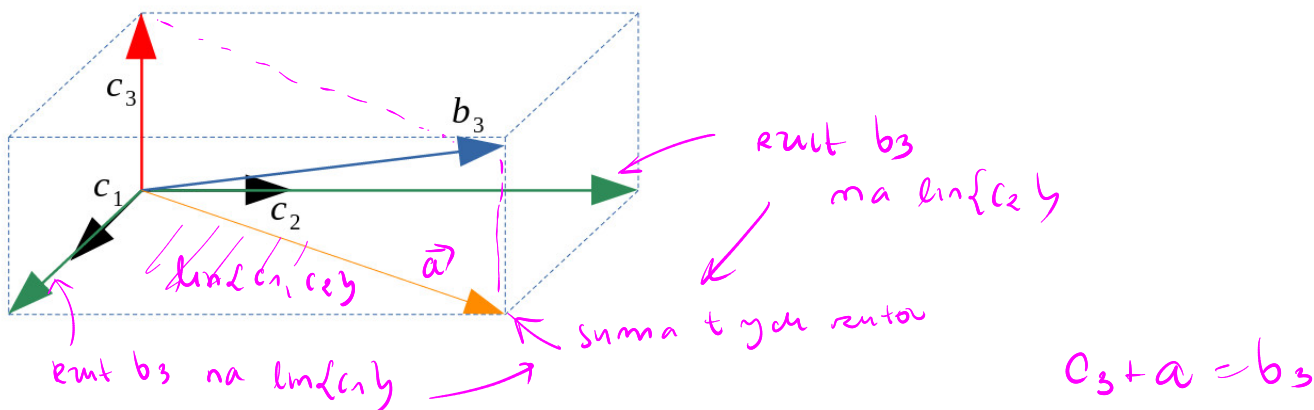


KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



10.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 10.5.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

na ogół

$$\|v\| \neq \|\varphi(v)\|$$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmieniać ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawiają powyższe wielkości niezmiennicze.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, jeśli $A^T A = I_n$, to wówczas $A^T A = A A^T$. Istotnie, z równości $A^T A = I_n$ wynika, że $\det A \neq 0$ oraz $A^T = A^{-1}$. Zatem $I = A A^{-1} = A A^T$.

Definicja 10.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą ortogonalną, jeśli $A^T A = I_n$ (lub równoważnie $A A^T = I_n$).

$$\exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = I$$

Przykład 10.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

kwadratowa

$$\det(A A^T) = \det I = 1$$

$$(\det A)^2$$

Twierdzenie 10.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją grupą ortogonalną i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 10.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1 .

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (jako wektory w $\mathbb{R}^n$ względem standardowego iloczynu skalarnego). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

iii) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(A A^T) = (\det A)^2$. $\square$

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \leftarrow \text{ortogonalne} \\ = ac + bd = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot 1 = \|v\|^2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad A A^T = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oczywiście nie każda macierz kwadratowa o wyznaczniku równym 1 lub -1 jest ortogonalna.

Przykładami mogą być macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Łatwo sprawdzić, że $\det A = 1$, zaś $AA^T \neq I$. Podobnie $\det B = 1$ i mimo tego, że kolumny B są wektorami ortogonalnymi, to jednak $BB^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \neq I$.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 10.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy izometrią liniową, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|.$$

Definicja 10.5.7. Załóżmy, że $\dim V < \infty$. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy ortogonalnym, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną.

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 10.5.8. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.

ii) $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Dowód. i) Jeśli $v \in \text{Ker} \varphi$, to $\varphi(v) = \mathbf{0}_V$, zatem $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 0$. Z definicji normy, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $v = \mathbf{0}_V$. Ponadto $\dim V = r(\varphi)$, więc φ jest surjekcją.

ii) Dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 1 \cdot \|v\| = |\pm 1| \cdot \|v\|$. $\square$

* **Twierdzenie 10.5.9.** Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie skończenie wymiarową⁸ przestrzenią euklidesową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne.

i) φ jest izometrią liniową.

ii) φ zachowuje normę tzn. $\forall v \in V \quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$.

iii) φ zachowuje iloczyn skalarny tzn. $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.

⁸Jeśli V jest nieskończenie wymiarowa, wówczas każdy operator ortogonalny jest izometrią liniową, jednak nie każda izometria liniowa musi być operatorem ortogonalnym. Przykładem możemy być przestrzeń l_2 ciągów zbieżnych z kwadratem, tj. takich rzeczywistych ciągów liczbowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla których $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wyposażona w iloczyn skalarny $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Operator liniowy $\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ jest izometrią liniową, jednak nie jest ortogonalny, bowiem $\varphi \circ \varphi^* \neq \text{id}$ (patrzy kolejny rozdział).

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

Wniosek 10.5.10. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α , to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α .

Uwaga 10.5.11. Jeśli rozpatrujemy w $\mathbb{R}^n$ niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Przykład 10.5.12. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-y, x)$ oraz dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}^2$, bazę kanoniczną $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ oraz bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1), c_2 = (0, 1))$. ||c₁|| = $\sqrt{2}$

Możemy wypisać reprezentacje macierzowe odwzorowania φ .

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq I$ nic nam nie mówi o tym, czy φ jest przekształceniem ortogonalnym, bowiem baza $\mathcal{C}$ nie jest bazą ortonormalną rozważanej przestrzeni euklidesowej. Czy φ to izom. liniowa?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Zatem z równości $AA^T = I$ wynika, że φ jest przekształceniem ortogonalnym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jest to rotacja o kąt prosty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (a zatem jasne jest, że zachowuje odległości).

Przykład 10.5.13. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznamy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.

Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Przykład 10.5.14. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^2, g)$ z iloczynem skalarnym

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2, \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

~~e_1, e_2~~

$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$
 $g(e_1, e_2) = -\frac{1}{2} \neq 0$

(V, 9)

oraz odwzorowanie $\varphi(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ nie jest ortonormalna, bowiem $g(e_1, e_2) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Zatem z warunku $AA^T = I$ nie można wnioskować, że φ jest izometrią liniową.

Rozważmy bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 0), c_2 = (1, 2))$ oraz $B = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Baza $\mathcal{C}$ jest ortonormalna, bowiem

$$g(c_1, c_2) = 1 - 1 = 0, \|c_1\|^2 = g(c_1, c_1) = 1, \|c_2\|^2 = g(c_2, c_2) = 1 - 1 + 1 + 2 = 1.$$

Z warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \neq I$ można wnioskować, że φ nie jest izometrią liniową w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^2, g)$.

Alternatywnie można zauważyć, że $\|c_2\| = 1$, zaś $\|\varphi(c_2)\| = \|(-2, 1)\| = \sqrt{4 + 1 + 1 + \frac{1}{2}} \neq 1$. Zatem φ nie zachowuje normy.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

n = 1

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$

φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.

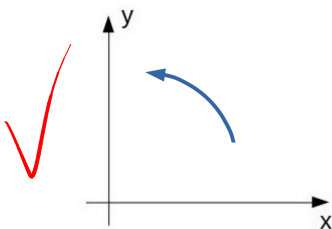
Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

n = 2

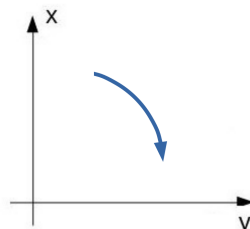
Orientacja płaszczyzny

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny* (*zorientowany dodatnio*), a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny



układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podejście algebraiczne

Z założenia $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

Z równości $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$

otrzymujemy układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = \|[a, b]\|^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = \|[c, d]\|^2 = 1 \\ ac + bd = [a, b] \circ [c, d] = 0 \end{cases}$

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α ,

że $a = \cos \alpha$ oraz $b = \sin \alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $ac + bd = 0$ mamy, że $c = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, $d = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ lub też $c = \cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $d = \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r \cos \beta, r \sin \beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Mamy do czynienia z rotacją (obrotom) o kąt α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.

Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

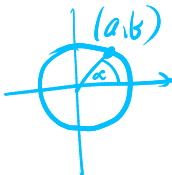
Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a - t)^2 + b^2$ i $\text{Spec}(A) = \emptyset$.

Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto rotacja nie zmienia orientacji układu współrzędnych.

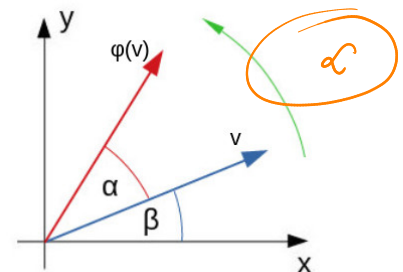
Uwaga 10.5.15. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu

$(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
standard il. skal.

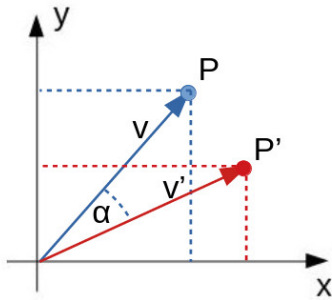
jest ortonorm.



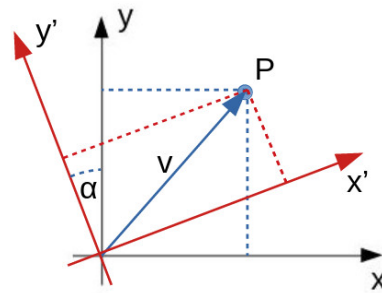
$b = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$
 $\det A = -1$



osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

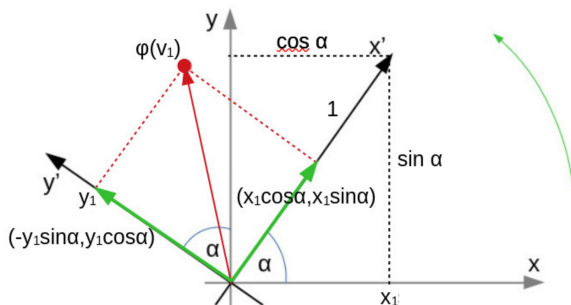
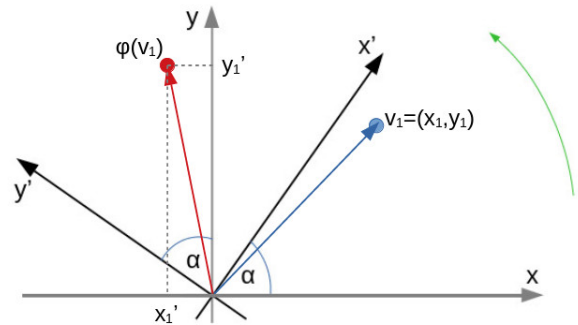
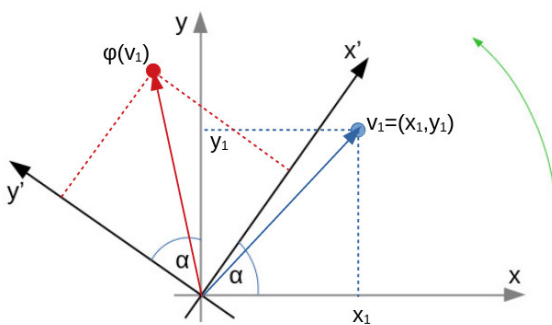


Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

Współrzędne punktu P' w “starej bazie” (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w “nowej bazie” (rysunek po prawej).

Podjęcie geometryczne

Obrotem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.



$$\varphi(v_1) = (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)$$

Przykład 10.5.16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{identyczność, tj. rotacja o kąt miary } 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \pi$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{3}{2}\pi$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Przykład 10.5.17. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$.

Przykład 10.5.18. Wyznamy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x' + y' = m(x' + y')$. Zatem $(1 - m)y' = (1 + m)x'$. Równaniem prostej obroconej jest $(m + 1)x + (m - 1)y = 0$.

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

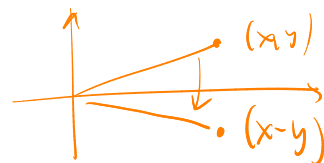
$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & -a - t \end{vmatrix} = -(a - t)(a + t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $\text{Spec}(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

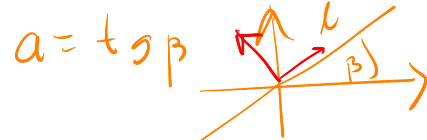
Mamy do czynienia z symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej $y = 0$. $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



punkt $(0,0)$. Jaka to prosta?

$$l: y = ax$$



Podójście algebraiczne

Przypuścmy, że l jest prostą o równaniu $y = \boxed{a} \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l , a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos \beta, \sin \beta)$, $b_2 = (-\sin \beta, \cos \beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta + c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1 b_1 - c_2 b_2$.

$$\varphi(v)^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

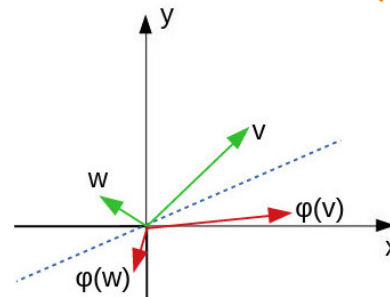
Stąd

$$\varphi(v)^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} v^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T$$

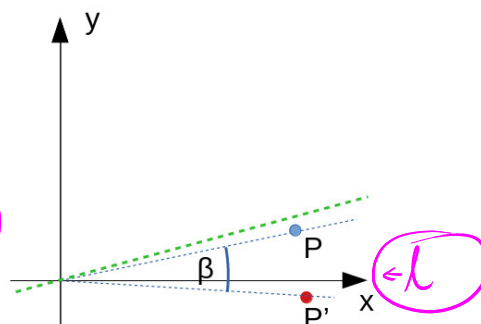
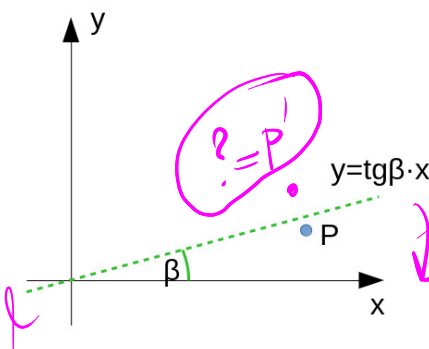
Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot x$.

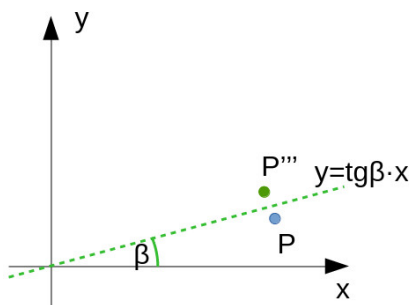
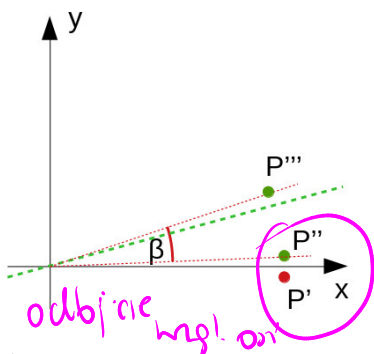
odwrotność = transpozycja

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$$



Podójście geometryczne





1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\checkmark \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$A^T = A^{-1}$$

$$A \sim R(\beta)$$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$.



3) Obracamy punkt o kąt β .

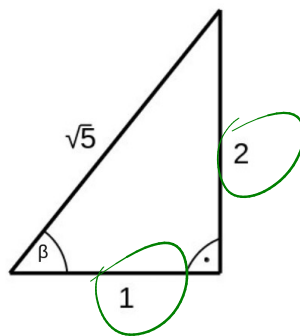
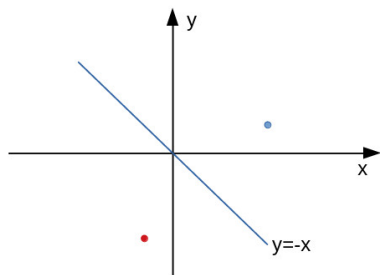
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wniosek 10.5.19. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0, 0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 10.5.20. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Otrzymujemy } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$



$$\text{tg } \beta = 2 = \frac{2}{1}$$

Przykład 10.5.21. Wyznamy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli $\text{tg } \beta = 2$, to wówczas $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$



METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

TO
SANO

Uwaga 10.5.22. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 10.5.23. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$A \cdot A^T = I$$

Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

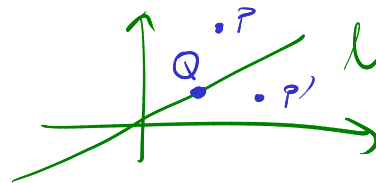
120mm.
linia

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y)

$$\text{spełniające równanie } \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$\text{Otrzymujemy układ równań } \begin{cases} 3x + 4y = -5x \\ -4x + 3y = 5y \end{cases}.$$

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.



$Q \in L$

Uwaga 10.5.24. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ , to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

$$Q' = Q$$

10.6 Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznych

rzeczywiste

Twierdzenie 10.6.1. i) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym rzeczywistej macierzy symetrycznej są wzajemnie ortogonalne.

ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych.

da się
diagonalizować

Wniosek 10.6.2 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej). Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

ortogonalna

$$P^{-1}AP = P^TAP = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest ortogonalnie diagonalizowalna.

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy ortogonalnych:

1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

$$\|v\|=1$$

sa par do siebie gonalne
Tw. 10.6.1

- 2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.
- 3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Przykład 10.6.3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t-6)^2$.
 $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0), w = (-1, 0, 1)$. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v \rangle = 0$ oraz $\langle u, w \rangle = 0$.

Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$.
Obliczamy $\langle c_2, c_1 \rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle w, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.
Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

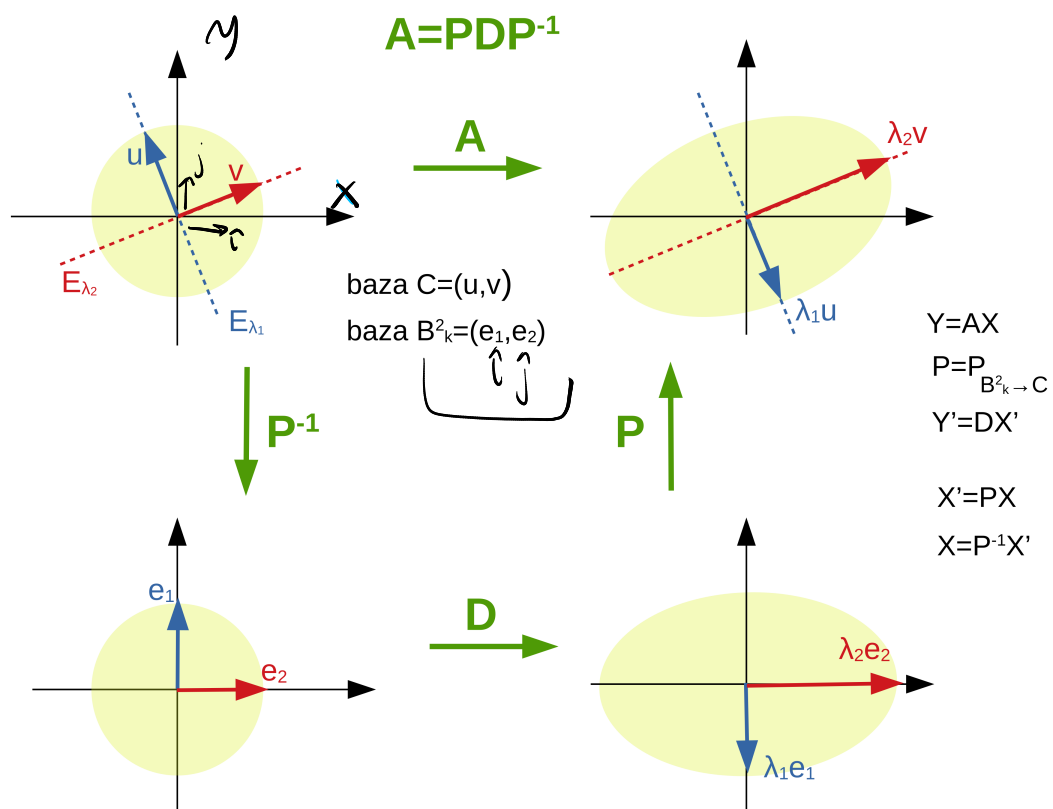
Mamy $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), \hat{c}_2 = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c}_1, \hat{c}_2)$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D$.

Uwaga 10.6.4. Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako rotacja osi układu współrzędnych w taki sposób, aby były one równoległe do wektorów własnych. Zobacz tutaj.

$\mathbb{R}^2$



KONIEC!