

Każde zadanie należy rozwiązać na **oddzielnej kartce** (nie stronie).

Każdą kartkę należy **czytelnie** podpisać **imieniem i nazwiskiem** oraz **numerem grupy ćwiczeniowej**.

Część 1 - Zadania

Zad. 1. (11 pkt)

a) Oblicz $\arcsin(\sin 3) + \arctg(\operatorname{tg} 3) + \operatorname{tg}(-\arctg 2024)$

b) Wyznacz dziedzinę naturalną funkcji f :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\arccos(\log x)}}$$

c) Narysuj wykres funkcji $h(x) = \cos(2 \arccos x)$.

Zad. 2. (16 pkt) Oblicz podane granice. W przykładzie c) **nie** używaj reguły de l'Hôpitala.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} \right) \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)}{n+1} \sqrt{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{\ln(3^x + 1)} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$$

Zad. 3. (20 pkt) Oblicz:

a) długość łuku krzywej $\Gamma: y = x^2, x \in [0, 4]$

$$b) \int e^{2x} \sin 4x dx \quad c) \int_1^\infty \frac{4x}{1+x^4} dx \quad d) \int \frac{dx}{2 \cos x - 2 \sin x + 3}$$

Zad. 4. (20 pkt)

a) Określ przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ i wskaż punkty przegięcia wykresu funkcji.

b) Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$.

Zad. 5. (20 pkt)

a) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ w obszarze $D = \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$.

b) Oblicz współrzędne wektora $\vec{N}$, normalnego do powierzchni Σ w punkcie $A = (1, \frac{1}{\pi}, -1)$ i wektora $\vec{s}$, stycznego do krzywej Γ w punkcie $B = (\ln \frac{1}{2}, 1, \pi)$.

$$\Sigma: \sin \left(\cos \frac{1}{x^2 + y + z^3} \right) + x^{\frac{y}{z}} = 1 - \sin 1$$

$$\Gamma: \begin{cases} x(t) = \ln(\cos^2 t) \\ y(t) = 1 \\ z(t) = 4t \end{cases}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Część 2 - Teoria

Rozwiązania zadania 6 należy umieścić na tej kartce. Kartkę tę należy podpisać.

Zad. 6. (13 pkt)

a) Oblicz granicę górną ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $a_n = (-1)^n(n - n^2 + 1)$. Odpowiedź uzasadnij.

b) Korzystając z definicji oblicz (o ile istnieje) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c) Dana jest funkcja $f \in C^1(\mathbb{R})$, która ma w punkcie $x = a$ minimum lokalne. Korzystając z pierwszego warunku wystarczającego na ekstremum lokalne sprawdź, czy funkcja $g(x) = e^{-f(x)}$ ma w punkcie $x = a$ maksimum lokalne

d) Rozłóż podany ułamek na ułamki podstawowe (bez wyliczania współczynników rozkładu). Następnie oblicz całkę z otrzymanych ułamków.

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

a)

b)

c)

d)