

Matematyka II - Kolokwium II, grupa A, 18.04.2023

1. a) (1.5 pkt) Dane jest działanie \circ określone wzorem $x \circ y = x + y - 1$. Czy działanie \circ jest wewnętrzne w zbiorze \mathbb{N} ? Czy jest wewnętrzne w zbiorze \mathbb{Z} ?
- b) (4.5 pkt) Sprawdzić, czy (\mathbb{Z}, \circ) jest grupą.
2. (2 pkt) Niech $x \square y = x^y$, $x \circ y = xy$ są działaniami w zbiorze liczb naturalnych. Sprawdzić rozdzielność prawo i lewostronną działania \circ względem działania \square .
3. (6 pkt) Wyznaczyć następującą całkę:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x - 6} dx.$$

4. (6 pkt) Rozwiązać poniższe równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. a) (3.5 pkt) Korzystając wyłącznie z rozwinięcia Laplace'a obliczyć wyznacznik (operacje niezmieniające wartości wyznacznika są niedozwolone)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

- b) (1.5 pkt) Korzystając wyłącznie z operacji niezmieniających wartości wyznacznika obliczyć wyznacznik (użycie rozwinięcia Laplace'a jest niedozwolone)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Matematyka II - Kolokwium II, grupa B, 18.04.2023

1. a) (1.5 pkt) Dane jest działanie \circ określone wzorem $x \circ y = x + y - 2$. Czy działanie \circ jest wewnętrzne w zbiorze \mathbb{N} ? Czy jest wewnętrzne w zbiorze \mathbb{Z} ?
- b) (4.5 pkt) Sprawdzić, czy (\mathbb{Z}, \circ) jest grupą.
2. (2 pkt) Niech $x \square y = y^x$, $x \circ y = xy$ są działaniami w zbiorze liczb naturalnych. Sprawdzić rozdzielność prawo i lewostronną działania \circ względem działania \square .
3. (6 pkt) Wyznaczyć następującą całkę:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

4. (6 pkt) Rozwiązać poniższe równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. a) (3.5 pkt) Korzystając wyłącznie z rozwinięcia Laplace'a obliczyć wyznacznik (operacje niezmieniające wartości wyznacznika są niedozwolone)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

- b) (1.5 pkt) Korzystając wyłącznie z operacji niezmieniających wartość wyznacznika obliczyć wyznacznik (użycie rozwinięcia Laplace'a jest niedozwolone)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$