

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v .

Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$ jest wersorem, bowiem $\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$.

Miara kąta między wektorami

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarz'a dla dowolnych $u, v \in V$ mamy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α . Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 10.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznamy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \angle(u, v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} \end{aligned}$$

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Definicja 10.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy ortogonalnymi, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy układem ortogonalnym, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ortogonalny + unormowany

ii) Układ wektorów nazywamy układem ortonormalnym, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$$

delta a Kroneckera $\rightarrow \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_i \rangle &= \|v_i\|^2 = 1 \\ i \neq j & \quad v_j \perp v_i \\ \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Uwaga 10.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

$$\forall v \quad \langle \mathbf{0}_V, v \rangle = 0$$

Przykład 10.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([- \pi, \pi], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdźmy, czy wektory $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4} (-1 - (-1)) = 0 \\ \langle f, f \rangle &= \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

$$\begin{aligned} f &\perp g \\ \|f\| &= \sqrt{\pi} \\ &\text{nie wersor} \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.2.5 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dowód. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

Twierdzenie 10.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 10.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 10.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną* (ortonormalną) tej przestrzeni.

Przykład 10.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3$ z stand. il. skal.

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}, v_y = v \circ \hat{j}, v_z = v \circ \hat{k}$.

Z dokładnością do znaku składowe v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 10.2.10. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V, v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 10.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

$$u = [u_1, \dots, u_n]_{\mathcal{B}} \\ w = [w_1, \dots, w_n]_{\mathcal{B}}$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 10.2.10 przyjąć $\|b_i\| = 1$. $\square$

Wniosek 10.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$. $\square$

Dopełnienie ortogonalne

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 10.2.13. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym zbioru S w przestrzeni euklidesowej V . Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym wektora $x \in V$.

Twierdzenie 10.2.14. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrzenią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 10.2.15. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wyznaczmy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 10.2.16. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest ortogonalny do podprzestrzeni U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 10.2.17. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \in U^\perp \Leftrightarrow w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U$, $u = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 10.2.18. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$$w \perp U \Leftrightarrow \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$$

$$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x \Big|_0^1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 0 \quad \checkmark \quad \text{Zatem } w \perp U.$$

Własności dopełnienia ortogonalnego

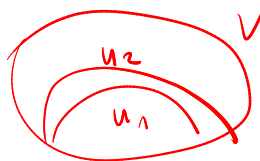
Twierdzenie 10.2.19. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,

ii) $U^\perp = (\text{lin} U)^\perp$,

iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.

iv) Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas $U = (U^\perp)^\perp$.⁷



10.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.1. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}$.

Wniosek 10.3.2. i) Każda skończona wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{0\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończonej wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Wniosek 10.3.3. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

Przykład 10.3.4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.

⁷Jeśli U jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to równość na ogół nie zachodzi. Przykładem może być podprzestrzeń U przestrzeni $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, postaci $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Można uzasadnić, że $U^\perp = \{0\}$ i w konsekwencji $U \neq (U^\perp)^\perp = V$.

$$b_1 = 1 \quad b_2 = x \quad b_3 = x^2$$

$$\beta b_2 + \alpha c_1$$

Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha$.
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.

Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.

Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.

$\mathcal{C} = (c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3})$ jest bazą ortogonalną.

$$\|c_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \|c_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bazą ortonormalną jest układ wektorów

$$C' = \left(c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right).$$

Przykład 10.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym

$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ oraz dwie bazy tej przestrzeni $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ oraz

$$C' = \left(c'_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right).$$

Dany jest wektor $p = \sqrt{6}x^2 + 3\sqrt{2}x$. Obliczymy jego normę.

$$\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 = (\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2 = 12 + 36 = 48. \text{ Zauważmy,}$$

że $p = [2\sqrt{2}, 6, 2]_{C'}$ oraz $p = [0, 3\sqrt{2}, \sqrt{6}]_{\mathcal{B}}$.

Baza C' jest bazą ortonormalną, zatem $\|p\|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 + 2^2 = 48$.

Baza $\mathcal{B}$ nie jest bazą ortonormalną, dlatego też $\|p\|^2 \neq (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 24$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.6. Niech $u_1, \dots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \dots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T | A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G | A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 10.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0)$, $b_2 = (5, 5, 1)$, $b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

$$A \cdot A^T = ? \quad \text{kwadratowa}$$

$$[AA^T | A] \xrightarrow{*} [G | A']$$

odczytaj baze ortogonalna

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T | A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5}w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array} \right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0)$, $c_2 = (6, 3, 1)$, $c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.

Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $\|c_1\|^2, \|c_2\|^2, \|c_3\|^2$.

Zatem $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

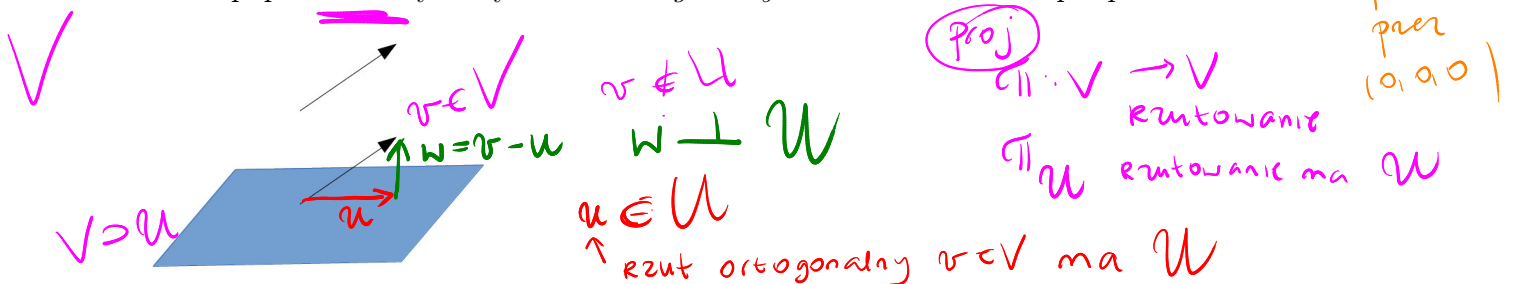
10.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 10.4.1. Operator liniowy $\pi \in \text{End}(V)$ dany wzorem

$$v \ni v \mapsto u \in U \subset V \quad \forall v \in V \quad \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad \boxed{v - u \perp U},$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U . Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U .



Twierdzenie 10.4.2 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U .

i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U , wówczas $u = \pi(v) =$

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

↓ macierz Grama

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

$w = v - u \perp U$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_k \rangle b_k.$$

$U = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$

danę v szukam u !

$u \in U$
 $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$
 $\alpha_1 = \langle u, b_1 \rangle$

$*$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy macierzą Grama układu wektorów $(b_1, b_2, \dots, b_k)$.

$\langle u, b_1 \rangle = 0$
 $\langle v - u, b_1 \rangle = 0$

$w \perp b_1$
 $\vdots$
 $w \perp b_k$

$\langle v, b_1 \rangle = \langle u, b_1 \rangle$ *

Wniosek 10.4.3. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U , zaś $A \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U .

$\mathbb{R}^4 + \text{stand. il. skal.}$ $M_{\pi|_U} = A \cdot A^T$

Przykład 10.4.4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczmy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U , bowiem $r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I

$u := \pi_U(v) = ?$, $w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas

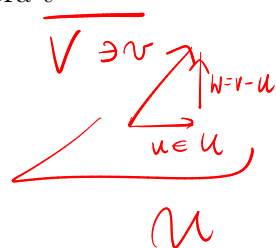
$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$0 = \langle w, b_1 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha, = 0$

$0 = \langle w, b_2 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta, = 0$

Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz



$u = (\alpha, \beta)_{\mathcal{B}}$

$u = \alpha b_1 + \beta b_2$

$$u \in U \quad \dim U = 2$$

$$U \subset V \quad u \in V = \mathbb{R}^4$$

$$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$$

METODA II

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 10.2.10 mamy

$$u = \left[\frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Ale } \langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle, \text{ zatem } u = \left[\frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Obliczamy}$$

$$\langle v, b_1 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4, \quad \langle v, b_2 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 \text{ oraz } \|b_1\|^2 = 10, \|b_2\|^2 = 11. \text{ Stąd } u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}.$$

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U . Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2\}$, gdzie

$$b'_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2), \quad b'_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0). \text{ Niech } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}. \text{ Macierz}$$

$$\text{projekcji jest } AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}. \text{ Stąd } AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Interpretacja geometryczna metody Grama-Schmidta

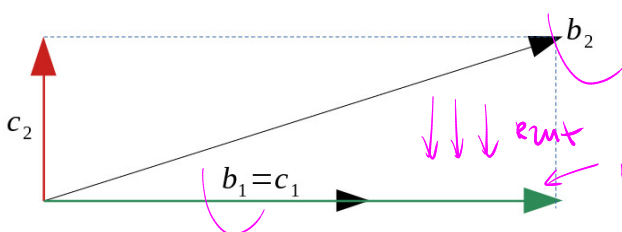
Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

KROK II:

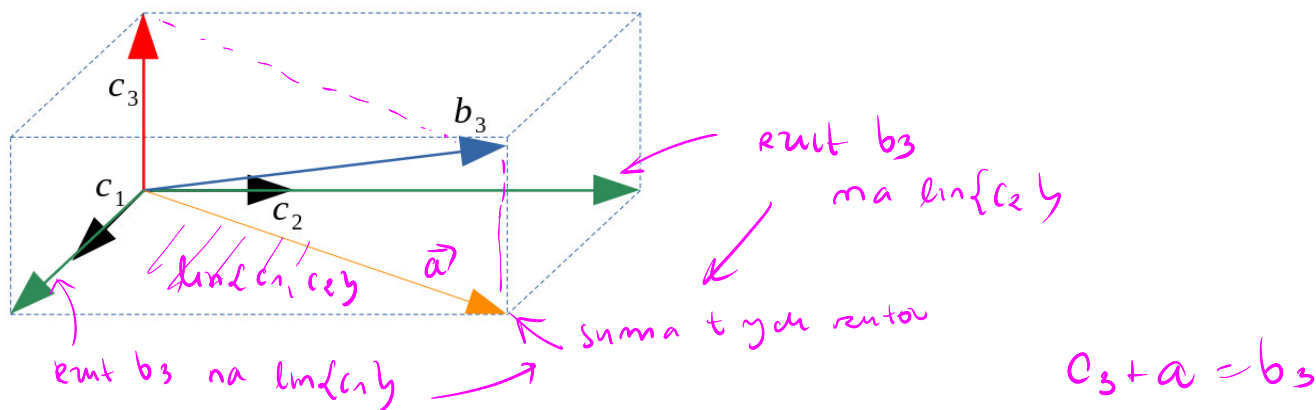
$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_2)$$



lin $\mathbb{C} b_1$ prosta t.z.c $\|b_1\|$

KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



10.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 10.5.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawia powyższe wielkości niezmiennicze.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, jeśli $A^T A = I_n$, to wówczas $A^T A = A A^T$. Istotnie, z równości $A^T A = I_n$ wynika, że $\det A \neq 0$ oraz $A^T = A^{-1}$. Zatem $I = A A^{-1} = A A^T$.

Definicja 10.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $A^T A = I_n$ (lub równoważnie $A A^T = I_n$).

Przykład 10.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 10.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 10.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1 .

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (jako wektory w $\mathbb{R}^n$ względem standardowego iloczynu skalarnego). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

iii) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(A A^T) = (\det A)^2$. $\square$