

Zadania**Zad 1 (17 pkt.)**

Zbadaj zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów. **Uwaga**, w podpunkcie *d*) można korzystać tylko z definicji zbieżności szeregu:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{99} \cdot 99^n}{100^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Zad 2 (16 pkt.)

a) Znajdź przedział zbieżności i sumę szeregu: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$, a następnie oblicz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}$.

b) Znajdź promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^n z^n$.

Zad 3 (16 pkt.)

a) Oblicz całkę niewłaściwą:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}.$$

b) Oblicz:

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z}.$$

Zad 4 (17 pkt.)

a) Sformułuj twierdzenie Dirichleta.

b) Rozwiń w szereg Fouriera funkcję:

$$f(x) = x^2, \quad |x| \leq \pi.$$

c) Narysuj wykres szeregu Fouriera funkcji f w zbiorze zbieżności tego szeregu.

d) Podstawiając $x = \pi$ do otrzymanego rozwinięcia oblicz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Zad 5 (17 pkt.)

a) Metodą operatorową rozwiąż problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y'' = 2e^{2t} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 1 \end{cases}$$

b) Oblicz:

$$\mathcal{L} [t^2 \sin t].$$