
Dr łatwo policzyć!
 $D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^r \end{bmatrix}$

$$A^r = \underbrace{(P D P^{-1})(P D P^{-1}) \dots (P D P^{-1})}_{r\text{-razy}} = P D (P^{-1} P) D \dots (P P^{-1}) D P^{-1} = P D^r P^{-1}. \quad \square$$

↑ mnożenie macierzy potęgiczne

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P . Oblicz $\varphi^{101}(1, 2, 3)$.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \stackrel{k_2+k_1}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$$\text{Spec } \varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 2, \quad 1 \leq \dim E_1 = 1, \quad 1 \leq \dim E_2 \leq 2 = k_2$$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3$

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2, \quad = k_2 \Rightarrow \varphi \text{ diagonalizowalny}$$

tw. o rządzie

zatem φ jest diagonalizowalny.

1) Wyznaczmy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$$

$\vec{e}_1 = (-2, -2, 1)$ wektor w odpow. $\lambda_1 = 1$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x, x, y \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \{(x, y, y - x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = (c_1 = (-2, -2, 1), c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (0, 1, 1))$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

Obliczmy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D . Niech $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_{\mathcal{C}}$.

$$\text{Wówczas } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_{\mathcal{C}}$$

$$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2c_1 + 5 \cdot 2^{101}c_2 + 6 \cdot 2^{101}c_3 =$$

$$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$$

prościej!

METODA II: Obliczamy

$$A^{101} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5 \cdot 2^{101} \\ -4 - 6 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix}$$

w bazie $\mathcal{B}_k^3$

w bazie $\mathcal{B}_k^3$

TEMAT: *Formy kwadratowe*

9.1 Definicja formy kwadratowej

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Obserwacja: Niech D będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Niech $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, wówczas $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ oraz $X^T D X$ jest macierzą stopnia 1.

Zauważmy, że $X^T D X = X^T B X$.

Istotnie $X^T D X = X^T (B + C) X = X^T B X + X^T C X$ oraz $X^T C X = X^T \frac{D - D^T}{2} X = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D^T X) = \frac{1}{2} (X^T D X - (X^T D^T X)^T) = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D X) = 0$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K taką, że $\dim_K V = n < \infty$. Ustalmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ przestrzeni V .

Definicja 9.1.1. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą symetryczną. Odwzorowanie $\gamma : V \rightarrow K$

dane wzorem $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x \in V, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$,

nazywamy *formą kwadratową*. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ w bazie $\mathcal{B}$.

Na mocy powyższej obserwacji założenie $A = A^T$ możemy przyjąć bez straty dla ogólności.

Uwaga 9.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

iii) $\forall x \in V \forall \lambda \in K \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2 \gamma(x)$

$$X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + 3x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = \gamma(x_1, x_2)$$

Np.
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
 $A = A^T$
symetryczna
 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Na ćwiczenia z analizy
(Niezna ob. z algebry)

antysymetryczna

symetryczna

$$D = B + C$$

CW. z ANALIZY

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 x_1^2 + 4\lambda x_1 \lambda x_2 + 3\lambda^2 x_2^2 = \lambda^2 (x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2)$$

Dowód. i) $[x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 +$

$$a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

ii) Na mocy i) każdy jednomian γ jest stopnia 2.

iii) Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in K$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. $\square$

Uwaga 9.1.3. Każdej macierzy kwadratowej A odpowiada forma kwadratowa γ zdefiniowana powyżej. I odwrotnie, każdej formie kwadratowej γ odpowiada macierz B zdefiniowana następująco.

$$\text{Niech } f : V \times V \rightarrow K, f(x, y) := \frac{1}{2}(\gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y)).$$

Odwzorowanie f jest dwuliniowe, tzn. liniowe ze względu na każdą zmienną.

$$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) \wedge f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$$

Odwzorowanie f nazywamy formą dwuliniową *biegunową* względem γ lub *stowarzyszoną* z γ .

Forma dwuliniowa f jest *symetryczna*, tzn. $\forall x, y \in V \quad f(x, y) = f(y, x)$.

Jeśli $x, y \in V$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$, to wówczas

$$f(x, y) = f(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= x_1 f(b_1, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + x_2 f(b_2, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + \dots + x_n f(b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(b_i, b_j) = X^T B Y, \quad \text{gdzie } B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = f(b_i, b_j).$$

Zauważmy, że $f(x, x) = \frac{1}{2}(\gamma(2x) - 2\gamma(x)) = \gamma(x)$, zatem $\gamma(x) = X^T B X$ oraz $A = B$.

Podsumowując, jeśli w przestrzeni V ustalimy bazę, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy macierzami $A \in M_n(K)$ oraz formami kwadratowymi γ na V .

Przykład 9.1.4. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & 4x_1x_3 \\ & = 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\ & 0 \cdot x_2x_3 \end{aligned}$$

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d_{P_0}^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{P_0}^2 f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$$

$m=1$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_{x_0} f = f'(x_0) dx$$

$$h = \Delta x$$

103

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{np. } m=2 \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad P_0 = (x_0, y_0) \quad d_{P_0} f = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \Delta y$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= h_1 \\ \Delta y &= h_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$h_1 \cdot h_1 + h_2 \cdot h_2$$

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}$$

$$d^2 f_{P_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) h_2^2$$

Jest to tak zwana *macierz Hessego*. Jej wyznacznik nazywamy *hesjanem*.

9.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

bo nie ma wyrazu

wolnego

Definicja 9.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$ nazywamy

- dodatnio określona, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,
- ujemnie określona, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,
- dodatnio półokreślona, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,
- ujemnie półokreślona, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,
- nieokreślona, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

$$\gamma(x) \in \mathbb{R}$$

$$\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Powyższe pojęcia nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V . Terminologia ta przenosi się na macierze.

Definicja 9.2.2. Rzeczywistą macierz symetryczną A nazywamy *dodatnio określoną*, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T A X$ jest dodatnio określona, tzn. $X \neq \mathbf{0} \Rightarrow X^T A X > 0$.

W pozostałych przypadkach definiujemy analogicznie.

Przykład 9.2.3. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

$$\gamma(0,0,0) = 0$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0) \quad \gamma(x_1, x_2, x_3) > 0$$

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1, 0, 1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0, 1, 0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \quad \gamma(0, x_2, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 9.2.4. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

- i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.
- ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k .

typowe
oznac.

Symbolem $D_{i_1 \dots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k , powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \dots < i_k$.

Przykład 9.2.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

minory wiodące główne: $\Delta_1 = D_{11} = 1$, $\Delta_2 = D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$,

$\Delta_3 = D_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_4 = D_{1234} = \det A = 0$

minory główne: $D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 12$, $D_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Twierdzenie 9.2.6 (Kryterium Sylwestera). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

- i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k > 0$.
- ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego ujemne, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} (-1)^k \Delta_k > 0$.

Bez dowodu.

Przykład 9.2.7. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_3 = \det A = -3 < 0$.

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Uwaga 9.2.8. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A .

Twierdzenie 9.2.9. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$.

- i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne,
 tzn. $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.
- ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
 $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.

Przykład 9.2.10. Forma kwadratowa $\gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$$D_2 = 0, D_3 = 1, D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

Uwaga 9.2.11. i) Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to macierz jest nieokreślona.

ii) Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. i) $\Delta_2 = D_{12}$ to minor stopnia 2. Jeśli $D_{12} = (-1)^2 D_{12} < 0$, to na mocy kryterium Sylwestera, macierz nie jest dodatnio określona ani ujemnie określona. Na mocy twierdzenia 9.2.9 nie jest półokreślona dodatnio ani półokreślona ujemnie.

ii) Dowód można znaleźć w [4]. $\square$

Twierdzenie 9.2.12 (Kryterium wartości własnych). Niech $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

- i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0$,
- ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i < 0$,
- iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \geq 0$,
- iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \leq 0$,
- iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Dowód. Niech $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym λ . Oczywiście $v \neq \mathbf{0}_V$, więc $|v| \neq 0$. Obliczamy $v^T(Av) = \gamma(v) = v^T(\lambda v) = \lambda v^T v = \lambda |v|^2$. Zatem $\gamma(v) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, co dowodzi podpunktu i). Analogicznie w pozostałych przypadkach.

$\square$

$$\gamma(v) = \lambda |v|^2$$

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \text{liczba}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= v_1^2 + \dots + v_n^2 = \|v\|^2$$

Przykład 9.2.13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t(1 - (1-t)^2) = t(2t - t^2) = \underline{t^2(2-t)}$$

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$$

*półokreślona dodatnio $\rightarrow$ nie ujemna
nie o ekstrem*

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

10.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym* lub *iloczynem wewnętrznym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$, *liniowa na pierwszą zmienną*
- ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$, *symetryczne*
- iii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$. *$\mathbb{R}^3 \quad s(u, v) \quad u \cdot v$*

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E . Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$. *$\langle u | v \rangle \quad (u, v) \quad (u | v)$*

Uwaga 10.1.2. Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V , oraz $u, v \in V$, $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $v =$

$[y_1, y_2, \dots, y_n]_{\mathcal{B}}$, to każdy iloczyn skalarny jest postaci $s(u, v) = \underline{X^T A Y}$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oraz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $a_{ij} = s(b_i, b_j)$.

Warunek i) równoważny jest stwierdzeniu, że $s(u, v)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$.

Warunek ii) równoważny jest stwierdzeniu, że macierz A jest macierzą symetryczną.

Zaś warunek iii) w powyższej definicji równoważny jest stwierdzeniu, że macierz A jest dodatnio określona, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące główne macierzy A są dodatnie, lub równoważnie, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie.

Przykład 10.1.3. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

$$\mathbb{R}^3 \quad u = (u_1, u_2, u_3) \\ v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u \circ v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

1) Standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall f, g \in V$ $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall p, q \in V$ $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ liczby ustalone

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$. Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Wielomian stopnia co najwyżej drugiego, posiadający trzy różne pierwiastki jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{tr} A = 1 + 0 + 3$$

ślad

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 10.1.4. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w),$

→ suma dwuliniowa

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0,$

iii) $\forall u, v \in V \quad \left(s(u, v) \right)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v) \quad \text{nierówność Schwarza}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.5. Funkcję $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V,$

$$\| -2 \vec{v} \| = 2 \cdot \| \vec{v} \|$$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|,$

← moduł w $\mathbb{R}$

iii) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$ tzw. warunek trójkąta

Liczbę $\|v\| \geq 0$ nazywamy *normą* (lub *długością*) wektora v . Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

$$\mathbb{R}^3 \\ v = (1, 2, 5)$$

$$v \circ v = (1, 2, 5) \circ (1, 2, 5) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = \|v\|^2 \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{v \circ v}$$

Twierdzenie 10.1.6. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)}$$

jest normą w przestrzeni V . Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny*.

Wniosek 10.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

Przykład 10.1.8. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Jest to tzw. norma euklidesowa w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 10.1.9. Uzasadnimy, że odwzorowanie $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ dla $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Ponadto obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

METODA I : Sprawdzimy warunki z definicji iloczynu skalarnego.

Dla dowolnych $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} s(\alpha x + \beta z, y) &= 13(\alpha x_1 + \beta z_1)y_1 - 2(\alpha x_1 + \beta z_1)y_2 - 2(\alpha x_2 + \beta z_2)y_1 + (\alpha x_2 + \beta z_2)y_2 = \\ &= \alpha(13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2) + \beta(13z_1y_1 - 2z_1y_2 - 2z_2y_1 + z_2y_2) = \alpha s(x, y) + \beta s(z, y) \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie s jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną. Ponadto $s(x, y) = s(y, x)$ oraz

$$s(x, x) = 13x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 9x_1^2 + (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) = 9x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Stąd $s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

METODA II : Skorzystamy z uwagi 10.1.2.

$s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$. Rozważmy bazę $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$. Macierz $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = s(e_i, e_j)$ dla $i, j = 1, 2$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Łatwo zauważyć, że $A^T = A$. Ponadto $\Delta_1 = 13 > 0$ oraz $\Delta_2 = \det A = 9 > 0$. Zatem A jest symetryczna i dodatnio określona. Stąd wnioskujemy, że s jest iloczynem skalarnym. Obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

$$\|v\| = \sqrt{s(v, v)} = \sqrt{13(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 + 3^2} = \sqrt{34}$$

10.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.