

Zadania

UWAGA: Proszę nie zapominać o odpowiednich komentarzach.

Zad 1 (13 pkt.)

a) Oblicz granice ciągów (a_n) , (b_n) , (c_n) , gdzie

$$a_n = (7^n - 6^n - 5^n), b_n = \sqrt{n} \sin \cdot \left(\frac{1}{n}\right), c_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1}\right)^{-\sqrt{n}}$$

b) Znajdź równania wszystkich asymptot wykresu funkcji

$$f : x \rightarrow x \operatorname{arcctg}(x^3)$$

Zad 2 (13 pkt.) Oblicz całki

a) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^2 x + 4 \sin x}} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + 5x + 6} dx$

c) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} dx$

Zad 3 (13 pkt.) Oblicz długość łuku krzywej

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, x \in [1, 2]$$

Zad 4 (13 pkt.)

a) Zbadaj wypukłość i punkty przegięcia funkcji

$$x \rightarrow x^2 \ln \frac{x}{e}$$

b) Oblicz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Zad 5 (13 pkt.) Napisz równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny zawierającej styczną w punkcie $A = (3, 0, 1)$ do krzywej o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t^2 \\ y(t) = \ln(t^3 + 2), t \in (-\sqrt[3]{2}, \infty) \\ z(t) = t^2 e^{3t+3} \end{cases}$$

i jednocześnie prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie $B = (1, 1, 1)$ do powierzchni o równaniu $z + \ln \frac{x}{z} - y = 0$