

**Zadanie 1.** (17 pkt) a) Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ .

b) Oblicz  $e^{2-3\pi i} + \cos(i \ln 2) + \ln(-2)$ .

c) W jakich punktach funkcja  $f(z) = (z + \operatorname{Re} z) \cdot \operatorname{Im} z$  spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna?

**Zadanie 2.** (17 pkt) a) Metodą operatorową rozwiąż zagadnienie początkowe  $\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$ .

b) Oblicz  $\mathcal{L}\left(\int_0^t u^2 e^{au} du\right)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

c) Oblicz  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s-1}{s^2+4s+7}\right)$ .

**Zadanie 3.** (16 pkt) Zbadaj zbieżność (bezwzględną, warunkową) podanych szeregów.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$    b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$    d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  wiedząc, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny,  $a_n > 0$

**Zadanie 4.** (17 pkt) a) Uzasadnij zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$  i znajdź jego sumę.

b) Rozwiń funkcję  $f(x) = \frac{-7}{x^2-x-12}$  w szereg Taylora o środku w punkcie  $x_0 = -2$ .

**Zadanie 5.** (17 pkt) a) Rozwiń funkcję  $f(x) = x^2$ , dla  $x \in (0, \pi)$  w szereg samych sinusów.

b) Znajdź zespolony szereg Fouriera funkcji  $f(x) = \sin 10x$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ .

**Zadanie 6.** (16 pkt) a) Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego lub jego uogólnienia, oblicz całkę  $\int_C \frac{e^z}{z^4} dz$ , gdzie  $C$  jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach  $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ , zorientowaną ujemnie.

b) Oblicz całkę  $\int_C \cos(2iz) dz$ , gdzie  $C$  jest krzywą łączącą punkty  $z_1 = 0$  i  $z_2 = \frac{\pi}{2}i$ .

c) Oblicz  $\operatorname{res}_0\left(z \cdot \cos \frac{1}{z}\right)$ .

---