Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, informatyka stosowana, I rok - EGZAMIN PRZYKŁADOWY

Imię i nazwisko ..... Numer grupy ćwiczeniowej .....

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część I. W tej części znajdują się 3 zadania, w których należy samodzielnie uzupełnić brakujące wyniki. Rachunki przeprowadź w brudnopisie. Brudnopis nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie. Za każde zadanie można otrzymać 10 punktów.

Punkty
.....

Zadanie 1. *Dana jest baza* $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1, 1-1),\, c_2 = (1, -1, 1),\, c_3 = (1, 1, -1)\big)$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Wektor $u = (1, 1, -1)$ *w bazie* $\mathcal{C}$ *ma współrzędne*.....

Wektor $v = [1, 1, -1]_{\mathcal{C}}$ *w bazie kanonicznej* $\mathcal{B}_k^3$ *ma współrzędne*.....

Podaj następujące macierze przejścia. $P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} =$ $P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_k^3} =$

Wektor $w = (0, 2, 2)$ *w bazie* $\mathcal{C}$ *ma współrzędne*.....

Punkty
.....

Zadanie 2. *Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *dane jest wzorem*

$$\forall p \in \mathbb{R}_2[x] \quad \varphi(p)(x) = 2x \cdot p'(x) + x^2 \cdot p(0) + p(2).$$

Wyznacz macierz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, *gdy* $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$. $A =$

Podaj jądro i obraz odwzorowania φ, *ich bazy i wymiary. Zadbaj o poprawny zapis!*

$Ker\varphi =$ ....., *jego bazą jest* ..... , *zaś* $\dim Ker\varphi =$ .....

$Im\varphi =$ ....., *jego bazą jest* ..... , *zaś* $\dim Im\varphi =$ .....

Punkty
.....

Zadanie 3. *Dany jest* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ *taki, że*

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 0),\ \varphi(1, 1, 0) = (-1, -1, 0),\ \varphi(2, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Podaj macierz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ *endomorfizmu* φ *w bazie kanonicznej przestrzeni* $\mathbb{R}^3$

.

$$A =$$

Uzasadnij, że φ *jest diagonalizowalny.*

φ *jest diagonalizowalny, ponieważ*.....

.....

Podaj bazę, w której macierz reprezentująca φ *jest macierzą diagonalną, macierz diagonalizującą* P *i macierz diagonalną* D *endomorfizmu* φ *w nowej bazie.*

Baza..... $P =$ $D =$

WERSJA TESTU
.....

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 1 lutego 2027r.

Część II - Arkusz odpowiedzi

Imię i nazwisko ..... Numer grupy ćwiczeniowej .....

Zadanie	Twoja odpowiedź		Dla egzaminatora	Dla egzaminatora
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Suma ..... Suma .....

EGZAMIN			**OCENA Z EGZAMINU**
punkty - część I	punkty - część II	suma punktów	

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 1 lutego 2027r.

Część II. W tej części znajduje sie 14 zadań testowych. W każdym z zadań poprawna jest **dokładnie jedna** odpowiedź. Odpowiedzi należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując we właściwym polu odpowiednio A, B, C lub D. Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe. Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **5 punktów**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.

Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 4. *W zbiorze $\mathbb{Z}$ określono działanie $x * y = 1 + xy$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. Działanie $*$ jest łączne.
B. Struktura $(\mathbb{Z}, *)$ nie posiada elementu neutralnego.
C. Działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $x \circ y = x + y + 1$.
D. 1 to element neutralny działania $*$.

Zadanie 5. *Ile dokładnie rozwiązań posiada równanie $\overline{z}^5 = z$ w ciele $\mathbb{C}$?*

A. 5 *B.* 6 *C.* 7 *D. nieskończenie wiele*

Zadanie 6. *Dane są trzy zbiory*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (z+i)^4 = 1\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i|^4 = 1\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : \Big(Re(z+i)\Big)^4 = 1\}.$$

Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

A. $A \subset B \quad \wedge \quad B \cap C = \varnothing$
B. $A \cap B \cap C \neq \varnothing$
C. $A \cap C = B \cap C$
D. Zbiór $A \cap B$ jest zbiorem skończonym.

Zadanie 7. *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą dowolne. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. $\det(A - B) = \det A - \det B$ *II.* $\det(AB) = \det(BA)$ *III.* $\det(A^2 - I) = \det(A - I) \cdot \det(A + I)$

Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe. *B. Prawdziwe są tylko stwierdzenia II i III.*
C. Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i II. *D. Tylko jedno stwierdzenie jest prawdziwe.*

Zadanie 8. *Dana jest macierz $A \in M_4(\mathbb{R})$ trójkątna górna i taka, że wszystkie elementy na diagonali są sobie równe. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. A zawsze jest nieosobliwa.
II. Jeśli $\det A = 81$*, to suma elementów na przekątnej równa się* 12*.*
III. Jeśli A jest antysymetryczna, to jest macierzą zerową.

Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. Prawdziwe są tylko stwierdzenia II i III. *B. Prawdziwe jest tylko stwierdzenia III.*
C. Wszystkie stwierdzenia są fałszywe. *D. Fałszywe jest tylko stwierdzenie I.*

Zadanie 9. *Dany jest układ równań* $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = 0 \\ 2x - 6y - 4s + t = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$ *. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. *Zbiór rozwiązań układu równań ma strukturę przestrzeni wektorowej i jej wymiar wynosi* 2.
B. *Układ równań jest układem nieoznaczonym, którego rozwiązania zależą od* 3 *parametrów.*
C. *Układ równań jest układem nieoznaczonym oraz zmienne* z, t, s *mogą stanowić układ parametrów, od których zależą rozwiązania układu.*
D. *Układ równań jest sprzeczny.*

Zadanie 10. *Dane są proste* $k : \begin{cases} x = 1 \\ y = ps \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ *oraz* $l : \begin{cases} x = 1 + pt \\ y = 2 + t \\ z = p \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. *Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. *Nie można wybrać* p *w taki sposób, by* $k \perp l$.
B. *Dla* $p = 2$ *proste przecinają się w punkcie* $(1, 2, 2)$.
C. *Dla każdego* $p \in \mathbb{R}$ *proste nie mają punktów wspólnych.*
D. *Jeśli proste* k *i* l *są skośne, to* $p \neq 0$.

Zadanie 11. *Dane są wektory* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.

I. Układ $\{A, B, C\}$ *jest liniowo zależny.*
II. Układ $\{A, B, C\}$ *generuje przestrzeń* $M_2(\mathbb{R})$.
III. Wektor $D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ *należy do* $\lin\{A, B, C\}$.

Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Tylko jedno stwierdzenie jest prawdziwe.* B. *Wszystkie stwierdzenia są fałszywe.*
C. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i III.* D. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia II i III.*

Zadanie 12. *Niech* $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. Jeśli $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to* φ *jest izomorfizmem.*
II. Jeśli $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, *to układ wektorów* $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ *jest liniowo niezależny.*
III. Macierz reprezentująca endomorfizm φ *w bazie standardowej przestrzeni* $\mathbb{R}_4[x]$ *jest macierzą kwadratową stopnia* 4.

Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia II i III.* B. *Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe.*
C. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i III.* D. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i II.*

Zadanie 13. *Niech* $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. $\dim Imf \leq 7$
II. Jeśli f *jest monomorfizmem, to* f *jest epimorfizmem.*
III. Jeśli rząd macierzy reprezentującej odwzorowanie f *w bazach kanonicznych przestrzeni* $\mathbb{R}^7, \mathbb{R}^9$, *jest równy* 1, *to wówczas* $\dim \mathrm{Ker} f = 6$.

Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Tylko jedno stwierdzenie jest fałszywe.* B. *Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe.*
C. *Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i II.* D. *Dokładnie dwa stwierdzenia są fałszywe.*

Zadanie 14. *Dana jest macierz* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *taka, że* $Spec(A) = \{-1, 0, 1\}$. *Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. A jest nieosobliwa. II. A jest symetryczna. III. A jest diagonalizowalna.

Wskaż prawidłową odpowiedź.

A. Wszystkie stwierdzenia są fałszywe. *B. Prawdziwe jest tylko stwierdzenia III.*
C. Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i II. *C. Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i III.*

Zadanie 15. *Macierz* $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *reprezentuje pewne odwzorowanie liniowe* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ *w bazie* $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,1), b_2 = (3,0)\big)$, *tzn.* $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. *Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. $\varphi(x,y) = (-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)$.
B. Macierzy A nie można za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić do macierzy jednostkowej.
C. Odwzorowanie φ *jest monomorfizmem.*
D. Macierz A jest antysymetryczna.

Zadanie 16. *Niech* $(V, \langle ., . \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową, zaś* $||.||$ *normą w* V *zadaną przez iloczyn skalarny. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. Niech $u \in V$ *będzie wersorem, zaś* $v \in V$ *wektorem o długości* $\sqrt{2}$. *Jeśli* $||u+v||^2 = 4$, *to wówczas* $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}$.
B. Dla dowolnych $u, v \in V$ *jeśli* $||u|| = ||v||$, *to wówczas* $u = v$.
C. $\forall\, u, v \in V \quad ||u+v|| = ||u|| + ||v||$.
D. Może istnieć niezerowy wektor $v \in V$ *taki, że* $||v|| = 0$.

Zadanie 17. *Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*

I. Jeśli $A \in M_2(\mathbb{R})$ *jest trójkątna górna i ortogonalna, to wówczas A jest diagonalna.*
II. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Jeśli* $A^2 = B^2$, *to wówczas* $A = B$ *lub* $A = -B$.
III. Zbiór $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1-x}{2} = \frac{y}{3} = z\}$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Wskaż prawidłową odpowiedź.

A. Tylko jedno stwierdzenie jest prawdziwe. *B. Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe.*
C. Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i II. *D. Prawdziwe są tylko stwierdzenia I i III.*