Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - EGZAMIN PRZYKŁADOWY.

Imię i nazwisko ..... Numer grupy ćwiczeniowej .....

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Można używać kalkulatora prostego. Powodzenia!

Część I. W tej części znajdują się 3 zadania, w których należy samodzielnie uzupełnić brakujące wyniki. Rachunki przeprowadź w brudnopisie. Brudnopis nie będzie oceniany. Nie należy oddawać go po zakończonym egzaminie. Za każde zadanie można otrzymać 10 punktów.

Zadanie 1. *W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie* $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$ *i podaj wszystkie rozwiązania w postaci algebraicznej.*

Punkty
.....

rozwiązania: .....

Zadanie 2. *Dana jest permutacja*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Punkty
.....

Podaj σ^{-1} *(w postaci dwuwierszowej).*

Zapisz rozkład σ *na cykle rozłączne.* $\sigma =$ .....

Zapisz σ *jako iloczyn transpozycji.* $\sigma =$ .....

Podaj znak permutacji. $\operatorname{sgn}(\sigma) =$ .....

Zadanie 3. *Zapisz macierz odwzorowania liniowego* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *danego wzorem*

$$f(p)(x) = x \cdot p'(x) + p(1)$$

Punkty
.....

w bazie $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) =$

Podaj jądro i obraz f *(z bazami i wymiarami). Zadbaj o poprawny zapis.*

$\operatorname{Ker} f =$ ....., *baza:* ....., $\dim \operatorname{Ker} f =$ ....

$\operatorname{Im} f =$ ....., *baza:* ....., $\dim \operatorname{Im} f =$ ....

WERSJA TESTU
.....

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 1 lutego 2027r.

Część II - Arkusz odpowiedzi

Imię i nazwisko ..... Numer grupy ćwiczeniowej .....

Zadanie	Twoja odpowiedź		Dla egzaminatora	Dla egzaminatora
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

Suma ..... Suma .....

EGZAMIN			**OCENA Z EGZAMINU**
punkty - część I	punkty - część II	suma punktów	

Egzamin z przedmiotu ALGEBRA

WFiIS, fizyka techniczna, I rok - 1 termin - 1 lutego 2027r.

(wersja przykładowa nr 3)

Część II. W tej części znajduje się 14 zadań testowych. W każdym z zadań poprawna jest **dokładnie jedna** odpowiedź. Odpowiedzi należy zapisać na karcie odpowiedzi, wpisując we właściwym polu odpowiednio A, B, C lub D. Błędne oznaczenie należy skreślić znakiem X i obok podać właściwe. Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz **5 punktów**, a za odpowiedź błędną lub brak odpowiedzi 0 punktów.

Kartę odpowiedzi należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej i oddać po zakończonym egzaminie.

Zadanie 4. *Które z podanych działań jest łączne w zbiorze* $\mathbb{R}$*?*

A. $x \circ y = \dfrac{2x+y}{3}$ *B.* $x * y = x^2 + y$ *C.* $x \square y = x^y$ *D. żadne z nich*

Zadanie 5. *Która ze struktur nie jest grupą abelową?*

A. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *(mnożenie liczb)*
B. zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych stopnia n *o elementach z* $\mathbb{R}$ *z mnożeniem macierzy*
C. $A = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ *z dodawaniem*
D. $G = \{z \in \mathbb{C} : z^9 = 1\}$ *z mnożeniem*

Zadanie 6. *Niech* $z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{3}$*. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. $\arg z \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *B.* $\mathrm{Im}(z^{16}) = 0$ *C.* $\mathrm{Re}(z^{12}) = 0$ *D.* $|z| = 1$

Zadanie 7. *Ile dokładnie rozwiązań posiada równanie* $\overline{z}^5 = z$ *w ciele* $\mathbb{C}$*?*

A. 5 *B.* 6 *C.* 7 *D. nieskończenie wiele*

Zadanie 8. *Dane są macierze nieosobliwe* $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ *takie, że* $\det A = 4$ *oraz* $\det(AB^{-1}) = 12$*. Oblicz* $\det(3B)$*.*

A. 27 *B.* 81 *C.* 243 *D.* 324

Zadanie 9. *Podaj wartości parametru* $p \in \mathbb{R}$*, dla których macierz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{pmatrix}$$

jest odwracalna.

A. $p \neq 0$ *B.* $p \neq 1$ *C.* $p \neq -4$ *D. dla wszystkich* $p \in \mathbb{R}$

Zadanie 10. *Dany jest układ równań*

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t &= 0 \\ 2x - 6y - 4s + t &= 0 \\ 2z + t &= 0 \end{cases}$$

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

A. Zbiór rozwiązań ma strukturę przestrzeni wektorowej wymiaru 2*.*
B. Układ jest nieoznaczony i rozwiązania zależą od 3 *parametrów.*
C. Zmienne z, t, s *mogą stanowić układ parametrów.*
D. Układ jest sprzeczny.

Zadanie 11. *Dane są proste*

$$k: \begin{cases} x = 1 \\ y = ps \\ z = s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R} \qquad \text{oraz} \qquad l: \begin{cases} x = 1 + pt \\ y = 2 + t \\ z = p \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

A. *Nie można wybrać p tak, by $k \perp l$.*
B. *Dla $p = 2$ proste przecinają się w punkcie $(1, 2, 2)$.*
C. *Dla każdego $p \in \mathbb{R}$ proste nie mają punktów wspólnych.*
D. *Jeśli proste są skośne, to $p \neq 0$.*

Zadanie 12. *Podaj wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których układ wektorów*

$$u = (1, 0, 2, 1, 2), \ v = (2, 1, 1, 2, 1), \ w = (5, 1, 7, 5, p) \in \mathbb{R}^5$$

jest liniowo niezależny.
A. $p \neq 5$ B. $p \neq 7$ C. *dla wszystkich p* D. *dla żadnego p*

Zadanie 13. *Niech $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ będzie odwzorowaniem liniowym. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*
I. Jeśli $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$*, to φ jest izomorfizmem.*
II. Jeśli $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$*, to układ $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ jest liniowo niezależny.*
III. Macierz reprezentująca φ w bazie standardowej $\mathbb{R}_4[x]$ jest macierzą kwadratową stopnia 4.
Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Prawdziwe są tylko II i III.* B. *Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe.*
C. *Prawdziwe są tylko I i III.* D. *Prawdziwe są tylko I i II.*

Zadanie 14. *Niech $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ będzie odwzorowaniem liniowym. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*
I. $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 7$
II. Jeśli f jest monomorfizmem, to f jest epimorfizmem.
III. Jeśli rząd macierzy f (w bazach kanonicznych) wynosi 1, to $\dim \ker f = 6$.
Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Tylko jedno stwierdzenie jest fałszywe.* B. *Wszystkie stwierdzenia są prawdziwe.*
C. *Prawdziwe są tylko I i II.* D. *Dokładnie dwa stwierdzenia są fałszywe.*

Zadanie 15. *Dana jest macierz $A \in M_3(\mathbb{R})$ taka, że* $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 0, 1\}$*. Zapoznaj się z trzema stwierdzeniami.*
I. A jest nieosobliwa.
II. A jest symetryczna.
III. A jest diagonalizowalna.
Wskaż prawidłową odpowiedź.
A. *Wszystkie stwierdzenia są fałszywe.* B. *Prawdziwe jest tylko III.*
C. *Prawdziwe są tylko I i II.* D. *Prawdziwe są tylko I i III.*

Zadanie 16. *Macierz* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ *reprezentuje endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ w bazie $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, 1), b_2 = (3, 0)\big)$.*
Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

A. $\varphi(x, y) = (-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)$.
B. *Macierzy A nie można sprowadzić operacjami elementarnymi na wierszach do macierzy jednostkowej.*
C. *Odwzorowanie φ jest monomorfizmem.*
D. *Macierz A jest antysymetryczna.*

Zadanie 17. *Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, a $\| \cdot \|$ normą indukowaną. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?*

A. Niech u będzie wersorem, v wektorem o długości $\sqrt{2}$. Jeśli $\|u+v\|^2 = 4$, to $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}$.
B. Jeśli $\|u\| = \|v\|$, to $u = v$.
C. $\forall u, v \in V \quad \|u+v\| = \|u\| + \|v\|$.
D. Może istnieć niezerowy wektor v taki, że $\|v\| = 0$.