Egzamin z przedmiotu MATEMATYKA I

WFiIS, informatyka stosowana, I rok - 3 termin - 14 lutego 2022r.

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce (nie stronie).
Każdą kartkę należy **czytelnie** podpisać **imieniem i nazwiskiem** oraz **numerem grupy ćwiczeniowej**. Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Powodzenia!

Część 1 - Zadania

Zadanie 1. ***(13 pkt)*** *a) Oblicz* $\arccos(\sin 3)$ *oraz* $\sin(-\arcsin\frac{1}{4})$.

b) Wyznacz dziedziny naturalne funkcji f oraz g.

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1}\cdot\arccos(1-|x|) \qquad g(x) = \log(\arcsin x) + \frac{1}{\mathrm{arcctg} 2x}$$

c) Narysuj wykres funkcji $h(x) = \cos(2\arccos x)$. Zamieść odpowiednie komentarze.

Zadanie 2. ***(16 pkt)*** *Oblicz podane granice. W przykładach b) oraz c) nie używaj reguły de l'Hôpitala.*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big)$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{e}{n}}{\sin\frac{1}{n}}+\frac{\ln(\pi n)}{\ln n}\right) \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\Big(2+\cos x\Big)^{\frac{\sin x}{x^2}} \qquad d)\ \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(\ln(x+1))$$

Zadanie 3. ***(21 pkt)*** *Oblicz:*
a) długość łuku krzywej $\Gamma:\ y=\frac{x^5}{10}+\frac{1}{6x^3},\quad x\in[1,2]$ *b)* $\int\frac{1+\mathrm{tg}x}{\cos^2 x\cdot\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 x}}dx$

$$c)\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(1+x^2)(1+\mathrm{arctg}^2 x)} \qquad d)\int\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}dx \qquad e)\int\arcsin x\,dx \qquad f)\int\sin^2\frac{x}{2}dx$$

Zadanie 4. ***(21 pkt)*** *a) Określ przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji $f(x)=\mathrm{arcctg}(e^{-x})$ i wskaż punkty przegięcia wykresu funkcji.*

b) Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema lokalne funkcji $g(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$. Określ, czy są to minima czy maksima.

c) Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $h(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\cdot\mathrm{arcctg}x$.

Zadanie 5. ***(16 pkt)*** *a) Korzystając z metody mnożników Lagrange'a, wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w zbiorze D.*

$$f(x,y,z)=x+y+z+1 \qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+4z^2\le 4\}.$$

b) Oblicz iloczyn skalarny wektora normalnego do powierzchni Σ w punkcie $A=(1,\frac{1}{\pi},-1)$ i wektora stycznego do krzywej Γ w punkcie $B=(\ln\frac{\sqrt{2}}{2},1,\pi)$.

$$\Sigma:\ \sin\left(\cos\frac{x}{x^2+y+z^3}\right)+x^{\frac{y}{z}}=1-\sin 1 \qquad \Gamma:\ \begin{cases} x(t)=\ln\cos t\\ y(t)=1\\ z(t)=4t\end{cases},\ t\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)$$

Imię i nazwisko.. **nr grupy**................

Część 2 - Teoria

Rozwiązania zadania 6 należy umieścić **na tej kartce** - dla podpunktów **a)-f) poniżej**, dla **g) na odwrocie**.

Zadanie 6. ***(13 pkt)*** *a) Dane są funkcje $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, takie że $f(1) = g(1) = f(2) = 1$, $g(2) = 2$ oraz $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x)g'(x) = 1$. Oblicz $\int_1^2 f'(x)g(x)dx$.*
b) Wiedząc, że $f' \in \mathcal{C}^1[a, b]$, oblicz $\int_a^b f'(x)dx$.
c) Oblicz granicę górną ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_n = (-1)^n(n - n^2 + 1)$.
d) Podaj wszystkie symbole nieoznaczone.
e) Dana jest funkcja $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, która ma w punkcie $x = a$ minimum lokalne. Czy funkcja $f(x) = e^{-g(x)}$ ma w punkcie $x = a$ maksimum lokalne? Odpowiedź uzasadnij, obliczając pochodną.
f) Bez obliczania całki nieoznaczonej uzasadnij równość $\int_{-\pi}^{5\pi} x^7 \cos x dx = \int_{\pi}^{5\pi} x^7 \cos x dx$.
*g) Rozłóż podany ułamek na ułamki **podstawowe** (bez wyliczania współczynników rozkładu). Następnie oblicz całki otrzymanych ułamków, **poza jedną** dowolnie wybraną.*

$$f(x) = \frac{1}{x^3 \cdot (x^2 + 2x + 2)^2}$$

---

a)

---

b)

---

c)

---

d)

---

e)

---

f)

Verte ↬