Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 19 września 2011. Teoria.

1. (12 pkt.)
a) Podaj definicję obszaru normalnego względem osi Ox.
b) Sformułuj twierdzenie o iterowaniu całki po obszarze normalnym względem osi Ox.
c) Zmień kolejność całkowania w całce (i przedstaw odpowiedni rysunek)

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. (11 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie o funkcji uwikłanej jednej zmiennej.
b) Uzasadnij, że równanie $xe^y + y - 1 = 0$ da się rozwikłać w punkcie $(1,0)$.
c) Czy funkcja rozwikłująca może mieć w punkcie $x_0 = 1$ ekstremum lokalne? Odpowiedź uzasadnij.

3. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Greena.
b) Podaj wzór na pole figury wynikający z twierdzenia Greena.
c) Przy pomocy tego wzoru oblicz pole koła o promieniu a.

Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 19 września 2011. Zadania.

1. (13 pkt.) Oblicz strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (z, xy, y)$ przez wewnętrzeną stronę powierzchni bryły Ω ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 = 1$, $z = y^2$, $z = 0$.

2. (13 pkt.) Korzystając z całki podwójnej oblicz pole powierzchni sfery o promieniu R.

3. (13 pkt.) W równaniu różniczkowym $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, gdzie $z = z(x,y)$ jest funkcją klasy C^2 dokonaj zmiany zmiennych na

$$\begin{cases} u = x + ay \\ w = x - ay \end{cases}.$$

4. (13 pkt.) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x + 2y + 4z$$

na zbiorze $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5. (13 pkt.)
a) Uzasadnij, że pole wektorowe $\overrightarrow{F} = (2x, \frac{y}{1+y^2+z^2}, \frac{z}{1+y^2+z^2})$ jest potencjalne w $\mathbb{R}^3$.
b) Oblicz pracę siły $\overrightarrow{F}$ przy przemieszczeniu masy jednostkowej wzdłuż krzywej

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) & = \arccos t \\ y(t) & = 2\arcsin t \ , t \in [0,1]. \\ z(t) & = 4\,\mathrm{arctg}\, t \end{cases}$$