Egzamin z przedmiotu ALGEBRA WYŻSZA
WFiIS, informatyka stosowana, I rok - 2 termin - 9 lutego 2022r.

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce (nie stronie).
Każdą kartkę należy czytelnie podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy ćwiczeniowej.
Łącznie można otrzymać 100 punktów.
Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów. Powodzenia!

Zadanie 1. *(20 pkt) a) Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych podane równanie.*

$$4z^5 = \left(-\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)^6 \cdot (2+2i)^{22}$$

b) Dany jest zbiór $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n \ldots\}$ *oraz działanie* $\circ$ *mnożenia liczb.*
Czy $(A, \circ)$ *jest półgrupą/grupą (abelową)? Odpwiedź uzasadnij.*

Zadanie 2. *(20 pkt) Dane są prosta* l_1 *oraz płaszczyzna* π_1.

$$l_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}, \qquad \pi_1 : x + y - 2z - 1 = 0$$

a) Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny π *zawierającej prostą* l_1 *i prostopadłej do* π_1.

b) Zapisz równanie kierunkowe prostej l_2 *przechodzącej przez punkty* A' *i* B*, gdzie*
A' *to punkt symetryczny do punktu* $A = (-7, -2, 4)$ *względem otrzymanej płaszczyzny* π,
B *to punkt przecięcia otrzymanej płaszczyzny* π *z osią* Oz.

Zadanie 3. *(20 pkt) a) Czy macierz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ *jest diagonalizowalna?*

b) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dany jest za pomocą przyporządkowania*

$$\varphi(0,1,1) = (0,1,1), \quad \varphi(2,2,0) = (0,0,0), \quad \varphi(1,0,0) = (-1,0,0).$$

Oblicz $\varphi^{106}(1,1,4)$.

Zadanie 4. *(20 pkt) Dane jest odwzorowanie*

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad f(p)(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 p''(x) + (x+1)p'(x).$$

a) Uzasadnij, że f *jest liniowe.*
b) Podaj wzór na $f(ax^2 + bx + c)$.
c) Podaj macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ *odwzorowania* f *w bazie standardowej* $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ *przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$.
d) Wyznacz $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$*, podaj ich bazy i określ wymiary. Czy* f *jest epimorfizmem / monomorfizmem?*
e) Uzasadnij że $\mathcal{C} = \left(1 + x^2, 1 - x^2, 1 + 2x\right)$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$ *i podaj macierz* $A' = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Zadanie 5. *(20 pkt) W przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Dana jest podprzestrzeń*

$$U = \mathrm{lin}\{(1,2,-2,1), (1,1,0,2), (1,8,1,0)\}.$$

Podaj bazę podprzestrzeni U.
Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji bazy podprzestrzeni U.