

Zadania

UWAGA: Proszę nie zapominać o odpowiednich komentarzach.

Zad 1 (13 pkt.)

a) Oblicz granice ciągów $(a_n), (b_n), (c_n)$, gdzie:

$$a_n = \sqrt[n]{n+1}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^2}, \quad c_n = \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{-\sqrt{n}}$$

b) Znajdź równania wszystkich asymptot wykresu funkcji:

$$f: x \rightarrow x(\arctg x - \pi)$$

Zad 2 (13 pkt.) Oblicz całki:

a) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x+4 \sin x}} dx$

b) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2+5x+6} dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Zad 3 (13 pkt.) Oblicz długość łuku krzywej:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, x \in [1, 2]$$

Zad 4 (13 pkt.)

a) Zbadaj wypukłość i punkty przegięcia funkcji:

$$x \rightarrow x^2 \ln x$$

b) Oblicz $\vec{\nabla} f(0, 1)$, gdzie:

$$f(x, y) = x \ln \frac{y+1}{x+1} + \frac{1}{\arctg(x^2+y^2)} + \arcsin(-x) - (\ln 2 - 1)x + \frac{32}{\pi^2} \sqrt{y}$$

Zad 5 (13 pkt.)

a) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji:

$$f: (x, y) \rightarrow e^{-(x^2+y^2+2x)}$$

b) Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Teoria

UWAGA: Proszę nie zapominać o odpowiednich komentarzach.

Zad 1 (12 pkt.)

a) Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

b) Wykaż zbieżność i oblicz granicę ciągu (a_n) takiego, że $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, dla $n \geq 1$.

Zad 2 (11 pkt.)

a) Napisz rozkład na ułamki podstawowe ułamka $\frac{x}{(x^2+4)^2}$, a następnie bez obliczania współczynników wybierz trzy z tych ułamków i oblicz ich całki.

b) Zbadaj zbieżność całki:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$$

Zad 3 (12 pkt.) Które ze stwierdzeń jest prawdziwe, a które fałszywe. Odpowiedź uzasadnij.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ nie istnieje

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2-1}) = -\infty$

c) Jeśli $\alpha = 3$ to funkcja dana poniższym wzorem jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg \left(\frac{\sin 6x}{\arctg 2x} \right) & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$$