Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 19 czerwiec 2007. Teoria.

1. (11 pkt.)
a) Podaj wyczerpującą definicję całki krzywoliniowej skierowanej wzdłuż krzywej $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.
b) Sformułuj twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej skierowanej na oznaczoną.
c) Oblicz $\int_\Gamma (z+1)dx - dy + xdz$, gdzie Γ jest odcinkiem $\overline{AB}$, $A = (1,0,2)$, $B = (2,3,4)$.

2. (12 pkt.)
a) Podaj wzory na współrzędne sferyczne wraz z pełnym zakresem zmienności występujących w tych wzorach kątów.
b) Zinterpretuj powyższe wzory geometryczne w układzie współrzędnych.
c) Oblicz $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}$.

3. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Greena i udowodnij je w przypadku obszaru normalnego względem obu osi.
b) Podaj wzór na pole figury wynikający z twierdzenia Greena.
c) Przy pomocy tego wzoru oblicz pole koła o promieniu R.

Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 19 czerwiec 2007. Zadania.

1. (13 pkt.)
a) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $x \mapsto y$ określonych równaniem $x^4 + y^2 - 4xy = 0$.
b) Uzasadnij, że równanie $x^4 + y^2 - 4xy = 0$ da się rozwikłać w $(2,4)$ i oblicz $y''(2)$.

2. (13 pkt.) a) Uzasadnić, że pole wektorowe $\overrightarrow{F}(x,y) = (x + \frac{y}{x^2+y^2}, y - \frac{x}{x^2+y^2})$, jest polem potencjalnym w obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$, a następnie znajdź potencjał tego pola w D.
b) Obliczyć $\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},3)} \left(x + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(y - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$.

3. (13 pkt.) Wyznacz strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (2xz, -x^2y, -y^2z)$ przez wewnętrzną powierzchnię bryły Ω ograniczonej powierzchniami $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4. (13 pkt.) Oblicz pole powierzchni części górnej połowy sfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$ $(z \geq 0)$, którą wycina powierzchnia $x^2 + y^2 = Rx$.

5. (13 pkt.) Rozwiąż następujący problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} xy' + y &= y^2 \ln x \\ y(e) &= 1 \end{cases}$$