Uwaga 1.3.15. Niech $\sigma \in S_n$. Zbiór [a]

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{a \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ \sigma(a) \neq a\}$$

nazywamy *nośnikiem* permutacji. Mówimy, że permutacje $\sigma, \tau \in S_n$ są *rozłączne* lub *niezależne*, gdy [b]

$$\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \varnothing.$$

Można uzasadnić, że składanie permutacji rozłącznych jest przemienne, czyli jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to wówczas $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Cykle rozłączne są permutacjami rozłącznymi. Można stąd wywnioskować, że jeśli $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r$ jest rozkładem permutacji σ na parami rozłączne cykle, to wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\sigma^n = \sigma_1^n \sigma_2^n \ldots \sigma_r^n.$$

[a] angielskie *support* - nośnik

[b] Dwie permutacje σ, τ nazywamy rozłącznymi, jeśli zbiór elementów przesuniętych przez σ jest rozłączny od zbioru elementów przesuniętych przez τ.

Przykład 1.3.16. Rozważmy permutację $\sigma \in S_{10}$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 9 & 8 & 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.
Dokonamy jej rozkładu na cykle.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 9 & 8 & 10 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (1,6,9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,6,9)(3,4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,6,9)(3,4)(7,8,10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = (1,6,9)(3,4)(7,8,10)$$

Możemy wykorzystać otrzymany rozkład na parami rozłączne cykle, aby wyznaczyć σ^{15} oraz σ^{-15}.
Mnożenie cykli rozłącznych jest przemienne, zatem

$$\sigma^{15} = (1,6,9)^{15}(3,4)^{15}(7,8,10)^{15} = (3,4)^{15} = (3,4),$$

bowiem $(1,6,9)^3 = \mathrm{id}$, $(3,4)^2 = \mathrm{id}$, $(7,8,10)^3 = \mathrm{id}$.
Zatem

$$\sigma^{-15} = (3,4)^{-1} = (4,3).$$

Definicja 1.3.17. i) Cykl dwuwyrazowy nazywamy *transpozycją*.

ii) Transpozycję postaci $(k, k+1)$ nazywamy *transpozycją liczb sąsiednich*.

Twierdzenie 1.3.18. i) Każdą permutację $\sigma \in S_n$, dla $n > 1$ można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.

ii) Każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji liczb sąsiednich.

Dowód. i) Każda permutacja rozkłada się na iloczyn rozłącznych cykli. Każdy cykl $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozkłada się na iloczyn transpozycji w sposób następujący [4]

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \ldots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

ii) Niech $i < j$. Dla transpozycji (i, j) otrzymujemy następujący rozkład

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \ldots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \ldots (i+1, i+2)(i, i+1).$$

W rozkładzie tym występuje $2(j-1) - 1$ czynników. □

Uwaga 1.3.19. Rozkład permutacji na iloczyn transpozycji nie jest jednoznaczny.

Przykład 1.3.20. Rozważmy permutację $\sigma \in S_5$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Dokonamy rozkładu σ na iloczyn transpozycji. Otrzymujemy

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2)$$

Dla dowolnych $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mamy stąd

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) = (1, 5)(2, 3)(2, 3)(1, 4)(1, 3)(1, 2) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(3, 5)(2, 4)(2, 4)(3, 5)(1, 2).$$

Definicja 1.3.21. i) Niech $\sigma \in S_n$. Mówimy, że liczby $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tworzą *inwersję* [a] w permutacji σ, jeśli $j < k$ oraz $\sigma(j) > \sigma(k)$.

ii) Permutację σ nazywamy *parzystą*, jeśli $\sigma \in S_1$ lub przy $n > 1$ liczba inwersji w permutacji σ jest parzysta.

iii) Permutację σ nazywamy *nieparzystą*, jeśli liczba inwersji w permutacji σ jest nieparzysta.

iv) Liczbę $(-1)^l$, gdzie l to liczba inwersji permutacji σ, nazywamy *znakiem permutacji* i oznaczamy symbolem $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

[a] Niektórzy autorzy używają określenia *nieporządek*.

Liczba inwersji dla permutacji identycznościowej to 0.
Zatem $\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}}$. Permutacja σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Podobnie, permutacja σ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

[4] Wzór ten można uzasadnić indukcyjnie.

Przykład 1.3.22. Rozważmy permutację $\sigma \in S_6$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Wygodny jest następujący zapis, służący zliczaniu inwersji.

						liczba inwersji
3	4	1	5	6	2	2
	4	1	5	6	2	2
		1	5	6	2	0
			5	6	2	1
				6	2	1
						6

Mamy sześć inwersji, zatem $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$ i permutacja σ jest parzysta.

Związek parzystości permutacji z rozkładem na iloczyn transpozycji

Twierdzenie 1.3.23. i) Permutacje σ oraz $\sigma(j,\, k)$ różnią się znakiem. Podobnie permutacje σ oraz $(j,\, k)\sigma$ różnią się znakiem.

ii) Iloczyn k transpozycji jest permutacją, której znak jest równy $(-1)^k$.

iii) Przy dowolnym rozkładzie permutacji σ na iloczyn transpozycji parzystość liczby czynników jest zawsze taka sama i zgodna z parzystością permutacji σ.

Wniosek 1.3.24. i) Permutacja σ jest parzysta (nieparzysta) wtedy i tylko wtedy gdy jest iloczynem parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji.

ii) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, dowolnych $\sigma, \tau \in S_n$

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Przykład 1.3.25. Rozważmy permutację $\sigma \in S_6$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Otrzymujemy następujący rozkład na cztery transpozycje.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)(2,4,5,6) = (1,3)(2,6)(2,5)(2,4)$$

Permutacja σ jest parzysta.

1.3.3 Pierścienie i ciała

Definicja 1.3.26. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \to A$, $* : A \times A \to A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \ \wedge \ c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedynką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemiennym* lub *komutatywnym*.

	Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna
$\circ \,/\, +$	dodawanie	$* \,/\, \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

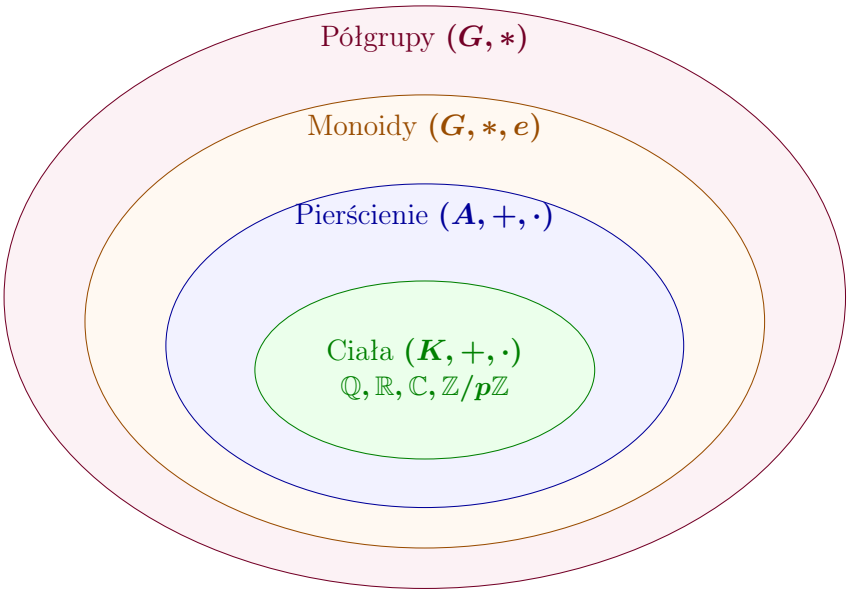
	$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}, \ n \in \mathbb{N}$	$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
	$0 \cdot a = 0$	$a^0 = e = e = 1$
$m \in \mathbb{Z}, m < 0$	$ma = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{m}$	$a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{n}$

Używając powyższej notacji, piszemy po prostu $(A, +, \cdot)$.

Definicja 1.3.27. Niech K będzie zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy. Pierścień przemienny z jedynką $(K, \circ, *)$ nazywamy *ciałem*, jeśli [a]

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \ \ \exists a' \in K \ \ a * a' = 1.$$

[a] Ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne. Każde ciało zawiera zatem co najmniej dwa elementy, mianowicie 0 i 1. Zbiór elementów niezerowych jest niepusty i tworzy grupę z mnożeniem.



Hierarchia struktur algebraicznych.

Uwaga 1.3.28.

i) $(K, \circ, *)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$ nazywanym *zerem* i oznaczanym jako 0) oraz $(K \setminus \{0\}, *)$ jest grupą abelową i ponadto działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$. [a] [b]

ii) Jeśli $(K, \circ, *)$ jest ciałem, to wówczas grupę $(K, \circ)$ nazywamy *grupą addytywną* ciała K, zaś grupę $(K \setminus \{0\}, *)$ nazywamy *grupą multiplikatywną* ciała K.

iii) W ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K,\ b \neq 0.$$

[a] Warunek rozdzielności mnożenia względem dodawania pozwala rozróżniać działania mnożenia i dodawania. Stąd zamiast pisać $(a \cdot b) + c$ piszemy $a \cdot b + c$. Oznacza to, że mnożenie wiąże argumenty silniej niż dodawanie.

[b] Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. By dowieść implikacji w przeciwnym kierunku wystarczy zaobserwować, że $a * 0 = 0 * a = 0$ dla dowolnego $a \in K$. Równość ta wynika z własności rozdzielności mnożenia względem dodawania, mianowicie $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, skąd $a \cdot 0 = 0$. Analogicznie dowodzimy, że $0 \cdot a = 0$. Z przemienności i łączności działania $*$ w zbiorze $K \setminus \{0\}$ oraz z równości $a * 0 = 0 * a = 0$ wynika przemienność i łączność działania $*$ w zbiorze K.

Przykład 1.3.29. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych
$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów ma strukturę pierścienia przemiennego jedynką.

v) $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ zbiór wszystkich funkcji wymienych jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji ma strukturę ciała.

vi) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
$+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem [5] (tzw. *ciało reszt modulo p*). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Zauważmy, że w ciele $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zachodzi równość $5 \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{5\,razy} = 0$.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Definicja 1.3.30. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy *dzielnikami zera*, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwaga 1.3.31. W ciele nie ma dzielników zera.

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b_{=}(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. □

[5] Jest to przykład ciała o skończonej liczbie elementów. Tego typu ciała nazywamy *ciałami skończonymi* lub inaczej *ciałami Galois*.



Przykład 1.3.32. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 \quad (x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2), \quad (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

$(\mathbb{C},+)$ jest grupą abelową.

Działanie $+$ jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ jest $(-x_1,-y_1)\in\mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1) = (x_2x_1-y_2y_1, x_2y_1) = \ = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) = (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)$$

łączność: $\quad L = P$

$$L = (a,b)\cdot[(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)] = (a,b)\cdot(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) =$$

$$= (ax_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2 - bx_2y_1, ax_1y_2 + ax_2y_1 + bx_1x_2 - by_1y_2)$$

$$P = [(a,b)\cdot(x_1,y_1)]\cdot(x_2,y_2) = (ax_1-by_1, ay_1+bx_1)\cdot(x_2,y_2) =$$

$$= (ax_1x_2 - by_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2, ax_1y_1 - by_1y_2 + ay_1x_2 + bx_1x_2)$$

el. neutralny: $\boxed{e=(1,0)}$

$$\forall (x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2 \quad (1,0)\cdot(x_1,y_1) = (1\cdot x_1 - 0\cdot y_1, 1\cdot y_1 + 0\cdot x_1) = (x_1,y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1,y_1)\neq(0,0)$:

$$(x_1,y_1)\cdot(a,b) = (1,0) \Leftrightarrow (ax_1-by_1, ay_1+bx_1) = (1,0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1,y_1)\neq(0,0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \quad b = \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$, bowiem $L = P$.

$$L = (a,b)\cdot[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = (a,b)\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (ax_1+ax_2-by_1-by_2, ay_1+ay_2+bx_1+bx_2)$$

$$P = [(a,b)\cdot(x_1,y_1)] + [(a,b)\cdot(x_2,y_2)] = (ax_1-by_1, ay_1+bx_1) + (ax_2-by_2, ay_2+bx_2)$$

Definicja 1.3.33. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

QUIZ

Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe?

1. Działanie $\circ$ takie, że $x \circ y = \frac{2x+y}{3}$ jest działaniem łącznym w $\mathbb{R}$.
2. Działanie $\circ$ określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ a \circ b = a \cdot |b|$ posiada element neutralny.
3. Niech $*$ będzie dowolnym działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R}$, posiadającym element neutralny. Wówczas, jeśli dla danego elementu $a \in \mathbb{R}$ istnieje element symetryczny, to jest on jedyny.
4. W zbiorze $\mathbb{R}$ określamy działania $x \circ y = x + y + 1$ oraz $x * y = xy + x + y$. Działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.
5. Struktura $(\mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\cdot$ jest mnożeniem liczb, to grupa abelowa.
6. Struktura $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, gdzie $\cdot, +$ jest odpowiednio mnożeniem i dodawaniem wielomianów, jest ciałem.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 2
Data: .....

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow[n\mapsto n]{} \mathbb{Z} \xhookrightarrow[n\mapsto \frac{n}{1}]{} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x\mapsto(x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność:
$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$$

łączność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$$
$$[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot x_3, 0 = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia
el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$$
$$= (x_1 x + 3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

Niech $h : \mathbb{R} \to \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że
$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.
Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujmy $i := (0,1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y, \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Im}z$. Liczby postaci iy, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_1 \wedge \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2\right)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

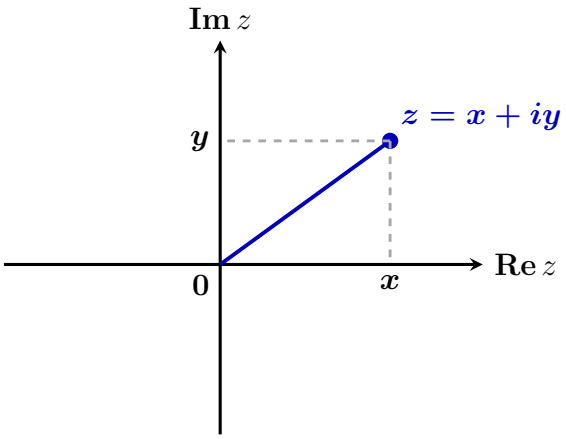
$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

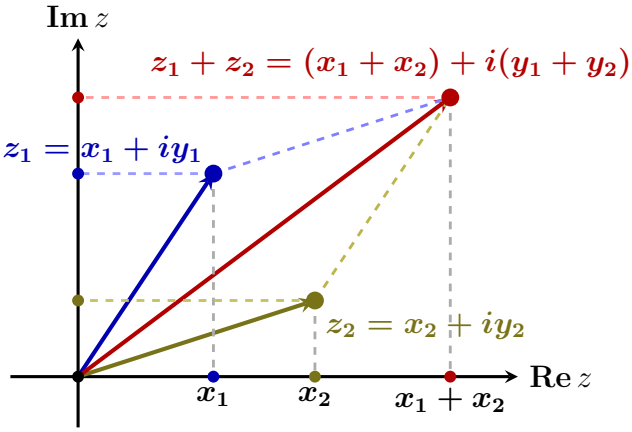
Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \qquad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0,0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$

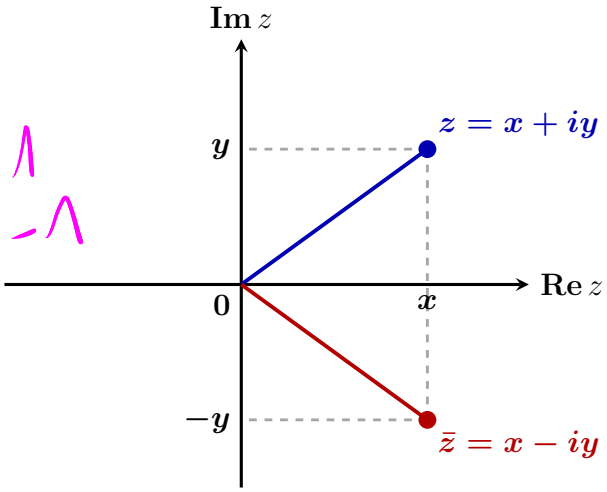




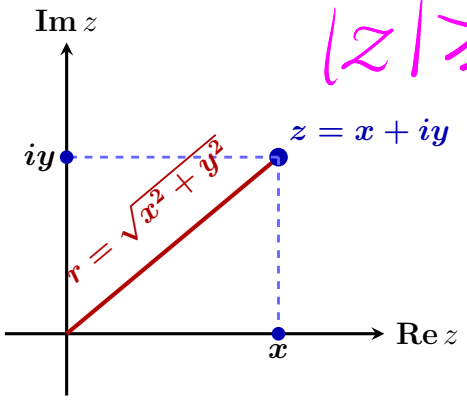
Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z. Oznaczamy ją $\bar{z}$.

i) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z. Oznaczamy ją $|z|$.



liczba sprzężona do z



moduł liczby zespolonej

Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}z_2, \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}z_1 + \mathrm{Im}z_2$

ii) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

iii) $\overline{(\bar{z})} = z$

iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$

vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

viii) $\mathrm{Re}z \leq |\mathrm{Re}z| \leq |z|, \quad \mathrm{Im}z \leq |\mathrm{Im}z| \leq |z|$

ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

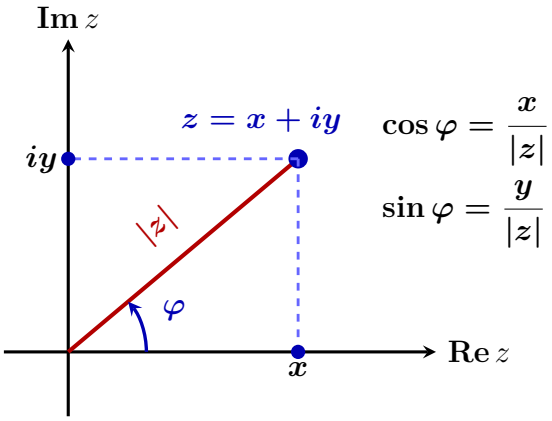
x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

argument liczby zespolonej

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z.

KONWENCJA:
Ten z argumentów liczby zespolonej, **który leży w przedziale** $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi})$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$.

Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest **nieokreślony**.

WNIOSEK: Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.