

Zadania

Zad 1 (13 pkt.) Znajdź przedział zbieżności i sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Zad 2 (13 pkt.) Oblicz całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Zad 3 (13 pkt.) Zbadaj zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Zad 4 (13 pkt.)

Metodą operatorową rozwiąż problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Zad 5 (13 pkt.) Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x, |x| \leq \pi$ i narysuj wykres funkcji, która jest sumą otrzymanego szeregu w \mathbb{R} .

Teoria

Zadanie 1 (12 pkt.)

a) Oblicz $\operatorname{Ln}(2i)$

b) Rozwiąż równanie $\sin z = 0$

c) Korzystając ze wzorów Eulera udowodnij tożsamość $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$

Zadanie 2 (12 pkt.)

a) Sformułuj twierdzenie zwane wzorem całkowym Cauchy'ego

b) Korzystając z uogólnienia tego wzoru dla pochodnych oblicz

$$\int_C \frac{z^3 + 2i}{(z-i)^3} dz$$

gdzie $C = O(0, 5)$ zorientowany zgodnie ze wskazówkami zegara

Zadanie 3 (11 pkt.)

a) Podaj definicję transformaty cosinusowej Fouriera

b) Oblicz transformatę cosinusową Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$