

Zadania

Zad. 1 (13 pkt.)

Znajdź równania wszystkich asymptot wykresu funkcji:

$$a) f : x \rightarrow x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad b) g : x \rightarrow x e^{-x^2}$$

Zad. 2 (13 pkt.) Oblicz całki:

$$a) \int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx \quad b) \int x^2 \ln(1-x) dx$$

$$c) \int \sin^2 x \cos^5 x dx \quad d) \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

Zad. 3 (13 pkt.) Oblicz granicę:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^{n+2}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n^3 + 4n}{n + n^3} \right)^{1-n^3} + \frac{\sin(n+1)}{n+1} \right]$$

Zad. 4 (13 pkt.)

Dana jest funkcja:

$$f : x \rightarrow \ln(2x) + \frac{1}{\ln x}$$

- a) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji f .
 b) Zbadaj czy punkt $x = e$ jest punktem przegięcia funkcji f .

Zad. 5 (13 pkt.)

- a) Oblicz długość krzywej $y = \sqrt{x-x^2} + \operatorname{arc} \sin(\sqrt{x})$.
 b) Zbadaj zbieżność całki:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

Zad. 6 (13 pkt.)

- a) Oblicz pochodną kierunkową funkcji:

$$f : (x, y, z) \rightarrow xy^2 \operatorname{arc} \sin \frac{x}{z^2} + \frac{3\pi x}{2}$$

w punkcie $P = (-2, 3, 2)$ w kierunku wektora $\vec{u} = (1, 2, -2)$.

- b) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji:

$$f : (x, y) \rightarrow e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

Teoria

Zad. 1 (11 pkt.)

- a) Sformułuj II warunek wystarczający istnienia ekstrema funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
 b) Sprawdź, czy funkcja

$$x \rightarrow e^x + e^{-x} + 2 \cos x$$

ma w punkcie $x_0 = 0$ maksimum lokalne.

- c) Sprawdź przy pomocy drugiej pochodnej, czy funkcja $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ punkt przegięcia.

Zad. 2 (11 pkt.)

- a) Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.
 b) Wykaż zbieżność i oblicz granicę ciągu (a_n) takiego, że $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, n \geq 1$.